- **Топология**

  - **топологическое пространство** — упорядоченная пара $\langle X, \Omega \rangle$, где X(*носитель*) — множество, а Ω(*топология*) — множество каких-то его подмножеств + аксиомы:
    - $\varnothing \in \Omega, X \in \Omega$ (пустое множество и всё пространство открыты)
    - Если $\{A_i\}$, $A_i \in \Omega$ — некоторое семейство элементов Ω, то $\bigcup_i A_i \in \Omega$ (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
    - Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $A_i \in \Omega$ — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \Omega$
  - **открытое и замкнутое множество**
    Открытое множество — множество из Ω.
    Замкнутое множество — мн-во, дополнение которого открыто.
  - **внутренность и замыкание множества**
    внутренность A — максимальное открытое множество A°, входящее в A
    замыкане A — минимальное замкнутое множество $\overline{A}$, содержащее A
  - **топология стрелки** $X = \mathbb{R}, \Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$
  - **дискретная топология** $X \neq \emptyset, \Omega = 2^X$
  - **топология на частично упорядоченном множестве**
  - **индуцированная топология на подпространстве**
  - **связность**

- **Исчисление высказываний**

  - **высказывание** — Строка в некотором алфавите, строящаяся по ледующим правилам:

```
высказывание :=
    {пропозициональная переменная}  |
    (высказывание |  высказывание)  |
    (высказывание &  высказывание)  |
    (высказывание -> высказывание)
```

    A,B,C ... — *пропозициональные переменные*
    X,Y,Z ... — *метапеременные для переменных*
  - **метапеременные** — "Plaseholder" for variables
  - **пропозициональные переменные** — символы, обозначающие высказывания
  - **аксиома** — высказывание
  - **схема аксиом** — шаблон для генерации аксиом
  - **правило Modus Ponens** — Если доказано α и $\alpha \to \beta$, то считаем доказанным β

- **доказательство** — последовательность высказываний, каждое из которых либо аксиома, либо Modus Ponens.
- **вывод из гипотез**
  α выводимо из Γ, где Γ — список высказываний, если существует *вывод*, то есть последовательность высказываний такая, что каждое из них либо аксиома, либо из Γ, либо получается по М. Р.
- **доказуемость ($\vdash$)**
  Высказывание α *доказуемо*, если существует доказательство $\alpha_1 \ldots \alpha_k$, где $\alpha_k = \alpha$.
- **множество истинностных значений**
- **модель (оценка переменных)**
- **оценка высказывания** — Отображение: формула $\to$ множество истинностных значений
- **общезначимость ($\models$)** — истинность при любой оценке
- **выполнимость**: существует оценка, при которой формула выполнена
- **невыполнимость**: нет такой оценки, что см выше
- **следование**: формула X **следует** из $G_1 \ldots G_n$, если в любой оценке, в которой истинны $G_1 \ldots G_n$ истинна и X.
- **корректность** — доказуемость $\implies$ общезначимость
- **полнота** — общезначимость $\implies$ доказуемость
- **противоречивость** когда выводится любая формула
- **формулировка теоремы о дедукции** $\Gamma \vdash \alpha \to \beta \iff \Gamma, \alpha \vdash \beta$

- **Интуиционистское исчисление высказываний** (заменили аксиому снятия двойного отрицания на $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$)
  - **закон исключённого третьего** $\alpha \vee \neg\alpha$
  - **закон снятия двойного отрицания** $\neg\neg\alpha \to \alpha$
  - **закон Пирса** $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$
  - **Все эти законы не выводятся в ИИВ**
  - **ВНК-интерпретация логических связок**
    $\alpha \& \beta$, если есть доказательство α и β
    $\alpha \vee \beta$, если есть доказательство α или β и мы знаем, чего именно
    $\alpha \to \beta$, если мы умеем строить доказательство β из доказательства α
    $\neg\alpha$, если из α можно построить противоречие ($\alpha \to \perp$)
  - **теорема Гливенко (формулировка)** Если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$
  - **решётка**
    $\langle A, \leq \rangle$ — решётка, если:
    - $\forall a, b \in A : \quad \exists$наименьший $c = a + b : a \leq c, b \leq c$
    - $\forall a, b \in A : \quad \exists$наибольший $c = a \cdot b : c \leq a, c \leq b$
  - **дистрибутивная решётка**
    решётка + свойство: $a + (b \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$
    лемма: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
    теорема: решётка дистрибутивна $\iff$ не содержит ни диаманта ни пентагона

- **импликативная решётка**
  дистрибутивная решётка + определена операция псевдодополнения (относительно b): $c = a \to b = max\{x | x \cdot a \leq b\}$
  теорема: дистрибутивность в определении можно опустить
  def: *1* — наибольший элемент решётки
  def: *0* — наименьший элемент решётки
- **алгебра Гейтинга** — Импликативная решётка с 0
  def: *псевдодополнение* $a = a \to 0$
  Всякая алгебра Гейтинга — модель ИИВ
- **булева алгебра** — алгебра Гейтинга такая, что $\forall a : a + \ a = 1$
- **Гёделева алгебра**
  Алгебра Гейтинга *гёделева*, если $\forall a, b : (a + b = 1 \implies a = 1 | b = 1)$
- **операция Г(A)** Добавим к алгебре Гейтинга новую “1”, большую всех элементов, а старую переименуем в “ω”.
- **алгебра Линденбаума** Пусть α, β — формулы, $\alpha \leq \beta$, если $\beta \vdash \alpha$, $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \leq \beta \& \beta \leq \alpha$
  Тогда, *алгебра Линденбаума* — ИИВ$/_{\approx}$ [факторизация по операции $\approx$]
  теорема: Алгебра Линденбаума — точная модель ИИВ. Но нифига не конечная.
  теорема: Алгебра Линденбаума — Гёделева
- **формулировка свойства дизъюнктивности и.и.в** — $\vdash \alpha \vee \beta \implies \vdash \alpha$ или $\vdash \beta$
- Определить *модель*, значит задать логические связки и истинностные значения
- Модель *корректна*, если любое доказуемое утверждение в ней истинно
- Модель *полна*, если любое истинное в ней утверждение доказуемо
- Модель *точная*, она корректна и полна
- Исчисление называют *табличным*, если существует конечная точная модель этого исчисления
- **формулировка свойства нетабличности и.и.в.**: ИИВ не таблично (см выше)

* **Исчисление предикатов**

  - **предикатные и функциональные символы, константы и пропозициональные переменные**
  - **свободные и связанные вхождения предметных переменных в формулу**
  - **свобода для подстановки**

```
D предметное множество
V множество истинностынх значений

ФУНКЦИЯ  : D^n -> D
ПРЕДИКАТ : D^n -> V

Предметная переменная      a, b, c, x, y, z, a_0, a' …
Терм                       θ_0, θ_1 …
Предикатный символ         P
Формула                    α, ψ, φ
```

```
ТЕРМ =
        (предметная переменная) |
        (функциональный символ) (ТЕРМ₀, ТЕРМ₁, …)
ФОРМУЛА =
        (ФОРМУЛА |  ФОРМУЛА) |
        (ФОРМУЛА &  ФОРМУЛА) |
        (ФОРМУЛА -> ФОРМУЛА) |
        (!ФОРМУЛА) |
        (∀ предметная переменная.ФОРМУЛА) |
        (∃ предметная переменная.ФОРМУЛА) |
        (предикатный символ)(ТЕРМ₀, ТЕРМ₁, …)
```

Связанное вхождение — вхождение в области действия квантора.
Связывающее вхождение — вхождение непосредственно рядом с квантором.
Ex: (∀x. … x …) первое вхождение — связывающее, второе вхождение — связанное.
Не связанные и не связывающие вхождения — *свободные*.
Терм θ *свободен для подстановки* в формулу ψ вместо x, если после подстановки θ вместо свободных вхождений x, θ не станет связанным.

- **два правила для кванторов**

  $$\left.\begin{array}{l} 11.(\forall x.\,\phi) \to \phi[x := \Theta] \\ 12.\phi[x := \Theta] \to \exists x.\,\phi \end{array}\right\}\text{, где } \Theta \text{ свободна для подстановки вместо } x \text{ в } \phi$$

- **две аксиомы для кванторов**

  $$\left.\begin{array}{l} 2.\dfrac{\psi \to \phi}{\psi \to \forall x.\,\phi} \\ 3.\dfrac{\phi \to \psi}{(\exists x.\,\phi) \to \psi} \end{array}\right\}\text{, где } x \text{ не входит свободно в } \psi$$

- **оценки и модели в исчислении предикатов**
  Чтобы оценить значение формулы в ИП, нужно задать кортеж $\langle D, E, P, R\rangle$, где:
  - D — предметное множество
  - D — оценка для функциональных символов $(D^n \to D)$
  - D — оценка для предикатов $D^n \to V$
  - D — свободные предметные переменные
- **теорема о дедукции для И. П.**
  - $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, в доказательстве нет применений правил для кванторов по свободным переменным из α, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$
  - $\Gamma \vdash \alpha \to \beta \implies \Gamma, \alpha \vdash \beta$
- **лемма**: $[\![\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\psi[x := [\![\theta]\!]]]\!]$, если θ свободна для подстановки вместо x
- **теорема о корректности для И. П.** каждое доказуемое утв. общезначимо
-
  - Множество Γ **непротиворечиво**, если нет α такого, что $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg\alpha$

- Формула **замкнута**, если она не содержит свободных переменных
- Формула **бескванторна**, если она не содержит кванторов
- **полное непротиворечивое множество (бескванторных) формул —** непротиворечивое множество (бескванторных) формул + св-во: $\forall\alpha: \quad \alpha \in \Gamma | \neg\alpha \in \Gamma$

- **модель для формулы** модель — $\langle D, E, R \rangle$
- **теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (формулировка)**
  лемма: Для любой формулы ИП найдётся эквив. ей ф-ла с поверхностными кванторами
  теорема: Γ — непротиворечивое множество формул ИП. Тогда, существует модель для Γ
- **следствие из теоремы Гёделя о исчислении предикатов**: полнота???

Шень, Верещагин Инт. логика Конспект 2011