

Интегралы

Интеграл	Определение	Как вычислять	Свойства	+
Криволинейный интеграл 1	$\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(y), z(t)) \vec{r}'(t) dt = \int_{\Gamma} f dl$	Параметризовать кривую и тупо вычислить	<ul style="list-style-type: none">• Не зависит от параметризации кривой• Не зависит от направления кривой• Линейность• Аддитивность	\int — масса кривой, если f — её плотность
Криволинейный интеграл 2	$\int_{\alpha}^{\beta} \overline{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, y, z) x'(t) + Q(x, y, z) y'(t) + R(x, y, z) z'(t))$ Обозначение: $\int_{\Gamma} \overline{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$	Либо так же, как первого рода (параметризовать кривую) Либо TODO	Всё то же самое, но зависит от направления кривой	\overline{F} — векторное поле, тогда \int его работа вдоль кривой
Поверхностный интеграл 1	$\int \int_{\Omega} f(x, y, z) \vec{r}_u \times \vec{r}_v du dv = \int \int_{\Sigma} f(x, y, z) ds$	Либо параметризовать поверхность и вычислить через двойной Либо, через формулу Стокса	<ul style="list-style-type: none">• $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{ \vec{r}_u ^2 \vec{r}_v ^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2}$, где $E = \vec{r}_u ^2, G = \vec{r}_v ^2, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$• Подставим $f = 1$, тогда \int — площадь поверхности	Как бы масса поверхности, если f — функция плотности
Поверхностный интеграл 2	$\int \int_{\Sigma} \overline{F} \cdot \vec{n}_0 ds = \int \int_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy$	$\begin{aligned} &\int \int_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{zx}} P(x, y(x, z), z) dzdx \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$ что касается знаков, берём "+", если угол между нормалью и осью, не фигурирующей в дифференциале острый, ичаче "-" Либо через формулу Гаусса-Остроградского		Поток векторного поля через двустороннюю поверхность

Фигня, с ними связанная

Ротор, дивергенция и набла

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} grad f &= \nabla f \quad div \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} \\ rota \vec{a} &= \nabla \times \vec{a} \end{aligned}$$

Свойства ∇ :
$\nabla(c_1f+c_2g)=c_1\nabla f+c_2\nabla g$
$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$
$\nabla \cdot (f \times \vec{g}) = (\nabla, \vec{f}, \vec{g}) =$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} =$ $= \vec{g}(\nabla \times \vec{f}) - \vec{f}(\nabla \times \vec{g})$

Из СР по матану: $\nabla \times (c \times a) = c \cdot (\nabla \cdot a) - (c \cdot \nabla) \cdot a$

Подумаем, шо ж такое слева написано. $\frac{\partial}{\partial x}(\sum) + \frac{\partial}{\partial y}(\sum) + \frac{\partial}{\partial z}(\sum)$. Сейчас не важно, что это за суммы. Важно лишь то, что они имеют вид $\sum_i \frac{\partial}{\partial ?} c_i a_i$. Это значит, что под оператором дифференцирования есть одна константа и одна функция! Значит, с дифференцированием можно делать всё, что угодно, но только не переставлять правее, чем a_i . Забудем, что это оператор дифференцирования и применим формулу "**БАС-САВ**". Понятно, что в доказательстве (доступно по последней ссылке) никто не переставлял дифференцирование с a_i [ну представим в доказательстве, что α_i — операторы дифференцирования], значит, мы можем применить эту формулу.

Теперь и формула (12) со страницы 14 [отсюда](#) , теряет свой мистический облик. Рассмотрим $\nabla \times (f \times g)$. Формула имеет почти тот же вид, но под оператором дифференцирования теперь произведение функций. Но мы знаем, что для каждого слагаемого выполнены правила дифференцирования, то есть $(ab)' = ab'$ [считаем а константой] + ba' [считаем b константой] . Значит, и для всей суммы они выполнены. Применим это сюда: $\nabla \times (f \times g) = \nabla \times (\hat{f} \times g) + \nabla \times (f \times \hat{g})$ /”треугольной шапочкой” обозначено то, что мы интерпретируем функцию как константу/ = $\nabla \times (\hat{f} \times g) - \nabla \times (\hat{g} \times f) =$ /по предыдущей формуле/ = $f \cdot (\nabla \cdot g) - (f \cdot \nabla) \cdot g - (g \cdot (\nabla \cdot f) - (g \cdot \nabla) \cdot f) = f \cdot (\nabla \cdot g) - (f \cdot \nabla) \cdot g - g \cdot (\nabla \cdot f) + (g \cdot \nabla) \cdot f$

Формула Гаусса-Остроградского

Пусть, Ω — область, имеющая кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$, \vec{n}_0 — внешняя нормаль, отнормированная к 1, поле $\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируемо на Ω . Тогда: $\int \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \int \int \int_{\Omega} div(\vec{a}) dx dy dz$

Формула Стокса

γ — замкнутый контур. Тогда: $\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int \int_D (rot \vec{F}, \vec{n}_0) dS$
где D область с границей γ
*тут дофига опущено, но не до этого

Поле потенциальное

Если нашли u такое, что $\vec{F} = gradu$, то u — потенциал

Как искать?
 $u(x,y,z)=\int_{M_0}^{M(x,y,z)}\overline{F}d\overline{\Gamma}$, который не зависит от пути

Поле соленоидальное

Что это? Поле \overline{F} такое, что для него существует векторный потенциал \overline{W} : $rot\overline{W}=\overline{F}$ Когда существует? $divF=0$

Как искать?
 $A=(P,Q,R)$
 $H=(H_x,H_y,H_z)$
 $H_x=\int Qdz+\psi(x,y)$
 $H_y=-\int Pdz+\phi(x,y)$
 $H_z=0$
 $(H_y)'_x-(H_x)'_y=R$

Пример:
 $P=x(z^2-y^2)$
 $Q=y(x^2-z^2)$
 $R=z(y^2-x^2)$
По формулам:

$$H_x=\int y(x^2-z^2)dz+\psi(x,y)=zyx^2-\frac{z^3y}{3}+\psi(x,y)$$
$$H_y=-\int x(z^2-y^2)dz+\phi(x,y)=-\big(\frac{z^3x}{3}-zxy^2\big)+\phi(x,y)$$

Берём производные:

$$(H_y)'_x=-\frac{z^3}{3}+zy^2+\phi'_x(x,y)$$
$$(H_x)'_y=zx^2-\frac{z^3}{3}+\psi'_y(x,y)$$

Пытаемся найти ψ и ϕ :
 $R=z(y^2-x^2)=(H_y)'_x+\phi'_x(x,y)-(H_x)'_y-\psi'_y(x,y)=zy^2-zx^2+\phi'_x(x,y)-\psi'_y(x,y)$

Нам очень повезло: $\psi=0, \phi=0$ подходит. Тогда, $H=(zyx^2-\frac{z^3y}{3}, zxy^2-\frac{xz^3}{3}, 0)$

Проверим: найдем $rotH$

`In[1]:=`
`CurL[{{z*y*x^2-z^3*y/3, z*x*y^2-x*z^3/3, 0},{x,y,z}]`

`Out[1]=`
`{-x y^2+x z^2, x^2 y-y z^2, -x^2 z+y^2 z}`

вроде совпал.

Ещё пример:

```

In[18]:=
A = {6*y^2, 6*z, 6*x}

Out[18]=
{6 y^2, 6 z, 6 x}

In[10]:=
Div[A, {x, y, z}]

Out[10]=
0

In[26]:=
Hx = Integrate[A[[2]], z] + psi

Out[26]=
psi + 3 z^2

In[27]:=
Hy = -Integrate[A[[1]], z] + phi

Out[27]=
phi - 6 y^2 z

In[31]:=
Derivative[Hy, x] - Derivative[Hx, y] == A[[3]]

Derivative[phi - 6 y^2 z, x] - Derivative[psi + 3 z^2, y] == 6 x

Derivative[phi, x] - Derivative[psi, y] == 6*x

Пусть phi = 0, psi = 6xy, тогда всё норм:

```

TODO:

- Всѐ, что помечено выше
- Условия, когда можно интегрировать и применять теоремы, которые возможно опущены
- ...