Магические квадраты 3×3.
В поисках квадратного квадрата

Введение

Магические квадраты — таблички с цифрами, характеризующиеся одним свойством: сумма чисел во всех строках, столбцах и диагоналях равна одному и тому же числу. Это число называется *магической константой*. Например, магическим является следующий квадрат:

$$\begin{matrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$$

Для этого квадрата выполняется система уравнений:

$$8+3+4 = 1+5+9 = 6+7+2 = 15$$
$$8+1+6 = 3+5+7 = 4+9+2 = 15$$
$$8+5+2 = 4+5+6 = 15$$

15, в данном случае — магическая константа.

Открытой проблемой математики остаётся вопрос существования магического квадрата, все элементы которого — полные квадраты различных натуральных чисел. Мы будем в шутку называть такие магические квадраты *квадратными*, для простоты речи.

В этом материале мы рассмотрим несколько подходов к изучению магических квадратов 3×3, придуманных нами, и выведем необходимые условия существования квадратного квадрата.

Глава 1. Магические квадраты 3×3 с точки зрения алгебры

1. Простейшие модели представления магического квадрата

Простейшим вариантом представления магического квадрата в общем виде служит таблица из девяти букв, в дальнейшем называемая *ABC-моделью*:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{matrix}$$

Для квадратного квадрата под ABC-моделью подразумевается квадрат

$$\begin{matrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ D^2 & E^2 & F^2 \\ G^2 & H^2 & J^2 \end{matrix}$$

То есть, в зависимости от контекста, эти буквы могут обозначать либо сами элементы квадрата, либо их квадратные корни.

Теорема 1. *Магическая константа любого магического квадрата равна* $3E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим магическую константу за M, а сумму $A+J$ за N. Тогда $M=N+E$. Заметим теперь, что $A+E+J=B+E+H=C+E+G=N+E$. Вычитая отовсюду E, получим $A+J=B+H=C+G=N$. Сумма $A+B+C+G+H+J$ может быть записана, с одной стороны, как $2M$, а с другой стороны, как $3N$.

$M=N+E$

$3M=3N+3E$

$3M=2M+3E$

$M=3E$ $\square$

Теорема 2. *Любой магический квадрат может быть описан тремя числами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $x=A-E,\ y=G-E$. Тогда, очевидно,

$A=E+x,\ G=E+y$.

Из теоремы 1 выразим:

$J=E-x,\ C=E-y$.

И, применяя теорему 1 ещё раз, получим:

$B=E-x+y,\ H=E+x-y,$

$D=E-x-y,\ F=E+x+y$

Линейная независимость E,x,y доказывается из системы уравнений, задающих магический квадрат методами линейной алгебры.

Теорема 2, и в частности предложенное нами доказательство, порождает новую модель магического квадрата, называемую *канонической:*

$$\begin{matrix} E+x & E-x+y & E-y \\ E-x-y & E & E+x+y \\ E+y & E+x-y & E-x \end{matrix}$$

Каноническая модель для квадратного квадрата записывается так:

$$\begin{matrix} E^2+x & E^2-x+y & E^2-y \\ E^2-x-y & E^2 & E^2+x+y \\ E^2+y & E^2+x-y & E^2-x \end{matrix}$$

В отличие от ABC-модели, каноническая модель содержит лишь линейно независимые переменные. То есть существует биекция между множеством магических квадратов и тройками чисел E,x,y.

Магические квадраты, получаемые из данного поворотом/отражением и любой комбинацией этих действий, будем называть *изоморфными* данному. Заметим, что условие $y \geqslant x \geqslant 0$, применённое к канонической модели магического квадрата, из всех изоморфизмов данного квадрата сохраняет лишь один. Этот факт, в частности, используется, чтобы ограничить множество рассматриваемых квадратов во время поиска квадратного квадрата: ведь если данный квадрат является квадратным, то и все изоморфные ему так же обладают данным свойством, и наоборот. Однако для квадратных квадратов, ввиду того, что все их элементы различны, удобнее использовать условие $y > x > 0$.

Лемма 1 (Бубса и Мумса). *Для квадратного квадрата, записанного в каноническом виде при условии $y > x > 0$ выполняется система неравенств:*

$$0 < E^2 - x - y < E^2 - y < \left\{E^2 - x,\ E^2 + x - y\right\} <$$

$$< E^2 < \left\{E^2 - x + y, E^2 + x\right\} < E^2 + y < E^2 + x + y < 2E^2,$$

или, в ABC-модели:

$$0 < D < C < \{J, H\} < E < \{B, A\} < G < F < E\sqrt{2}$$

Примеч. В фигурные скобки заключены элементы, находящиеся в одинаковом отношении с другими элементами, и в неопределённом отношении друг с другом.

Лемма напрямую вытекает из наложенного нами условия, а также из того факта, что все квадраты натуральных чисел положительны.

Вообще говоря, все потенциально существующие квадратные квадраты можно разделить на две группы:

1. $x \in \left(0, \dfrac{y}{2}\right)$
2. $x \in \left(\dfrac{y}{2}, y\right)$

2. Магический квадрат как матрица.
Векторное пространство магических квадратов

Биекция между магическими квадратами и тройками чисел E, x, y позволяет ввести сокращённую запись $m(E,x,y)$. Этой записью мы будем обозначать матрицы вида

$$\begin{pmatrix} E+x & E-x+y & E-y \\ E-x-y & E & E+x+y \\ E+y & E+x-y & E-x \end{pmatrix}$$

Несложно заметить, что множество таких матриц образует векторное пространство:

$$\begin{aligned} & m(E_1,x_1,y_1)+m(E_2,x_2,y_2) = \\ & = \begin{pmatrix} E_1+x_1 & E_1-x_1+y_1 & E_1-y_1 \\ E_1-x_1-y_1 & E_1 & E_1+x_1+y_1 \\ E_1+y_1 & E_1+x_1-y_1 & E_1-x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_2+x_2 & E_2-x_2+y_2 & E_2-y_2 \\ E_2-x_2-y_2 & E_2 & E_2+x_2+y_2 \\ E_2+y_2 & E_2+x_2-y_2 & E_2-x_2 \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} E_1+E_2+x_1+x_2 & E_1+E_2-x_1-x_2+y_1+y_2 & E_1+E_2-y_1-y_2 \\ E_1+E_2-x_1-x_2-y_1-y_2 & E_1+E_2 & E_1+E_2+x_1+x_2+y_1+y_2 \\ E_1+E_2+y_1 & E_1+E_2+x_1+x_2-y_1-y_2 & E_1+E_2-x_1-x_2 \end{pmatrix} \\ & = m(E_1+E_2, x_1+x_2, y_1+y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda m(E,x,y) = \\ & = \lambda \begin{pmatrix} E+x & E-x+y & E-y \\ E-x-y & E & E+x+y \\ E+y & E+x-y & E-x \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \lambda E+\lambda x & \lambda E-\lambda x+\lambda y & \lambda E-\lambda y \\ \lambda E-\lambda x-\lambda y & \lambda E & \lambda E+\lambda x+\lambda y \\ \lambda E+\lambda y & \lambda E+\lambda x-\lambda y & \lambda E-\lambda x \end{pmatrix} = \\ & = m(\lambda E, \lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

В данной записи мы можем записать все существующие изомофизмы квадрата:

$m(E,x,y)-$ исходный квадрат
$m(E,x,-y)-$ отражение относительно главной диагонали [транспонирование]
$m(E,-x,y)-$ отражение относительно побочной диагонали
$m(E,-x,-y)-$ поворот на 180°
$m(E,y,x)-$ отражение относительно средней горизонтали
$m(E,y,-x)-$ поворот на 90° по часовой стрелке
$m(E,-x,y)-$ поворот на 90° против часовой стрелки
$m(E,-x,-y)-$ отражение относительно средней вертикали

И ещё одна операция, унаследованная магическими квадратами от матриц — взятие определителя.

$$\det(m(E,x,y)) = 9E\left(x^2-y^2\right)$$

Векторное пространство даёт нам возможность ввести базисный подход. Наиболее удобными базисными квадратами для нас являются $m(1,0,0)$, $m(0,1,0)$ и $m(0,0,1)$:

$$\underset{m(1,0,0)}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{m(0,1,0)}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{m(0,0,1)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$m(E,x,y) = Em(1,0,0)+xm(0,1,0)+ym(0,0,1)$$

Заметим, при этом, на всякий случай, что $Em(1,0,0)+xm(0,1,0)-$ симметричная часть матрицы, а $ym(0,0,1)-$ антисимметричная.

Также, имея векторное пространство, мы можем говорить о *коллинеарных* квадратах: квадратах, получаемых друг из друга домножением на коэффициент. Коллинеарные квадраты инвариантны относительно многих свойств. Так, например, если квадрат $m\big(E^2, x, y\big)$ является квадратным, то и квадрат $a^2 m\big(E^2, x, y\big)$ также квадратный. А значит, имеет смысл рассматривать лишь *минимальный* квадрат, то есть тот, в котором нельзя вынести общий множитель.

3. Произведение магических квадратов. Чарующий квадрат

Интересности начинаются в тот момент, когда мы собираемся перемножить пару магических квадратов [матричным способом]. Для удобства обозначим базисные квадраты следующим образом:

$$s_0 = m(1,0,0)$$
$$s_1 = m(0,1,0)$$
$$s_2 = m(0,0,1)$$

Далее воспольуемся общим для всех матриц свойством дистрибутивности умножения относительно сложения:

$$m(E_1,x_1,y_1)\cdot m(E_2,x_2,y_2) = (E_1s_0+x_1s_1+y_1s_2)\cdot(E_2s_0+x_2s_1+y_2s_2) =$$
$$= E_1E_2s_0^2+E_1x_2s_0s_1+E_1y_2s_0s_2+x_1E_2s_1s_0+x_1x_2s_1^2+x_1y_2s_1s_2+$$
$$+y_1E_2s_2s_0+y_1x_2s_2s_1+y_1y_2s_2^2$$

Отметим теперь, что умножение любой матрицы A на матрицу s_0 есть матрица, составленная из сумм строк/столбцов матрицы A. Поскольку суммы каждой из строк и столбцов матриц s_1 и s_2 равны нулю, то $s_0s_1 = s_1s_0 = s_0s_2 = s_2s_0 = 0$, где $0-$ нулевая матрица. Поэтому мы можем записать:

$$m(E_1,x_1,y_1)\cdot m(E_2,x_2,y_2) = E_1E_2s_0^2+x_1x_2s_1^2+x_1y_2s_1s_2+y_1x_2s_2s_1+y_1y_2s_2^2$$

Рассчитаем эти пять произведений базисных квадратов:

$$s_0s_0 = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$$

$$s_1s_1 = \begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$s_1s_2 = \begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

$$s_2s_1 = \begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$s_2s_2 = \begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

Обозначим теперь $s_3 = s_1s_1$, $s_4 = s_2s_1$. Тогда, возвращаясь к вычислениям, получим

$$m(E_1,x_1,y_1)\cdot m(E_2,x_2,y_2) = 3E_1E_2s_0+(x_1x_2-y_1y_2)s_3+(y_1x_2-x_1y_2)s_4$$

Назовём матрицы, построенные из трёх базисных матриц s_0,s_3,s_4, *чарующими квадратами,* и будем обозначать, по аналогии с магическими, $c(E,x,y) = Es_0+xs_3+ys_4$

Это матрицы вида

$$\begin{pmatrix}E+2x-y & E-x-y & E-x+2y\\ E-x-y & E+2x+2y & E-x-y\\ E-x+2y & E-x-y & E+2x-y\end{pmatrix}$$

В чём же значимость этих матриц для нас? Выше мы записали *Первое правило умножения квадратов.* Повторим его в несколько ином виде:

$$m(E_1,x_1,y_1)\cdot m(E_2,x_2,y_2) = c(3E_1E_2, x_1x_2-y_1y_2, y_1x_2-x_1y_2)$$

Помимо Первого, есть также *Второе, Третье* и *Четвёртое правила умножения квадратов,* получаемые тем же образом:

$$\begin{aligned} m(E_1,x_1,y_1)\cdot c(E_2,x_2,y_2) &= 3m(E_1E_2,\ x_1x_2-y_1y_2,\ y_1x_2-x_1y_2) \\ c(E_1,x_1,y_1)\cdot m(E_2,x_2,y_2) &= 3m(E_1E_2,\ x_1x_2+y_1y_2,\ y_1x_2+x_1y_2) \\ c(E_1,x_1,y_1)\cdot c(E_2,x_2,y_2) &= 3c(E_1E_2,\ x_1x_2+y_1y_2,\ y_1x_2+x_1y_2) \end{aligned}$$

Комбинация первого и второго правила, или первого и третьего, доказывает очень интересный факт: произведение нечётного количества магических квадратов даёт магический квадрат, причём квадраты в произведении, имеющие одинаковую чётность, коммутируют.

Очень нам везёт, когда мы замечаем, что единичная матрица — нейтральный элемент относительно матричного умножения [и, соответственно, умножения квадратов], — входит во множество чарующих квадратов:

$$m(E,x,y)\cdot c\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right) = c\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)\cdot m(E,x,y) = m(E,x,y)$$

$$c(E,x,y)\cdot c\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right) = c\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)\cdot c(E,x,y) = c(E,x,y)$$

Наличие нейтрального элемента во множестве чарующих квадратов указывает на то, что обратные элементы также принадлежат соответствующим множествам. Так, решим уравнение

$$m(E,x,y)\cdot m(F,z,w) = c\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$$

относительно F,z,w. В соответствии с Первым правилом умножения, данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} = 3EF \\ \dfrac{1}{3} = xz-yw \\ 0 = yz-xw \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F = \dfrac{1}{9E} \\ z = \dfrac{x}{3\left(x^2-y^2\right)} \\ w = \dfrac{y}{3\left(x^2-y^2\right)} \end{cases}$$

Откуда следует

$$m^{-1}(E,x,y) = m\left(\frac{1}{9E},\frac{x}{3\left(x^2-y^2\right)},\frac{y}{3\left(x^2-y^2\right)}\right)$$

Причём из курса линейной алгебры известно, что перемножение обратных матриц коммутативно, а значит не имеет значения, с какой стороны умножать на обратную матрицу. Другой способ записать обратную матрицу:

$$m^{-1}(E,x,y) = \frac{m\left(x^2-y^2,3Ex,3Ey\right)}{\det(m(E,x,y))}$$

Аналогично выводится и матрица, обратная к чарующему квадрату:

$$c^{-1}(E,x,y) = c\left(\frac{1}{9E},\frac{x}{9\left(x^2-y^2\right)},\frac{-y}{9\left(x^2-y^2\right)}\right) = \frac{3c\left(x^2-y^2,Ex,-Ey\right)}{\det(c(E,x,y))}$$

Наличие обратного элемента в рассматриваемом множестве позволяет решать уравнения в магических квадратах.

Автор данного материала надеется, что с помощью свойств умножения получится записать квадратный квадрат в виде произведения более простых магических квадратов. Пока же не остаётся ничего, кроме как собирать разного рода информацию.

4. Алгебра полумагических квадратов

Полумагическим квадратом называют квадратную таблицу, заполненную числами таким образом, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна определённому числу:

$$\begin{cases} a_1^1 + a_1^2 + a_1^3 = C \\ a_2^1 + a_2^2 + a_2^3 = C \\ a_3^1 + a_3^2 + a_3^3 = C \\ a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = C \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = C \\ a_1^1 + a_2^1 + a_3^1 = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \text{— полумагический}$$

Вполне очевидно, что на множестве полумагических квадратов также существует векторное пространство.

Решая систему, задающую полумагический квадрат, получим, что это пространство имеет размерность 5.

Заметим теперь, что s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 — независимые полумагические квадраты, любая линейная комбинация которых — также полумагический квадрат. Множество всех линейных комбинаций названных квадратов является подпространством полумагических квадратов, при этом их размерности совпадают. Это значит, что данные векторные пространства совпадают.

Это значит, что имеем дело с алгеброй. Таблица умножения базисных квадратов:

$\times$	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
s_0	$3s_0$	0	0	0	0
s_1	0	s_3	$-s_4$	$3s_1$	$-3s_2$
s_2	0	s_4	$-s_3$	$3s_2$	$-3s_1$
s_3	0	$3s_1$	$3s_2$	$3s_3$	$3s_4$
s_4	0	$3s_2$	$3s_1$	$3s_4$	$3s_3$

Если же мы перезададим базисы следующим образом:

$$S_0 = \frac{s_0}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \frac{s_3}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \frac{s_4}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \frac{s_1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_4 = \frac{s_2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

То таблица умножения будет выглядеть чуть более приятно:

$\times$	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4
S_0	S_0	0	0	0	0
S_1	0	S_1	S_2	S_3	S_4
S_2	0	S_2	S_1	S_4	S_3
S_3	0	S_3	$-S_4$	S_1	$-S_2$
S_4	0	S_4	$-S_3$	S_2	$-S_1$

Полумагические квадраты можно разбивать не только на 5 базисных квадратов, но и на два: чарующий и магический с нулевым E. При этом чарующий выполняет роль действительных чисел, а магический — мнимых.

$$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = a_0S_0 + a_1S_1 + a_2S_2 + a_3S_3 + a_4S_4 = C(a_0,a_1,a_2) + M(0,a_3,a_4)$$

Правило умножения в новой системе:

$$\dot{a}\cdot\dot{b} = (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)\cdot(b_0,b_1,b_2,b_3,b_4) =$$
$$= \begin{pmatrix} a_0b_0, \\ a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4, \\ a_1b_2 + a_2b_1 - a_3b_4 + a_4b_3, \\ a_1b_3 + a_2b_4 + a_3b_1 - a_4b_2, \\ a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1 \end{pmatrix}$$

По данному полумагическому квадрату восстановить параметры несколько сложнее, чем по магическому. Если записать полумагический квадрат как матрицу через параметры, то мы получим следующее:

$$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) =$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a_0 + 2a_1 - a_2 + a_3\sqrt{3} & a_0 - a_1 - a_2 - a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{3} & a_0 - a_1 + 2a_2 - a_4\sqrt{3} \\ a_0 - a_1 - a_2 - a_3\sqrt{3} - a_4\sqrt{3} & a_0 + 2a_1 + 2a_2 & a_0 - a_1 - a_2 + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{3} \\ a_0 - a_1 + 2a_2 + a_4\sqrt{3} & a_0 - a_1 - a_2 + a_3\sqrt{3} - a_4\sqrt{3} & a_0 + 2a_1 - a_2 - a_3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Воспользуемся этим и отметим, что a_0 — полумагическая константа. Её легко найти, просто сложив все элементы в одной строке/столбце. a_3 — это разность верхнего левого угла и правого нижнего, умноженная на $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Аналогично, a_4 выражается из двух других углов. Искать оставшиеся два параметра придётся по двум уравнениям. Удобнее всего рассматривать центральный элемент и угловой.

Однако в целых числах, определённо, удобнее работать со старыми базисами, чтобы избежать иррациональности и дробей. В старых базисах:

$$c(E,z,w) + m(0,x,y) = m(E,x,y) + c(0,z,w)$$
$$\begin{pmatrix} E+x+2z-w & E-x+y-z-w & E-y-z+2w \\ E-x-y-z-w & E+2z+2w & E+x+y-z-w \\ E+y-z+2w & E+x-y-z-w & E-x+2z-w \end{pmatrix}$$

Здесь E — магическая константа, делённая на 3, x — разность соответствующих углов, делённая на 2, y — аналогично, z — это сумма главной диагонали, делённая на три, без двух E, w таким же образом получается из побочной диагонали.

Глава 2. Магические квадраты на целых и рациональных числах

1. Основные свойства магических квадратов на целых числах

Целочисленным магическим квадратом называть будем магический квадрат, все элементы которого — целые числа.

Говоря о магических квадратах, составленных из целых чисел, мы будем использовать запись $m(E,x,y)$ в том смысле, в котором она вводилась в параграфе 1.2 данного материала, за тем исключением, что E,x,y принимаются заведомо целыми числами.

Теорема. *Магический квадрат* $m(E,x,y)$ *является целочисленным тогда и только тогда, когда числа* $E,x,y-$ *целые.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если E,x,y целые, то, очевидно, и числа $E-x-y$, $E-x$, $E-x+y$, $E-y$, E, $E+y$, $E+x-y$, $E+x$, $E+x+y-$ целые, а значит, и магический квадрат составлен из только целых чисел.

Если квадрат целочисленный, то целым является и число E, так как оно само по себе — элемент квадрата. $x-$ целое, потому что $E+x$ целое, и E целое. Аналогично, y тоже целое.

То есть существует биекция между целочисленными магическими квадратами и тройками целых чисел. Биекция же полумагических квадратов с пятимерными целочисленными векторами не описывается так просто. Например, полумагический квадрат $m\left(0,\dfrac{x}{2},\dfrac{y}{2}\right)+c\left(E,\dfrac{z}{2},\dfrac{w}{2}\right)$ будет состоять из только целых чисел при целых значениях парамет-ров, а квадрат $m\left(0,\dfrac{x}{2},y\right)+c(E,z,w)-$ нет.

Вернёмся к понятию коллинеарных квадратов и отметим, что из целочисленных коллинеарных квадратов интерес, как правило, представляет лишь *минимальный квадрат*, то есть такой $m(E,x,y)$, что НОД$(E,x,y)=1$. Элементы минимального магического квадрата взаимно просты в совокупности.

Минимальный магический квадрат является важным критерием в поиске квадратного квадрата. Наибольший общий делитель всех элементов квадратного квадрата — обязательно вторая степень натурального числа. А значит, магический квадрат, полученный делением данного на НОД, будет так же квадратным. При этом найти минимальный квадрат предположительно проще, чем произвольный. Как минимум потому, что не нужно рассмат-ривать не взаимно простые в совокупности E,x,y.

2. Магический квадрат по модулю

Определим сравнение двух целочисленных магических квадратов по модулю натурального числа следующим образом:

$$m(E,x,y) \equiv m(F,z,w) \bmod a \Leftrightarrow \begin{cases} E \equiv F \bmod a \\ x \equiv z \bmod a \\ y \equiv w \bmod a \end{cases}$$

Поскольку все элементы магического квадрата — линейные комбинации E,x,y, утверждение "все элементы квадрата $m(E,x,y)$ сравнимы с соответствующими элементами квадрата $m(F,z,w)$" эквивалентно выражению $m(E,x,y) \equiv m(F,z,w)$.

Лемма 1. *Если $m\left(E^2,x,y\right)$ — минимальный квадратный квадрат, то E нечётное, x,y — кратные четырём.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим квадратный квадрат по модулю 4. Предположим, что в квадрате $m\left(E^2,x,y\right)$ E — чётное. Это означает, что магическая константа $3E^2$ и центральный элемент E^2 делятся на 4, $m\left(E^2,x,y\right) \equiv m(0,x,y) \bmod 4$. Известно, что все полные квадраты имеют либо вид $4k+1$, либо вид $4k$. E^2+x и E^2-x одновременно полные квадраты. Если x не кратно 4, то одно или оба из них не могут быть квадратами — противоречие. Значит, x кратно 4. Аналогично, рассматривая E^2+y и E^2-y получим, что y также кратно 4. Значит, мы можем вынести коэффициент 4 за пределы квадрата и получить меньший квадратный квадрат.

Теперь рассмотрим случай, когда E — нечётное. В таком случае

$$E^2 \equiv 1 \bmod 4$$
$$3E^2 \equiv 3 \bmod 4$$

Теперь, если $x \equiv 1 \bmod 4$, то $E^2+x \equiv 2 \bmod 4$, а если $x \equiv 3 \bmod 4$, $E^2-x \equiv 2 \bmod 4$. Если же $x \equiv 2 \bmod 4$, $E^2+x \equiv 3 \bmod 4$. Все эти случаи противоречат тому условию, что E^2-x, E^2+x — полные квадраты. Противоречие не возникает лишь в том случае, когда $x \equiv 0 \bmod 4$. Тем же путём придём к $y \equiv 0 \bmod 4$, чтд.

Лемма 2. *Если $m\left(E^2,x,y\right)$ — минимальный квадратный квадрат, то E не делится на 3, а x,y делятся.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\forall a \in \mathbb{Z},\ a \not\equiv 0 \bmod 3:\ a^2 \equiv 1 \bmod 3$. При этом, очевидно, магическая константа $3E^2 \equiv 0 \bmod 3$. Из этого следует, что либо все три элемента в любой строке и столбце кратны 3, либо все не кратны 3. Поскольку столбцы пересекают строки, во всём квадрате все элементы либо кратны, либо все не кратны 3. Если все элементы кратны 3, то делением на 9 из данного квадратного квадрата получим меньший. Все элементы минимального, в таком случае, должны быть не кратны 3, откуда следует данная лемма.

3. Применение теорем гауссовых целых чисел в изучении свойств квадратного квадрата

Несмотря на название параграфа, мы не станем углубляться в теорию гауссовых чисел. Лишь уточним, что из этой теории следует:

Лемма 1. *Если число m имеет факторизацию*

$$m = 2^k p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_m^{\beta_m}, \text{ где}$$
$$\forall i \in \overline{1,n}: \ p_i - \text{простой множитель вида } 4k+1, \ \alpha_i \geqslant 1$$
$$\forall j \in \overline{1,m}: \ q_j - \text{простой множитель вида } 4k+3, \ \beta_j \geqslant 1$$
$$k \geqslant 1$$

тогда m

- *не может быть суммой двух квадратов, если хотя бы одно из чисел β_j нечётное*
- *представляется в виде суммы двух квадратов ровно $\frac{1}{2}(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)$ спосо-бом, если хотя бы одно из чисел α_i чётные*
- *представляется в виде суммы квадратов ровно $\frac{1}{2}((\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1)+1)$ спосо-бом, если все числа α_i чётные*

И другое, связанное свойство:

Лемма 2. *Если m имеет простой множитель q вида $4k+3$, и представляется в виде суммы квадратов $m = x^2+y^2$, то неизбежно x и y* делятся на q.

$2E^2$ представимо в виде суммы квадратов как минимум пятью различными способами:

$$2E^2 = A^2 + J^2$$
$$2E^2 = B^2 + H^2$$
$$2E^2 = C^2 + G^2$$
$$2E^2 = D^2 + F^2$$
$$2E^2 = E^2 + E^2$$

Отсюда либо $E^2 = p_1^2 p_2^2 o^2$, либо $E^2 = p_1^8 o^2$, где $o-$ любое целое число, p_i- простой делитель вида $4k+1$. Однако отметим, что если $2E^2$ имеет лишь один простой делитель вида p, то при разложении $2E^2$ в суммы квадратов, слагаемые лишь в одном из разложений не будут делиться на p [так же имеет доказательство в гауссовых числах].

В таком случае, либо все элементы квадрата делятся на один и тот же множитель p, на квадрат которого можно будет разделить все элементы, либо не делятся всего два элемента, лежащие на одной вертикали/горизонтали/диагонали, проходящей через центр. Последнее невозможно, так как требует выполнения одной из четырёх не имеющих решений систем сравнений:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \bmod p \\ y \equiv 0 \bmod p \\ y-x \equiv 0 \bmod p \\ y+x \not\equiv 0 \bmod p \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 0 \bmod p \\ y \equiv 0 \bmod p \\ y-x \not\equiv 0 \bmod p \\ y+x \equiv 0 \bmod p \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 0 \bmod p \\ y \not\equiv 0 \bmod p \\ y-x \equiv 0 \bmod p \\ y+x \equiv 0 \bmod p \end{cases} \quad \begin{cases} x \not\equiv 0 \bmod p \\ y \equiv 0 \bmod p \\ y-x \equiv 0 \bmod p \\ y+x \equiv 0 \bmod p \end{cases}$$

Значит, E имеет как минимум два простых делителя вида $4k+1$.

Из леммы 2 этого параграфа следует так же и то, что в минимальном квадратном квадрате E не имеет простых делителей вида $4k+3$, отличных от трёх, иначе их можно было бы вынести.

Согласно леммам прошлого параграфа, E не делится на 2 и на 3.

Объединим все эти факты в следующую теорему:

Теорема 1 (о факторизации центрального элемента минимального квадратного квадрата).

Центральный элемент минимального квадратного квадрата имеет как минимум два простых делителя вида $4k+1$ и не имеет простых делителей никакого другого вида.

4. Применение теорем квадратичных вычетов по модулю в изучении свойств квадратного квадрата

Положим, что элемент A^2 квадратного квадрата имеет простой множитель q вида $4k+3$. Из того, что $2A^2 = F^2 + H^2$, сделаем вывод, что F и H также делятся на q.

$$A^2 = E^2 + x \equiv 0 \bmod q$$
$$F^2 = E^2 + x + y \equiv 0 \bmod q \Longrightarrow$$
$$y \equiv 0 \bmod q$$

Рассмотрим этот квадрат по модулю q:

$$\begin{pmatrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ D^2 & E^2 & F^2 \\ G^2 & H^2 & J^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^2+x & E^2-x+y & E^2-y \\ E^2-x-y & E^2 & E^2+x+y \\ E^2+y & E^2+x-y & E^2-x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & E^2-x & E^2 \\ E^2-x & E^2 & 0 \\ E^2 & 0 & E^2-x \end{pmatrix} \bmod q$$

$$E^2 - x + E^2 \equiv 3E^2 \bmod q \Longrightarrow$$
$$x \equiv -E^2 \bmod q$$

$$\begin{pmatrix} A^2 & B^2 & C^2 \\ D^2 & E^2 & F^2 \\ G^2 & H^2 & J^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2E^2 & E^2 \\ 2E^2 & E^2 & 0 \\ E^2 & 0 & 2E^2 \end{pmatrix} \bmod q$$

При этом $2E^2$ – квадратичный вычет по модулю q, так как $B^2 \equiv 2E^2 \bmod q$. E^2, очевидно, также является квадратичным вычетом по этому модулю.

В силу мультипликативного свойства квадратичных вычетов, $2E^2$ может быть квадратичным вычетом по тому и лишь по тому модулю, по которому квадратичным вычетом является число 2. Это, в свою очередь, означает, что q может быть любым простым вида $8k+7$, но никогда не будет простым вида $8k+3$ [Источник].

Глава 3. Неполные квадратные квадраты. Функции dir, fmn, tfmn

1. Неполные квадратные квадраты

Неполным квадратным квадратом назовём целочисленный квадрат, часть элементов которого — полные квадраты. *Неполным n-квадратным квадратом,* или просто *n-квадратным квадратом,* или *квадратом-n/9* будем называть неполный квадратный квадрат, у которого как минимум n элементов являются полными квадратами. При произношении рекомендуется заменять число греческой приставкой, например, диквадратный или октаквадратный.

Ниже представлен гексаквадратный квадрат:

$$\begin{pmatrix} 1561 & 31^2 & 1^2 \\ -719 & 29^2 & 49^2 \\ 41^2 & 721 & 11^2 \end{pmatrix}$$

Вопрос существования полного квадратного квадрата можно обобщить. До сих пор известен только один квадрат 7/9. Существуют ли другие квадраты 7/9 — открытая проблема математики.

Неполные квадраты могут быть разбиты на подгруппы по изоморфизмам. Так, например, все моноквадратные квадраты образуют три группы:

- с квадратом в центре
- с квадратом в углу
- с квадратом на стороне

Действительно, неважно в каком углу стоит квадратное число. Поворотом магического квадрата мы можем поставить его на необходимое место.

Для моделирования групп мы используем обозначение "крестики-нолики", где $X-$ квадратное число, а $O-$ любое. Каждой группе также можно дать однозначное название вроде "центр, два соседних угла, сторона между ними и сторона напротив", более ёмкое — перечислением всех квадратов в ABC-модели, например, ABCEH, а также ассоциативное, например, "Т-квадрат".

Кроме прочего, каждому квадрату соответствует своя система уравнений в целых числах, которую следует решить, чтобы научиться генерировать квадраты каждой отдельной группы.

Имеет смысл перечислить все эти группы.

Существует 3 группы 1/9:

$$\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & X & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр	угол	сторона
$E=e^2$	$E+x=a^2$	$E-x+y=b^2$

8 групп 2/9:

$$\begin{pmatrix} X & O & O \\ O & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & X & O \\ O & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & O & X \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & O & O \\ O & O & O \\ O & O & X \end{pmatrix}$$

центр и угол	центр и сторона	соседние углы	противоположные углы
$\begin{cases} E=e^2 \\ E+x=a^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E=e^2 \\ E-x+y=b^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x=j^2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ X & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

соседние стороны

$$\begin{cases} E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ O & O & O \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

противоположные стороны

$$\begin{cases} E-x+y=b^2 \\ E+x-y=h^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

угол и прилежащая сторона

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x+y=b^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & O \\ O & O & X \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

угол и противолежащая сторона

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases}$$

16 групп 3/9:

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ O & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр и соседние углы

$$\begin{cases} E=e^2 \\ E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & O \\ O & X & O \\ O & O & X \end{pmatrix}$$

центр и противоположные углы

$$\begin{cases} E=e^2 \\ E+x=a^2 \\ E-x=j^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ X & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр и соседние стороны

$$\begin{cases} E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ O & X & O \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

центр и противоположные стороны

$$\begin{cases} E-x+y=b^2 \\ E+x-y=h^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ O & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр, угол и прилежащая сторона

$$\begin{cases} E=e^2 \\ E+x=a^2 \\ E-x+y=b^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & O \\ O & X & X \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр, угол и противолежащая сторона

$$\begin{cases} E=e^2 \\ E+x=a^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ O & O & O \\ X & O & O \end{pmatrix}$$

три угла

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \\ E+y=g^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ X & O & X \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

три стороны

$$\begin{cases} E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & X \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

соседние углы и сторона между

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \\ E-x+y=b^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ O & O & O \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

соседние углы и сторона напротив

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \\ E+x-y=h^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ X & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

соседние углы и сторона при одном из них

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \\ E-x-y=d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ O & O & O \\ O & O & X \end{pmatrix}$$

противоположные углы и сторона

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x=j^2 \\ E-x+y=b^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ X & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

соседние стороны и угол между

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ X & O & O \\ O & O & X \end{pmatrix}$$

соседние стороны и угол напротив

$$\begin{cases} E-x=j^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & X \\ X & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

соседние стороны и угол при одной из них

$$\begin{cases} E-y=c^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ O & O & O \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

противоположные стороны и угол

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E+x-y=d^2 \end{cases}$$

23 группы 4/9:

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ O & X & O \\ X & O & O \end{pmatrix}$$

центр и три угла

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E+x = a^2 \\ E-y = c^2 \\ E+y = g^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ X & X & X \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр и три стороны

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E-x+y = b^2 \\ E-x-y = d^2 \\ E+x+y = f^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & X \\ O & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр, соседние углы и сторона между

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E+x = a^2 \\ E-y = c^2 \\ E-x+y = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ O & X & O \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

центр, соседние углы и сторона напротив

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E+x = a^2 \\ E-y = c^2 \\ E+x-y = h^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ X & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр, соседние углы и сторона при одном из них

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E+x = a^2 \\ E-y = c^2 \\ E-x-y = d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ O & X & O \\ O & O & X \end{pmatrix}$$

центр, противоположные углы и сторона

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E+x = a^2 \\ E-x = j^2 \\ E+x-y = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ X & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр, соседние стороны и угол между ними

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E+x = a^2 \\ E-x+y = b^2 \\ E-x-y = d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ X & X & O \\ O & O & X \end{pmatrix}$$

центр, соседние стороны и угол напротив

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E-x+y = b^2 \\ E-x-y = d^2 \\ E-x = d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & X \\ X & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр, соседние стороны и угол при одной из них

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E-x+y = b^2 \\ E-x-y = d^2 \\ E-y = c^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ O & X & O \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

центр, противоположные стороны и угол

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E+x = a^2 \\ E-x+y = b^2 \\ E+x-y = h^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ X & X & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

центр, соседние стороны и угол между ними

$$\begin{cases} E = e^2 \\ E+x = a^2 \\ E-x+y = b^2 \\ E-x-y = d^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ O & O & O \\ X & O & X \end{pmatrix}$$

четыре угла

$$\begin{cases} E+x = a^2 \\ E-x = j^2 \\ E-y = c^2 \\ E+y = g^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ X & O & X \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

четыре стороны

$$\begin{cases} E-x+y = b^2 \\ E-x-y = d^2 \\ E+x+y = f^2 \\ E+x-y = h^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & X \\ O & O & O \\ X & O & O \end{pmatrix}$$

три угла и внутренняя сторона

$$\begin{cases} E+x = a^2 \\ E-y = c^2 \\ E+y = g^2 \\ E-x+y = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ O & O & X \\ X & O & O \end{pmatrix}$$

три угла и внешняя сторона

$$\begin{cases} E+x = a^2 \\ E-y = c^2 \\ E+y = g^2 \\ E+x+y = f^2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ X & O & X \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

три стороны и внутренний угол

$$\begin{cases} E+x = a^2 \\ E-x+y = b^2 \\ E-x-y = d^2 \\ E+x+y = f^2 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} O & X & O \\ X & O & X \\ X & O & O \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & O & X \\ X & O & X \\ O & O & O \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & X \\ O & O & O \\ O & X & O \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & X \\ X & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$
три стороны и внешний угол	соседние углы и не общие стороны при них	соседние углы, общая сторона и сторона напротив	соседние углы и две стороны при одном из них
$\begin{cases} E+y=g^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \\ E-x-y=d^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E+x-y=h^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-y=c^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} X & X & O \\ X & O & O \\ O & O & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & O \\ O & O & X \\ O & O & X \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} X & X & O \\ O & O & O \\ O & X & X \end{pmatrix}$
противоположные углы и стороны при одном из них	противоположные углы и соседние стороны при них	противоположные и углы, и стороны
$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x=j^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E-x-y=d^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x=j^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases}$	$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x=j^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E+x-y=h^2 \end{cases}$

Что же касается квадратов 5/9, 6/9, 7/9 и 8/9, то количества их групп совпадают с количествами групп квадратов 4/9, 3/9, 2/9 и 1/9 соответственно. Их визуальные модели получаются инверсией уже перечисленных моделей, а множества решений — пересечением множеств решений нескольких из них.

Очевидно, что системы, которыми задаются квадраты 1/9 и 2/9, а также большинство 3/9 — тривиальны. Квадратные числа, находящиеся в правой части уравнений — всего лишь параметры, а переменные E, x, y однозначно задаются через них.

Однако когда количество линейных уравнений в системе начинает превышать количество переменных, от которых она линейно зависит, параметры из правой части начинают выполнять роли переменных, и мы вынуждены решать сложные уравнения в целых числах.

Например, квадрат "противоположные углы и соседние стороны при них", можно решить следующим образом:

$$\begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x=j^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E=\left(a^2+j^2\right)/2 \\ x=\left(a^2-j^2\right)/2 \\ y=b^2-j^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E=\left(a^2+j^2\right)/2 \\ x=\left(a^2-j^2\right)/2 \\ y=b^2-j^2 \\ a^2+b^2-j^2=f^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} E=\left(a^2+j^2\right)/2 \\ x=\left(a^2-j^2\right)/2 \\ y=b^2-j^2 \\ a^2+b^2=f^2+j^2 \end{cases}$$

После чего остаётся решить уравнение $a^2+b^2=f^2+j^2$. На данном этапе вспомним параграф 2.3 и отметим, что чтобы иметь как минимум два различных представления в виде суммы квадратов, число a^2+b^2 должно делиться на как минимум две суммы квадратов. Можем записать следующее:

$$\begin{aligned} &a^2+b^2=\left(m^2+n^2\right)\left(k^2+l^2\right)=m^2k^2+n^2l^2+m^2l^2+n^2k^2= \\ &=m^2k^2+2mnkl+n^2l^2+m^2l^2-2mnkl+n^2k^2= \\ &=(mk+nl)^2+(ml-nk)^2=(mk-nl)^2+(ml+nk)^2=f^2+j^2 \end{aligned}$$

И теперь заметим, что

$$E=\frac{(mk+nl)^2+(mk-nl)^2}{2}=m^2k^2+n^2l^2$$

$$x=\frac{(mk+nl)^2-(mk-nl)^2}{2}=2klmn$$

$$y=(ml-nk)^2-(mk-nl)^2=m^2l^2+n^2k^2-m^2k^2-n^2l^2=\left(m^2-n^2\right)\left(l^2-k^2\right)$$

является решением системы. Единственным ли? — более сложный вопрос. В данном случае мы, скорее всего, можем доказать единственность данного решения, однако большинство описанных выше групп решаются более сложно, и даже не всегда имеют решение, записанное параметрически. Автор данного материала приводит данный пример, чтобы показать логику решения одной отдельной модели.

Итак, давайте посмотрим некоторые примеры квадратов, генерируемых данным решением.

$m=4,\ n=1,\ k=2,\ l=3:$

$E=16\cdot 4+1\cdot 9=73$

$x=2\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1=48$

$y=(16-1)(9-4)=15\cdot 5=75$

$$m(73,48,75)=\begin{pmatrix}121 & 100 & -2\\ -50 & 73 & 196\\ 148 & 46 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11^2 & 10^2 & -2\\ -50 & 73 & 14^2\\ 148 & 46 & 5^2\end{pmatrix}$$

$m=7,\ n=11,\ k=13,\ l=4:$

$E=49\cdot 169+121\cdot 16=10217$

$x=2\cdot 4\cdot 7\cdot 11\cdot 13=8008$

$y=(49-121)(16-169)=11016$

$$m(10217,\ 8008,\ 11016)=\begin{pmatrix}18225 & 13225 & -799\\ -8807 & 10217 & 29241\\ 21233 & 7209 & 2209\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}135^2 & 115^2 & -799\\ -8807 & 10217 & 171^2\\ 21233 & 7209 & 47^2\end{pmatrix}$$

Заметим, что в данных примерах квадраты не удовлетворяют условиям, описанным во второй главе. Генерация всех магических квадратов, удовлетворяющих только конкретной группе уменьшает количество рассматриваемых квадратов, и соответственно увеличивает вероятность обнаружения полного квадратного квадрата. Применение же условий к генерации ещё сильнее ограничивает множество перебираемых магических квадратов.

Если же предположить, что полный магический квадрат всё же не возможен, то решение различных подгрупп и наложение дополнительных условий может в конце концов привести к противоречию и тем самым доказать эту невозможность.

2. Dir-функция, интересные тройки

Решение квадратов 4/9, даже частичное, не всегда так просто вывести, как это было в последнем примере. Несмотря на то, что каждая такая группа по-своему дополняет общую теорию, большинство авторов материалов, посвящённых этой теме, и автор данного материала в том числе, в основном заостряют внимание на *нетривиальных квадратах 3/9.*

Об этом упоминалось в предыдущем параграфе, повторим это и здесь более осмысленно: *тривиальным неполным квадратным квадратом* будем считать неполный квадрат, решение которого требует решения лишь линейных уравнений. Нетривиальным квадратом же считается любой другой.

Ниже приведены примеры тривиального и нетривиального квадратов 3/9:

$$\begin{pmatrix} X & X & X \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} E+x=a^2 \\ E-x+y=b^2 \\ E-y=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=\left(a^2+b^2+c^2\right)/3 \\ x=\left(2a^2-b^2-c^2\right)/3 \\ y=\left(a^2+b^2-2c^2\right)/3 \end{cases}$$

Тривиальный: $a,b,c-$ просто параметры

$$\begin{pmatrix} O & O & O \\ X & X & X \\ O & O & O \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} E=e^2 \\ E-x-y=d^2 \\ E+x+y=f^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=e^2 \\ x+y=e^2-d^2 \\ x+y=f^2-e^2 \end{cases}$$

Нетривиальный: Вынуждены решать $2e^2=f^2+d^2$. $e,d,f-$ теперь переменные

У нетривиальных 3-квадратов есть две особенности.

Первая особенность – для каждого из них одна из переменных E,x,y может принимать любые значения. Это даёт дополнительные возможности для объединения нескольких групп 3/9 в одну группу 5/9 или 6/9.

Вторая – все они требуют решения одной и той же задачи: найти все такие A и x, что A^2-x, A^2+x- квадратные числа. Или, другими словами, задать в общем виде арифметическую прогрессию, три последовательных члена которой – квадратные числа. Или, максимально просто, решить уравнение

$$a^2+c^2=2b^2$$

где a^2,b^2,c^2- те самые последовательные квадраты.

Поскольку данное уравнение довольно похоже на подобное, задающее пифагоровы тройки, тройку чисел, подходящую под данное уравнение, в окружении автора материала принято называть *интересной.* Решение этого уравнения в общем виде:

$$\begin{aligned} a&=\left(m^2-n^2-2mn\right)k \\ b&=\left(m^2+n^2\right)k \\ c&=\left(m^2-n^2+2mn\right)k \end{aligned}$$

Однако автор материала предлагает это же решение записать в несколько другом, более компактном виде. Для этого введём функцию

$$dir(\alpha,\beta)=\frac{\alpha\beta\left(\alpha^2-\beta^2\right)}{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2}$$

И заметим, что $\dfrac{c^2-b^2}{b^2}=4dir(m,n)$. И далее, возвращаясь к определению тройки a^2,b^2,c^2 как чисел $A^2-x,\ A^2,\ A^2+x$, запишем решение системы одним-единственным выражением:

$$x=4A^2dir(m,n)$$

при любых взаимно простых m,n, если одно из $m,n-$ чётное.

В таком случае взаимно просты и выражения $mn\left(m^2-n^2\right)$ и $\left(m^2+n^2\right)^2$, а значит A должно неизбежно делиться на $\left(m^2+n^2\right)^2$. В результате все необходимые ограничения отражены в данном выражении.

Отсюда другое название интересной тройки — *dir-тройка,* или просто *дир.* История названия функции, увы, забыта, однако ввиду привычки автора и его окружения, оно сохранено.

Отметим пару свойств dir-функции:

$$dir(k\alpha, k\beta) = dir(\alpha, \beta)$$
$$dir(\alpha+\beta, \alpha-\beta) = dir(\alpha, \beta)$$

Далее для удобства обозначим числитель dir-функции как $f(m,n)$, а знаменатель как $c(m,n)$.

И теперь мы имеем аппарат для ёмкого описания всех нетривиальных 3-квадратных квадратов:

группа	решение	$m(E,x,y)$
$\begin{pmatrix} X & O & O \\ O & X & O \\ O & O & X \end{pmatrix}$	$x = 4E^2 dir(m,n)$	$m\Big(k^2c(m,n),\ 4k^2f(m,n),\ y\Big)$
$\begin{pmatrix} O & X & O \\ O & X & O \\ O & X & O \end{pmatrix}$	$y-x = 4E^2 dir(m,n)$	$m\Big(k^2c(m,n),\ x,\ 4k^2f(m,n)+x\Big)$
$\begin{pmatrix} X & O & O \\ O & O & X \\ O & X & O \end{pmatrix}$	$y = 4A^2 dir(m,n)$	$m\Big(E,\ k^2c(m,n)-E,\ 4k^2f(m,n)\Big)$

Здесь мы видим сказанное выше: для каждой группы одна из переменных остаётся свободной. Для первой группы это y, для второй x, для третьей E.

В общем же, в квадратном квадрате можно отыскать 8 интересных троек:

$$\begin{pmatrix} X & O & O \\ O & X & O \\ O & O & X \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & O & X \\ O & X & O \\ X & O & O \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ O & X & O \\ O & X & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & O & O \\ X & X & X \\ O & O & O \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} X & O & O \\ O & O & X \\ O & X & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & X & O \\ X & O & O \\ O & O & X \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} O & X & O \\ O & O & X \\ X & O & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & O & X \\ X & O & O \\ O & X & O \end{pmatrix}.$$

Первые две группы объединим словом "диагональ", следующие две словом "ортогональ", а последние четыре "ход коня".

Объединение двух пар троек генерирует либо группу квадратов 5/9, либо 6/9. Неполные квадратные квадраты, составленные из одних только интересных троек, назовём *dir-квадратами.*

Существует 6 групп 5-dir-квадратов. Решим каждую из них:

1. Две диагонали (ACEGJ-квадрат):

$$\begin{cases} x = 4E^2 dir(m_1, n_1) \\ y = 4E^2 dir(m_2, n_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E^2 = \text{НОК}(c(m_1,n_1),\ c(m_2,n_2)) \\ x = 4E^2 dir(m_1, n_1) \\ y = 4E^2 dir(m_2, n_2) \end{cases}$$

2. Две ортогонали (BDEFH-квадрат):

$$\begin{cases} y+x=4E^2dir(m_1,n_1) \\ y-x=4E^2dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E^2=\text{НОК}(c(m_1,n_1),\ c(m_2,n_2)) \\ x=2E^2(dir(m_1,n_1)-dir(m_2,n_2)) \\ y=2E^2(dir(m_1,n_1)+dir(m_2,n_2)) \end{cases}$$

3. Диагональ и ортогональ (ABEHJ-квадрат):

$$\begin{cases} x=4E^2dir(m_1,n_1) \\ y-x=4E^2dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E^2=\text{НОК}(c(m_1,n_1),\ c(m_2,n_2)) \\ x=4E^2dir(m_1,n_1) \\ y=4E^2(dir(m_1,n_1)+dir(m_2,n_2)) \end{cases}$$

4. Диагональ и ход конём из одного угла (AEFHJ-квадрат):

$$\begin{cases} x=4E^2dir(m_1,n_1) \\ y=4\big(E^2+x\big)dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E^2=c(m_1,n_1)k^2 \\ x=4k^2f(m_1,n_1) \\ y=4k^2(c(m_1,n_1)+4f(m_1,n_1))dir(m_2,n_2) \end{cases}$$

Здесь параметр k вводится на случай, когда $c(m_1,n_1)+4f(m_1,n_1)$ не делится на $c(m_2,n_2)$. На практике мы можем принимать $k=1$ и домножать весь квадрат на необходимый множитель, если y окажется дробным.

5. Ортогональ и ход конём (ABEFH-квадрат):

$$\begin{cases} y-x=4E^2dir(m_1,n_1) \\ y=4\big(E^2+x\big)dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-A^2+E^2=4E^2dir(m_1,n_1) \\ y=4A^2dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4A^2dir(m_2,n_2)-A^2=4E^2dir(m_1,n_1)-E^2 \\ y=4A^2dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2(1-4dir(m_2,n_2))=E^2(1-4dir(m_1,n_1)) \\ y=4A^2dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^2=c(m_2,n_2)\cdot(c(m_1,n_1)-4f(m_1,n_1)) \\ E^2=c(m_1,n_1)\cdot(c(m_2,n_2)-4f(m_2,n_2)) \\ y=4f(m_2,n_2)\cdot(c(m_1,n_1)-4f(m_1,n_1)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E^2=c(m_1,n_1)\cdot(c(m_2,n_2)-4f(m_2,n_2)) \\ x=4(c(m_1,n_1)\cdot f(m_2,n_2)-c(m_2,n_2)\cdot f(m_1,n_1)) \\ y=4f(m_2,n_2)\cdot(c(m_1,n_1)-4f(m_1,n_1)) \end{cases}$$

Поясним следующий момент: в п.4 мы не вводим замену $E^2+x=A^2$, так как мы точно знаем то, что E^2+x является квадратом: на это указывает первое уравнение системы. В п.5 мы вынуждены ввести замену $E^2+x=A^2$, поскольку первое уравнение не даёт никакой информации на этот счёт.

6. Пересекающиеся ходы конём (ACDFH-квадрат):

$$\begin{cases} x=4C^2dir(m_1,n_1) \\ y=4A^2dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2-E=4C^2dir(m_1,n_1) \\ E-C^2=4A^2dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E=A^2-4C^2dir(m_1,n_1) \\ A^2-4C^2dir(m_1,n_1)-C^2=4A^2dir(m_2,n_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E=A^2-4C^2dir(m_1,n_1) \\ A^2(1-4dir(m_2,n_2))=C^2(1+4dir(m_1,n_1)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E=A^2-4C^2dir(m_1,n_1) \\ A^2=c(m_2,n_2)(c(m_1,n_1)+4f(m_1,n_1)) \\ C^2=c(m_1,n_1)(c(m_2,n_2)-4f(m_2,n_2)) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = c(m_1,n_1)c(m_2,n_2)+16f(m_1,n_1)f(m_2,n_2) \\ x = 4f(m_1,n_1)(c(m_2,n_2)-4f(m_2,n_2)) \\ y = 4f(m_2,n_2)(c(m_1,n_1)+4f(m_1,n_1)) \end{cases}$$

Также отметим, что $c(m,n) \pm 4f(m,n) -$ это квадратные числа, так как это выражение ни что иное, как задание интересной тройки. Если мы разделим всё это выражение на $c(m,n)$, получим $1 \pm 4dir(m,n)$. $c(m,n)$ – средний элемент интересной тройки, отсюда: $1 \pm 4dir(m,n)$ – это рациональный квадрат. Это даёт нам право не беспокоиться по этому поводу при решении подобных уравнений

Следующие квадраты - 6/9, в общем виде так просто не решаются. Говоря точнее, мы не умеем решать их в общем виде. Таковых 5 групп: две из них заданы парой интересных троек, остальные три задаются тремя тройками. Перечислим их и дадим комментарии:

1.

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ X & X & O \\ O & X & X \end{pmatrix}$$

ACDEHJ-квадрат. Задаётся системой

$$\begin{cases} x = 4E^2 dir(m_1,n_1) \\ x = 4C^2 dir(m_2,n_2) \end{cases}$$

2.

$$\begin{pmatrix} O & X & X \\ X & O & X \\ X & X & O \end{pmatrix}$$

BCDFGH-квадрат. Задаётся системой

$$\begin{cases} x = 4G^2 dir(m_1,n_1) \\ x = 4C^2 dir(m_2,n_2) \end{cases}$$

Как видно из системы, аналогичен первому приведённому квадрату. Если $m(E,x,y) -$ ACDEHJ-квадрат, то $m(E,x,2y) -$ BCDFGH. А потому имеет смысл рассматривать лишь ACDEHJ.

3.

$$\begin{pmatrix} X & O & X \\ X & X & X \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

ACDEFH-квадрат. Задаётся системой

$$\begin{cases} x = 4C^2 dir(m_1,n_1) \\ y = 4A^2 dir(m_2,n_2) \\ x+y = 4E^2 dir(m_3,n_3) \end{cases}$$

Представляет собой пересечение ACDFH-квадрата и двух ABEFH-квадратов.

4.

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ X & X & X \\ O & X & O \end{pmatrix}$$

ABDEFH-квадрат. Задаётся системой

$$\begin{cases} y = 4A^2 dir(m_1, n_1) \\ y - x = 4E^2 dir(m_2, n_2) \\ y + x = 4E^2 dir(m_3, n_3) \end{cases}$$

Является пересечением BDEFH-квадрата и двух ABEFH-квадратов.

5.

$$\begin{pmatrix} X & X & O \\ X & X & O \\ O & X & X \end{pmatrix}$$

ABDEHJ-квадрат. Задаётся системой

$$\begin{cases} y = 4J^2 dir(m_1, n_1) \\ x = 4E^2 dir(m_2, n_2) \\ y - x = 4E^2 dir(m_3, n_3) \end{cases}$$

Является пересечением ABEHJ-квадрата, ABDEJ-квадрата и BDEHJ-квадрата.

Решение последних трёх квадратов приводит, в конце концов, к слишком сложным уравнениям, для непереборного решения которых у нас не хватает математического аппарата.

Первые два также не решены в общем виде, однако за последние два месяца мы значительно продвинулись в этой области.

3. fmn-функция. t-функция. tfmn-функция и её роль в решении квадратов 6/9

Итак, предпримем попытку решить ACDEHJ-квадрат.

$$\begin{cases} x = 4E^2 dir(m_1, n_1) \\ x = 4C^2 dir(m_2, n_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4E^2 dir(m_1, n_1) \\ 4E^2 dir(m_1, n_1) = 4C^2 dir(m_2, n_2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4E^2 dir(m_1, n_1) \\ E^2 f(m_1, n_1) c(m_2, n_2) = C^2 f(m_2, n_2) c(m_1, n_1) \end{cases}$$

Первое уравнение итоговой системы задаёт переменную первой степени, а потому не имеет для нас значения.

Во втором уравнении слева и справа у нас стоят переменные квадраты. В их множетиле мы можем, при необходимости, записать любой квадрат. То есть если в правой части у нас есть некоторое квадратное число, мы можем заявить, что E^2 на него делится, и сократить обе части на него. Таким образом, мы можем не обращать внимание на квадраты, входящие в обе части данного уравнения.

Все неквадратные числа входят в $f(m_1, n_1)$ и $f(m_2, n_2)$. Необходимо и достаточно, чтобы эти неквадратные числа совпали. Таким образом, вся система записывается необходимым и достаточным условием:

$$tf(m_1, n_1) = tf(m_2, n_2)$$

Смысл данной записи раскроем далее.

Функция $f(m,n) = mn(m-n)(m+n)$, которая в прошлом разделе давалась как числитель dir-функции, теперь имеет особую роль. Поскольку данная запись читается как "эф-эм-эн", называется эта функция также - fmn.

Как было сказано, квадратные числа в данном случае для нас не имеют значения. По этой причине мы вводим другую функцию — $t(n)$, которая данное число n отображает в n, делённое на наибольший квадрат, на который оно может быть разделено. Задать её можно следующей системой:

$$\begin{cases} t(p) = p \text{ для всякого простого } p \\ t\left(p^2\right) = 1 \text{ для всякого простого } p \\ t(m \cdot n) = t(m) \cdot t(n) \text{ для всяких } m, n\colon \text{НОД}(m,n) = 1 \end{cases}$$

$tf(m,n) = t(f(m,n))$ — всего лишь функция, введённая для более удобной записи.

Например,

$$tf(9,2) = t(9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11) = t(2 \cdot 7 \cdot 11) = t(9 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11) = t(18 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 25) = tf(18,7)$$

Теперь подставим это в наше уравнение

$$E^2 f(9,2) c(18,7) = C^2 f(18,7) c(9,2)$$

$$E^2 \cdot (9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11) \cdot \left(18^2 + 7^2\right)^2 = C^2 \cdot (18 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 25) \cdot \left(9^2 + 2^2\right)^2$$

$$E^2 \cdot 373^2 = C^2 \cdot 5^2 \cdot 85^2$$

Откуда выразим:

$$\begin{cases} E^2 = 5^2 \cdot 85^2 \\ C^2 = 373^2 \end{cases}$$

А дальше:

$$\begin{cases} E^2 = 5^2 \cdot 85^2 = 180625 \\ x = 4E^2 \cdot dir(9,2) = \dfrac{4 \cdot 5^2 \cdot 85^2}{85^2} \cdot (9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11) = 138600 \\ y = E^2 - C^2 = 5^2 \cdot 85^2 - 373^2 = 41496 \end{cases}$$

И проверяем:

$$m(180625, 138600, 41496) = \begin{pmatrix} 319225 & 83521 & 139129 \\ 529 & 180625 & 360721 \\ 222121 & 277729 & 42025 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 565^2 & 83521 & 373^2 \\ 23^2 & 425^2 & 360721 \\ 222121 & 527^2 & 205^2 \end{pmatrix}$$

Действительно, мы получили квадрат 6/9 запланированного вида. На самом деле, здесь мы видим уникальный квадрат 7/9, так как $83521 = 289^2$, однако цель данного примера была в демонстрации tfmn-подхода к генерации квадратов 6/9.

Отметим также, что 6-квадратных квадратов указанного вида значительно больше, чем 5-квадратных квадратов, например, вида ACEGJ. Так, при подстановке в систему ACEGJ-квадрата значений $m_1 = 9$, $n_1 = 2$, $m_2 = 18$, $n_2 = 7$, мы получим квадрат

$m(1005207025, 771331176, 1001385000)$, который имеет магическую константу практически в 6000 раз большую, чем ACDEHJ-квадрат при тех же параметрах.

Это может быть тем, что для ACEGJ-квадрата E обязано делится на как минимум две суммы квадратов. Для ACDEHJ-квадрата достаточно одной суммы квадратов. Тем не менее, решение последнего в общем виде может дать намного более мощный инструментарий для работы с полным квадратным квадратом.

4. Свойства fmn-функции

Конечно, мы хотим иметь решение уравнения

$$tfmn(a,b) = tfmn(c,d)$$

в общем виде, чтобы научиться решать ACDEHJ и BCDFGH-квадраты. Однако такого решения мы не имеем. Однако мы можем заметить несколько важных свойств fmn и tfmn функций, а также найти большое количество частных решений.

1. $f(b,a) = f(-a,b) = f(a,-b) = -f(a,b)$
2. $f(a,a) = f(a,-a) = f(a,0) = 0$
3. $f(ka,kb) = k^4 f(a,b)$
4. $f(a+b,a-b) = 4f(a,b)$
5. $f(a+b,a) = f(a+b,b)+f(a,b)$
6. $\{f(a,b) = f(a,c);\ b \neq c;\ \text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a,c) = 1\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Big\{a = m^2+mn+n^2;\ b = (n-m)(n+m);\ c = m(n+2n)\Big\}$

Поскольку первые пять свойств следуют напрямую из определения функции fmn, мы не станем приводить их доказательство. Для последнего же свойства мы не можем этого не сделать:

$$\begin{aligned} f(a,b) &= f(a,c) \\ ab\big(a^2-b^2\big) &= ac\big(a^2-c^2\big) \\ a^2b-b^3 &= a^2c-c^3 \\ a^2b-a^2c &= b^3-c^3 \\ a^2(b-c) &= (b-c)\big(b^2+bc+c^2\big) \\ a^2 &= b^2+bc+c^2 \\ a^2 &= (b+c)^2-bc \\ bc &= (b+c-a)(b+c+a) \end{aligned}$$

Обозначим $a-b-c = k \Longrightarrow a = b+c+k$

$$\begin{aligned} bc &= -k(2b+2c+k) \\ bc+2kb+2kc &= -k^2 \\ bc+2kb+2kc+4k^2 &= -k^2+4k^2 \\ (b+2k)(c+2k) &= 3k^2 \end{aligned}$$

Далее из последнего уравнения отметим, что если $b+2k$ и $c+2k$ имеют общие множители, то не выполняется условие $\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a,c) = 1$. Значит, они взаимно просты. И, значит, один из них имеет вид n^2, а другой $3m^2$, при этом неважно, какой из них чему соответствует. В таком случае, мы и приходим к следующему:

$$\begin{cases} b+2k = n^2 \\ c+2k = 3m^2 \\ 3k^2 = 3n^2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = n^2-2k \\ c = 3m^2-2k \\ k = nm \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = n^2-2nm \\ c = 3m^2-2nm \\ a = 3m^2-3nm+n^2 \end{cases}$$

Теперь введём замену $n' = m-n$:

$$\begin{cases} b = n^2-2nm \\ c = 3m^2-2nm \\ a = 3m^2-3nm+n^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = m^2-2mn'+n'^2-2m^2+2mn' \\ c = 3m^2-2m^2+2mn' \\ a = 3m^2-3m^2+3mn'+m^2-2mn'+n'^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = n'^2-m^2 \\ c = m^2+2mn' \\ a = m^2+mn'+n'^2 \end{cases} \qquad \square$$

Итоговая система задаёт то же множество решений и практически не содержит коэффициентов, поэтому она предпочтительнее.

Общее решение уравнения $f(a,b) = f(c,d)$ пока не найдено, и эта проблема является одной из важнейших в рассматриваемой области.

Свойства 1, 2 указывают на то, что нам достаточно перебирать $f(m,n)$ лишь при условии $m > n > 0$.

Свойство 3 указывает на то, что достаточно рассматривать лишь fmn-функцию лишь от взаимно простых чисел.

Из свойства 4 вытекает унарная операция над вектором $R2(a,b) = (a+b, a-b)$ и обратная ей $R0.5(a,b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$. $f(R2(a,b)) = f(a,b)$. Заметим также, что $c(R2(a,b)) = c(a,b)$, а потому мы не можем взять для генерации dir-квадрата пару векторов (a,b) и $(a+b,a-b)$ — в таком квадрате будут повторяющиеся элементы. Тем не менее, R2-переход имеет важную роль в теории fmn-функции. В частности, нам не нужно рассматривать пары нечётных чисел, ведь от них всегда можно сделать R0.5 переход, и получить меньшую, уже рассмотренную пару.

Для краткой записи, пары нечётных взаимно простых чисел мы будем называть odd-odd, а любую другую пару взаимно простых чисел — odd-even.

Также посвятим небольшую часть текста свойству №5. В случае, если $2b > a$, мы можем применить его рекурсивно, и получить выражение

$$f(a+b,b) = f(a+b,a) + f(a,a-b) + f(b,a-b)$$

Далее, если $2a-2b > b$, мы сможем вновь применить рекурсию. В общем же случае, длина цепочки тем больше, чем отношение a/b ближе к φ. Этот забавный факт пока не нашёл применения в теории квадратных квадратов, однако явно достоин внимания.

5. Найденные решения tfmn-уравнения

Перейдём к более глубокому рассмотрению tfmn-уравнения.

Назовём группу решений уравнения $tf(a,b)=tf(c,d)$ *линейной,* если

$$c=\gamma(a,b),$$
$$d=\delta(a,b),$$
$$tf(x,y)=tf(\gamma(x,y),\delta(x,y))\Leftrightarrow t(\alpha(x,y))=t(\beta(x,y))$$
$$\alpha(x,y),\ \beta(x,y),\ \gamma(x,y),\ \delta(x,y)-\text{линейные комбинации } x,y$$

Например, R2-переход является линейным решением, пусть и тривиальным.

Другой пример линейной группы решений - это равенство

$$tf\left(m^2-2n^2,6n^2\right)=tf\left(2m^2-4n^2,m^2+4n^2\right) \tag{1}$$

В действительности, если $a=m^2-2n^2,\ b=6n^2, c=2m^2-4n^2, d=m^2+4n^2$, то мы имеем:

$$c=2a$$
$$d=a+b$$

При этом

$$f(a,b)=ab(a-b)(a+b)$$
$$f(2a,a+b)=2a(a-b)(a+b)(3a+b)$$

То есть

$$tf(a,b)=tf(2a,a+b)\Leftrightarrow t(b)=t(2(3a+b))$$

Что в полной мере удовлетворяет условию линейного решения. Более того, выражение (1) — единственное решение уравнения $tf(a,b)=tf(2a,a+b)$ во взаимно простых числах. Докажем это.

$$t(b)=t(2(3a+b))$$
$$m^2b=2n^2(3a+b)$$
$$6n^2a=\left(m^2-2n^2\right)b$$

Из предположения о том, что $a,b-$ взаимно простые числа, заметим, что b и $3a+b$ не имеют никаких общих делителей кроме, может быть, 3. Это означает, что и m,n не могут иметь никаких других общих множителей [кроме, может быть, 2]. В таком случае b делится на 3, а a не делится. Если же b не делится на 3, то на 3 делится m^2-2n^2, причём это возможно лишь тогда, когда и $m,$ и n делятся на 3. В таком случае, в правой части 3 всегда будет входить в чётной степени, а в левой - в нечётной. Пришли к противоречию. b делится на 3, а $m,n-$ взаимно просты.

Очевидно, имеет смысл рассматривать лишь odd-even так как иначе в обеих частях равенства $tf(a,b)=tf(2a,a+b)$ мы можем совершить R0.5-переход.

В таком случае, если b не имеет делителем 2, то a делится на 2, и $3a+b$ нечётное. А значит, в левую часть выражения $m^2b=2n^2(3a+b)$ 2 будет входить в чётной степени, а в правую часть - в нечётной.

В конце концов, единственным решением оказывается $a=m^2-2n^2,\ b=6n^2$.

Векторный переход $(a,b)\to(2a,a+b)$ обозначим за F1. То есть $F1(a,b)=(2a,a+b)$. Выражение (1) назовём F1-равенством.

По аналогии ввсдём $F2(a,b)=(2a,a-b)$ и $F3(a,b)=(a+b,b)$. Этим переходам соответствуют равенства:

$$\begin{gathered}tf\left(m^2+2n^2,6n^2\right)=tf\left(2m^2+4n^2,m^2-4n^2\right)\\ tf\left(m^2+2n^2,m^2-n^2\right)=tf\left(2m^2+n^2,m^2-n^2\right)\end{gathered} \tag{2}$$

Несложно заметить, что все прочие линейные решения выражаются через F1, F2, F3, R2, а также элементарные переходы, описанные в свойствах 1-3 fmn-функции.

Также отметим, что F2, на самом деле, является излишним решением, так как $F2(a,b)=F3(R2(a,b))$.

Автор принял решение сохранить его в данном материале для удобства, а также по той причине, что этим способом порождается единственный 7/9.

Ещё одно важное замечание: равенства, записанные под номером (2), сами по себе задают не всё множество соответствующих им решений, однако эта недостаточность легко устраняется: в случае, когда a, b имеют общие множители [2, 3 или 6], разделим их на НОД. Таким образом мы дополним множество недостающими решениями.

И последнее уточнение: как было видно из вывода выражения (1), $m^2 / n^2 -$ есть ни что иное, как отношение $f(a,b) / f(c,d)$.

Следующее равенство по аналогии с предыдущими названо F4, хоть и отличается по многим параметрам.

$$tf\left(m^2+mn+n^2, m^2-n^2\right) = tf\left(m^2+mn+n^2, m^2+2nm\right) \tag{3}$$

Несложно заметить, что это равенство есть отражение свойства 6 функции fmn. Действительно, если равны $f(a,b)$ и $f(c,d)$, то равны и $tf(a,b)$ и $tf(c,d)$. Это выражение порождает немалое количество решений. Кроме того, оно не имеет общих решений, за исключением первых нескольких, с другими равенствами, так как для них отношение двух fmn равно m^2 / n^2, а для него оно всегда 1.

На основе этого, мы можем строить целые графы решений. Так, $tf(6,1)$ и $tf(5,2)$ связаны через F2-переход. С другой стороны, $R2(6,1) = (7,5)$, а $f(7,5) = f(8,7) -$ здесь уже применимо лишь F4-равенство. Таким образом, мы имеем и $tf(5,2) = tf(8,7)$.

Данный пример приведён лишь с целью объяснить идею графового представления решений и является надуманным, так как все три пары чисел могут быть связаны и просто через F4, однако в более сложных случаях мы будем разграничивать применяемые средства.

Читатель, наверняка, заметил, что у F1-4-равенств имеется общее свойство: a, b, c, d в конце концов записываются квадратными трёхчленами, однако слагаемое nm появляется только лишь в F4. Почему бы в таком случае не попробовать поискать другие решения, основанные на том же принципе.

Автор задался этим вопросом и программно проверил tfmn-равенства между всеми парами многочленов вплоть до суммы абсолютных значений коэффициентов, равной 20. Предполагается, что дополнением к этому материалу будет идти код, который может быть проверен любым желающим. Было найдено около 40 нетривиальных решений tfmn-уравнения, записываемых в общем виде через квадратные трёхчлены, и все они оказались частными случаями F1, F3 или F4-равенств. Отсюда слабая гипотеза: других решений tfmn-уравнения, записываемых в общем виде через квадратные трёхчлены, не существует.

Последнее множество решений F7 [обозначения F5, F6 было решено оставить на случай, если найдутся более адекватные варианты], найденное автором этого материала, кардинально отличается от остальных. Связано оно с тем, как мы определяли fmn-функцию впервые. Напомним, $4f(a,b)$ есть ни что иное, как разность арифметической прогрессии трёх квадратных чисел со средним числом $c(a,b) = \left(a^2+b^2\right)^2$. Отсюда:

$$tf(c(a,b), 4f(a,b)) = t(c(a,b) \cdot (c(a,b) - 4f(a,b)) \cdot (c(a,b) + 4f(a,b)) \cdot 4f(a,b)) =$$
$$= t(4f(a,b)) = tf(a,b)$$

И теперь в сокращённом варианте:

$$tf(a,b) = tf\left(\left(a^2+b^2\right)^2, 4f(a,b)\right)$$

Это свойство, с одной стороны, воодушевляет тем, что ставит абсолютно каждому значению tfmn бесконечное множество решений. Оно может быть использовано при доказательстве очень большого количества теорем о tfmn-функции. С другой стороны, скорость, с которой растут значения fmn в данном случае, настолько велика, что F7 становится практически не применимым при генерации квадратов. Наименьший квадрат, получаемый таким образом, это ACEFGH, построенный на паре $f(2,1)$, $f(25,24)$. Следующий квадрат - это уже пара $f(3,2)$, $f(169,120)$. При увеличении a, b в k раз, $f(F7(a,b))$ возрастёт в k^{16} раз.

Никаких прочих решений в общем виде пока что не найдено. Тем не менее, графовый подход позволяет насобирать достаточно большие группы решений. В малых числах в эти группы не входят лишь единичные решения. Как правило, поиск других решений требует решения уравнений в целых числах как минимум четвёртой степени. Наиболее привлекательные из неописанных в общем виде решений:

$$tf(43,42) = tf(43,8)$$
$$tf(128,7) = tf(8,7)$$

Более чем вероятно, что связаны не только пары чисел с одинаковыми tfmn, но и равенства с различными tfmn.

Но пока мы ограничены этими группами решений. К счастью, каждое из этих решений отображается на тройку E, x, y без деления на НОД и других сложностей. Выразим их все по очереди, начиная с конца. Напомним, система для квадрата 6/9 выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x = 4E^2 dir(m_1,n_1) \\ E^2 f(m_1,n_1)c(m_2,n_2) = H^2 f(m_2,n_2)c(m_1,n_1) \\ y = H^2 - E^2 \end{cases}$$

Для F7:

$$H^2 \cdot f(a,b) \cdot \left(\left(a^2+b^2\right)^4 + 16(f(a,b))^2\right)^2 =$$
$$= E^2 \cdot 4f(a,b)\left(a^2+b^2\right)^2\left(a^2+2ab-b^2\right)^2\left(a^2-2ab-b^2\right)^2 \cdot \left(a^2+b^2\right)^2$$

$$\begin{cases} E^2 = \left(\left(a^2+b^2\right)^4 + 16\left(a^3b-ab^3\right)^2\right)^2 \\ H^2 = 4\left(a^2+b^2\right)^4\left(a^2+2ab-b^2\right)^2\left(a^2-2ab-b^2\right)^2 \\ x = 16\left(a^2+b^2\right)^2\left(a^2+2ab-b^2\right)^2\left(a^2-2ab-b^2\right)^2 \\ y = \left(a^4+6a^2b^2-3b^4\right)\left(b^4+6a^2b^2-3a^4\right)\left(a^8-28a^6b^2+6a^4b^4-28a^2b^6+b^8\right) \end{cases}$$

Заметим, что здесь E^2, E^2-x, E^2+x нечётные, E^2+y, E^2+y-x, E^2+y+x делятся на 4, а значит неизбежно E^2-y, E^2-y-x, E^2-y+x делятся на 2 и не делятся на 4. То есть все 6-квадраты такого вида никогда не будут 7-квадратами.

Но мы можем задать квадрат и наоборот, системой:

$$\begin{cases} E^2 = 4\left(a^2+b^2\right)^4\left(a^2+2ab-b^2\right)^2\left(a^2-2ab-b^2\right)^2 \\ H^2 = \left(\left(a^2+b^2\right)^4 + 16\left(a^3b-ab^3\right)^2\right)^2 \\ x = 16\left(a^2+b^2\right)^2\left(a^2+2ab-b^2\right)^2\left(a^2-2ab-b^2\right)^2 \\ y = \left(a^4+6a^2b^2-3b^4\right)\left(3a^4-6a^2b^2-3a^4\right)\left(a^8-28a^6b^2+6a^4b^4-28a^2b^6+b^8\right) \end{cases}$$

Но в таком случае, у нас в каждой строке и в каждом столбце будут стоять два квадрата, один кратный четырём, другой нечётный. Магическая константа в этом квадрате кратна 4, а потому третье число в рассматриваемой строке будет иметь вид $4k+3$, то есть не может быть квадратом.

Что же касается третьего случая - ABDFHJ-квадрата, его мы в принципе не можем построить [имеется ввиду, минимальный], так как для него требуется, чтобы те две прогрессии квадратов, на которых он строится, были нечётными, что в данном случае не выполняется.

Таким образом, ни один из 6-квадратов, задающихся через F7, не может быть 7-квадратом. Тем не менее, роль F7 в нашей теории не ограничивается лишь генерацией, и это мы увидим в следующем параграфе.

Для F4:

$$H^2 \cdot f(a,b) \cdot \left(\left(m^2+mn+n^2\right)^2 + \left(m^2-n^2\right)^2\right)^2 =$$

$$= E^2 \cdot f(a,b) \cdot \left(\left(m^2+mn+n^2\right)^2 + \left(m^2+2mn\right)^2\right)^2$$

$$\begin{cases} E^2 = \left(\left(m^2+mn+n^2\right)^2 + \left(m^2-n^2\right)^2\right)^2 \\ H^2 = \left(\left(m^2+mn+n^2\right)^2 + \left(m^2+2mn\right)^2\right)^2 \\ x = 4mn(m+n)(m-n)(m+2n)(2m+n)\left(m^2+mn+n^2\right) \\ y = n(2m+n)\left(2m^2+n^2\right)\left(2m^2+2mn-n^2\right)\left(2m^2+4mn+3n^2\right) \end{cases}$$

Здесь, однако, на учитывается тот факт, что E^2, H^2- не взаимно просты в общем случае.

Опять же, требование к нечётности всех элементов квадрата удовлетворится тогда и только тогда, когда E будет нечётно, а x, y чётны. В данном случае, x всегда делится на 4.

Чётность y зависит только от n. В таком случае, оно должно быть чётным. y будет делиться по крайней мере на 32. А $x-$ как минимум на 16.

А значение E независимо от чётности m будет чётным, что неудовлетворяет требованию минимального квадрата.

Тем не менее, при нечётном m (а таковым оно должно быть ввиду взаимной простоты с n), степень вхождения двойки в E, как можно заметить, не превысит второй (сумма нечётных квадратов в квадрате). А значит, мы сможем сократить квадрат на 4 и потенциально получить минимальный.

6. Сопоставление найденных решений с уже известными мировому сообществу

Математики и любители со всего мира, решающие ту же проблему, что и мы, наверняка знакомы с сайтом http://www.multimagie.com/English/SquaresOfSquaresSearch.htm

На этом сайте, кроме всего прочего, публикуются последние исследования в области магических квадратов. Считаем уместным в данном материале указать, как соотносится наше исследование с прочими.

1.

Аркадиус Велосовски из Польши опубликовал своё частное решение для 6/9:

- $w = 6n^2 + 6n + 2,$
- $x = 2n + 1,$
- $y = 3n^2 + 2n,$
- $z = 3n^2 + 4n + 1.$

$(wz + xy)^2$	$(wy - xz)^2$	$(2y^2 - z^2)x^2 + (2z^2 - y^2)w^2$
$2(x^2y^2 + w^2z^2) - (wy + xz)^2$	$x^2y^2 + w^2z^2$	$(wy + xz)^2$
$x^2z^2 + w^2y^2$	$2(x^2y^2 + w^2z^2) - (wy - xz)^2$	$(wz - xy)^2$

Обобщим до

$$w = 6n^2 + 6mn + 2m^2$$
$$x = 2mn + m^2$$
$$y = 3n^2 + 2mn$$
$$z = 3n^2 + 4n + m^2$$

В таком случае,

$$H^2 = x^2z^2 + w^2y^2 = \left(18n^4 + 30n^3m + 19n^2m^2 + 6nm^3 + m^4\right)^2$$
$$E^2 = x^2y^2 + w^2z^2 = \left(18n^4 + 42n^3m + 37n^2m^2 + 14nm^3 + 2m^4\right)^2$$
$$Y = m(2n+m)\left(6n^2 + 4mn + m^2\right)\left(6n^2 + 6mn + m^2\right)\left(6n^2 + 8mn + 3m^2\right)$$
$$X = 4mn(m+n)(2m+n)(3m+n)(3m+2n)\left(3m^2 + 3mn + 1\right)$$

Подставив в систему для F4 $n = 2n' + m',\ m = -n'$, получим систему выше, с точностью до знака в выражении для Y. Это означает всего лишь то, что Аркадиус рассматривал магические квадраты-отражения наших.

Таким образом, решение Аркадиуса – есть частный случай F4, а конкретно, случай при $n = 2x + 1,\ m = -x$.

2.

Другое решение от Аркадиуса было найдено раньше, а соотнести его с нашим исследованием будет сложнее, так как оно записывается рекурсивно:

Received December 20 and 22, 2019

One year after his above parametric solutions of 3x3 magic squares of 5 squared integers, one more squared integer! **Arkadiusz Wesolowski** found this marvelous parametric solution of 3x3 magic squares of 6 squared integers:

- x = [(3 + sqrt(3))*(2 + sqrt(3))$^{n+1}$ + (3 - sqrt(3))*(2 - sqrt(3))$^{n+1}$]/6,
- y = [(3 + sqrt(3))*(2 + sqrt(3))^{n} + (3 - sqrt(3))*(2 - sqrt(3))^{n}]/6,
- z = 2^n * [(1 + sqrt(3)/2)$^{n+1}$ - (1 - sqrt(3)/2)$^{n+1}$]/sqrt(3).

$(xy - z)^2$	$(xz + y)^2$	$x^2 + y^2z^2$
$(x + yz)^2$	$(x^2 + y^2)(z^2 + 1)/2$	$(xz - y)^2$
$x^2z^2 + y^2$	$(yz - x)^2$	$(xy + z)^2$

The three first examples of 3x3 magic squares, constructed with n = 1 (-> (x, y, z) = (11, 3, 4)), n = 2 (-> 41, 11, 15), and n = 3 (-> 153, 41, 56):

29^2	47^2	265		436^2	626^2	28906		6217^2	8609^2	5295025
23^2	1105	41^2		206^2	203626	604^2		2449^2	39353665	8527^2
1945	1^2	37^2		378346	124^2	466^2		73412305	2143^2	6329^2

When n is an even positive number, we can prove that the cells in red can't be squared integers. His quick search of odd n <= 2*10^5 didn't produce 3x3 magic squares with seven, eight, or nine square numbers. But maybe a larger odd n?

This was not given by Arkadiusz, but x, y, z can be easily computed with these recurrence formulas:

- x(0) = 3
- y(0) = 1
- z(0) = 1

- x(n) = 3*x(n-1) + 2*z(n-1)
- y(n) = x(n-1)
- z(n) = x(n-1) + z(n-1)

Пусть $E, X, Y-$ определяющие по нашей теории квадрат параметры.
Заметим, что

$$E = \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+1\right)}{2}$$

$$Y = A - H = (xy-z)^2 - (yz-x)^2 = \left(x^2-z^2\right)\left(y^2-1\right)$$
$$Y = F - A = (xz-y)^2 - (xy-z)^2 = \left(z^2-y^2\right)\left(x^2-1\right)$$

$$X = \frac{(xy+z)^2-(xy-z)^2}{2} = \frac{4xyz}{2} = 2xyz$$

$$Y = \left(9x^2+12xz+4z^2\right)$$

Теперь выпишем первые несколько значений, чтобы узреть красоту взаимосвязи:

x	y	z	E	X	Y
3	1	1	10	6	$0 = 4f(1,1) = 4f(2,0)$
11	3	4	1105	264	$840 = 4f(5,2) = 4f(6,1)$
41	11	15	203626	13530	$174720 = 4f(20,6) = 4f(21,5)$
153	41	56	39353665	702576	$34058640 = 4f(76,21) = 4f(77,20)$
571	153	209	15264674900	36517734	$6609482880 = 4f(285,77) = 4f(286,76)$

Заметим, что $Y = 4f\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) = 4f\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$ и докажем.

Но прежде докажем, что $2z = x - y$.
Для начального случая верно:

$$2z_0 = 2 = 3 - 1 = x_0 - y_0$$

Для последующих также верно:

$$2z_{n+1} = 2x_n + 2z_n = (3x_n + 2z_n) - x_n = x_{n+1} - y_{n+1}$$
$$z_{n+1} = \frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{2}$$

Теперь, избавившись от z, можем переписать выражения выше:

$$Y = \left(x^2 - z^2\right)\left(y^2 - 1\right) = \left(x - \frac{x-y}{2}\right)\left(x + \frac{x-y}{2}\right)(y-1)(y+1)$$
$$Y = \left(z^2 - y^2\right)\left(x^2 - 1\right) = \left(\frac{x-y}{2} - y\right)\left(\frac{x-y}{2} + y\right)(x-1)(x+1)$$

Или

$$Y = \frac{1}{4}(x+y)(3x-y)(y-1)(y+1)$$
$$Y = \frac{1}{4}(x-3y)(x+y)(x-1)(x+1)$$

Поскольку эта публикация не раз проверялась, мы позволим себе не доказывать эквивалентность двух выражений, записанных выше, для конкретной системы - без их равенства не может существовать ни один такой магический квадрат.

Поэтому для данной рекурсии мы можем считать тождеством

$$\frac{1}{4}(x+y)(3x-y)(y-1)(y+1) = \frac{1}{4}(x-3y)(x+y)(x-1)(x+1)$$
$$(3x-y)(y-1)(y+1) = (x-3y)(x-1)(x+1)$$
$$(3x-y)\left(y^2-1\right) = (x-3y)\left(x^2-1\right)$$
$$3xy^2 - 3x - y^3 + y = x^3 - x - 3x^2y + 3y$$
$$x^3 - 3xy^2 - 3x^2y + y^3 = -2x - 2y$$
$$(x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - 3xy(x+y) = -2(x+y)$$
$$x^2 - xy + y^2 - 3xy = -2$$
$$x^2 - 4xy + y^2 + 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 4xy - 2$$

Мы хотим доказать, что

$$Y = 4f\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) = \frac{1}{4}(x-1)(y+1)(x+y)(x-y-2)$$

Приравняем формулу для Y выше к этому выражению:

$$\frac{1}{4}(x+y)(3x-y)(y-1)(y+1) = \frac{1}{4}(x-1)(y+1)(x+y)(x-y-2)$$
$$(3x-y)(y-1) = (x-1)(x-y-2)$$
$$3xy - \cancel{3}x - y^2 + \cancel{y} = x^2 - xy - \cancel{2}x - \cancel{x} + \cancel{y} + 2$$
$$x^2 - 4xy + y^2 + 2 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 4xy - 2$$

Последнее выражение, как и было сказано, является тождеством. Если оно не верно, магический квадрат просто не будет магическим.

Аналогично доказывается, что

$$Y = 4f\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}\right)$$

Теперь нам остаётся заметить, что, если

$$f\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}\right) = f\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+1}{2}\right), \text{ то}$$

$$f(x+y, x-y+2) = f(x+y, x-y-2) \ [4 \text{ свойство } fmn-\text{функции}]$$

А это, по 6 свойству fmn-функции, ничто иное как частный случай $F4$.

Заметим, что рассматриваемые квадраты - это квадраты вида $ABDFHJ$, которые задаются системой:

$$\begin{cases} Y = 4dir(m_1, n_1) \cdot A^2 \\ Y = 4dir(m_2, n_2) \cdot J^2 \end{cases}$$

и никак иначе.

При таком раскладе, чтобы окончательно убедиться в том, что данная формула целиком покрывается случаем F4 для ABDFHJ-квадратов, необходимо показать, что

$$A^2 = \left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\left(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{4}(4xy + 2y - 2x)\right)^2$$

$$J^2 = \left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{4}\left(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{4}(4xy + 2x - 2y)\right)^2$$

В итоге,

$$A = xy + \frac{y-x}{2}$$

$$J = xy + \frac{x-y}{2}$$

При том, что по определению,

$$A = xy - z$$

$$J = xy + z$$

А мы выяснили, что $z = \dfrac{x-y}{2}$. То есть действительно

$$\begin{cases} Y = 4dir\left(\dfrac{x-1}{2}, \dfrac{y+1}{2}\right)A^2 \\ Y = 4dir\left(\dfrac{x+1}{2}, \dfrac{y-1}{2}\right)J^2 \\ f(x+y, x-y-2) = f(x+y, x-y+2) \end{cases}$$

Этот случай целиком охватывается через решение F4.

Далее скажем по несколько слов о нескольких других исследованиях

3.

Received September 22, 2017

Joseph Hurban, when he was student tutor at TCNJ (College of New Jersey, USA), sent this nice formula producing 3x3 magic squares of 5 squares:

$(10z^2 + 20z + 5)^2$	$b = 7^2(2z^2 + 1)^2 - 4z(2z^2 + 101z + 1)$	$c = (2z^2 + 1)^2 + 8z(26z^2 + 38z + 13)$
$(2z^2 + 2z + 1)^2$	$(10z^2 + 10z + 5)^2$	$(14z^2 + 14z + 7)^2$
$g = 7^2(2z^2 + 1)^2 + 8z(24z^2 - 13z + 12)$	$h = (2z^2 + 1)^2 + 4z(102z^2 + 151z + 51)$	$(10z^2 - 5)^2$

Is it possible to obtain supplemental squared integers in cells b, c, g, and h? With a MATLAB program, he tried to find solutions, and from z = 0 to 1,000,000, found five solutions:

- z = 0 : b, c, g, h are squared integers, but the solution does not use unique integers
- z = 1 : b, c, g, h are squared integers, but the solution does not use unique integers
- z = 3 : c = 95^2, producing a 3x3 magic square of 6 squares
- z = 10: c = 529^2, producing a 3x3 magic square of 6 squares
- z = 12 : h = 937^2, producing a 3x3 magic square of 6 squares

Examples with z = 1, 2, 3:

35^2	5^2	25^2		85^2	2281	3169		155^2	13825	95^2
5^2	25^2	35^2		13^2	65^2	91^2		25^2	125^2	175^2
25^2	35^2	5^2		5281	6169	35^2		22225	17425	85^2

I checked that there is no other solution with more than 5 squared integers for any z < 10^10.

Это, очевидно, частный случай $ABEHJ-$ квадратов. Все решения таких квадратов удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x = 4dir(m_1, n_1)E^2 \\ x - y = 4dir(m_2, n_2)E^2 \end{cases}$$

Формула Жозефа пропускает, например, квадрат для

$$m_1 = 3,\ n_1 = 4,\ m_2 = 3,\ n_1 = 1:$$

17^2	$5^2 \cdot 7^2$	19^2
$17 \cdot 41$	5^4	$7 \cdot 79$
$7 \cdot 127$	5^2	31^2

И для $m_1 = 3,\ n_1 = 1,\ m_2 = 3,\ n_1 = 4:$

$5^2 \cdot 7^2$	17^2	19^2
-239	5^4	1489
$7 \cdot 127$	31^2	5^2

4.

Arkadiusz Wesolowski, Poland, found two parametric solutions of 3x3 magic squares of 5 squared integers. With n >= 1, let

- x = -1 + [(sqrt(2)/2)*((3 + 2*sqrt(2))^n - (3 - 2*sqrt(2))^n) + (3 + 2*sqrt(2))^n + (3 - 2*sqrt(2))^n)]/2

Or equivalent, the value of x can also be obtained with this recurrence formula:

- x = a(n) = 6*a(n-1) - a(n-2) + 4, starting with a(0) = 0 and a(1) = 4

Then we obtain this magic square, the integers in black being squared integers:

$17x^4 + 44x^3 + 34x^2 + 10x + 1$	$9x^2 + 6x + 1$	$10x^4 + 28x^3 + 23x^2 + 8x + 1$
$2x^4 + 8x^3 + 11x^2 + 6x + 1$	$9x^4 + 24x^3 + 22x^2 + 8x + 1$	$16x^4 + 40x^3 + 33x^2 + 10x + 1$
$8x^4 + 20x^3 + 21x^2 + 8x + 1$	$18x^4 + 48x^3 + 35x^2 + 10x + 1$	$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 6x + 1$

First examples with n = 1 (-> x = 4) and n = 2 (-> x = 28):

7753	13^2	4753		11441977	85^2	6779473
35^2	65^2	85^2		1189^2	2465^2	3277^2
3697	91^2	697		5372977	3485^2	710473

The other parametric solution is a derivative of the first one above. Again with n >= 1:

- x = 1 + [(sqrt(2)/2)*((3 + 2*sqrt(2))^n - (3 - 2*sqrt(2))^n) + (3 + 2*sqrt(2))^n + (3 - 2*sqrt(2))^n]/2
- or x = a(n) = 6*a(n-1) - a(n-2) - 4, starting with a(0) = 2 and a(1) = 6

$17x^4 - 44x^3 + 34x^2 - 10x + 1$	$9x^2 - 6x + 1$	$10x^4 - 28x^3 + 23x^2 - 8x + 1$
$2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 6x + 1$	$9x^4 - 24x^3 + 22x^2 - 8x + 1$	$16x^4 - 40x^3 + 33x^2 - 10x + 1$
$8x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 8x + 1$	$18x^4 - 48x^3 + 35x^2 - 10x + 1$	$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 6x + 1$

First examples with n = 1 (-> x = 6) and n = 2 (-> x = 30):

13693	17^2	7693		12612301	89^2	7364461
35^2	85^2	115^2		1189^2	2581^2	3451^2
6757	119^2	757		5958661	3649^2	710821

Такой же частный случай для $BDEFH-$ квадрата

7. Важные теоремы и свойства tfmn-функции

Связка *t-функции* и *fmn*-функции даёт возможности рассуждать о факторизации *tfmn-функции.*

Во-первых, $tfmn \neq 1$ при любых m, n. Этот факт известен как теорема Ферма в прямоугольном треугольнике, и доказывается методом бесконечного спуска.

Аналогично, но чуть сложнее доказывается $tfmn \neq 2$.

Во-вторых, рассмотрим случай, когда $tfmn = p$, где $p-$ любое простое. Это означает, что из чисел $a, b, a+b, a-b$, делящих $f(a,b)-$ три квадратных числа.

Мы, безусловно, не можем утверждать, будет ли итоговое значение t-функции простым или нет, но точно можем утверждать, что других случаев нет.

Переберём все случаи:

1.

$a = X^2$

$b = Y^2$

$a + b = Z^2$

$a - b = pW^2$

$X^2 + Y^2 = Z^2 \Longrightarrow$

$$1.1 \begin{cases} X = m^2 - n^2 \\ Y = 2mn \\ Z = m^2 + n^2 \\ pW^2 = m^4 + n^4 - 6m^2n^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \left(m^2 - n^2\right)^2 \\ b = 4m^2n^2 \\ tf(a,b) = t\left(m^4 + n^4 - 6m^2n^2\right) \end{cases}$$

$$1.2 \begin{cases} X = 2mn \\ Y = m^2 - n^2 \\ Z = m^2 + n^2 \\ pW^2 = 6m^2n^2 - m^4 - n^4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4m^2n^2 \\ b = \left(m^2 + n^2\right)^2 \\ tf(a,b) = t\left(6m^2n^2 - m^4 - n^4\right) \end{cases} \qquad \text{(совпадает с 1.1)}$$

2.

$a = X^2$

$b = Y^2$

$a + b = pW^2$

$a - b = Z^2$

$X^2 - Y^2 = Z^2 \Longrightarrow$

$$2.1 \begin{cases} X = m^2 + n^2 \\ Y = 2mn \\ Z = m^2 - n^2 \\ pW^2 = m^4 + n^4 + 6m^2n^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \left(m^2 + n^2\right)^2 \\ b = 4m^2n^2 \\ tf(a,b) = t\left(m^4 + n^4 + 6m^2n^2\right) \end{cases}$$

$$2.2 \begin{cases} X = m^2 + n^2 \\ Y = m^2 - n^2 \\ Z = 2mn \\ pW^2 = 2\left(m^4 + n^4\right) \end{cases}$$

В 2.2 мы, очевидно, имеем дело с $R2$ от некоторого другого случая. Этот случай будет представлен ниже.

3.

$a = pW^2$

$b = X^2$

$a + b = Y^2$

$a - b = Z^2$

$2X^2 + Z^2 = Y^2$

$2X^2 = (Y - Z)(Y + Z)$

$$3.1 \begin{cases} Y - Z = 2m^2 \\ Y + Z = n^2 \\ X = mn \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2Y = 2m^2 + n^2 \\ 2Z = n^2 - 2m^2 \\ X = mn \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y = m^2 + 2n'^2 \\ Z = 2n'^2 - m^2 \\ X = 2mn' \\ pW^2 = m^4 + 4n'^4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a = m^4 + 4n^4 \\ b = 4m^2n^2 \\ tf(a,b) = t\left(m^4 + 4n^4\right) \end{cases}$$

3.2 $\begin{cases} Y - Z = m^2 \\ Y + Z = 2n^2 \\ X = mn \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2Y = m^2 + 2n^2 \\ 2Z = 2n^2 - m^2 \\ X = mn \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Y = 2m'^2 + n^2 \\ Z = n^2 - 2m'^2 \\ X = 2m'n \\ pW^2 = 4m'^4 + n^4 \end{cases} \Longrightarrow$

$\begin{cases} a = m^4 + 4n^4 \\ b = 4m^2n^2 \\ tf(a,b) = t\left(m^4 + 4n^4\right) \end{cases}$ (совпадает с 4.1)

4.

$a = X^2$

$b = pW^2$

$a + b = Y^2$

$a - b = Z^2$

Прежде чем рассматривать этот случай, обратим внимание, что $Z^2 + Y^2 = 2X^2$. Это означает, что $b = 4fmn$, то есть если $tf\left(X^2, pW^2\right)$ и является простым числом, существуют меньшие a_0, b_0 с таким же значением для $tf(a_0, b_0)$. То есть рассматривать эту ситуацию нет смысла.

Теперь выпишем заново значимые результаты:

1. $\begin{cases} a = \left(m^2 - n^2\right)^2 \\ b = 4m^2n^2 \\ tf(a,b) = t\left(m^4 + n^4 - 6m^2n^2\right) \end{cases}$

2. $\begin{cases} a = \left(m^2 + n^2\right)^2 \\ b = 4m^2n^2 \\ tf(a,b) = t\left(m^4 + n^4 + 6m^2n^2\right) \end{cases}$

3. $\begin{cases} a = m^4 + 4n^4 \\ b = 4m^2n^2 \\ tf(a,b) = t\left(m^4 + 4n^4\right) \end{cases}$