

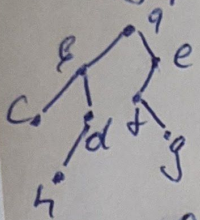
4. Нека $G(V, E)$ е дърво. Това е така за път в G и шие предвид прост път: път без повтаряне на върхове. Ако p е път, то $|p|$ означава дължината на p . Нека X е множество от пътищата в G . Нека $Y \subseteq X$ е подмножество на X , което се дефинира по следния начин:

За всеки път $p_1 \in Y$ и всеки път $p_2 \in X: |p_1| \geq |p_2|$.

Докажете или опровергайте следните твърдения:

а) За всеки два пътя $p, q \in Y$ съществуват върхове u, v , такива че u е общ за p и q . (Да)

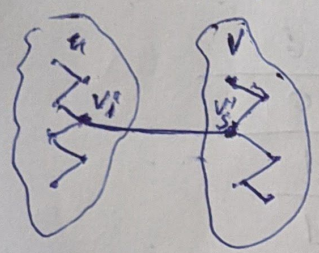
G - дърво \Rightarrow $\left(\begin{array}{l} Y \text{ е множество от пътищата от } \text{корен} \text{ до последното} \\ \text{ниво на дървото} \end{array} \right)$ - неправилно / G не е задължително кореново



$\Rightarrow G$ е свързан и няма цикли
 Y е множество от път-дъглици в G

За предположим, че $\exists u, v \in Y$, такива, че $\nexists x \in V$, като g е общ за тях. $\Rightarrow u = v_0 v_1 \dots v_n$ и $v = v'_0 v'_1 \dots v'_m, v_i \neq v'_j, v_i, v'_j$

Но G е свързан $\Rightarrow \exists v_i, v'_j: (v_i, v'_j) \in E$



Нека $|u| = |v| = n$ и тогава можем да построим път $v_0 v_1 \dots v_i v'_j v'_{j+1} \dots v'_m$, където $v_0 \dots v_i$ е тази част от u с по-голяма дължина от едната крак до $v_i = u'$
 $\Rightarrow |u'| \geq \frac{n}{2}$. $v'' = v'_j v'_{j+1} \dots v'_m$ е тази част от v с по-голяма дължина от едната крак до $v'_j = v''$ $\Rightarrow |v''| \geq \frac{n}{2}$

Тогава $|v_0 v_1 \dots v_i v'_j v'_{j+1} \dots v'_m| = |u'| + |v''| + 1 \geq n + 1$

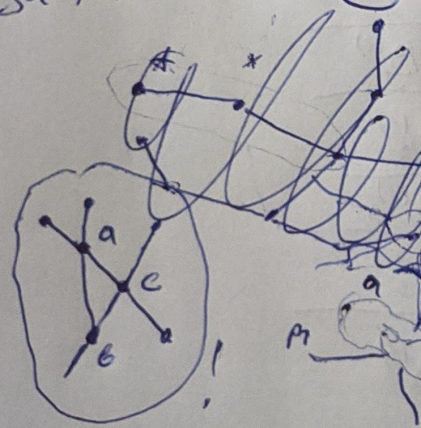
Създадохме път с дължина поне $n+1$ - \nexists е дефиницията на Y .

\Rightarrow За всеки два пътя $u, v \in Y \exists x \in V: x$ е общ за тях.

б) Съществуват върхове $u, v \in V$, такива че за всеки два пътя $p, q \in Y$, u е общ за тях. - (Да)

Нека p_1, p_2, p_3 са три различни пътя от $Y, |p_1| = |p_2| = |p_3| = n$.

От а) $p_1 \cap p_2 = a, p_1 \cap p_3 = b$ и $p_2 \cap p_3 = c$



Предполагаме, че $a \neq b \neq c$
~~а и b са различни върхове, а и c са различни върхове, б и c са различни върхове~~
~~а и b са различни върхове, а и c са различни върхове, б и c са различни върхове~~
~~а и b са различни върхове, а и c са различни върхове, б и c са различни върхове~~

ако предположим, че $a \neq b \neq c$, то се образува цикъл $\rightarrow \nexists G$ е дърво