

Интегралы

| Интеграл                 | Определение   | Как вычислять  | Свойства   | +   |
|--------------------------|---|--|--|---|
| Криволинейный интеграл 1 | $\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(y), z(t))   \vec{r}'(t)   dt = \int_{\Gamma} f dl$   | Параметризовать кривую и тупо вычислить  | <ul style="list-style-type: none"><li>• Не зависит от параметризации кривой</li><li>• Не зависит от направления кривой</li><li>• Линейность</li><li>• Аддитивность</li></ul>   | $\int$ — масса кривой, если $f$ — её плотность                        |
| Криволинейный интеграл 2 | $\int_{\alpha}^{\beta} \overline{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x, y, z) x'(t) + Q(x, y, z) y'(t) + R(x, y, z) z'(t))$<br>Обозначение: $\int_{\Gamma} \overline{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$ | Либо так же, как первого рода (параметризовать кривую)<br>Либо <b>TODO</b>   | Всё то же самое, но зависит от направления кривой  | $\overline{F}$ — векторное поле, тогда $\int$ его работа вдоль кривой |
| Поверхностный интеграл 1 | $\int \int_{\Omega} f(x, y, z)  \vec{r}_u \times \vec{r}_v  du dv = \int \int_{\Sigma} f(x, y, z) ds$   | Либо параметризовать поверхность и вычислить через двойной<br>Либо, через формулу Стокса   | <ul style="list-style-type: none"><li>• <math> \vec{r}_u \times \vec{r}_v  = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{ \vec{r}_u ^2  \vec{r}_v ^2 - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^2}</math>, где <math>E =  \vec{r}_u ^2, G =  \vec{r}_v ^2, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v</math></li><li>• Подставим <math>f = 1</math>, тогда <math>\int</math> — площадь поверхности</li></ul> | Как бы масса поверхности, если $f$ — функция плотности                |
| Поверхностный интеграл 2 | $\int \int_{\Sigma} \overline{F} \cdot \vec{n}_0 ds = \int \int_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy$   | $\begin{aligned} &\int \int_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z) dydz \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{zx}} P(x, y(x, z), z) dzdx \\ &\pm \int \int_{\Sigma_{xy}} P(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$<br><br>что касается знаков, берём "+", если угол между нормалью и осью, не фигурирующей в дифференциале острый, ичаче "-"<br><br>Либо через формулу Гаусса-Остроградского |  | Поток векторного поля через двустороннюю поверхность                  |

Фигня, с ними связанная

Ротор, дивергенция и набла

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} grad f &= \nabla f \quad div \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} \\ rota \vec{a} &= \nabla \times \vec{a} \end{aligned}$$

| Свойства $\nabla$ :   |
|---|
| $\nabla(c_1f+c_2g)=c_1\nabla f+c_2\nabla g$   |
| $\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$  |
| $\nabla \cdot (f \times \vec{g}) = (\nabla, \vec{f}, \vec{g}) =$<br>$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} =$<br>$\begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} =$<br>$= \vec{g}(\nabla \times \vec{f}) - \vec{f}(\nabla \times \vec{g})$ |

Из СР по матану:  $\nabla \times (c \times a) = c \cdot (\nabla \cdot a) - (c \cdot \nabla) \cdot a$

Подумаем, шо ж такое слева написано.  $\frac{\partial}{\partial x}(\sum) + \frac{\partial}{\partial y}(\sum) + \frac{\partial}{\partial z}(\sum)$ . Сейчас не важно, что это за суммы. Важно лишь то, что они имеют вид  $\sum_i \frac{\partial}{\partial ?} c_i a_i$ . Это значит, что под оператором дифференцирования есть одна константа и одна функция! Значит, с дифференцированием можно делать всё, что угодно, но только не переставлять правее, чем  $a_i$ . Забудем, что это оператор дифференцирования и применим формулу "**ВАС-САВ**". Понятно, что в доказательстве (доступно по последней ссылке) никто не переставлял дифференцирование с  $a_i$  [ну представим в доказательстве, что  $\alpha_i$  — операторы дифференцирования], значит, мы можем применить эту формулу.

Теперь и формула (12) со страницы 14 [отсюда](#) , теряет свой мистический облик. Рассмотрим  $\nabla \times (f \times g)$ . Формула имеет почти тот же вид, но под оператором дифференцирования теперь произведение функций. Но мы знаем, что для каждого слагаемого выполнены правила дифференцирования, то есть  $(ab)' = ab'$  [считаем а константой] +  $ba'$  [считаем b константой] . Значит, и для всей суммы они выполнены. Применим это сюда:  $\nabla \times (f \times g) = \nabla \times (\hat{f} \times g) + \nabla \times (f \times \hat{g})$  /”треугольной шапочкой” обозначено то, что мы интерпретируем функцию как константу/ =  $\nabla \times (\hat{f} \times g) - \nabla \times (\hat{g} \times f) =$  /по предыдущей формуле/ =  $f \cdot (\nabla \cdot g) - (f \cdot \nabla) \cdot g - (g \cdot (\nabla \cdot f) - (g \cdot \nabla) \cdot f) = f \cdot (\nabla \cdot g) - (f \cdot \nabla) \cdot g - g \cdot (\nabla \cdot f) + (g \cdot \nabla) \cdot f$

### Формула Гаусса-Остроградского

Пусть,  $\Omega$  — область, имеющая кусочно-гладкую границу  $\partial\Omega$ ,  $\vec{n}_0$  — внешняя нормаль, отнормированная к 1, поле  $\vec{a}(M)$  непрерывно дифференцируемо на  $\Omega$ . Тогда:  $\int \int_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 ds = \int \int \int_{\Omega} div(\vec{a}) dx dy dz$

### Формула Стокса

$\gamma$  — замкнутый контур. Тогда:  
 $\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int \int_D (rot \vec{F}, \vec{n}_0) dS$   
где  $D$  область с границей  $\gamma$   
\*тут дофига опущено, но не до этого

### Поле потенциальное

Если нашли  $u$  такое, что  $\vec{F} = gradu$ , то  $u$  — потенциал

Когда есть потенциал?  $rot\overline{F} = 0$   
Как искать потенциал?  
 $u(x,y,z) = \int_{M_0}^{M(x,y,z)} \overline{F} d\overline{r}$ , который не зависит от пути

Поле соленоидальное

Что это? Поле  $\overline{F}$  такое, что для него существует векторный потенциал  $\overline{W}$  :  $rot\overline{W} = \overline{F}$

Когда существует?  $div\overline{F} = 0$   
Как искать потенциал?

$A = (P,Q,R)$   
 $H = (H_x,H_y,H_z)$   
 $H_x = \int Qdz + \psi(x,y)$   
 $H_y = - \int Pdz + \phi(x,y)$   
 $H_z = 0$   
 $(H_y)'_x - (H_x)'_y = R$

Пример:  
 $P = x(z^2 - y^2)$   
 $Q = y(x^2 - z^2)$   
 $R = z(y^2 - x^2)$   
По формулам:

$H_x = \int y(x^2 - z^2)dz + \psi(x,y) = zyx^2 - \frac{z^3y}{3} + \psi(x,y)$   
 $H_y = - \int x(z^2 - y^2)dz + \phi(x,y) = -(\frac{z^3x}{3} - zxy^2) + \phi(x,y)$

Берём производные:

$(H_y)'_x = -\frac{z^3}{3} + zy^2 + \phi'_x(x,y)$   
 $(H_x)'_y = zx^2 - \frac{z^3}{3} + \psi'_y(x,y)$

Пытаемся найти  $\psi$  и  $\phi$ :  
 $R = z(y^2 - x^2) = (H_y)'_x + \phi'_x(x,y) - (H_x)'_y - \psi'_y(x,y) = zy^2 - zx^2 + \phi'_x(x,y) - \psi'_y(x,y)$

Нам очень повезло:  $\psi = 0, \phi = 0$  подходит. Тогда,  $H = (zyx^2 - \frac{z^3y}{3}, zxy^2 - \frac{xz^3}{3}, 0)$

Проверим: найдем  $rotH$

`In[1]:= Curl[{z*y*x^2-z^3*y/3, z*x*y^2-x*z^3/3, 0},{x,y,z}]`

`Out[1]=`  
 $\{-x\,y^2+x\,z^2,\,x^2\,y-y\,z^2,\,-x^2\,z+y^2\,z\}$

вроде совпал.

Ещё пример:

```

In[18]:=
A = {6*y^2, 6*z, 6*x}

Out[18]=
{6 y^2, 6 z, 6 x}

In[10]:=
Div[A, {x, y, z}]

Out[10]=
0

In[26]:=
Hx = Integrate[A[[2]], z] + psi

Out[26]=
psi + 3 z^2

In[27]:=
Hy = -Integrate[A[[1]], z] + phi

Out[27]=
phi - 6 y^2 z

In[31]:=
Derivative[Hy, x] - Derivative[Hx, y] == A[[3]]

Derivative[phi - 6 y^2 z, x] - Derivative[psi + 3 z^2, y] == 6 x

Derivative[phi, x] - Derivative[psi, y] == 6*x

Пусть phi = 0, psi = 6xy, тогда всё норм:

```

## TODO:

- Всѐ, что помечено выше
- Условия, когда можно интегрировать и применять теоремы, которые возможно опущены
- ...