Эти методы имеют одинаковую функцию устойчивости $R(z)=\dfrac{1+z/2}{1-z/2}$ и являются A-устойчивыми (но не L-устойчивыми). Метод трапеций реализован в системе MATLAB (решатель ode23t). Примером L-устойчивого метода DIRK второго порядка является метод

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & & \\ 2\gamma & \gamma & \gamma & \\ 1 & (1-\gamma)/2 & (1-\gamma)/2 & \gamma \\ \hline & (1-\gamma)/2 & (1-\gamma)/2 & \gamma \end{array} \qquad \gamma = 1-\sqrt{2}/2.$$

Его можно интерпретировать как последовательное применение правила трапеций и формулы дифференцирования назад 2-го порядка, поэтому он получил название TR-BDF2. Этот метод реализован в системе MATLAB под названием ode23tb и в ПО SimInTech, в котором реализованы также методы DIRK третьего и четвертого порядков (DIRK3 и DIRK4).

Для уменьшения вычислительных затрат при реализации неявных методов было предложено ограничить решение алгебраических уравнений одной ньютоновской итерацией. Например, применяя одну итерацию при решении алгебраических уравнений в неявном методе Эйлера, получим метод, задаваемый формулой

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + (\mathbf{I} - h\mathbf{J})^{-1}h\mathbf{f}(t_0, y_0).$$

Такие методы получили название линейно-неявных. Применительно к диагонально-неявным методам Рунге-Кутты методы такого типа были предложены Розенброком [139]. L-устойчивый метод Розенброка второго порядка реализован в системе MATLAB под названием ode23s.

1.9. Многошаговые методы

В общем случае линейные k-шаговые методы задаются формулами вида

$$\mathbf{y}_{i+1} = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{y}_{i+1-j} + h\sum_{j=0}^{k} b_j \mathbf{f}_{i+1-j}, \quad \mathbf{f}_l = \mathbf{f}(t_l, \mathbf{y}_l). \tag{1.25}$$

Среди них наиболее известны и популярны явные и неявные методы Адамса, а также неявные методы, основанные на формулах численного дифференцирования. Неявные методы имеют $b_0 \neq 0$. Для неявных методов действует второй барьер Далквиста: если метод A-устойчив, то его порядок $p \leq 2$.

Методы Адамса имеют $a_j = 0$ при $j > 1$ и получены из условия максимального порядка при заданном k. Явные методы Адамса имеют порядок k, а неявные – порядок $k + 1$. При $k = 1$ получаем, соответственно, явный метод Эйлера и неявный метод трапеций. При $k = 2$ и постоянном размере шага формула явного метода $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}(3\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1})$, а неявного метода $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{12}(5\mathbf{f}_{i+1} + 8\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1})$. При $k \geq 2$ явные методы Адамса имеют очень ограниченные области устойчивости, поэтому самостоятельно они не применяются. Области устойчивости неявных методов Адамса при $k \geq 2$ также ограничены, что делает неэффективным их использование для решения жестких задач. В то же время сочетание явных и неявных формул Адамса позволяет построить весьма эффективные методы прогноза-коррекции. При $k = 2$ и $h = \text{const}$ формулы такого метода имеют вид:

- прогноз: $\hat{\mathbf{y}}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}(3\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1}), \quad \hat{\mathbf{f}}_{i+1} = \mathbf{f}(t_{i+1}, \hat{\mathbf{y}}_{i+1})$;
- коррекция: $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{12}(5\hat{\mathbf{f}}_{i+1} + 8\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{i-1}), \quad \mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})$.

Формулы Адамса удобны для реализации явных методов переменного порядка и шага, например в решателе ode113 системы MATLAB реализованы формулы порядка от 2-го до 13-го. Явные многошаговые методы, основанные на формулах Адамса, рассмотрены в разделах 8.6–8.8.

Для решения жестких задач используют методы вида (1.25), основанные на формулах дифференцирования назад (ФДН, или BDF – backward differentiation formulas), в которых производная в точке t_{i+1} аппроксимируется по значениям $\mathbf{y}_{i+1-j},\ j = 0,\ldots, k$. ФДН порядка k имеет вид

$$\mathbf{y}_{i+1} = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{y}_{i+1-j} + hb_0\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}).$$

При $k = 1$ получаем $b_0 = 1$, что соответствует неявному методу Эйлера, а при $k = 2$ получаем L-устойчивый метод $\mathbf{y}_{i+1} = \frac{4}{3}\mathbf{y}_i - \frac{1}{3}\mathbf{y}_{i-1} + \frac{2}{3}h\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1})$. ФДН до 6-го порядка включительно являются $L(\alpha)$-устойчивыми. На их основе Ч. В. Гир (C. W. Gear) разработал метод переменного порядка и шага и реализовал его в программе DIFSUB, которая была опубликована в 1971 году [102]. Метод Гира до сих пор считается одним из самых эффективных для жестких задач. Он реализован в SimInTech, а в системе MATLAB в решателе ode15s реализован метод NDF (Numerical Differential Formulas), который практически является модификацией метода Гира.

1.10. Явные методы для жестких задач

Наряду с неявными методами для решения жестких задач успешно применяют специальные явные методы, позволяющие эффективно решать многие задачи с вещественным жестким спектром. Принципы построения таких методов рассмотрим на примере явного двухстадийного метода Рунге–Кутты 1-го порядка с функцией устойчивости $R(z) = 1 + z + dz^2$. На рис. 1.5 приведены области устойчивости такого метода при различных значениях d. При $d > 1/8$ область