Определение 0.1. *Доказательство* в исчислении высказываний — это некоторая конечная последовательность выражений α_1, $\alpha_2 \dots \alpha_n$ из языка L, такая, что каждое из утверждений $\alpha_i (1 \leq i \leq n)$ либо является аксиомой, либо получается из других утверждений α_{P_1}, $\alpha_{P_2} \dots \alpha_{P_k}$ $(P_1 \dots P_k < i)$ по правилу вывода.

Определение 0.2. Высказывание α называется доказуемым, если существует доказательство α_1, $\alpha_2 \dots \alpha_k$, и в нем α_k совпадает с α.

Определение 0.3. Вывод из допущений. Пусть Γ – некоторый список высказываний, а α — некоторое высказывание. Тогда мы будем говорить, что высказывание α *выводимо* из Γ (и записывать это как $\Gamma \vdash \alpha$), если существует такая последовательность высказываний $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}, \alpha$ (называемая *выводом* α из Γ), что каждое из высказываний α_i — это

- либо аксиома,
- либо получается по правилу Modus Ponens из предыдущих высказываний,
- либо — высказывание из списка Γ.

Элементы Γ мы будем называть *допущениями*. Также эти элементы называют предположениями или гипотезами.

Теорема 0.1. Теорема о дедукции. Утверждение $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо, что $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

Лемма 0.2. $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$

Определение 0.4. Введем обозначение. Пусть α — это некоторое высказывание, а x — некоторое истинностное значение. Тогда обозначим за ${}_{[x]}\alpha$ высказывание α, если x — истина, и $\neg(\alpha)$, если x — ложь. Также, если формула α — это формула с n пропозициональными переменными $P_1 \dots P_n$, и $x_1 \dots x_n$ — некоторые истинностные значения, то за $[\![\alpha]\!]^{P_1 := x_1, \dots P_n := x_n}$ обозначим значение формулы α при подстановке значений $x_1 \dots x_n$ вместо переменных $P_1 \dots P_n$.

Лемма 0.3. Если $\Gamma, \Sigma \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Delta, \Sigma \vdash \alpha$. Если $\Gamma, \Delta, \Sigma, \Pi \vdash \alpha$, то $\Gamma, \Sigma, \Delta, \Pi \vdash \alpha$.

Лемма 0.4. Если справедливы 3 утверждения: $\Gamma \vdash \gamma$, $\Delta \vdash \delta$ и $\gamma, \delta \vdash \alpha$, то справедливо и $\Gamma, \Delta \vdash \alpha$

Лемма 0.5. Каждое из построенных по таблицам истинности утверждений доказуемо.

Лемма 0.6 (Правило контрапозиции)**.** Каковы бы ни были формулы α и β, справедливо, что $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

Лемма 0.7. Правило исключенного третьего. Какова бы ни была формула α, $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

Лемма 0.8. Об исключении допущения. Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ и $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. Тогда также справедливо $\Gamma \vdash \alpha$.

Теорема 0.9. О полноте исчисления высказываний. Пусть справедливо $\models \alpha$. Тогда также справедливо, что $\vdash \alpha$.

Лемма 0.10.

Теорема 0.11. О корректности исчисления высказываний. Пусть справедливо $\vdash \alpha$. Тогда также справедливо, что $\models \alpha$.

Теорема 0.12. В интуиционистском исчислении высказываний невозможно доказать правило исключенного третьего: $P \vee \neg P$.

Определение 0.5. Рассмотрим некоторый ориентированный граф без циклов (без потери общности мы можем взять дерево вместо такого графа). Узлы мы назовем *мирами* и пронумеруем натуральными числами: $W = \{W_1, W_2, \ldots, W_n\}$. Будем писать $W_i \preceq W_j$, если существует путь из W_i в W_j. Также мы считаем, что $W_i \preceq W_i$ (из каждой вершины существует путь в саму себя).

Определение 0.6. Каждому узлу сопоставим множество *вынужденных* переменных ИИВ и будем писать $W_i \Vdash A_k$, если переменная A_k вынуждена в мире W_i. При этом, если $W_i \preceq W_j$, то всегда должно быть выполнено и $W_j \Vdash A_k$.

Определение 0.7. *Моделью Крипке (шкалой Крипке)* назовем упорядоченную тройку — множество миров, отношение порядка на мирах и отношение вынужденности. Будем говорить, что формула α *вынуждается* моделью (или является истинной в данной модели), если $W_i \Vdash \alpha$ в любом мире W_i. Будем записывать это как $\Vdash \alpha$.

Лемма 0.13. О монотонности. Если $W \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$.

Теорема 0.14. О корректности ИИВ относительно моделей Крипке. Если формула α выводима в интуиционистском исчислении высказываний, то она истинна во всех мирах всех моделей Крипке.

Определение 0.8. Назовем пропозициональное исчисление *табличным*, если для этого исчисления существует полная модель, (модель, в которой истинны те и только те формулы, которые выводимы в этом исчислении), и она может быть представлена конечной таблицей. То есть существуют $n \in \mathbb{N}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, где $v_n = \texttt{И}$, а также таблицы истинности для всех четырёх связок.

Теорема 0.15. ИИВ не является табличным.

Определение 0.9. *Терм* исчисления предикатов (еще мы его будем называть предметным выражением) — это:

- предметная переменная — маленькая буква начала или конца латинского алфавита, возможно, с индексом или апострофом.
- применение функции (функции мы будем обозначать латинскими буквами середины алфавита: $f, g, h, \ldots$): если $\theta_1 \ldots \theta_n$ — термы и f — *функциональный символ* (то есть символ, обозначающий некоторую функцию), то $f(\theta_1, \ldots \theta_n)$ — тоже терм. Также, частным случаем функций являются константы — это нульместные функции. Обычно мы их будем обозначать маленькими буквами c или d, возможно, с индексами.

Определение 0.10. *Формула* исчисления предикатов (еще мы ее будем называть логическим выражением) — это:

- если α и β — формулы исчисления предикатов, то $\neg\alpha$, $\alpha \,\&\, \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ — также формула. Связки расставлены в порядке убывания приоритета. Как и в исчислении высказываний, импликация правоассоциативна, остальные операции — левоассоциативны.
- если α — формула и x — предметная переменная, то $\forall x \alpha$ и $\exists x \alpha$ — также формулы. Кванторы имеют приоритет, одинаковый с отрицанием, и, как и отрицание, действуют только на ближайшее за ними логическое выражение. Например, формула $\forall x P(x, 5) \vee P(x, 7)$ соответствует формуле $(\forall x P(x, 5)) \vee P(x, 7)$.

- применение предиката (предикаты мы будем обозначать большими латинскими буквами, возможно, с индексами): если $\theta_1 \dots \theta_n$ — термы, и P — *предикатный символ*, то $P(\theta_1, \dots \theta_n)$ — формула. В частности, при $n = 0$ предикат становится аналогом предметной переменной из исчисления высказываний.

Определение 0.11. Дана некоторая формула s. Будем говорить, что подстрока s_1 строки s является подформулой, если она в точности соответствует какому-то одному нетерминалу в дереве разбора строки s.

Определение 0.12. Если в формулу входит подформула, полученная по правилам для кванторов (то есть, $\forall x \alpha$ или $\exists x \alpha$), то мы будем говорить, что формула α находится в области действия данного квантора по переменной x. Также, будем говорить, что любая подформула формулы α находится в области действия данного квантора.

Определение 0.13. Если некоторое вхождение переменной x находится в области действия квантора по переменной x, то такое вхождение мы назовем *связанным*. Вхождение переменной x непосредственно рядом с квантором ($\forall x \dots$) мы назовем *связывающим*. Те вхождения переменных, которые не являются связанными или связывающими, назовем *свободными*. Формула, не имеющая свободных вхождений переменных, называется *замкнутой*.

Определение 0.14. Будем говорить, что терм θ свободен для подстановки в формулу ψ вместо x (или просто свободен для подстановки вместо x), если после подстановки θ вместо свободных вхождений x ни одно вхождение свободной переменной в θ не станет связанным.

Определение 0.15. Формула в исчислении предикатов общезначима, если она истинна на любом предметном множестве D, при любой оценке предикатных и функциональных символов, и при любых оценках свободных предметных переменных.

Определение 0.16. Пусть имеется некоторое исчисление предикатов с множеством аксиом A, и пусть дан некоторый (возможно, пустой) список Γ формул исчисления предикатов. Тогда, вывод формулы α в исчислении с аксиомами $A \cup \Gamma$ мы назовем выводом из допущений Γ, и будем записывать это как $\Gamma \vdash \alpha$.

Теорема 0.16. Теорема о дедукции. Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, и в доказательстве отстутствуют применения правил для кванторов, использующих свободные переменные из формулы α, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ Обратно, если $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, то $\Gamma, \alpha \rightarrow \beta$.

Лемма 0.17. $[\![\psi]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\psi[x := \theta]]\!]$, если θ свободна для подстановки в ψ вместо x.

Теорема 0.18. Исчисление предикатов корректно, т.е. любое доказуемое утверждение общезначимо.

Определение 0.17. Назовём Γ — множество *замкнутых* формул — непротиворечивым, если ни для какой формулы α невозможно показать, что $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Определение 0.18. Полным непротиворечивым множеством (непротиворечивым бескванторным множеством) формул назвем такое множество Γ, что для любой замкнутой (замкнутой и бескванторной) формулы α либо $\alpha \in \Gamma$, либо $(\neg\alpha) \in \Gamma$.

Лемма 0.19. Если Γ — непротиворечивое множество формул, то для любой формулы α либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ непротиворечиво.

Теорема 0.20. Любое множество непротиворечивых формул Γ мы можем дополнить до полного (полного бескванторного) множества.

Определение 0.19. Моделью непротиворечивого множества формул мы назовем такие оценки предикатов и функциональных символов, что каждая из формул данного множества истинна. Также, по аналогии с исчислением высказываний, введём обозначение: $\Gamma \models \alpha$ (α следует из Γ), если $[\![\alpha]\!] = \texttt{И}$ в любой модели множества Γ.

Теорема 0.21. Если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.

Теорема 0.22. Если Γ имеет модель, то оно непротиворечиво.

Лемма 0.23. Пусть Γ — полное непротиворечивое множество бескванторных формул. Тогда существует модель для Γ.

Определение 0.20. Назовём формулу α формулой с поверхностными кванторами, если существует такой узел в дереве разбора формулы, не являющийся квантором, ниже которого нет ни одного квантора, а выше — нет ничего, кроме кванторов.

Лемма 0.24. Для любой формулы исчисления предикатов найдётся эквивалентная ей формула с поверхностными кванторами.

Теорема 0.25. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Пусть Γ — непротиворечивое множество формул исчисления предикатов. Тогда существует модель для Γ.

Теорема 0.26. Если $\models \alpha$, то $\vdash \alpha$.

Теорема 0.27. Так определенное сложение коммутативно.

Определение 0.21. Теорией первого порядка мы назовем исчисление предикатов с расширенным языком (к стандартным конструкциям мы добавляем функции и предикаты, возможно, с особым синтаксисом) и дополнительными аксиомами. Эти дополнения к исчислению предикатов мы назовем *нелогическими* или *математическими*. В противоположность им, стандартные конструкции и аксиомы исчисления предикатов мы назовем *логическими*.

Теорема 0.28. $\vdash a = a$

Определение 0.22. Структура. Структурой теории первого порядка мы назовем упорядоченную тройку $\langle D, F, P\rangle$, где $F = \langle F_0, F_1, ...\rangle$ — списки оценок для 0-местных, 1-местных и т.д. функций, и $P = \langle P_0, P_1, ...\rangle$ — списки оценок для 0-местных, 1-местных и т.д. предикатов, D — предметное множество.

Определение 0.23. Назовем структуру корректной, если любая доказуемая формула истинна в данной структуре.

Определение 0.24. Моделью теории мы назовем любую корректную структуру.

Теорема 0.29. Доказуемо, что $a = b \to b = a$ и что $a^{-1} \cdot a = 1$.

Теорема 0.30. Следующие функции являются примитивно-рекурсивными: сложение, умножение, ограниченное вычитание (которое равно 0, если результат вычитания отрицателен), целочисленное деление, остаток от деления, проверка значения на простоту.

Определение 0.25. Если R — n-местное отношение, то его *характеристической функцией* мы назовем функцию

$$C_R(x_1, \dots x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1, \dots x_n) \in R \\ 0, & \text{если } (x_1, \dots x_n) \notin R \end{cases}$$

Определение 0.26. Рекурсивным отношением называется отношение, характеристическая функция которого рекурсивна.

Определение 0.27. Функцией *Аккермана* мы назовем так определенную функцию:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & \text{если } m = 0 \\ A(m-1,1), & \text{если } m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & \text{если } m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Также нам будет удобно другое обозначение: $\alpha_m(n) = A(m,n)$. Данное обозначение позволяет рассматривать функцию Аккермана как семейство функций от одной переменной.

Лемма 0.31. $\alpha_{m+1}(n) = \alpha_m^{n+1}(1)$.

Лемма 0.32. Для функции Аккермана справедливы следующие свойства:

1. Если $m_1 < m_2$, то $A(m_1, n) < A(m_2, n)$
2. Если $n_1 < n_2$, то $A(m, n_1) < A(m, n_2)$
3. $\alpha_1(n) = n + 2$
4. $\alpha_2(n) = 2n + 3$
5. $\alpha_{m+2}(n) > \alpha_m^{n+2}(n)$

Теорема 0.33. Функция Аккермана растет быстрее любой примитивно-рекурсивной функции. Точнее, какова бы ни была примитивно-рекурсивная фукнция $p : N^n \to N$, мы можем подобрать такую константу K, что $p(\overrightarrow{x}) \le \alpha_K($
$max(\overrightarrow{x}))$ при любом x.

Теорема 0.34. Функция Аккермана не является примитивно-рекурсивной.

Определение 0.28. Арифметическая функция — функция $f : N^n \to N$. Арифметическое отношение — n-арное отношение, заданное на N.

Определение 0.29. Арифметическое отношение R называется выразимым (в формальной арифметике), если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_n)$ с n свободными переменными, что для любых натуральных чисел k_1 ... k_n

1. если $(k_1, \dots k_n) \in R$, то доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n})$
2. если $(k_1, \dots k_n) \notin R$, то доказуемо $\neg\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n})$.

Определение 0.30. Введем следующее сокращение записи: пусть $\exists! y \phi(y)$ означает

$$\exists y \phi(y) \ \&\ \forall a \forall b (\phi(a) \ \&\ \phi(b) \to a = b)$$

Здесь a и b — некоторые переменные, не входящие в формулу ϕ свободно.

Определение 0.31. Арифметическая функция f от n аргументов называется представимой в формальной арифметике, если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_{n+1})$ с $n+1$ свободными пременными, что для любых натуральных чисел k_1 ... k_{n+1}

1. $f(k_1, \dots k_n) = k_{n+1}$ тогда и только тогда, когда доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_{n+1}})$.
2. Доказуемо $\exists! b(\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n}, b)$

Теорема 0.35. Функции Z, N, U_i^n являются представимыми.

Теорема 0.36. Если функции f и g_1, ... g_m представимы, то функция $S\langle f, g_1, \dots g_m \rangle$ также представима.

Определение 0.32. β-функция Геделя - это функция $\beta(b, c, i) = b\%(1 + c \cdot (i + 1))$. Здесь операция (%) означает взятие остатка от целочисленного деления.

Лемма 0.37. Функция примитивно-рекурсивна, и при этом представима в арифметике формулой $B(b, c, i, d) := \exists q((b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d) \,\&\, (d < 1 + c \cdot (i + 1)))$

Теорема 0.38. Китайская теорема об остатках. Если $u_1, \dots u_n$ — попарно взаимно простые целые числа, и $k_1, \dots k_n$ — целые числа, такие, что $0 \le k_i < u_i$ при любом i, то найдется такое целое число b, что $k_i = b\%u_i$ при любом i.

Лемма 0.39. Для любой конечной последовательности чисел k_0 ... k_n можно подобрать такие константы b и c, что $\beta(b, c, i) = k_i$ для $0 \le i \le n$.

Теорема 0.40. Всякая рекурсивная функция представима в арифметике.

Теорема 0.41. Всякое рекурсивное арифметическое отношение выразимо в формальной арифметике.

Определение 0.33. Ограниченные кванторы $\exists_{x<y}\phi(x)$ и $\forall_{x<y}\phi(x)$ — сокращения записи для выражений вида $\exists x(x < y \,\&\, \phi(x))$ и $\forall x(x \ge y \vee \phi(x))$

Теорема 0.42. Пусть P_1 и P_2 — рекурсивные отношения. Тогда следующие комбинации отношений также являются рекурсивными отношениями:

1. $F(x_1, \dots x_n, z) := \forall_{y<z} P_1(x_1, \dots x_n, y)$
2. $E(x_1, \dots x_n, z) := \exists_{y<z} P_1(x_1, \dots x_n, y)$
3. $P_1(x_1, \dots x_n) \to P_2(x_1, \dots x_n)$
4. $P_1(x_1, \dots x_n) \vee P_2(x_1, \dots x_n)$
5. $P_1(x_1, \dots x_n) \,\&\, P_2(x_1, \dots x_n)$
6. $\neg P_1(x_1, \dots x_n)$

Определение 0.34. Гёделева нумерация.Дадим следующие номера символам языка формальной арифметики:

3	(	
5	)	
7	,	
9	$\neg$	
11	$\to$	
13	$\vee$	
15	&	
17	$\forall$	
19	$\exists$	
$21 + 6 \cdot k$	x_k	переменные
$23 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n	n-местные функциональные символы: ($'$), (+) и т.п.
$25 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n	n-местные предикаты, в т.ч. (=)

Теорема 0.43. Любая представимая в формальной арифметике функция является рекурсивной.

Определение 0.35. Мы будем называть теорию непротиворечивой, если не найдется такой формулы α, что доказуемо как α, так и $\neg\alpha$.

Лемма 0.44. Если теория противоречива, то в ней доказуема любая формула.

Определение 0.36. Мы будем называть теорию ω-непротиворечивой, если, какова бы ни была формула $P(x)$ со свободной переменной x, такая, что для любого натурального числа p доказуемо $P(\overline{p})$, то формула $\exists p \neg P(p)$ недоказуема.

Лемма 0.45. ω-непротиворечивость влечёт непротиворечивость.

Теорема 0.46. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики.

1. Если формальная арифметика непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\text{«}\sigma\text{»}})$.
2. Если формальная арифметика ω-непротиворечива, то недоказуемо $\neg\sigma(\overline{\text{«}\sigma\text{»}})$.

Теорема 0.47. Теорема Гёделя в форме Россера. Если формальная арифметика непротиворечива, то не доказуема как формула $\rho(\overline{\text{«}\rho\text{»}})$, так и её отрицание.

Лемма 0.48. Каково бы ни было число n, доказуемы следующие утверждения:

- $\vdash a \le \overline{n} \to (a = \overline{0} \vee a = \overline{1} \vee \dots \vee a = \overline{n})$
- $\vdash (a = \overline{0} \vee a = \overline{1} \vee \dots \vee a = \overline{n}) \to a \le \overline{n}$

Теорема 0.49. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Если арифметика непротиворечива, то в ней не существует доказательства $Consis$.

Определение 0.37. Колмогоровской сложностью $K(x)$ натурального числа x мы назовем минимальную длину (в битах) записи рекурсивной функции (в кодировке ASCII, в синтаксисе, использованном в данном конспекте; вместо символа μ мы будем использовать M), вычисляющей данное число.

Теорема 0.50. Теорема Чайтина о неполноте. Существует такое число L (вообще говоря, зависящее от конкретного абстрактного алгоритма, способа записи и т.п.), что ни для какого числа x нет способа доказать в формальной арифметике, что $K(\overline{x}) > L$.

Определение 0.38. Эквивалентность. Запись $a \leftrightarrow b$ является сокращением записи для $\equiv a \to b \,\&\, b \to a$.

Определение 0.39. Будем говорить, что множество x является подмножеством множества y, если любой элемент x принадлежит y. Формально: $x \subseteq y$ является сокращением записи для $\forall z (z \in x \to z \in y)$.

Определение 0.40. Принцип объемности.Два множества называются равными, если они являются подмножествами друг друга. Формально: $x = y$ является сокращением записи для $x \subseteq y \,\&\, y \subseteq x$.

Определение 0.41. Пересечением множеств x и y называется множество, состоящее в точности из тех элементов, которые присутствуют и в x и в y. Формально: $x \cap y$ — это такое множество z, что $\forall t (t \in z \leftrightarrow t \in x \,\&\, t \in y)$

Определение 0.42. Пустое множество $\emptyset$ — множество, которому не принадлежит никакой элемент: $\forall x \neg x \in \emptyset$.

Теорема 0.51. 1. Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X.

2. Если существует хотя бы одно множество, то существует пустое множество.

3. Пустое множество единственно.

4. Для двух множеств существует множество, являющееся их пересечением.

Определение 0.43. Дизъюнктным (разделённым) множеством называется множество, элементы которого не пересекаются. Формально:

$$Dj(x) \equiv \forall y \forall z((y \in x \,\&\, z \in x \,\&\, \neg y = z) \to \neg \exists t(t \in y \,\&\, t \in z))$$

Определение 0.44. Прямым произведением дизъюнктного множества a называется множество $\times a$ всех таких множеств b, что:

- b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе
- b содержит элементы только из $\cup a$.

Формально:

$$\forall b(b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \,\&\, \forall y(y \in a \to \exists! x(x \in y \,\&\, x \in b))))$$

Определение 0.45. Упорядоченная пара. Упорядоченной парой двух множеств a и b назовем множество $\{a, \{a, b\}\}$, еще будем записывать его так: $\langle a, b\rangle$

Лемма 0.52. Упорядоченную пару можно построить для любых множеств, также $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ тогда и только тогда, когда $a = b$ и $c = d$.

Определение 0.46. Бинарное отношение Бинарным отношением на множестве X назовем подмножество множества всех упорядоченных пар элементов из X.

Определение 0.47. Упорядочивание Отношение R на множестве S упорядочивает X, если это отношение транзитивно и оно образует линейный порядок (строгое неравенство: справедливо $\forall x \forall y(x \in X \to y \in X \to R(x, y) \vee x = y \vee R(y, x))$ и $\forall x \neg R(x, x))$. Отношение вполне упорядочивает S, если к тому же для любого непустого подмножества S выполнено $\exists x(x \in B \,\&\, \forall y(y \in B \to \neg R(y, x)))$.

Определение 0.48. Множество x - транзитивное, если $z \in y, y \in x \to z \in x$.

Определение 0.49. Ординал (порядковое число) — транзитивное, вполне упорядоченное с помощью отношения $(\in)$ множество.

Определение 0.50. Ординал x называется *предельным*, если $\neg x = \emptyset \,\&\, \neg \exists y(y \cup \{y\} = x)$.

Определение 0.51. Ординал x называется *конечным*, если он меньше любого предельного ординала. То есть, он не содержит ни одного предельного: $\neg \exists t(t \in x \,\&\, \neg \exists y(y \cup \{y\} = t))$

Определение 0.52. Ординал ω — это минимальный предельный ординал.

Теорема 0.53. Ординал ω существует.

Определение 0.53. Верхней гранью подмножества x некоторого вполне упорядоченного множества S мы назовем всякий такой элемент y, что он больше всех элементов из x.

Минимальной верхней гранью подмножества x некоторого вполне упорядоченного множества S мы назовем множество $\mathrm{Upb}_S(x) = \min\{y \mid y \in S \,\&\, \forall t(t \in x \to t < y)\}$.

Определение 0.54.

Определение 0.55. Арифметические операции над ординалами. За $a+1$ обозначим $x \cup \{x\}$. Тогда следующими рекурсивными определениями мы введем операции сложения, умножения и возведения в степень:

$$a+b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv 0 \\ (a+c)+1, & b \equiv c+1 \\ \mathrm{Upb}_{\mathrm{ord}}\{a+c \mid c < b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv 0 \\ (a \cdot c)+a, & b \equiv c+1 \\ \mathrm{Upb}_{\mathrm{ord}}\{a \cdot c \mid c < b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv 0 \,\&\, a > 0 \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c+1 \\ \mathrm{Upb}_{\mathrm{ord}}\{a^c \mid c < b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Определение 0.56. Назовем множества X и Y равномощными, если найдется биективное отображение X на Y. Будем записывать это как $|X| = |Y|$. Будем говорить, что множество X имеет мощность не превышающую Y, если найдется инъективное отображение X в Y. Будем записывать это как $|X| \le |Y|$. Будем записывать $|X| < |Y|$, если известно, что $|X| \le |Y|$, но неверно, что $|X| = |Y|$.

Определение 0.57. Кардинальные числа Кардинальное число - такой ординал x, что $y < x \leftrightarrow |y| < |x|$.

Определение 0.58. Мощность модели. Пусть M — модель некоторой теории первого порядка. Напомним, что модель задаётся предметным множеством D, и функциями, соответствующим всем предикатам теории и всем функциональным символам теории. Тогда, назовем мощность множества D мощностью модели.

Определение 0.59. Элементарная подмодель. Пусть M — модель некоторой теории первого порядка, с предметным множеством D, и пусть определено D_1, $D_1 \subset D$. Тогда структура M_1, построенная на предметном множестве D_1 с предикатами и функциями, получающимися из предикатов и функций M путем сужения их области определения на D_1 называется *элементарной подмоделью* M, если:

1. любая функция теории f замкнута на D_1 (т.е. если $x_1 \in D_1, \dots x_n \in D_1$, то $f(x_1, \dots x_n) \in D_1$)
2. Любая формула $A(x_1, \dots x_n)$ теории при любых значениях $x_1, \dots x_n$ из D_1, истинная в M, истинна также и в M_1.

Лемма 0.54. Элементарная подмодель теории является моделью данной теории.

Определение 0.60. Назовём теорию счётно-аксиоматизируемой (конечно-аксиоматизируемой), если ее множество аксиом и правил вывода имеет счётную (конечную) мощность.

Теорема 0.55. Теорема Лёвенгейма-Сколема. Пусть M — модель некоторой теории первого порядка, и пусть T — множество всех формул этой теории. Тогда у M есть элементарная подмодель, такая, что $|M| = \max(|T|, \aleph_0)$.