

Unions of Onions: Brzo spajanje i preprocesiranje lukastih dekompozicija

Vladimir Mandić

Januar 2026

Sažetak

U ovom seminarskom radu analiziran je naučni rad *Unions of Onions* autora Löfflera i Mulzera, objavljen u časopisu *Journal of Computational Geometry*, volumen 5(1), strane 1–13, 2014. Rad proučava efikasne metode za spajanje onion-dekompozicija i brzo izračunavanje lukastih struktura za skup nepreciznih tačaka predstavljenih disjunktnim diskovima. Ključni doprinosi su algoritam za spajanje dve onion-dekompozicije i optimalna struktura podataka za računanje onion-dekompozicije za bilo koju realizaciju ulaza. Ovaj pregled prikazuje osnovne ideje, rezultate i primene ovih metoda.

1 Uvod

Onion-dekompozicija predstavlja hijerarhijsko uklanjanje konveksnih omotača skupa tačaka i koristi se za analizu unutrašnje strukture podataka. Ona daje uvid u centralnost tačaka, otkrivanje rubnih podataka i robustnu analizu u prisustvu šuma.

U savremenim primenama pozicije tačaka često nisu unapred poznate: merenja mogu biti neprecizna (npr. GPS, radari, medicinski uređaji), pa se ulaz opisuje regijama mogućih položaja, najčešće disjunktnim diskovima. Jedna realizacija tada predstavlja izbor po jedne tačke iz svakog disjunktnog diska. Želimo da onion-dekompoziciju za takvu realizaciju izračunamo brže od standardnog vremena $O(n \log n)$.

Autori predlažu dva ključna koncepta:

- efikasno spajanje dve onion-dekompozicije,
- hijerarhijsko preprocesiranje diskova.

Zahvaljujući ovim tehnikama, omogućeno je optimalno vreme izračunavanja onion-dekompozicije za bilo koju realizaciju ulaza.

2 Autori i publikacija

Rad *Unions of Onions* napisali su:

- **Maarten Löffler** — Universiteit Utrecht, Holandija,
- **Wolfgang Mulzer** — Freie Universität Berlin, Nemačka.

Objavljen je 2014. godine u časopisu *Journal of Computational Geometry*, volumen 5(1), strane 1–13. Rad pripada oblasti algoritamske geometrije i bavi se efikasnom obradom nepreciznih ulaza i robusnim geometrijskim strukturama podataka.

3 Problem i ideje rada

3.1 Onion-dekompozicija

Za skup tačaka $P \subset \mathbb{R}^2$, onion-dekompozicija se dobija izračunavanjem spoljašnjeg konveksnog omotača $C_1(P)$, uklanjanjem njegovih tačaka, pa ponavljanjem procesa. Niz slojeva $C_1(P), C_2(P), \dots, C_k(P)$ otkriva hijerarhijsku strukturu i relativnu centralnost tačaka.

3.2 Neprecizni ulaz

Ulaz čine disjunktni diskovi $D = \{D_1, \dots, D_n\}$. Svaka realizacija predstavlja izbor $p_i \in D_i$. Bez posebne pripreme, onion-dekompozicija realizacije zahteva vreme $O(n \log n)$, što je presporo kada se realizacije često menjaju.

3.3 Spajanje onion-dekompozicija

Ako su onion-dekompozicije dva disjunktna podskupa A i B unapred poznate, cilj je brzo dobiti onion-dekompoziciju $A \cup B$. Autori daju algoritam koji koristi već izračunate slojeve i njihovu geometrijsku strukturu, čime se izbegava ponovno pokretanje kompletног postupka.

4 Glavni doprinosi

4.1 Spajanje dve onion-dekompozicije

Teorema 4.1. *Ako skupovi A i B imaju zajedno n tačaka i po k slojeva, onion-dekompozicija $A \cup B$ može se izračunati u vremenu*

$$O(n + k^2 \log n).$$

Intuicija je sledeća: svaki sloj jedne dekompozicije može uticati na svaki sloj druge, što daje najviše k^2 interakcija. Za svaku interakciju potrebno je brzo pronaći prelaze između konveksnih omotača, što se postiže binarnom pretragom duž kontura omotača.

4.2 Preprocesiranje diskova

Diskovi se organizuju u binarno stablo u kome svaki čvor čuva onion-dekompoziciju svog podskupa.

Teorema 4.2. *Za n disjunktnih diskova moguće je izvršiti preprocesiranje u vremenu $O(n \log n)$ i memoriji $O(n)$, tako da se za bilo koju realizaciju onion-dekompozicija može izračunati u vremenu*

$$O(n \log k),$$

gde k predstavlja broj slojeva realizacije.

4.3 Donja granica

Teorema 4.3. *Svaki algoritam koji računa onion-dekompoziciju realizacije skupa diskova mora u najgorem slučaju izvršiti najmanje $\Omega(n \log k)$ operacija.*

Ovim se potvrđuje da je predloženi algoritam optimalan u modelu poređenja.

5 Primene

Onion-dekompozicija i algoritmi iz rada imaju široku primenu u obradi nepreciznih, dinamičkih i šumovitih podataka.

- **Robustna statistika.** Slojevi luka daju prirodnu meru centralnosti: tačke u spoljašnjim slojevima često su kandidati za odstupanja, dok su unutrašnje tačke stabilnije. Ovo je važno za detekciju anomalija i robustne statističke procene.
- **Podaci sa šumom i merenja sa greškom.** U GPS-u, radarima i medicinskim uređajima pozicije su često neprecizne. Modelovanje diskovima i brzo izračunavanje onion-dekompozicija omogućava analizu različitih mogućih stanja sistema.
- **Robotika i autonomni sistemi.** Senzori robota daju promenljive i šumovite procene položaja prepreka. Preprocesiranje diskova omogućava brzo ažuriranje onion-strukture bez potpunog ponovnog izračunavanja.
- **Klasterovanje podataka.** Slojevi luka otkrivaju zone veće gustine, centralne regione i rubne tačke, što može poboljšati metode grupisanja.
- **Geometrijske strukture podataka.** Algoritmi koji zahtevaju spajanje podskupova (range tree, KD-stabla, R-stabla) mogu se ubrzati korišćenjem efikasnog spajanja onion-dekompozicija.

6 Intuicija algoritma za spajanje

Ideja algoritma za spajanje onion-dekompozicija može se intuitivno razumeti kroz posmatranje kako se konveksni omotači ponašaju pri dodavanju novih tačaka. Ako se posmatraju dekompozicije skupova A i B , spoljašnji slojevi $C_1(A)$ i $C_1(B)$ utiču na novi spoljašnji sloj skupa $A \cup B$. Međutim, unutrašnji slojevi se „vide” tek nakon uklanjanja tačaka iz spoljašnjih omotača.

Ključ je u tome što se slojevi oba skupa ne moraju uvek preplitati: ponekad jedan sloj potpuno dominira drugi. Algoritam pronalazi prelazne tačke između slojeva korišćenjem tangenti između konveksnih omotača i binarne pretrage duž njihovih kontura. Time se izbegava kompletne rekonstrukcije omotača i postiže značajna ušteda vremena.

7 Vizuelna interpretacija onion-dekompozicija



Figure 1: (a) Two disjoint onions. (b) Their union.

Slika 1: (a) Dve disjunktne onion-dekompozicije. (b) Njihovo spajanje.

Onion-dekompozicija ima intuitivnu vizuelnu interpretaciju: može se posmatrati kao proces „ljuštenja luka”, gde svaki sloj predstavlja tačke koje se prve uklanjaju iz skupa. Spoljašnji slojevi obuhvataju veliki prostor, dok unutrašnji slojevi otkrivaju gustu i centralnu strukturu podataka.

U kontekstu nepreciznih tačaka, diskovi se mogu posmatrati kao oblasti mogućeg položaja. Svaka realizacija predstavlja izbor jedne tačke iz svakog diska, a preprocesiranje omogućava da se onion-struktura za takvu realizaciju dobije bez ponovnog iscrpnog računanja.

8 Praktične napomene o implementaciji

Iako je teorijski algoritam elegantan, postoje praktični izazovi. Prvi se odnosi na numeričku stabilnost računanja konveksnih omotača, posebno kada realizacije stvaraju tačke bliske kolinearnoj konfiguraciji. U takvim situacijama korisno je koristiti biblioteke sa preciznom aritmetikom ili stabilne determinante.

Drugi izazov odnosi se na raspodelu diskova u stablu za preprocesiranje. Teorijski nije neophodno da stablo bude potpuno balansirano, ali u praksi približno jednaka raspodela smanjuje prosečno vreme spajanja i utiče na ukupnu efikasnost.

9 Odnos prema postojećoj literaturi

Rad se nadovezuje na klasične algoritme za izračunavanje konveksnih omotača i onion-dekompozicija, ali ih značajno proširuje na slučaj spajanja i rada sa nepreciznim ulazima. U radovima Toussainta i Ericksona [2,3] analiziraju se ekstremne tačke i robustne geometrijske procedure za neprecizne ulaze, dok knjiga Edelsbrunnera [4] pruža širi kombinatorni okvir. Nasuprot tome, rad Löfflera i Mulzera daje kompletan algoritam za spajanje onion-struktura i optimalno preprocesiranje diskova, čime unosi kvalitativno novi doprinos u oblast geometrije nepreciznih podataka.

10 Zaključak

Rad Löfflera i Mulzera predstavlja značajan doprinos algoritamskoj geometriji i analizi nepreciznih podataka. Prikazani algoritmi omogućavaju efikasno spajanje onion-dekompozicija i optimalno preprocesiranje diskova, sa vremenom izračunavanja koje odgovara donjoj granici. Metode opisane u radu imaju široku primenu u robustnoj statistici, senzorici, robotici i kompjuterskoj obradi podataka.

Dodatno, rad otvara mogućnost proširenja rezultata na druge modele nepreciznosti, poput elipsi, pravougaonika ili opštih konveksnih regiona. Iako se neke tehnike spajanja mogu prilagoditi, potpuna analiza ostaje otvoren problem i predstavlja interesantan pravac daljeg istraživanja.

Literatura

1. M. Löffler, W. Mulzer, *Unions of Onions*, Journal of Computational Geometry 5(1), 1–13, 2014.
2. G. Toussaint, *Computing the Convex Hull of Imprecise Points*, Manuscript, 2009.
3. J. Erickson, *Algorithms for Robust Geometric Computation*, preprint, 2010.
4. H. Edelsbrunner, *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer, 1987.