

• Топология

- **топологическое пространство** — упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, где X (*носитель*) — множество, а Ω (*топология*) — множество каких-то его подмножеств + аксиомы:
 - $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$ (пустое множество и всё пространство открыты)
 - Если $\{A_i\}, A_i \in \Omega$ — некоторое семейство элементов Ω , то $\bigcup_i A_i \in \Omega$ (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
 - Если $A_1, A_2, \dots, A_n, A_i \in \Omega$ — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$
- **открытое и замкнутое множество**
Открытое множество — множество из Ω .
Замкнутое множество — мн-во, дополнение которого открыто.
- **внутренность и замыкание множества**
внутренность A — максимальное открытое множество A° , входящее в A
замыкание A — минимальное замкнутое множество \bar{A} , содержащее A
- **топология стрелки** $X = \mathbb{R}, \Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$
- **дискретная топология** $X \neq \emptyset, \Omega = 2^X$
- **топология на частично упорядоченном множестве**
- **индуцированная топология на подпространстве**
Пусть дано какое-то $S \subseteq X$. Индуцированная топология на подпространстве $X - \Omega' = \{y \cap X | y \in \Omega\}$
- **связность(???)** : связное пространство — пространство такое, что его нельзя разбить на два непустых непересек. открытых подмножества

• Исчисление высказываний

- **высказывание** — Строка в некотором алфавите, строящаяся по следующим правилам:

высказывание :=
 {пропозициональная переменная} |
 (высказывание | высказывание) |
 (высказывание & высказывание) |
 (высказывание -> высказывание)

$A, B, C \dots$ — пропозициональные переменные

$X, Y, Z \dots$ — метаварiableные для переменных

- **метаварiableные** — "Placeholder" for variables
- **пропозициональные переменные** — символы, обозначающие высказывания
- **аксиома** — высказывание

- **схема аксиом** — шаблон для генерации аксиом

```

1  a -> b -> a
2  (a -> b) -> (a -> b -> c) -> (a -> c)
3  a -> b -> (a & b)
4  a & b -> a
5  a & b -> b
6  a -> a | b
7  b -> a | b
8  (a -> c) -> (b -> c) -> ((a | b) -> c)
9  (a -> b) -> (a -> !b) -> !a
10 !!a -> a

```

Интуиционисты меняют посленую аксиому на $a \rightarrow !a \rightarrow b$

- **правило Modus Ponens** — Если доказано α и $\alpha \rightarrow \beta$, то считаем доказанным β
- **доказательство** — последовательность высказываний, каждое из которых либо аксиома, либо Modus Ponens.
- **вывод из гипотез**
 α выводимо из Γ , где Γ — список высказываний, если существует *вывод*, то есть последовательность высказываний такая, что каждое из них либо аксиома, либо из Γ , либо получается по М. Р.
- **доказуемость (\vdash)**
Высказывание α *доказуемо*, если существует доказательство $\alpha_1 \dots \alpha_k$, где $\alpha_k = \alpha$.
- **множество истинностных значений**
- **модель (оценка переменных)**
- **оценка высказывания** — Отображение: формула \rightarrow множество истинностных значений
- **общезначимость (\models)** — истинность при любой оценке
- **выполнимость**: существует оценка, при которой формула выполнена
- **невыполнимость**: нет такой оценки, что см выше
- **следование**: формула X *следует* из $G_1 \dots G_n$, если в любой оценке, в которой истинны $G_1 \dots G_n$ истинна и X .
- **корректность** — доказуемость \implies общезначимость
- **полнота** — общезначимость \implies доказуемость
- **противоречивость** когда выводится любая формула
- **формулировка теоремы о дедукции** $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \iff \Gamma, \alpha \vdash \beta$

- **Интуиционистское исчисление высказываний** (заменяли аксиому снятия двойного отрицания на $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$)

- **закон исключённого третьего** $\alpha \vee \neg\alpha$
- **закон снятия двойного отрицания** $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- **закон Пирса** $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- **Все эти законы не выводятся в ИИВ**
- **ВНК-интерпретация логических связок**
 $\alpha \& \beta$, если есть доказательство α и β
 $\alpha \vee \beta$, если есть доказательство α или β и мы знаем, чего именно
 $\alpha \rightarrow \beta$, если мы умеем строить доказательство β из доказательства α
 $\neg\alpha$, если из α можно построить противоречие ($\alpha \rightarrow \perp$)

• **теорема Гливенко (формулировка)** Если $\vdash_K \alpha$, то $\vdash_I \neg\neg\alpha$

• **решётка**

$\langle A, \leq \rangle$ — решётка, если:

- $\forall a, b \in A : \exists \text{наименьший } c = a + b : a \leq c, b \leq c$
- $\forall a, b \in A : \exists \text{наибольший } c = a \cdot b : c \leq a, c \leq b$

• **дистрибутивная решётка**

решётка + свойство: $a + (b \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$

лемма: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

теорема: решётка дистрибутивна \iff не содержит ни диаманта ни пентагона

• **импликативная решётка**

дистрибутивная решётка + определена операция псевдодополнения (относительно b): $c = a \rightarrow b = \max\{x | x \cdot a \leq b\}$

теорема: дистрибутивность в определении можно опустить

def: 1 — наибольший элемент решётки

def: 0 — наименьший элемент решётки

• **алгебра Гейтинга** — Импликативная решётка с 0

def: псевдодополнение $a = a \rightarrow 0$

Всякая алгебра Гейтинга — модель ИИВ

• **булева алгебра** — алгебра Гейтинга такая, что $\forall a : a + \neg a = 1$

• **Гёделева алгебра**

Алгебра Гейтинга *гёделева*, если $\forall a, b : (a + b = 1 \implies a = 1 | b = 1)$

• **операция $\Gamma(A)$** Добавим к алгебре Гейтинга новую “1”, большую всех элементов, а старую переименуем в “ ω ”.

• **алгебра Линденбаума** Пусть α, β — формулы, $\alpha \leq \beta$, если $\beta \vdash \alpha$, $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \leq \beta \& \beta \leq \alpha$

Тогда, алгебра Линденбаума — ИИВ/ \approx [факторизация по операции \approx]

теорема: Алгебра Линденбаума — точная модель ИИВ. Но нифига не конечная.

теорема: Алгебра Линденбаума — Гёделева

• **формулировка свойства дизъюнктивности и.и.в** — $\vdash \alpha \vee \beta \implies \vdash \alpha$ или $\vdash \beta$

• Определить *модель*, значит задать логические связки и истинностные значения

• Модель *корректна*, если любое доказуемое утверждение в ней истинно

• Модель *полна*, если любое истинное в ней утверждение доказуемо

• Модель *точная*, она корректна и полна

• Исчисление называют *табличным*, если существует конечная точная модель этого исчисления

• **формулировка свойства нетабличности и.и.в.:** ИИВ не таблично (см выше)

• **Исчисление предикатов**

• **предикатные и функциональные символы, константы и пропозициональные переменные**

• **свободные и связанные вхождения предметных переменных в формулу**

• **свобода для подстановки**

D предметное множество

V множество истинностных значений

ФУНКЦИЯ : $D^n \rightarrow D$

ПРЕДИКАТ : $D^n \rightarrow V$

Предметная переменная $a, b, c, x, y, z, a_0, a' \dots$

Терм $\theta_0, \theta_1 \dots$

Предикатный символ P

Формула α, ψ, ϕ

ТЕРМ =

(предметная переменная) |
(функциональный символ) ($TERM_0, TERM_1, \dots$)

ФОРМУЛА =

(ФОРМУЛА | ФОРМУЛА) |
(ФОРМУЛА & ФОРМУЛА) |
(ФОРМУЛА \rightarrow ФОРМУЛА) |
(!ФОРМУЛА) |
(\forall предметная переменная.ФОРМУЛА) |
(\exists предметная переменная.ФОРМУЛА) |
(предикатный символ) ($TERM_0, TERM_1, \dots$)

Связанное вхождение – вхождение в области действия квантора.

Связывающее вхождение – вхождение непосредственно рядом с квантором.

Ех: ($\forall x. \dots x \dots$) первое вхождение – связывающее, второе вхождение – связанное.

Не связанные и не связывающие вхождения – *свободные*.

Терм θ *свободен для подстановки* в формулу ψ вместо x , если после подстановки θ вместо свободных вхождений x , θ не станет связанным.

о **два правила для кванторов**

$$\left. \begin{array}{l} 11. (\forall x. \phi) \rightarrow \phi[x := \Theta] \\ 12. \phi[x := \Theta] \rightarrow \exists x. \phi \end{array} \right\}, \text{ где } \Theta \text{ свободна для подстановки вместо } x \text{ в } \phi$$

о **две аксиомы для кванторов**

$$\left. \begin{array}{l} 2. \frac{\psi \rightarrow \phi}{\psi \rightarrow \forall x. \phi} \\ 3. \frac{\phi \rightarrow \psi}{(\exists x. \phi) \rightarrow \psi} \end{array} \right\}, \text{ где } x \text{ не входит свободно в } \psi$$

о **оценки и модели в исчислении предикатов**

Чтобы оценить значение формулы в ИП, нужно задать кортеж $\langle D, E, P, R \rangle$, где:

- D – предметное множество

- E — оценка для функциональных символов ($D^n \rightarrow D$)
- P — оценка для предикатов $D^n \rightarrow V$
- R — свободные предметные переменные
- **теорема о дедукции для И. П.**
 - $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, в доказательстве нет применений правил для кванторов по свободным переменным из α , то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
 - $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \implies \Gamma, \alpha \vdash \beta$
- **лемма:** $\llbracket \psi \rrbracket^{x := [\theta]} = \llbracket \psi[x := \llbracket \theta \rrbracket] \rrbracket$, если θ свободна для подстановки вместо x
- **теорема о корректности для И. П.** каждое доказуемое утв. общезначимо
- - Множество Γ **непротиворечиво**, если нет α такого, что $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg \alpha$
 - Формула **замкнута**, если она не содержит свободных переменных
 - Формула **бескванторна**, если она не содержит кванторов
 - **полное непротиворечивое множество (бескванторных) формул** — непротиворечивое множество (бескванторных) формул + св-во: $\forall \alpha : \alpha \in \Gamma \mid \neg \alpha \in \Gamma$
- **модель для формулы** модель — $\langle D, E, P \rangle$
- **теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (формулировка)**
лемма: Для любой формулы ИП найдётся эквив. ей ф-ла с поверхностными кванторами
теорема: Γ — непротиворечивое множество формул ИП. Тогда, существует модель для Γ
- **следствие из теоремы Гёделя о исчислении предикатов:** если формула общезначима, то она выводима