ГЛАВА 1. «**Выражение и множество его значений**»

§1. МНОЖЕСТВА

Основные теоретические сведения

Для обозначения совокупностей предметов в математике применяется термин «*множество*». Объекты или предметы, составляющие множество, называют *элементами* множества. Если а — элемент множества М, то пишут $a \in M$ (читают: «а принадлежит М»). Если а не является элементом множества М, то пишут $a \notin M$ (читают: «а не принадлежит М»). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством (обозначение $\varnothing$). Запись $a \in \varnothing$ не просто бессмысленна, а *ошибочка*, поскольку *ничто* не может принадлежать пустому множеству!

Множества бывают *конечными* и *бесконечными*. Если множество *конечное*, то его можно задать <u>*перечислением*</u> элементов, если *бесконечное*, то его задают <u>*характеристическим свойством*</u>. В курсе математики рассматриваются, в основном, *числовые* множества.

Множество натуральных чисел обозначается буквой ***N***, множество целых чисел — буквой ***Z***, множество рациональных чисел — буквой ***Q***.

Множество В называется *подмножеством* множества А, если каждый элемент множества В является элементом множества А. Записывают: $B \subset A$ (В является подмножеством А).

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества А и В *совпадают (т. е. равны)*. Записывают: А=В.

Если $B \subset A$, причем $B \neq \varnothing$ и $B \neq A$, то множество В называют *собственным* подмножеством множества А.

Основные практические задания по данной теме

1. **Задайте перечислением элементов множество X, состоящее из букв, использующихся при записи слова «абракадабра». Принадлежит ли множеству X буква с? буква а? Ответ запишите с помощью знаков $\in$ и $\notin$.**
2. **Задайте перечислением элементов множество натуральных делителей числа 70. Принадлежит ли этому множеству число 14? число 15?**
3. **Составьте все подмножества множества $P = \{0;\ 3;\ 7\}$.**
4. **Дано множество $A = \left\{-2;\ 0;\ \frac{2}{7};\ 1;\ 1\frac{2}{13};\ 4;\ 6;\ 7;\ 11\right\}$. Известно, что $B \subset A$, $C \subset A$ и $B = \{x \mid x \in N,\ x \in A\}$, $C = \{x \mid x \in Z,\ x \in A\}$. Задайте множества B и C перечислением элементов. Является ли одно из множеств (B или C) подмножеством другого? Запишите ответ с помощью символа $\subset$ и проиллюстрируйте его с помощью кругов Эйлера.**
5. **Задайте перечислением элементов множества $M = \{x \mid x \in Z,\ |x| \leqslant 3\}$ и $K = \{x \mid x \in Z,\ x^2 \leqslant 9\}$. Равны ли эти множества?**
6. **Задайте с помощью характеристического свойства множество: а) $A = \{0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25\}$; б) $B = \{1;\ 5;\ 9;\ 13;\ 17;\ 21\}$.**
7. **Имеется два водных раствора кислоты. Первый раствор содержит 20% кислоты, второй — 60%. Смешали 5 литров первого раствора, 10 литров воды и некоторое количество второго раствора, получив 40-процентный раствор кислоты. Сколько литров второго раствора было взято?**

§2. ЧИСЛОВЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ВЫРАЖЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ

Основные теоретические сведения

Выражения, составленные из чисел, знаков действий и скобок, называются *числовыми выражениями*. Число, являющееся результатом выполнения всех действий в числовом выражении, называют *значением* числового выражения. О числовых выражениях, которые не имеют значения, говорят что они *не имеют смысла*. Для сравнения чисел используют знаки =, <, >, ≤, ≥, ≠. При этом могут использоваться двойные неравенства вида: $a \le x < b$ и т. п. Неравенства, в которых используются знаки < и > , называются *строгими*, в которых используются знаки ≤ или ≥ , - *нестрогими*.

Выражения, составленные из чисел, букв, знаков действий и скобок, называются *буквенными* выражениями, или *выражениями с переменной* или с переменными. Множество значений переменной, при которых выражение с переменной имеет числовое значение (имеет смысл), называют *областью допустимых значений переменной* данного выражения.

Выражение с переменными используются для записи чисел определенного вида. Например, запись $\overline{abc}$ означает любое трехзначное число, у которого a сотен, b десятков и c единиц, т. е. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Ряд чисел, полученных в результате статистического исследования, называется статистической *выборкой* или просто выборкой, а каждое число этого ряда - *вариантой* выборки. Количество чисел в ряду называют *объемом* выборки. Запись выборки, когда последующая варианта не меньше предыдущей, называется *упорядоченным* рядом данных (или *вариационным* рядом).

Средним арифметическим выборки называется частное суммы всех вариант выборки и количества вариант (т. е. частное суммы всех вариант и объема выборки). Количество появлений одной и той же варианты в выборке называют *частотой* этой варианты. Варианта выборки, имеющая наибольшую частоту, называется *модой* выборки. Разность наибольшей и наименьшей вариант выборки называют *размахом* выборки. Если в упорядоченном ряду данных нечетное число вариант, то средняя по счету варианта называется *медианой*. Если в упорядоченном ряду четное число вариант, то среднее арифметическое двух средних по счету вариант называется *медианой*.

Основные практические задания по данной теме

Подготовительный вариант

1. Используя характеристическое свойство, запишите:
а) множество A натуральных чисел, кратных 11;
б) множество B натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 3.

2. Найдите значение выражения $\frac{3x}{2x+1} + \frac{5x-1}{3x-1}$ при $x = \frac{1}{2}$.

3. При каких значениях переменной выражение $\frac{2a-1}{2+a}$ имеет смысл?

4. При каком значении переменной выражение $\frac{2a+1}{|a|-1}$ не имеет смысла?

5. Составьте уравнение для решения задачи.
Моторный катер, собственная скорость которого 8 км/ч, прошел вниз по течению реки 15 км и такое же расстояние вверх по течению. Найдите скорость течения реки, если время, затраченное на весь путь, равно 4 ч.

6. Для ряда данных 3; 4; 4; 4; 5 найдите:
а) размах;
б) объем;
в) среднее арифметическое;
г) моду;
д) медиану.

7. Заполните таблицу значений выражения $\frac{4x - x^2}{x-1}$ с шагом 1 для $|x| \leqslant 4$.

8. Известно, что $\frac{b}{a} = 2$. Чему равно значение выражения:

а) $\frac{2b}{a}$; б) $\frac{3a}{b}$; в) $\frac{3a-b}{a+b}$?

Полезные ссылки для ЭОР учащихся:

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112072/?interface=catalog&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112073/?interface=catalog&subject=17

ГЛАВА 2. **«Одночлены»**

§3. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Основные теоретические сведения

Степенью числа a с *натуральным показателем* n, большим 1, называют выражение a^n, равное произведению n множителей, каждый из которых равен a. Степенью числа a с показателем 1 называют выражение a^1, равное a.

Число a – *основание* степени, число n – *показатель* степени, где n – N число.

Степенью числа a, где a≠0, с *нулевым* показателем называется выражение $a^0=1$. ВАЖНО $\mathbf{0^0}$ **не имеет смысла!**

Вторая степень числа – квадрат, третья степень – куб.

Нахождение n-й степени числа a называют возведением в степень.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Очевидно, при $n \in N$ $0^n = 0$.

Если $a > 0$, $n \in N$ или $n = 0$, то $a^n > 0$.

Если $a < 0$ и $n = 2k$, где $k \in N$ или $k = 0$, то $a^n > 0$.

Если $a < 0$ и $n = 2k + 1$, где $k \in N$ или $k = 0$, то $a^n < 0$.

Если a — произвольное число, m, n — натуральные числа, то $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Если a — произвольное число, m, n — натуральные числа, причем $m > n$, то $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Если a и b — произвольные числа, n — натуральное число, то $(ab)^n = a^n \quad b^n$.

Если a — произвольное число, m и n — натуральные числа, то $(a^m)^n = a^{mn}$.

Если a и b — произвольные числа, где $b \neq 0$, n — натуральное число, то $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Основные практические задания по данной теме

1. Вычислите:

а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + \left(1\frac{1}{9}\right)^2$ б) $-2^4 \cdot \frac{1}{24} + \left(-\frac{2}{7}\right)^0$

2. Упростите выражение при всех n є N:

а) $a^{n+1} \cdot a \cdot a^{2n-1}$; б) $x^{2n+2} : x^3$.

3. Найдите значение выражения $16 - \frac{1}{2} \bullet x^5$ при x=−2.

4. При каком значении x верно равенство:

$$а) x^2 = 1{,}96$$

$$б) x^3 = \frac{27}{64}$$

$$в) 7^x = 1$$

5. Найдите множество значений выражения при n є N:

$$(-1)^n \bullet (-1)^{n+1} \bullet (-1)^{2n+2} - 1^0$$

6. Заполните таблицу значений выражения $(-1)^m \bullet (2m-1) - 1$ при всех m є **Z**, −1 < m < 4.

7*. Пусть a=$2^5 \cdot 3^6 \cdot 7^{11}$, b=$3^5 \cdot 5 \cdot 7^{13}$. Найдите НОД и НОК чисел a и b.

Полезные ссылки ЭОР для учащихся:

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112094/?interface=catalog&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112095/?interface=catalog&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112096/?interface=catalog&subject=17

ГЛАВА 2. **«Одночлены»**

§4. ОДНОЧЛЕН И ЕГО СТАНДАРТНЫЙ ВИД

Основные теоретические сведения

Одночлен – выражения, представляющие собой произведения чисел, переменных и их степеней (натуральных). Числа, переменные и их степени также считаются *одночленами*. *Стандартный вид* – произведение числового множителя, записанного на первом месте, и степеней различных переменных. *Числовой множитель* – коэффициент одночлена. $-10a^2b^4$ – пример одночлена в стандартном виде.

Степень одночлена стандартного вида – *сумма* показателей степеней входящих в него переменных. Если одночлен – это число, отличное от 0, то его степень считается равной 0.

ВАЖНО: *Число 0 – это одночлен, степень которого не определена*.

Тождества

Тождество – равенство, верное при любых допустимых значениях переменных. Соответственные значения выражений – значения при одинаковом x. Выражения, соответственные значения которых равны при любых допустимых значениях переменных, называются тождественно равными.

Тождественное преобразование – замена одного выражения другим, тождественно равным ему.

Примеры тождеств: a+c=c+a;

a+0=a;

a·1=a;

$\mathbf{x^5=x^2\cdot x^3}$.

Основные практические задания по данной теме

1. Вычислите:

а) $(-\frac{2}{3})^3+\frac{2^3}{3}-\frac{2}{(-3)^3}$

б) $5^2-(-3)^2-(-1)^0$

2. Выполните умножение степеней:

а) $a^{17}\cdot a^{21}$ б) $a^{17}\cdot a$ в) $a\cdot a^n\cdot a^{12}$, $n \in Z$, $n\ge 0$.

3. Выполните деление степеней:

а) $a^{21}:a^{17}$ б) $a^{21}:a$ в) $a^{21}:a^{17}:a^n$, $n \in Z$, $0\le n\le 4$

4. Возведите степень в степень:

а) $(a^{11})^{23}$ б) $((a^{11})^{23})^n$, $n \in Z$, $n\ge 0$

5. Найдите значение выражения:

а) $\frac{12^6}{3^5\bullet 2^{11}}$ б) $\frac{5^8\bullet 125}{25^5}$

6. Упростите выражение:

а) $(-(-x^3)^4)^5$ б) $(2x^ny^3)^4\cdot(-x^3y^n)^3$, $n \in Z$, $n\ge 0$

7. Укажите все натуральные значения переменных m и n, при которых степень одночлена $-6^3y^{2m}y^n$ равна 5.

8. При каких значениях x верно равенство:

а) $(-3)^{2x-1}=1$ б) $(-3)^{|x|-1}=-3$

9. Докажите, что значение выражения $91^{10}+42^{10}-85^{10}$ делится на 10.

Полезные ссылки ЭОР для учащихся:

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112098/?interface=catalog&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112099/?interface=catalog&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112100/?interface=catalog&subject=17

ГЛАВА 3. **«Многочлены»**

§5. МНОГОЧЛЕН И ЕГО СТАНДАРТНЫЙ ВИД

Основные теоретические сведения

Многочлен – сумма одночленов. Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами* многочлена. Многочлен, состоящий из двух членов – двучлен, из трех одночленов – трехчлен. Двучлены – биномы, многочлены – полиномы.

Подобные членыЫ многочлена – члены многочлена, имеющие одинаковую буквенную часть. Слагаемые, не имеющие буквенной части, также считаются подобными. Замена суммы подобных членов многочлена называется *приведением подобных членов* или *приведением подобных слагаемых*.

Стандартный вид многочлена - это многочлен, в котором каждый член – одночлен стандартного вида, причем среди них нет подобных членов.

Степенью многочлена стандартного вида называют *наибольшую* из степеней входящих в него одночленов. Если многочлен число, не равное 0, то его степень равна 0. Число 0 называют нуль-многочленом. Его степень считается не определенной.

Если a, b, c, l, m – числа (a не равно 0), а x – переменная, то многочлен

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots\ldots + lx + m$$

называется *многочленом n-й степени (относительно x);*

ax^n, bx^{n-1}, cx^{n-2}, lx, m – *члены многочлена*;

a, b, c, l, m – *коэффициенты*;

ax^n – *старший член многочлена*;

a – *коэффициент при старшем члене*, m – *свободный член многочлена*.

Значение многочлена с переменной x при x=0 равно свободному члену этого многочлена, а при x=1 – сумме его коэффициентов. *Корнем многочлена* P(x) называют такое значение x, при котором многочлен обращается в 0.

Два многочлена тождественно равны, если в стандартном виде каждого из них содержатся одинаковые одночлены.

Основные практические задания по данной теме

1. Приведите подобные члены многочлена $3x^2 - 2x - 3 - 4x^2 + x - 2x^2$.

2. Найдите степень многочлена:

а) $8x^2 - 3x^7 + 6x^4 + 5x^5 + 10$;

б) $a^2b + 6a^2 - 7b^2 + 14ab + 2$.

3. Запишите многочлен в стандартном виде:

а) $a \cdot ba^2 - 2a^2b^2a$;

б) $(-b^2) \cdot (2a^2) \cdot (-c) + 6 - 2b \cdot (-a)^3$.

4. Замените выражение P одночленом так, чтобы получившийся после приведения подобных членов многочлен $2b^2y + 4y^3 + 2b^2 - 2 - 5yb^2 + y^3 - 7b^2 + 2y^3 + 3b^2y - 4 + P$ не содержал переменной b.

5. Найдите значение многочлена $3a^2cb - 9(-a)^2cb + 13abc - 3a^2(-b)(-c) - 4 - 13abc$, предварительно упростив его, если $a = -\frac{1}{3}$, $b = -3\frac{7}{8}$, $c = -\frac{8}{31}$.

6. Даны многочлены $A = x^4 + x^2 + 1$ и $B = x^3 - x^2 + x - 1$. Составьте из них новые многочлены A_1 и B_1, подставив вместо переменной x выражение $(-x)$. Выберите из них то, которое после замены переменной не изменило своего значения.

7. Докажите, что число $\overline{abaaba}$ кратно 13.

Полезные ссылки ЭОР для учащихся:
http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112106/?interface=catalog&class=49&subject=17

ГЛАВА 3. **«Многочлены»**

§6. СУММА, РАЗНОСТЬ И ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Основные теоретические сведения

Сумму, разность, произведение и степень многочленов можно представить в виде *многочлена*.

Правила:

Если перед скобками стоит знак «+», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки.

Если перед скобками стоит знак «-», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого на противоположный.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Основные практические задания по данной теме

1. Даны многочлены $A = a^2 + ab - 4b^2$ и $B = -2a^2 - 2ab + b^2$. Найдите:

а) $A + B$; б) $A - B$.

2. Упростите выражение:

а) $-3b \cdot (2a - b)$; б) $(-x^2 - 3xy + y^2) \cdot (-4x^2)$.

3. Представьте выражение $(a^2 + 2ab - bx^2) - (x^3 - ax^2 - b^2) - bx^2 + x^3$ в виде суммы двух многочленов, один из которых содержит переменную x, а другой — не содержит.

4. Представьте многочлен $x + 2y - 3x^2 - 4y^2$ в виде разности двух многочленов с положительными коэффициентами.

5. Вместо знака * запишите такой одночлен, чтобы многочлен, тождественно равный выражению $2x \cdot (2x^2 + * - 3x) - 3 \cdot (-2x^3 + x + 1)$, был многочленом 5-й степени, сумма коэффициентов которого равна 8.

6. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $3(5a - 2b) - 5(3a - 4b)$ при $a = -217$, $b = -2$;

б) $4a(3a^2 - ab^2 - b^3) - 6a\left(2a^2 + ab^2 - \frac{2}{3}b^3\right)$ при $a = -\frac{12}{17}$, $b = 1\frac{5}{12}$.

7. Упростите выражение $x - (2 + (x - 1)) + (x - (5 + 2x))$ и найдите, при каком значении переменной x его значение равно нулю.

8. Сравните числа $\frac{2003}{2004} - 1$ и $1 - \frac{2004}{2003}$. Укажите какое-нибудь число (если оно существует), заключенное между этими числами.

Полезные ссылки для учащихся:

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112107/?interface=catalog&class=49&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112109/?interface=catalog&class=49&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112112/?interface=catalog&class=49&subject=17

ГЛАВА 4. **«Уравнения»**

§7. УРАВНЕНИЕ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Основные теоретические сведения

Равенство, содержащее переменную, называют *уравнением* с одной переменной или уравнением с одним неизвестным.

Корнем уравнения (решением уравнения) называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение – значит найти множество его корней или доказать, что их нет.

Областью определения уравнения (областью допустимых значений переменной в уравнении) называется множество значений переменной, при которых обе части уравнения имеют смысл.

Уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают (имеют одни и те же корни или не имеют корней).

Чтобы получить уравнение, равносильное данному, используют свойства уравнений:

1) Перенос слагаемых из одной части в другую, изменив его знак;
2) Обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от 0;
3) Если в какой-либо части уравнения или обеих частях выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения уравнения.

Линейное уравнение с одной переменной.

Уравнение вида **ax=b**, где x – переменная, a (коэффициент при переменной) и b (свободный член) – некоторые числа, называется *линейным* уравнением с одной переменной.

Число a – коэффициент, число b – свободный член.

1. a≠0 и b – любое число. Корень уравнения x=b/a – *единственный*.
2. a=0 и b≠0 *нет корней*, так как равенство 0x=b ни при каком x не является верным.
3. a=0 и b=0 любое число – корень, т.е. *бесконечно много корней*.

Основные практические задания по данной теме

1. Является ли данное число a корнем уравнения:
а) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$, $a = 1$;
б) $2x^2 - 3x - 2 = 0$, $a = -0{,}5$?

2. Даны уравнения: $7 - 4x = x - 1$ (А), $3(4x - 7) = 3(1 - x)$ (Б), $\frac{4x-7}{3} = \frac{1-x}{3}$ (В), $4x - x = 1 - 7$ (Г). Укажите те, которые равносильны уравнению $4x - 7 = 1 - x$. Ответ объясните.

3. Решите уравнение:
а) $-3x = 5$; б) $0{,}4y = -0{,}7$; в) $0z = -3$; г) $0t = 0$.

4. Найдите все целые значения параметра a, при которых уравнение $ax = -6$ имеет целый корень.

5. Найдите множество корней уравнения:
а) $|4x| = 1{,}2$; в) $|4{,}08x| = 0$;
б) $|-0{,}04y| = 2{,}8$; г) $|0{,}01y| = -0{,}1$.

6. При каких значениях параметра a уравнение $ax = a^2 - 4a$:
а) имеет единственный корень;
б) не имеет корней;
в) имеет бесконечное множество корней?

7. Решите уравнение $-2mn = x$ ($m \neq 0$ и $n \neq 0$) относительно переменной:
а) m; б) n.

8. Дано уравнение $x^4 - 2x^3 - 3x + 4 = 0$. Проверьте, являются ли его корнями числа:
а) 1; б) −1; в) 2; г) −2; д) 4; е) −4.

Полезные ссылки для учащихся:

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112080/?interface=catalog&class=49&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112081/?interface=catalog&class=49&subject=17

http://school-collection.edu.ru/catalog/rubr/820d62ae-6bce-41ea-923d-7184c1801fc9/112082/?interface=catalog&class=49&subject=17