Нахождение обратной матрицы блочным методом Жордана-Гаусса с выбором главного элемента по строке

Тырин Владимир, группа 310

1 Постановка задачи

Дана вещественная квадратная матрица A. Найти обратную матрица A^{-1} методом Жордана-Гаусса с выбором главного элемента по строке.

2 Описание стандартного метода

Опишем стандартный (не блочный) метод Жордана-Гаусса с выбором главного элемента по строке. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Припишем к ней справа единичную матрицу. Получим в результате матрицу порядка $n \times 2n$ обозначим через $(A_0|B_0) = (A|E)$, а впоследствии получающиеся из нее после матрицы через $(A_i|B_i)$. Элементы матриц в дальнейшем обозначаются через a_{ikl}, где i — номер шага алгоритма, k — номер строки, l — номер столбца.

$$(A_0|B_0) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

В алгоритме также будут использоваться перестановки столбцов матрицы. Для того, чтобы из результата преобразований корректно получить обратную матрицу, эти перестановки нужно запоминать. Начальная перестановка — тождественная.

$$\sigma_0 = \mathbf{id} \in S_n$$

Все преобразования, описанные далее, выполняются одновременно для матриц A_i и B_i. (перестановки столбцов, элементарные преобразования строк). Алгоритм содержит n шагов, i-ый из которых $(i = 1..n)$ устроен следующим образом:

1. Если i-ая строка — нулевая, алгоритм завершается: матрица не имеет обратной. В противном случае выберем в i-ой строке максимальный по модулю элемент. Обозначим номер содержащего его столбца через j_i. Переставим в матрицах A_{i-1} и B_{i-1} столбцы с номерами i и j_i, после чего разделим i-ые строки полученных матриц на a_{i-1,i,j_i}. Результат обозначим через $(\tilde{A}_i|\tilde{B}_i)$.

2. Домножим перестановку σ_{i-1} слева на транспозицию (i, j_i):

$$\sigma_i = (i, j_i) \cdot \sigma_{i,j_i}$$

3. Вычтем из всех последующих строк (номер уменьшаемой строки обозначим через k, $k \in i+1..n$) i-ую строку, домноженную на $\tilde{a}_{i-1,li}$. Результат выполнения операции обозначим через $(A_i|B_i)$. Выполнены соотношения для элементов:

$$a_{ikl} = \tilde{a}_{i-1,kl}, \quad k = 1..i$$

$$b_{ikl} = \tilde{b}_{i-1,kl}, \quad k = 1..i$$

$$a_{ikl} = \tilde{a}_{i-1,kl} - \tilde{a}_{i-1,il}\tilde{a}_{i-1,ki}, \quad l = i+1..n$$

$$b_{ikl} = \tilde{b}_{i-1,kl} - \tilde{b}_{i-1,il}\tilde{b}_{i-1,ki}, \quad l = i+1..n$$

После выполнения шага $i.3$ ($x.y$ — y-ый этап x-го шага алгоритма), очевидно, столбцы матрицы A_i с номерами $1..i$ совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы порядка n. Соответственно,

$$A_n = E$$

. Матрица B_n является обратной к A с точностью до перестановки строк (фактически, перенумерования неизвестных в системе уравнений $AX = E$). Обозначим через $\tilde{B}_n$ матрицу, полученную из B_n перестановкой строк с помощью σ_n^{-1}. Тогда

$$\tilde{B}_n = A^{-1}$$

Метод применим тогда и только тогда, когда A — невырожденная матрица.

3 Блочный вариант метода

Блочный является модификацией обычного с тем различием, что вместо отдельных элементов в нем используются подматрицы (блоки) исходной матрицы. Опишем подробнее.

3.1 Разбиение на блоки

Фиксируем размер блока m, $1 \leq m \leq n$. Разделим n на m с остатком

$$n = qm + r, \quad q \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq r \leq m-1$$

Интерес представляет случай $q > 0$. Разобьем матрицу A на блоки размеров $m \times m$, начиная с левого верхнего угла. Оставшиеся справа и снизу элементы попадут в блоки меньшего размера. Справа к матрице A, как и в исходном методе, припишем единичную матрицу, для нее проведем такое же разбиение (заметим, что все блоки матрицы E — либо единичные матрицы, либо нулевые). Получим следующий вид ($0^{x \times y}$ обозначает нулевую матрицу порядка $x \times y$):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
A_{11}^{m\times m} & A_{12}^{m\times m} & \dots & A_{1q}^{m\times m} & A_{1,q+1}^{m\times r} & E^{m\times m} & 0^{m\times m} & \dots & 0^{m\times m} & 0^{m\times r} \\
A_{21}^{m\times m} & A_{22}^{m\times m} & \dots & A_{2q}^{m\times m} & A_{2,q+1}^{m\times r} & 0^{m\times m} & E^{m\times m} & \dots & 0^{m\times m} & 0^{m\times r} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
A_{q1}^{m\times m} & A_{q2}^{m\times m} & \dots & A_{qq}^{m\times m} & A_{q,q+1}^{m\times r} & 0^{m\times m} & 0^{m\times m} & \dots & E^{m\times m} & 0^{m\times r} \\
A_{q+1,1}^{r\times m} & A_{q+1,2}^{r\times m} & \dots & A_{q+1,q}^{r\times m} & A_{q,q+1}^{r\times r} & 0^{r\times m} & 0^{r\times m} & \dots & 0^{r\times m} & E^{r\times r}
\end{array}\right)$$

3.2 Обозначения

Для обозначения шага алгоритма, в результате которого был получен блок или матрица, будем использовать левые нижние индексы. Таким образом, запись ${}_xA_{yz}^{\alpha\times\beta}$ — блок матрицы A, полученный в результате шага номер x, находящийся на пересечении строки y и столбца z (имеются ввиду строки и столбцы блоков) и имеющий α строк и β столбцов. В частности

$$({}_0A|{}_0B) = (A|E)$$

Промежуточные результаты обозначаются теми же буквами с волной (и с теми же индексами)

3.3 Ход алгоритма