

Интегралы

Интеграл	Определение	Как вычислять	Свойства	+
Криволинейный интеграл 1	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \vec{r}'(t) dt = \int_{\Gamma} f dl$	Параметризовать кривую и тупо вычислить	<ul style="list-style-type: none">• Не зависит от параметризации кривой• Не зависит от направления кривой• Линейность• Аддитивность	\int — масса кривой, если f — её плотность
Криволинейный интеграл 2	$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, y, z)x'(t) + Q(x, y, z)y'(t) + R(x, y, z)z'(t))$ Обозначение: $\int_{\Gamma} \overline{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$	Либо так же, как первого рода(параметризовать кривую) Либо TODO	Всё то же самое, но зависит от направления кривой	\overline{F} — векторное поле, тогда \int его работа вдоль кривой
Поверхностный интеграл 1	$\int \int_{\Omega} f(x, y, z) \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv = \int \int_{\Sigma} f(x, y, z) ds$	Либо параметризовать поверхность и вычислить через двойной Либо, через формулу Стокса	<ul style="list-style-type: none">• $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{ \vec{r}_u ^2 \vec{r}_v ^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2}$, где $E = \vec{r}_u ^2, G = \vec{r}_v ^2, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$• Подставим $f = 1$, тогда \int — площадь поверхности	Как бы масса поверхности, если f — функция плотности
Поверхностный интеграл 2	$\int \int_{\Sigma} \overline{F} \cdot \vec{n}_0 ds = \int \int_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy$	$\begin{aligned} &\int \int_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{zx}} P(x, y(x, z), z) dzdx \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$ что касается знаков, берём "+", если угол между нормалью и осью, не фигурирующей в дифференциале острый, ичаче "-" Либо через формулу Гаусса-Остроградского		Поток векторного поля через двустороннюю поверхность

Фигня, с ними связанная

Поле скалярное

TODO

Поле векторное

TODO

Ротор, дивергенция и набла

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$
$$grad f = \nabla f \; div \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$$
$$rot \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$$

Свойства ∇ :
$\nabla(c_1 f + c_2 g) = c_1 \nabla f + c_2 \nabla g$
$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$
$\nabla \cdot (\vec{f} \times \vec{g}) = (\nabla, \vec{f}, \vec{g}) =$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} =$ $= \vec{g}(\nabla \times \vec{f}) - \vec{f}(\nabla \times \vec{g})$

Из СР по матану: $\nabla \times (c \times a) = c \cdot (\nabla \cdot a) - (c \cdot \nabla) \cdot a$

Подумаем, шо ж такое слева написано. $\frac{\partial}{\partial x}(\sum) + \frac{\partial}{\partial y}(\sum) + \frac{\partial}{\partial z}(\sum)$. Сейчас не важно, что это за суммы. Важно лишь то, что они имеют вид $\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} c_i a_i$. Это значит, что под оператором дифференцирования есть одна константа и одна функция! Значит, с дифференцированием можно делать всё, что угодно, но только не переставлять правее, чем a_i . Забудем, что это оператор дифференцирования и применим формулу "**BAC-CAB**". Понятно, что в доказательстве (доступно по последней ссылке) никто не переставлял дифференцирование с a_i [ну представим в доказательстве, что α_i — операторы дифференцирования], значит, мы можем применить эту формулу.

Теперь и формула (12) со страницы 14 [отсюда](#) , теряет свой мистический облик. Рассмотрим $\nabla \times (f \times g)$. Формула имеет почти тот же вид, но под оператором дифференцирования теперь произведение функций. Но мы знаем, что для каждого слагаемого выполнены правила дифференцирования, то есть $(ab)' = a b'$ [считаем а константой] + $b a'$ [считаем b константой] . Значит, и для всей суммы они выполнены. Применим это сюда: $\nabla \times (f \times g) = \nabla \times (\hat{f} \times g) + \nabla \times (f \times \hat{g})$ /”треугольной шапочкой” обозначено то, что мы интерпретируем функцию как константу/ $= \nabla \times (\hat{f} \times g) - \nabla \times (\hat{g} \times f) =$ /по предыдущей формуле/ $= f \cdot (\nabla \cdot g) - (f \cdot \nabla) \cdot g - (g \cdot (\nabla \cdot f) - (g \cdot \nabla) \cdot f) = f \cdot (\nabla \cdot g) - (f \cdot \nabla) \cdot g - g \cdot (\nabla \cdot f) + (g \cdot \nabla) \cdot f$

Формула Гаусса-Остроградского

Пусть, Ω — область, имеющая кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$, \vec{n}_0 — внешняя нормаль, отнормированная к 1, поле $\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируемо на Ω . Тогда: $\int \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \int \int \int_{\Omega} div(\vec{a}) dx dy dz$

Формула Стокса

TODO

Поле потенциальное

TODO

Поле соленоидальное

TODO

TODO:

- Всѐ, что помечено выше
- Условия, когда можно интегрировать и применять теоремы, которые возможно опущены
- ...