

Задание по математике для ученика Мах

Уровень: поступление в МГУ, олимпиадная подготовка

Тема: Повторение предыдущих тем

****Теоретическая часть****

1. Дайте определение:

- а) группы,
- б) производной функции,
- в) делимости целых чисел.

2. Докажите следующие утверждения:

- а) Всякая конечная абелева группа разлагается в прямую сумму циклических подгрупп.
- б) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.
- в) Среди любых $n + 1$ целых чисел обязательно найдутся два, дающих одинаковые остатки при делении на n .

****Практические упражнения****

1. (Алгебра)

Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 - 5y^2 = 1).$$

2. (Математический анализ)

Вычислите предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$$

3. (Комбинаторика/Теория вероятностей)

Сколько существует шестизначных чисел, в десятичной записи которых ровно две цифры “5”, а остальные цифры различны между собой и не равны “5”?

4. (Геометрия)

Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Докажите, что

$$\frac{BD}{DA} + \frac{CE}{EA} \geq 1$$

(Все точки лежат на соответствующих отрезках, $D \neq A, B$; $E \neq A, C$).

****Дополнительно (по желанию):****

Докажите, что среди любых пяти целых чисел можно выбрать два, сумма которых делится на 4.

****Оформите решения подробно, обосновывая каждый шаг рассуждениями или**

формальными выкладками.**