ГЛАВА 8. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

8.1. Общие сведения и определения

Определение 1. Дифференциальным уравнением первого порядка в каноническом виде называют соотношение вида

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{1}$$

Определение 2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f\left(x, y\right), \tag{2}$$

где $f\left(x, y\right)$ – заданная функция двух переменных, называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.

Основная задача, связанная с уравнением (2), известна как задача Коши: найти решение уравнения (2) в виде функции $y\left(x\right)$ с начальным условием

$$y\left(x_0\right) = y_0. \tag{3}$$

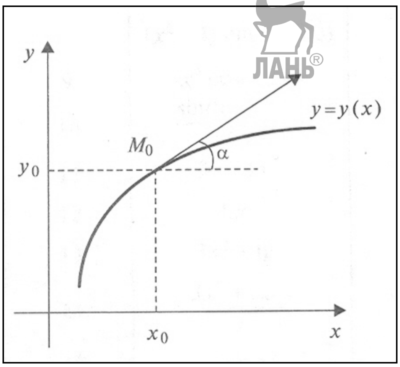

Рис. 1. Графическая интерпретация численного решения задачи Коши

Графически это означает (рис. 1), что требуется найти интегральную кривую $y = y\left(x\right)$, которая проходит через заданную точку $M_0 = M\left(x_0, y_0\right)$ при выполнении равенства (2).

Существование и единственность решения задачи Коши для дифференциальных уравнений (1), (2) обеспечиваются теоремой Пикара.

Теорема Пикара. Если функция $f\left(x, y\right)$ определена и непрерывна в некоторой плоской области G, определяемой неравенствами

$$\left|x - x_0\right| \le a, \left|y - y_0\right| \le b, \tag{4}$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y: существует такое положительное число M, что для любых точек $\left(x, y_1\right) \in G, \left(x, y_2\right) \in G$:

$$\left|f\left(x, y_1\right) - f\left(x, y_2\right)\right| \le M\left|y_1 - y_2\right|, \tag{5}$$

то на некотором отрезке $|x - x_0| \le h$ существует, и притом только одно, решение $y = y(x)$ уравнения (2), которое удовлетворяет начальному условию $y_0 = y(x_0)$.

Число M называется ***константой Липшица***. Если $f(x, y)$ имеет ограниченную в G производную по y, то $M = \max\limits_G \left| f'_y(x, y) \right|$.

Величина h вычисляется по формуле

$$h = \min\left(a, \frac{b}{N}\right), \tag{6}$$

где $N = \max\limits_G \left| f(x, y) \right|$.

Определение 3. Дифференциальным уравнением n-ного порядка в каноническом виде называют соотношение вида

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

или

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{7}$$

для которых задача Коши состоит в нахождении решения $y = y(x)$, которое удовлетворяет начальным условиям: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $y_0, y'_0, y''_0, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Определение 4. Решением дифференциального уравнения (7) является некоторая функциональная зависимость $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Существует множество решений (частных решений) дифференциального уравнения (7), которые могут быть объединены и записаны в виде общего решения вида

$$y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n), \tag{8}$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

Задача Коши для дифференциального уравнения (7) n-ного порядка может быть сведена к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y'(x) = y_1(x) \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} = \left(y'(x)\right)' = y'_1(x) = y_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = y'_{n-1}(x) = f\left(x, y, y_1(x), ..., y_{n-1}(x)\right) \end{cases} \tag{9}$$

с начальными условиями вида

$$y(x_0) = y_0,\ y_1(x_0) = y'(x_0), \ldots,\ y_{n-1}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$