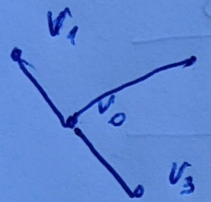
7. Даден е неориентиран граф $G=(V,E)$ без примки. За всеки $u \in V$ съществуват точно три ребра от E, такива че u е връх в тях. Известно е, че G няма цикли с дължина 3.

а) Докажете, че G има поне 6 върха.

Нека построим най-малкия възможен граф $G_m(V_m, E_m)$, такъв че да отговаря на горните св-ва.

Добавяме връх v_0 - знаем, че той има точно 3 ребра ~~няма~~ и няма примки

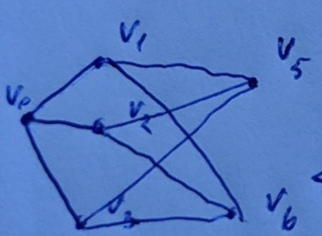
$\Rightarrow$ има поне още 3 върха - нека ги кръстим v_1, v_2, v_3



- За всеки от върховете v_1, v_2, v_3 знаем, че имат точно 3 ребра и нямат примки. Също знаем, че в графа не съществуват цикли с дължина 3, т.е ако има ребро м-у v_{i_1} и v_{i_2} и м-у v_{i_1} и v_{i_3}, то няма ребро м-у v_{i_2} и v_{i_3}

- Трябва към всеки връх v_1, v_2, v_3 да добавим по 2 ребра, но те не могат да са до нито v_0, нито v_1, v_2, v_3,

$\Rightarrow$ ще имаме поне 2 нови върха v_4, v_5 и така $|V_m| \geq 6$.



б) Има ли граф с 6 върха, изпълняващ условието на задачата?

$\leftarrow$ Да