

## • Топология

- **топологическое пространство** — упорядоченная пара  $\langle X, \Omega \rangle$ , где  $X$  (*носитель*) — множество, а  $\Omega$  (*топология*) — множество каких-то его подмножеств + аксиомы:
  - $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$  (пустое множество и всё пространство открыты)
  - Если  $\{A_i\}, A_i \in \Omega$  — некоторое семейство элементов  $\Omega$ , то  $\bigcup_i A_i \in \Omega$  (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
  - Если  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_i \in \Omega$  — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто:  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$
- **открытое и замкнутое множество**  
*Открытое множество* — множество из  $\Omega$ .  
*Замкнутое множество* — мн-во, дополнение которого открыто.
- **внутренность и замыкание множества**  
*внутренность*  $A$  — максимальное открытое множество  $A^\circ$ , входящее в  $A$   
*замыкание*  $A$  — минимальное замкнутое множество  $\bar{A}$ , содержащее  $A$
- **топология стрелки**  $X = \mathbb{R}, \Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$
- **дискретная топология**  $X \neq \emptyset, \Omega = 2^X$
- **топология на частично упорядоченном множестве**
- **индуцированная топология на подпространстве**  
Пусть дано какое-то  $S \subseteq X$ . Индуцированная топология на подпространстве  $X - \Omega' = \{y \cap X | y \in \Omega\}$
- **связность(???)** : связное пространство — пространство такое, что его нельзя разбить на два непустых непересек. открытых подмножества

## • Исчисление высказываний

- **высказывание** — Строка в некотором алфавите, строящаяся по следующим правилам:

высказывание :=  
    {пропозициональная переменная} |  
    (высказывание | высказывание) |  
    (высказывание & высказывание) |  
    (высказывание -> высказывание)

$A, B, C \dots$  — пропозициональные переменные

$X, Y, Z \dots$  — метаварiable для переменных

- **метаварiable** — "Placeholder" for variables
- **пропозициональные переменные** — символы, обозначающие высказывания
- **аксиома** — высказывание

- о **схема аксиом** — шаблон для генерации аксиом

```

1  a -> b -> a
2  (a -> b) -> (a -> b -> c) -> (a -> c)
3  a -> b -> (a & b)
4  a & b -> a
5  a & b -> b
6  a -> a | b
7  b -> a | b
8  (a -> c) -> (b -> c) -> ((a | b) -> c)
9  (a -> b) -> (a -> !b) -> !a
10 !!a -> a

```

Интуиционисты меняют посленую аксиому на  $a \rightarrow !a \rightarrow b$

- о **правило Modus Ponens** — Если доказано  $\alpha$  и  $\alpha \rightarrow \beta$ , то считаем доказанным  $\beta$
- о **доказательство** — последовательность высказываний, каждое из которых либо аксиома, либо Modus Ponens.
- о **вывод из гипотез**  
 $\alpha$  выводимо из  $\Gamma$ , где  $\Gamma$  — список высказываний, если существует *вывод*, то есть последовательность высказываний такая, что каждое из них либо аксиома, либо из  $\Gamma$ , либо получается по М. Р.
- о **доказуемость** ( $\vdash$ )  
Высказывание  $\alpha$  *доказуемо*, если существует доказательство  $\alpha_1 \dots \alpha_k$ , где  $\alpha_k = \alpha$ .
- о **множество истинностных значений**
- о **модель (оценка переменных)**
- о **оценка высказывания** — Отображение: формула  $\rightarrow$  множество истинностных значений
- о **общезначимость** ( $\models$ ) — истинность при любой оценке
- о **выполнимость**: существует оценка, при которой формула выполнена
- о **невыполнимость**: нет такой оценки, что см выше
- о **следование**: формула  $X$  *следует* из  $G_1 \dots G_n$ , если в любой оценке, в которой истинны  $G_1 \dots G_n$  истинна и  $X$ .
- о **корректность** — доказуемость  $\implies$  общезначимость
- о **полнота** — общезначимость  $\implies$  доказуемость
- о **противоречивость** когда выводится любая формула
- о **формулировка теоремы о дедукции**  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \iff \Gamma, \alpha \vdash \beta$

- **Интуиционистское исчисление высказываний** (заменяли аксиому снятия двойного отрицания на  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ )

- о **закон исключённого третьего**  $\alpha \vee \neg\alpha$
- о **закон снятия двойного отрицания**  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- о **закон Пирса**  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
- о **Все эти законы не выводятся в ИИВ**
- о **ВНК-интерпретация логических связок**  
 $\alpha \& \beta$ , если есть доказательство  $\alpha$  и  $\beta$   
 $\alpha \vee \beta$ , если есть доказательство  $\alpha$  или  $\beta$  и мы знаем, чего именно  
 $\alpha \rightarrow \beta$ , если мы умеем строить доказательство  $\beta$  из доказательства  $\alpha$   
 $\neg\alpha$ , если из  $\alpha$  можно построить противоречие ( $\alpha \rightarrow \perp$ )

• **теорема Гливенко (формулировка)** Если  $\vdash_K \alpha$ , то  $\vdash_I \neg\neg\alpha$

• **решётка**

$\langle A, \leq \rangle$  — решётка, если:

- $\forall a, b \in A : \exists \text{наименьший } c = a + b : a \leq c, b \leq c$
- $\forall a, b \in A : \exists \text{наибольший } c = a \cdot b : c \leq a, c \leq b$

• **дистрибутивная решётка**

решётка + свойство:  $a + (b \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c$

**лемма:**  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

**теорема:** решётка дистрибутивна  $\iff$  не содержит ни диаманта ни пентагона

• **импликативная решётка**

дистрибутивная решётка + определена операция псевдодополнения (относительно  $b$ ):  $c = a \rightarrow b = \max\{x | x \cdot a \leq b\}$

**теорема:** дистрибутивность в определении можно опустить

**def:**  $1$  — наибольший элемент решётки

**def:**  $0$  — наименьший элемент решётки

• **алгебра Гейтинга** — Импликативная решётка с  $0$

**def:** псевдодополнение  $a = a \rightarrow 0$

Всякая алгебра Гейтинга — модель ИИВ

• **булева алгебра** — алгебра Гейтинга такая, что  $\forall a : a + \neg a = 1$

• **Гёделева алгебра**

Алгебра Гейтинга *гёделева*, если  $\forall a, b : (a + b = 1 \implies a = 1 | b = 1)$

• **операция  $\Gamma(A)$**  Добавим к алгебре Гейтинга новую “1”, большую всех элементов, а старую переименуем в “ $\omega$ ”.

• **алгебра Линденбаума** Пусть  $\alpha, \beta$  — формулы,  $\alpha \leq \beta$ , если  $\beta \vdash \alpha$ ,  $\alpha \approx \beta$ , если  $\alpha \leq \beta \& \beta \leq \alpha$

Тогда, алгебра Линденбаума — ИИВ/ $\approx$  [факторизация по операции  $\approx$ ]

**теорема:** Алгебра Линденбаума — точная модель ИИВ. Но нифига не конечная.

**теорема:** Алгебра Линденбаума — Гёделева

• **формулировка свойства дизъюнктивности и.и.в** —  $\vdash \alpha \vee \beta \implies \vdash \alpha$  или  $\vdash \beta$

• Определить *модель*, значит задать логические связки и истинностные значения

• Модель *корректна*, если любое доказуемое утверждение в ней истинно

• Модель *полна*, если любое истинное в ней утверждение доказуемо

• Модель *точная*, она корректна и полна

• Исчисление называют *табличным*, если существует конечная точная модель этого исчисления

• **формулировка свойства нетабличности и.и.в.:** ИИВ не таблично (см выше)

• **Исчисление предикатов**

• **предикатные и функциональные символы, константы и пропозициональные переменные**

• **свободные и связанные вхождения предметных переменных в формулу**

• **свобода для подстановки**

$D$  предметное множество

$V$  множество истинностных значений

**ФУНКЦИЯ** :  $D^n \rightarrow D$

**ПРЕДИКАТ** :  $D^n \rightarrow V$

**Предметная переменная**  $a, b, c, x, y, z, a_0, a' \dots$

**Терм**  $\theta_0, \theta_1 \dots$

**Предикатный символ**  $P$

**Формула**  $\alpha, \psi, \phi$

**ТЕРМ** =

(предметная переменная) |  
(функциональный символ) ( $TERM_0, TERM_1, \dots$ )

**ФОРМУЛА** =

(ФОРМУЛА | ФОРМУЛА) |  
(ФОРМУЛА & ФОРМУЛА) |  
(ФОРМУЛА  $\rightarrow$  ФОРМУЛА) |  
(!ФОРМУЛА) |  
( $\forall$  предметная переменная.ФОРМУЛА) |  
( $\exists$  предметная переменная.ФОРМУЛА) |  
(предикатный символ) ( $TERM_0, TERM_1, \dots$ )

Связанное вхождение – вхождение в области действия квантора.

Связывающее вхождение – вхождение непосредственно рядом с квантором.

Ех:  $(\forall x. \dots x \dots)$  первое вхождение – связывающее, второе вхождение – связанное.

Не связанные и не связывающие вхождения – *свободные*.

Терм  $\theta$  свободен для подстановки в формулу  $\psi$  вместо  $x$ , если после подстановки  $\theta$  вместо свободных вхождений  $x$ ,  $\theta$  не станет связанным.

### о **два правила для кванторов**

$$\left. \begin{array}{l} 11. (\forall x. \phi) \rightarrow \phi[x := \Theta] \\ 12. \phi[x := \Theta] \rightarrow \exists x. \phi \end{array} \right\}, \text{ где } \Theta \text{ свободна для подстановки вместо } x \text{ в } \phi$$

### о **две аксиомы для кванторов**

$$\left. \begin{array}{l} 2. \frac{\psi \rightarrow \phi}{\psi \rightarrow \forall x. \phi} \\ 3. \frac{\phi \rightarrow \psi}{(\exists x. \phi) \rightarrow \psi} \end{array} \right\}, \text{ где } x \text{ не входит свободно в } \psi$$

### о **оценки и модели в исчислении предикатов**

Чтобы оценить значение формулы в ИП, нужно задать кортеж  $\langle D, E, P, R \rangle$ , где:

- $D$  — предметное множество

- $E$  — оценка для функциональных символов ( $D^n \rightarrow D$ )
- $P$  — оценка для предикатов  $D^n \rightarrow V$
- $R$  — свободные предметные переменные
- **теорема о дедукции для И. П.**
  - $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ , в доказательстве нет применений правил для кванторов по свободным переменным из  $\alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$
  - $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \implies \Gamma, \alpha \vdash \beta$
- **лемма:**  $\llbracket \psi \rrbracket^{x := [\theta]} = \llbracket \psi[x := \llbracket \theta \rrbracket] \rrbracket$ , если  $\theta$  свободна для подстановки вместо  $x$
- **теорема о корректности для И. П.** каждое доказуемое утв. общезначимо
- - Множество  $\Gamma$  **непротиворечиво**, если нет  $\alpha$  такого, что  $\Gamma \vdash \alpha$  и  $\Gamma \vdash \neg \alpha$
  - Формула **замкнута**, если она не содержит свободных переменных
  - Формула **бескванторна**, если она не содержит кванторов
  - **полное непротиворечивое множество (бескванторных) формул** — непротиворечивое множество (бескванторных) формул + св-во:  $\forall \alpha : \alpha \in \Gamma \mid \neg \alpha \in \Gamma$
- **модель для формулы** модель —  $\langle D, E, P \rangle$
- **теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (формулировка)**  
**лемма:** Для любой формулы ИП найдётся эквив. ей ф-ла с поверхностными кванторами  
**теорема:**  $\Gamma$  — непротиворечивое множество формул ИП. Тогда, существует модель для  $\Gamma$
- **следствие из теоремы Гёделя о исчислении предикатов:** полнота???