Интегралы

Интеграл	Определение	Как вычислять	Свойства	+
Криволинейный интеграл 1	$\int_\alpha^\beta f(x(t),y(y),z(t))\|\|\overline{r}'(t)\|\|dt = \int_\Gamma fdl$	Параметризовать кривую и тупо вычислить	• Не зависит от параметризации кривой • Не зависит от направления кривой • Линейность • Аддитивность	$\int$ — масса кривой, если f — её плотность
Криволинейный интеграл 2	$\int_\alpha^\beta \overline{F}\cdot\overline{r}'(t)dt = \int_\alpha^\beta (P(x,y,z)x'(t)+Q(x,y,z)y'(t)+R(x,y,z)z'(t))$ Обозначение: $\int_\Gamma \overline{F}d\overline{r} = \int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$	Либо так же, как первого рода(параметризовать кривую) Либо TODO	Всё то же самое, но зависит от направления кривой	F — векторное поле, тогда $\int$ его работа вдоль кривой
Поверхностный интеграл 1	$\int\int_\Omega f(x,y,z)\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\|dudv = \int\int_\Sigma f(x,y,z)ds$	Либо параметризовать поверхность и вычислить через двойной Либо, через формулу Стокса	• $\|\overline{r}_u\times\overline{r}_v\| = \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\|\overline{r}_u\|^2\|\overline{r}_v\|^2-(\overline{r}_u\cdot\overline{r}_v)^2}$, где $E=\|\overline{r}_u\|^2, G=\|\overline{r}_v\|^2, F=r_u\cdot r_v$ • Подставим $f=1$, тогда $\int$ — площадь поверхности	Как бы масса поверхности, если f — функция плотности
Поверхностный интеграл 2	$\int\int_\Sigma \overline{F}\cdot\overline{n}_0ds = \int\int_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$	$\displaystyle\int\int_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy =$ $\displaystyle\pm\int\int_{\Sigma_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$ $\displaystyle\pm\int\int_{\Sigma_{zx}} P(x,y(x,z),z)dzdx$ $\displaystyle\pm\int\int_{\Sigma_{xy}} P(x,y,z(x,y))dxdy$ что касается знаков, берём "+", если угол между нормалью и осью, не фигурирующей в дифференциале острый, ичаче "-" Либо через формулу Гаусса-Остроградского		Поток векторного поля через двусторонюю поверхность

Фигня, с ними связанная

Поле скалярное

TODO

Поле векторное

TODO

Ротор, дивергенция и набла

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$grad f = \nabla f$ $div\overline{a} = \nabla\cdot\overline{a}$
$rot\overline{a} = \nabla\times\overline{a}$

Свойства ∇:
$\nabla(c_1f+c_2g) = c_1\nabla f + c_2\nabla g$
$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
$\nabla\cdot(\overline{f}\times\overline{g}) = (\nabla,\overline{f},\overline{g}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_x & g_y & g_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \\ = \overline{g}(\nabla\times\overline{f}) - \overline{f}(\nabla\times\overline{g})$

Из СР по матану: $\nabla\times(c\times a) = c\cdot(\nabla\cdot a) - (c\cdot\nabla)\cdot a$

Подумаем, шо ж такое слева написано. $\frac{\partial}{\partial x}(\sum) + \frac{\partial}{\partial y}(\sum) + \frac{\partial}{\partial z}(\sum)$. Сейчас не важно, что это за суммы. Важно лишь то, что они имеют вид $\sum_i \frac{\partial}{\partial ?}c_ia_i$. Это значит, что под оператором дифференцирования есть одна константа и одна функция! Значит, с дифференцировением можно делать всё, что угодно, но только не переставлять правее, чем a_i. Забудем, что это оператор дифференцирования и применим формулу "BAC-CAB". Понятно, что в доказательстве (доступно по последней ссылке) никто не переставлял дифференцирование с a_i и мы можем применить эту формулу.

Теперь и формула (12) со страницы 14 отсюда [та, которую Родина не смогла доказать] , теряет свой мистический облик. Рассмотрим $\nabla\times(f\times g)$. Формула имеет почти тот же вид, но под оператором дифференцирования теперь произведение функций. Но мы знаем, что для каждого слагаемого выполнены правила дифференцирования, то есть $(ab)' = ab'$ $[\text{считаем a константой}]$ $+ ba'$ $[\text{считаем b константой}]$. Значит, и для всей суммы они выполнены. Применим это сюда: $\nabla\times(f\times g) = \nabla\times(\hat{f}\times g) + \nabla\times(f\times\hat{g})$ $/$"треугольной шапочкой" обозначено то, что мы интерпретируем функцию как константу$/$ $= \nabla\times(\hat{f}\times g) - \nabla\times(\hat{g}\times f) =$ $/$по предыдущей формуле$/$ $=$ $f\cdot(\nabla\cdot g) - (f\cdot\nabla)\cdot g - (g\cdot(\nabla\cdot f) - (g\cdot\nabla)\cdot f) = f\cdot(\nabla\cdot g) - (f\cdot\nabla)\cdot g - g\cdot(\nabla\cdot f) + (g\cdot\nabla)\cdot f$

Формула Гаусса-Остроградского

TODO

Формула Стокса

TODO

Поле потенциальное

TODO

Поле соленоидальное

TODO