# Интегралы

| Интеграл | Определение | Как вычислять | Свойства | + |
|---|---|---|---|---|
| Криволинейный интеграл 1 | $\int_\alpha^\beta f(x(t),y(y),z(t))\|\|\overline{r}'(t)\|\|dt = \int_\Gamma f dl$ | Параметризовать кривую и тупо вычислить | • Не зависит от параметризации кривой<br>• Не зависит от направления кривой<br>• Линейность<br>• Аддитивность | $\int$ — масса кривой, если $f$ — её плотность |
| Криволинейный интеграл 2 | $\int_\alpha^\beta \overline{F}\cdot\overline{r}'(t)dt = \int_\alpha^\beta(P(x,y,z)x'(t)+Q(x,y,z)y'(t)+R(x,y,z)z'(t))$<br>Обозначение: $\int_\Gamma \overline{F}d\overline{r} = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$ | Либо так же, как первого рода(параметризовать кривую)<br>Либо TODO | Всё то же самое, но зависит от направления кривой | $F$ — векторное поле, тогда $\int$ его работа вдоль кривой |
| Поверхностный интеграл 1 | $\int\int_\Omega f(x,y,z)\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|dudv = \int\int_\Sigma f(x,y,z)ds$ | Либо параметризовать поверхность и вычислить через двойной<br>Либо, через формулу Стокса | • $\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\| = \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\|\overline{r}_u\|^2\|\overline{r}_v\|^2-(\overline{r}_u\cdot\overline{r}_v)^2}$, где $E=\|\overline{r}_u\|^2, G=\|\overline{r}_v\|^2, F=r_u\cdot r_v$<br>• Подставим $f=1$, тогда $\int$ — площадь поверхности | Как бы масса поверхности, если $f$ — функция плотности |
| Поверхностный интеграл 2 | $\int\int_\Sigma \overline{F}\cdot\overline{n}_0 ds = \int\int_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ | $\displaystyle\int\int_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$<br>$\displaystyle\pm\int\int_{\Sigma_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$<br>$\displaystyle\pm\int\int_{\Sigma_{zx}} P(x,y(x,z),z)dzdx$<br>$\displaystyle\pm\int\int_{\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))dxdy$<br><br>что касается знаков, берём "+", если угол между нормалью и осью, не фигурирующей в дифференциале острый, ичаче "-"<br><br>Либо через формулу Гаусса-Остроградского | | Поток векторного поля через двусторонюю поверхность |

# Фигня, с ними связанная

## Ротор, дивергенция и набла

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$gradf = \nabla f$
$div\overline{a} = \nabla \cdot \overline{a}$
$rot\overline{a} = \nabla \times \overline{a}$

| **Свойства $\nabla$:** |
| --- |
| $\nabla(c_1 f + c_2 g) = c_1 \nabla f + c_2 \nabla g$ |
| $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$ |
| $\nabla \cdot (\overline{f} \times \overline{g}) = (\nabla, \overline{f}, \overline{g}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = = \overline{g}(\nabla \times \overline{f}) - \overline{f}(\nabla \times \overline{g})$ |

Из СР по матану: $\nabla \times (c \times a) = c \cdot (\nabla \cdot a) - (c \cdot \nabla) \cdot a$
Подумаем, шо ж такое слева написано. $\dfrac{\partial}{\partial x}(\sum) + \dfrac{\partial}{\partial y}(\sum) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\sum)$. Сейчас не важно, что это за суммы. Важно лишь то, что они имеют вид $\sum_i \dfrac{\partial}{\partial ?} c_i a_i$. Это значит, что под оператором дифференцирования есть одна константа и одна функция! Значит, с дифференцировением можно делать всё, что угодно, но только не переставлять правее, чем $a_i$. Забудем, что это оператор дифференцирования и применим формулу "BAC-CAB". Понятно, что в доказательстве (доступно по последней ссылке) никто не переставлял дифференцирование с $a_i$ [ну представим в доказательстве, что $\alpha_i$ — операторы дифференцирования], значит, мы можем применить эту формулу.

Теперь и формула (12) со страницы 14 отсюда , теряет свой мистический облик. Рассмотрим $\nabla \times (f \times g)$. Формула имеет почти тот же вид, но под оператором дифференцирования теперь произведение функций. Но мы знаем, что для каждого слагаемого выполнены правила дифференцирования, то есть $(ab)' = ab'$ [считаем a константой] $+ ba'$ [считаем b константой] . Значит, и для всей суммы они выполнены. Применим это сюда: $\nabla \times (f \times g) = \nabla \times (\hat{f} \times g) + \nabla \times (f \times \hat{g})$ /"треугольной шапочкой" обозначено то, что мы интерпретируем функцию как константу/ $= \nabla \times (\hat{f} \times g) - \nabla \times (\hat{g} \times f) =$ /по предыдущей формуле/ $=$
$f \cdot (\nabla \cdot g) - (f \cdot \nabla) \cdot g - (g \cdot (\nabla \cdot f) - (g \cdot \nabla) \cdot f) = f \cdot (\nabla \cdot g) - (f \cdot \nabla) \cdot g - g \cdot (\nabla \cdot f) + (g \cdot \nabla) \cdot f$

### Формула Гаусса-Остроградского

Пусть, $\Omega$ — область, имеющая кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$, $\overline{n}_0$ — внешняя нормаль, отнормированная к 1, поле $\overline{a}(M)$ непрерывно дифференцируемо на $\Omega$. Тогда:
$\int\int_{\partial\Omega} \overline{a} \cdot \overline{n}_0 ds = \int\int\int_{\Omega} div(\overline{a}) dxdydz$

### ~~Формула Стокса~~

~~$\gamma$ — замкнутый контур. Тогда:~~
$\int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int\int_D (rot\overline{F}, \overline{n}_0) dS$
~~где $D$ область с границей $\gamma$~~
~~*тут дофига опущено, но не до этого~~

### Поле потенциальное

Если нашли $u$ такое, что $\overline{F} = gradu$, то $u$ — потенциал

Когда есть потенциал? $rot\overline{F} = 0$
Как искать потенциал?
$u(x,y,z) = \int_{M_0}^{M(x,y,z)} \overline{F} d\overline{r}$, который не зависит от пути

## Поле соленоидальное

Что это? Поле $\overline{F}$ такое, что для него существует векторный потенциал $\overline{W}: \quad rot\overline{W} = \overline{F}$
Когда существует? $div\overline{F} = 0$
Как искать потенциал?
$A = (P, Q, R)$
$H = (H_x, H_y, H_z)$
$H_x = \int Q dz + \psi(x,y)$
$H_y = -\int P dz + \phi(x,y)$
$H_z = 0$
$(H_y)'_x - (H_x)'_y = R$

Пример:
$P = x(z^2 - y^2)$
$Q = y(x^2 - z^2)$
$R = z(y^2 - x^2)$
По формулам:
$H_x = \int y(x^2 - z^2) dz + \psi(x,y) = zyx^2 - \frac{z^3 y}{3} + \psi(x,y)$
$H_y = -\int x(z^2 - y^2) dz + \phi(x,y) = -(\frac{z^3 x}{3} - zxy^2) + \phi(x,y)$
Берём производные:
$(H_y)'_x = -\frac{z^3}{3} + zy^2 + \phi'_x(x,y)$
$(H_x)'_y = zx^2 - \frac{z^3}{3} + \psi'_y(x,y)$
Пытаемся найти $\psi$ и $\phi$:
$R = z(y^2 - x^2) = (H_y)'_x + \phi'_x(x,y) - (H_x)'_y - \psi'_y(x,y) = zy^2 - zx^2 + \phi'_x(x,y) - \psi'_y(x,y)$
Нам очень повезло: $\psi = 0, \phi = 0$ подходит. Тогда, $H = (zyx^2 - \frac{z^3 y}{3}, zxy^2 - \frac{xz^3}{3}, 0)$
Проверим: найдем $rotH$

In[1]:=
```
Curl[{z*y*x^2-z^3*y/3, z*x*y^2-x*z^3/3, 0}, {x, y, z}]
```
Out[1]=
$\{-x y^2 + x z^2, x^2 y - y z^2, -x^2 z + y^2 z\}$

вроде совпал.

Ещё пример:

In[18]:=

```
A = {6*y^2, 6*z, 6*x}
```

Out[18]=

$\{6 y^2, 6 z, 6 x\}$

In[10]:=

```
Div[A, {x, y, z}]
```

Out[10]=

0

In[26]:=

```
Hx = Integrate[A[[2]], z] + psi
```

Out[26]=

$psi + 3 z^2$

In[27]:=

```
Hy = -Integrate[A[[1]], z] + phi
```

Out[27]=

$phi - 6 y^2 z$

In[31]:=

```
Derivative[Hy, x] - Derivative[Hx, y] == A[[3]]
```

Derivative$[phi - 6 y^2 z, x]$ - Derivative$[psi + 3 z^2, y]$ == 6 x

Derivative[phi, x] - Derivative[psi, y] == 6*x

Пусть phi = 0, psi = 6xy, тогда всё норм:

## TODO:

- Всё, что помечено выше
- Условия, когда можно интегрировать и применять теоремы, которые возможно опущены
- ...