

# Нахождение обратной матрицы блочным методом Жордана-Гаусса с выбором главного элемента по строке

Тырин Владимир, группа 310

## 1 Постановка задачи

Дана вещественная квадратная матрица  $A$ . Найти обратную матрицу  $A^{-1}$  методом Жордана-Гаусса с выбором главного элемента по строке.

## 2 Описание стандартного метода

Опишем стандартный (не блочный) метод Жордана-Гаусса с выбором главного элемента по строке. Пусть  $A$  — квадратная матрица порядка  $n$ . Припишем к ней справа единичную матрицу. Получим в результате матрицу порядка  $n \times 2n$  обозначим через  $(A_0|B_0) = (A|E)$ , а впоследствии получающиеся из нее после матрицы через  $(A_i|B_i)$ . Элементы матриц в дальнейшем обозначаются через  $a_{ikl}$ , где  $i$  — номер шага алгоритма,  $k$  — номер строки,  $l$  — номер столбца.

$$(A_0|B_0) = \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

В алгоритме также будут использоваться перестановки столбцов матрицы. Для того, чтобы из результата преобразований корректно получить обратную матрицу, эти перестановки нужно запоминать. Начальная перестановка — тождественная.

$$\sigma_0 = \text{id} \in S_n$$

Все преобразования, описанные далее, выполняются одновременно для матриц  $A_i$  и  $B_i$ . (перестановки столбцов, элементарные преобразования строк). Алгоритм содержит  $n$  шагов,  $i$ -ый из которых ( $i = 1..n$ ) устроен следующим образом:

1. Если  $i$ -ая строка — нулевая, алгоритм завершается: матрица не имеет обратной. В противном случае выберем в  $i$ -ой строке максимальный по модулю элемент. Обозначим номер содержащего его столбца через  $j_i$ . Переставим в матрицах  $A_{i-1}$  и  $B_{i-1}$  столбцы с номерами  $i$  и  $j_i$ , после чего разделим  $i$ -ые строки полученных матриц на  $a_{i-1,i,j_i}$ . Результат обозначим через  $(\tilde{A}_i|\tilde{B}_i)$ .
2. Домножим перестановку  $\sigma_{i-1}$  слева на транспозицию  $(i, j_i)$ :

$$\sigma_i = (i, j_i) \cdot \sigma_{i,j_i}$$

3. Вычтем из всех последующих строк (номер уменьшаемой строки обозначим через  $k$ ,  $k \in i+1..n$ )  $i$ -ую строку, домноженную на  $\tilde{a}_{i-1,li}$ . Результат выполнения операции обозначим через  $(A_i|B_i)$ . Выполнены соотношения для элементов:

$$\begin{aligned}
a_{ikl} &= \tilde{a}_{i-1,kl}, & k &= 1..i \\
b_{ikl} &= \tilde{b}_{i-1,kl}, & k &= 1..i \\
a_{ikl} &= \tilde{a}_{i-1,kl} - \tilde{a}_{i-1,il}\tilde{a}_{i-1,ki}, & l &= i+1..n \\
b_{ikl} &= \tilde{b}_{i-1,kl} - \tilde{b}_{i-1,il}\tilde{b}_{i-1,ki}, & l &= i+1..n
\end{aligned}$$

После выполнения шага  $i.3$  ( $x.y$  —  $y$ -ый этап  $x$ -го шага алгоритма), очевидно, столбцы матрицы  $A_i$  с номерами  $1..i$  совпадают с соответствующими столбцами единичной матрицы порядка  $n$ . Соответственно,

$$A_n = E$$

. Матрица  $B_n$  является обратной к  $A$  с точностью до перестановки строк (фактически, перенумерования неизвестных в системе уравнений  $AX = E$ ). Обозначим через  $\tilde{B}_n$  матрицу, полученную из  $B_n$  перестановкой строк с помощью  $\sigma_n^{-1}$ . Тогда

$$\tilde{B}_n = A^{-1}$$

Метод применим тогда и только тогда, когда  $A$  — невырожденная матрица.

### 3 Блочный вариант метода

Блочный является модификацией обычного с тем различием, что вместо отдельных элементов в нем используются подматрицы (блоки) исходной матрицы. Опишем подробнее.

#### 3.1 Разбиение на блоки

Фиксируем размер блока  $m$ ,  $1 \leq m \leq n$ . Разделим  $n$  на  $m$  с остатком

$$n = qm + r, \quad q \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq r \leq m - 1$$

Интерес представляет случай  $q > 0$ . Разобьем матрицу  $A$  на блоки размеров  $m \times m$ , начиная с левого верхнего угла. Оставшиеся справа и снизу элементы попадут в блоки меньшего размера. Справа к матрице  $A$ , как и в исходном методе, припишем единичную матрицу, для нее проведем такое же разбиение (заметим, что все блоки матрицы  $E$  — либо единичные матрицы, либо нулевые). Получим следующий вид ( $0^{x \times y}$  обозначает нулевую матрицу порядка  $x \times y$ ):

$$(A|B) = \left( \begin{array}{ccccc|ccccc} A_{11}^{m \times m} & A_{12}^{m \times m} & \dots & A_{1q}^{m \times m} & A_{1,q+1}^{m \times r} & E^{m \times m} & 0^{m \times m} & \dots & 0^{m \times m} & 0^{m \times r} \\ A_{21}^{m \times m} & A_{22}^{m \times m} & \dots & A_{2q}^{m \times m} & A_{2,q+1}^{m \times r} & 0^{m \times m} & E^{m \times m} & \dots & 0^{m \times m} & 0^{m \times r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{q1}^{m \times m} & A_{q2}^{m \times m} & \dots & A_{qq}^{m \times m} & A_{q,q+1}^{m \times r} & 0^{m \times m} & 0^{m \times m} & \dots & E^{m \times m} & 0^{m \times r} \\ A_{q+1,1}^{r \times m} & A_{q+1,2}^{r \times m} & \dots & A_{q+1,q}^{r \times m} & A_{q+1,q+1}^{r \times r} & 0^{r \times m} & 0^{r \times m} & \dots & 0^{r \times m} & E^{r \times r} \end{array} \right)$$

#### 3.2 Обозначения

Для обозначения шага алгоритма, в результате которого был получен блок или матрица, будем использовать левые нижние индексы. Таким образом, запись  ${}_x A_{yz}^{\alpha \times \beta}$  — блок матрицы  $A$ , полученный в результате шага номер  $x$ , находящийся на пересечении строки  $y$  и столбца  $z$  (имеются ввиду строки и столбцы блоков) и имеющий  $\alpha$  строк и  $\beta$  столбцов. В частности

$$({}_0 A|_0 B) = (A|E)$$

Промежуточные результаты обозначаются теми же буквами с волной (и с теми же индексами)

#### 3.3 Ход алгоритма