# Доверительные интервалы

# Что такое доверительный интервал

# Схема математической статистики

Выборка: $X_1, \ldots, X_n$ Параметр: $\theta$

$\hat{\theta}$ $\longrightarrow$ $f_{\hat{\theta}}(t)$

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Точность оценки, прогнозов

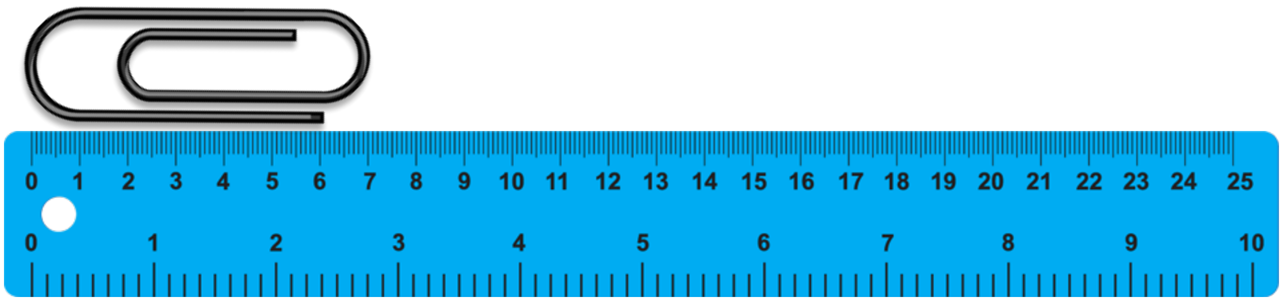
доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

# Зачем нужны доверительные интервалы

Надо измерить длину скрепки. Её длина $7$ см, но мы не знаем наверняка, так как деления на линейке недостаточно точны




- Измерение делается с точностью, которую допускает линейка
- Длина скрепки $7 \pm 0.1$ см
- При дальнейших расчётах мы должны учитывать погрешность измерения

# Зачем нужны доверительные интервалы

- Точечная оценка делается по случайной выборке ⇒ неопределённость
- Нужно делать выводы в каком-то диапазоне
- Доверительный интервал показывают, насколько мы уверены в точечной оценке

❗ На практике пытаются построить наиболее короткий доверительный интервал

# Зачем нужны доверительные интервалы

**Антон:**

С вероятностью 95% среднее лежит между $1$ и $20$

**Ширина:** $19$

**Наташа:**

С вероятностью 95% среднее лежит между $17$ и $23$

**Ширина:** $6$

У обоих интервалов надёжность 95% (ошибка в 5% случаев), но разная точность. Наташин интервал уже, то есть точнее.

# Зачем нужны доверительные интервалы

Многие метрики, интересные бизнесу, считаются по случайным выборкам, хочется знать, в каком диапазоне они изменяются.

Запасы полезных ископаемых оценивают по образцам пород (случайная выборка). Инвесторам хочется знать объём запасов в лучшем и в худшем случаях, а не только в среднем.

Обычно доверительные интервалы строят для прогнозов.

# Схема математической статистики

Выборка: $X_1, \ldots, X_n$ Параметр: $\theta$

$\hat{\theta}$ → $f_{\hat{\theta}}(t)$

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

# Мощь средних

ЗБЧ даёт нам возможность с помощью метода моментов построить оценку $\hat{\theta}_{MM}$

ЦПТ даёт нам информацию о распределении $\hat{\theta}_{MM}$,
мы можем построить доверительный интервал:

$$\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_R\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_R\right) = 0.95$$

$\alpha$ – уровень значимости

Если мы $100$ раз попытаемся сесть на поезд на уровне значимости $0.05$, в среднем мы будем опаздывать $5$ раз

# Мощь средних

ЗБЧ даёт нам возможность с помощью метода моментов построить оценку $\hat{\theta}_{MM}$

ЦПТ даёт нам информацию о распределении $\hat{\theta}_{MM}$,
мы можем построить доверительный интервал:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid$$

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \; Var(X_i) = \sigma^2$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) \Leftrightarrow \bar{x} - \mu \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(0, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N(0, 1)$$

центрирование нормирование

# Асимптотический интервал для мат. ожидания

- ЦПТ позволяет построить доверительный интервал для любого мат. ожидания
- Наблюдаем $X_1, \ldots, X_n \sim iid$
- **Предполагаем:** $X_i$ независимы и одинаково распределены, число наблюдений $n$ велико, нет выбросов

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu, \; Var(X_i) = \sigma^2$$

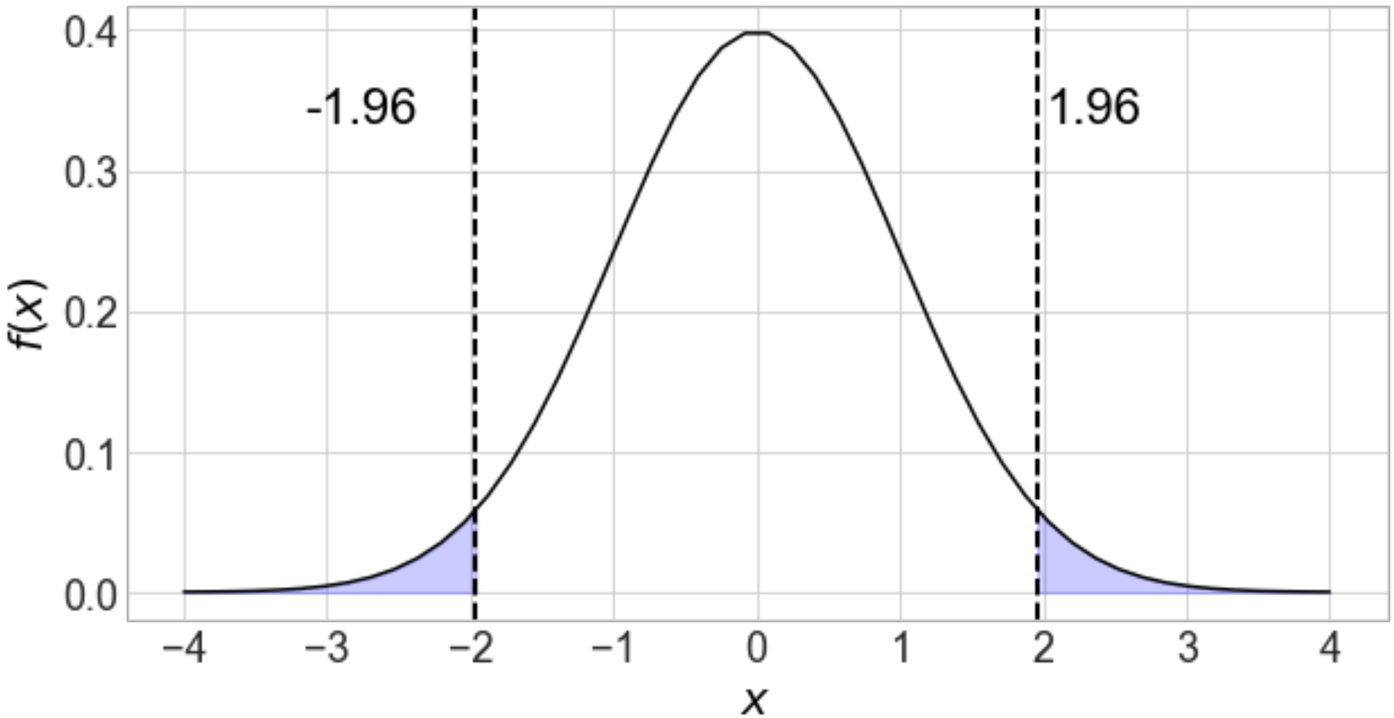
$$\bar{X} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \bar{X} - \mu \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N(0,1)$$

центрирование стандартизация

# Мощь средних

Вероятность того, что наша случайная величина окажется между $-1.96$ и $1.96$ равна $0.95$

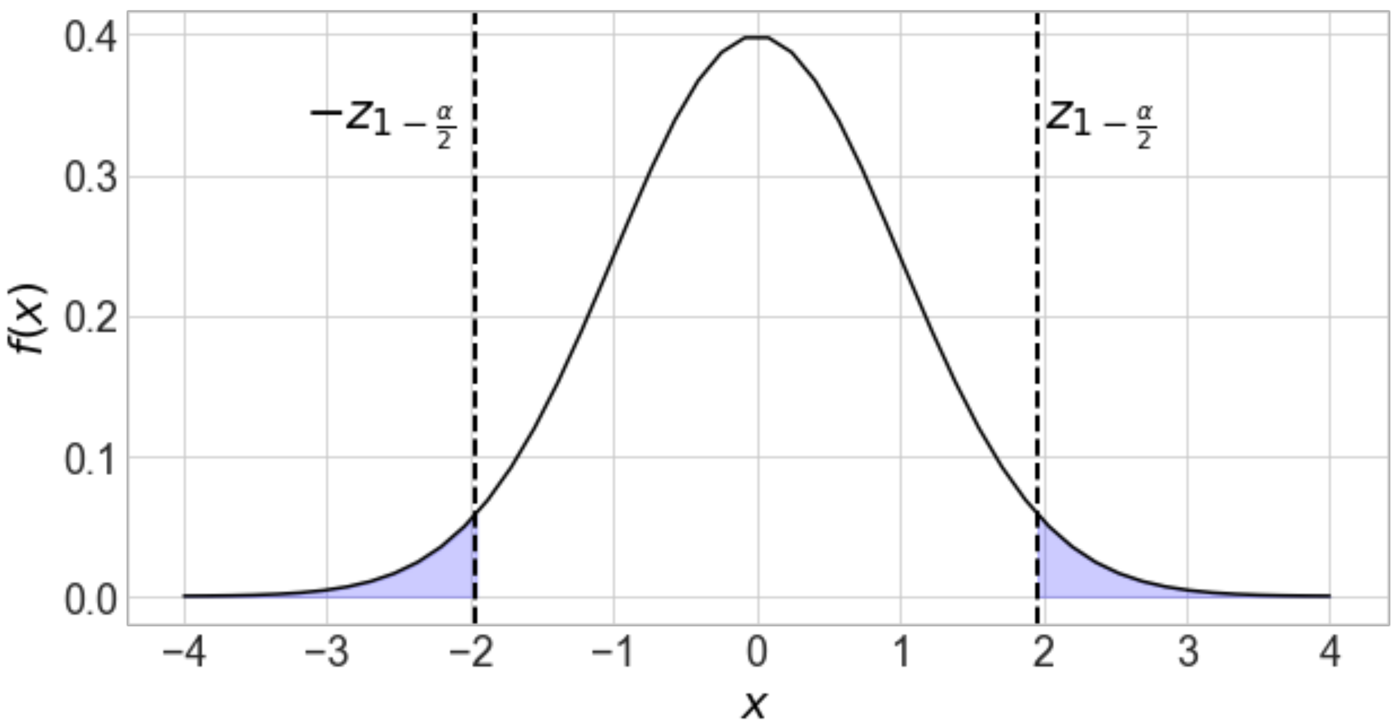
$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N(0, 1)$$



# Мощь средних

Можно зафиксировать любую надежность $1 - \alpha$ и построить **доверительный интервал:**

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$



# Мощь средних

Можно зафиксировать любую надежность $1 - \alpha$ и построить **доверительный интервал:**

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - \mu \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

При бесконечном повторении эксперимента интервал будет накрывать истинное значение параметра $\mu$ в $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ случаев

# Почему можно заменить $\sigma$ на $\hat{\sigma}$

По ЦПТ: $$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

$\hat{\sigma}^2$– состоятельная оценка для $\sigma^2$, то есть $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

$$\xrightarrow{p} 1 \Longrightarrow \xrightarrow{d} 1$$

# Почему можно заменить $\sigma$ на $\hat{\sigma}$

По ЦПТ: $$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

$\hat{\sigma}^2$– состоятельная оценка для $\sigma^2$, то есть $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$

$$1 \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

Получается, что при замене дисперсии на её оценку, предельное распределение не меняется.

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

# Мощь средних

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

- Иногда кратко пишут:

$$\mu \in \{\bar{X} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\}$$

# Мощь средних

**Длина интервала:**

$$\Delta = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

При росте $n$ длина интервала падает

При росте дисперсии длина интервала увеличивается

При росте надёжности $1 - \alpha$ длина увеличивается

# Дельта-метод

Если:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid, \qquad \mathbb{E}(X_1) = \mu, Var(X_1) = \sigma^2$$

$g(t)$ – дифференцируемая функция

Тогда:

$$g(\bar{X}) \sim N\left(g(\mu), \frac{\sigma^2}{n} \cdot g'(\mu)^2\right)$$

**Обобщение ЦПТ на случай функции от среднего.**

# Асимптотический интервал для дисперсии

Выборочную дисперсию $\hat{\sigma}^2$ можно выразить через <u>*смещенную*</u> выборочную дисперсию $\hat{s}^2$,

а $\hat{s}^2$ – через средние

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$= \frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$= \frac{n}{n-1}\cdot\hat{s}^2$$

$$= \frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2} - \bar{X}^2\right)$$

➤ *https://www.stat.umn.edu/geyer/s06/5102/notes/ci.pdf*

# Асимптотический интервал для дисперсии

Немного поупражнявшись с ЦПТ и сходимостями можно получить асимптотическое распределение для выборочной дисперсии:

$$\hat{\sigma}^2 \sim N\left(\sigma^2, \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}\right), \qquad \mu_4 = \mathbb{E}[(X_i - \mu)^4]$$

Оно может быть использовано для строительства доверительных интервалов

➤ *https://www.stat.umn.edu/geyer/s06/5102/notes/ci.pdf*

# Резюме

- Центральная предельная теорема позволяет построить для среднего асимптотический доверительный интервал
- Доверительный интервал позволяет описать степень неуверенности в полученной оценке
- Такой доверительный интервал верен при большом количестве наблюдений, если в выборке нет аномалий

# Асимптотический доверительный интервал для разницы средних

# Разность средних

Цены на недвижимость в двух районах города:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid \qquad Y_1, \dots, Y_m \sim iid$$

$$\bar{X} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right) \qquad \bar{Y} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

Разность нормальных случайных величин – нормальная случайная величина:

$$\mathbb{E}(\bar{X} - \bar{Y}) = \mathbb{E}(\bar{X}) - \mathbb{E}(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$Var(\bar{X} - \bar{Y}) = Var(\bar{X}) + Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}\right)$$

# Разность средних

Цены на недвижимость в двух районах города:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid \qquad\qquad Y_1, \dots, Y_m \sim iid$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}\right)$$

Асимптотический доверительный интервал для $\mu_1 - \mu_2$:

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \{(\bar{X} - \bar{Y}) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}}\}$$

# Асимптотические доверительные интервалы для долей

# Мощь долей

По аналогии можно построить асимптотические доверительные интервалы для долей:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid \qquad X_i = \begin{cases} 1, \text{если любит кофе} \\ 0, \text{если не любит кофе} \end{cases}$$

| $X_i$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}$$

Из-за того, что $X_i$ принимают значение либо $0$, либо $1$, для оценки доли можно посчитать среднее

# Мощь долей

По аналогии можно построить асимптотические доверительные интервалы для долей:

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x}$$

| $X_i$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

Найдём математическое ожидание и дисперсию оценки, а потом воспользуемся ЦПТ

# Мощь долей

По аналогии можно построить асимптотические доверительные интервалы для долей:

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{x}$$

| $X_i$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X_i = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}(X_1) = p$$

$$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X_1) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\bar{X} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \quad \hat{p} = \bar{X} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

# Мощь долей

Получаем доверительный интервал для доли:

$$\bar{X} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) \qquad \hat{p} = \bar{X} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(p, \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\right)$$

$$p \ \in \{\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\}$$

# Мощь долей

Получаем доверительный интервал для разности долей:

$$\bar{X} - \bar{Y} \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\hat{\sigma}_1^2}{n} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{m}\right)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \overset{\text{ЦПТ}}{\sim} N\left(p_1 - p_2, \frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{m}\right)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{m}}$$

# Число наблюдений

$$\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Можно определить число наблюдений, чтобы длина доверительного интервала не превышала заранее выбранный диапазон

$$\Delta = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\mathrm{n} = \frac{4 \cdot z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}{\Delta^2}$$

# Число наблюдений

$$n = \frac{4 \cdot z^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}{\Delta^2}$$

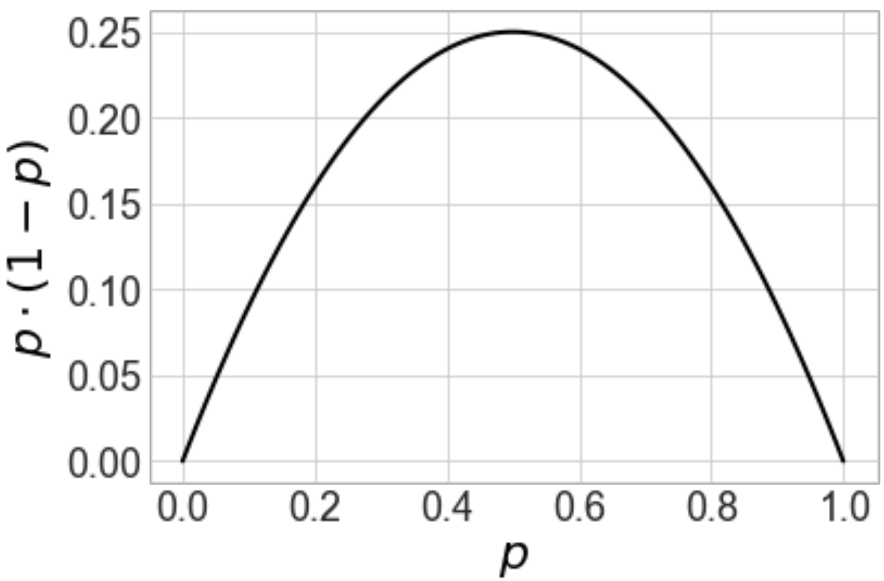
До начала испытаний мы не знаем $\hat{p}$, но мы знаем, что величина $\hat{p}(1-\hat{p})$ никогда не будет превышать $0.25$

$$f(p) = p \cdot (1 - p) = p - p^2$$

$$f'(p) = 1 - 2p = 0$$

$$\Rightarrow p = 0.5$$

$$f(p) = 0.25$$



# Число наблюдений

$$\mathrm{n} = \frac{4 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}{\Delta^2}$$

До начала испытаний мы не знаем $\hat{p}$, но мы знаем, что величина $\hat{p}(1-\hat{p})$ никогда не будет превышать $0.25$

Эту оценку сверху мы можем использовать для поиска необходимого значения $n$:

$$\mathrm{n} = \frac{4 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}{\Delta^2} \leq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\Delta^2}$$

# Резюме

- Доля – это среднее, посчитанное по выборке из нулей и единиц
- С помощью ЦПТ можно построить доверительные интервалы для долей
- Из-за того, что вероятность принимает значения на отрезке от нуля до единицы, мы можем оценить, сколько наблюдений нам нужно собрать для определённой ширины интервала