

тервала. Таким образом, и в этом случае можно считать функцию f гладкой, а якобиан (1.2) – непрерывным.

Простейшим методом численного интегрирования является метод Эйлера, формула которого при решении задачи (1.1) имеет вид

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i). \quad (1.3)$$

Этот метод является *явным*, поскольку вектор переменных в очередной момент модельного времени явно выражается через уже рассчитанный вектор в предыдущий момент. Для решения ОДУ применяют также *неявные* методы, простейший из них – неявный (обратный) метод Эйлера, формула которого

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}). \quad (1.4)$$

В неявных методах формула шага интегрирования представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, для решения которой используют итерационные методы (обычно это метод Ньютона или его модификации).

Методы решения ОДУ подразделяются также на *одношаговые* (Эйлера, Рунге–Кутты, Розенброка) и *многошаговые* (Адамса, Гира, прогноза-коррекции и др.). В одношаговых методах для нахождения y_{i+1} используются только векторы y_i и $y'_i = f(t_i, y_i)$. В многошаговых методах используется также информация, полученная на предыдущих шагах: в k -шаговом методе это $y_{i-1}, \dots, y_{i-k+1}, y'_{i-1}, \dots, y'_{i-k+1}$. Первый шаг всегда выполняется одношаговым методом. На последующих шагах может быть произведен переход на многошаговый метод с последовательным увеличением числа используемых шагов. Не следует продолжать решение многошаговым методом при резком изменении правой части системы ОДУ, поскольку накопленная информация оказывается устаревшей. В этом случае следует отбросить всю предыдущую информацию и вновь начать решение одношаговым методом.

1.2. Точность и устойчивость численных методов

Основные характеристики методов численного решения ОДУ связаны с их точностью и устойчивостью. Размер шага выбирается исходя из точности численного решения. Ошибка интегрирования

$$e_i = y(t_i) - y_i \quad (1.5)$$

складывается из двух составляющих: методической (или ошибки дискретизации), обусловленной неточностью метода, и ошибки округления, обусловленной ограниченностью разрядной сетки компьютера. При уменьшении размера шага методическая ошибка уменьшается, а ошибка округления возрастает. Ошибка округления обычно пренебрежимо мала и заметно сказывается лишь в некоторых исключительных случаях.

При точном выполнении всех вычислений ошибка состоит только из методической составляющей. При заданном начальном условии ошибка (1.5) называется *глобальной*, поскольку она получена в результате накопления ошибок на

всех предыдущих шагах. Ошибка, полученная на одном шаге при предположении, что все используемые предыдущие значения точные, называется *локальной*. Для одношаговых методов ошибка (1.5) будет локальной, если $\mathbf{y}_{i-1} = \mathbf{y}(t_{i-1})$. При некоторых (достаточно общих) предположениях локальная ошибка при $h \rightarrow 0$ пропорциональна h^{p+1} , где целое число p называется *порядком сходимости* метода. Глобальная ошибка получается в результате накопления локальных ошибок на всех шагах, поэтому она пропорциональна числу шагов $N = T/h$ и усредненной локальной ошибке. В результате при $h \rightarrow 0$ глобальная ошибка пропорциональна h^p . Для явного и неявного методов Эйлера $p = 1$, поэтому уменьшение размера шага в 2 раза приводит к уменьшению локальной ошибки примерно в $2^{p+1} = 4$ раза. Но при этом в 2 раза увеличивается число шагов, поэтому глобальная ошибка уменьшится только в $2^p = 2$ раза.

Порядок используемого метода следует соотносить с требуемой точностью численного решения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} y_1' &= -22y_1 + 20y_2^2, \quad y_2' = y_1 - y_2 - y_2^2, \\ y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (1.6)$$

решение которой $y_1(t) = \exp(-2t)$, $y_2(t) = \exp(-t)$. Ошибку решения оценим в виде $\varepsilon = \max(e(t_i), 0 \leq t_i \leq 1)$, где $e(t_i)$ – евклидова норма абсолютной ошибки в точке $t_i = ih$. Вычислительные затраты оценим числом вычислений правой части Nf на всем интервале. Зависимости ошибки от вычислительных затрат для явных одношаговых методов 1-го, 2-го и 4-го порядков приведены на рис. 1.1. Из этого рисунка видно, что выбор порядка метода определяется требованиями к точности. Если допустима достаточно большая ошибка, преимущество имеют методы невысоких порядков, позволяющие получить решение с малыми вычислительными затратами. А при малой допустимой ошибке следует использовать методы более высоких порядков.

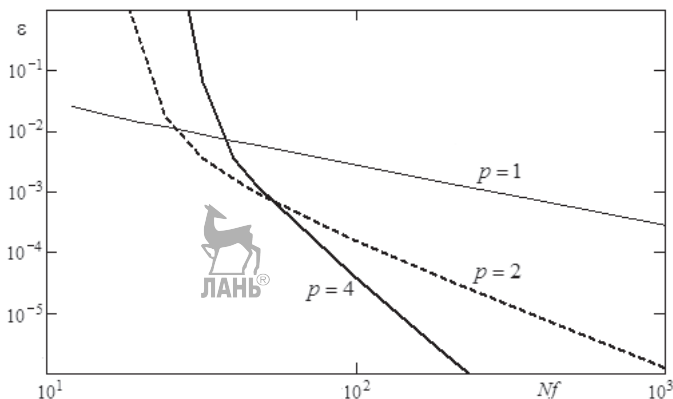


Рис. 1.1. Зависимости ошибки решения задачи (1.6) от вычислительных затрат для методов порядков 1, 2 и 4