Билет 7. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости.

Определение. Числовым рядом (или просто рядом) называется выражение вида:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... (1)$$

где $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ – члены ряда , u_n — общий член ряда

Сумму первых n членов ряда (1) принято называть n – й частичной суммой ряда и обозначать символом S_n , т.е. $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Числовой ряд (1) сходится (ряд сходится , если сходится последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ этого ряда) , если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда: $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Числовой ряд (1) расходится , если $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

Пример 1 . Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ расходится , поскольку последовательность его частичных сумм $S_n = (-1)^{n-1}$ не имеет предела .

Пример 2 . Сходимость геометрической прогрессии

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...(a \neq 0)$$

Сумма первых n – членов геометрической прогрессии

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^n)}{1-q}\,(q \neq 1)$$

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, ряд сходится , его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд расходится

3. Если $|q| = 1$, то :

– при $q = 1$ ряд принимает вид $a + a + ...$. Для него $S_n = na$ и $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е ряд расходится.

– при $q = -1$ ряд принимает вид $a - a + a - a + ..$. В этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n.

Следовательно , $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и ряд расходится.Таким образом , при $|q| < 1$ – ряд сходится и его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$ и расходится при $|q| \geq 1$

Теорема 1 (Критерий Коши сходимости числового ряда)

Для того , чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился , необходимо и достаточно , чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon$$

Доказательство: Сходимость числового ряда – это сходимость последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм , а для сходимости $\{S_n\}$ необходимо и достаточно , чтобы она была фундаментальной , т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$, или $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon$ что доказывает теорему.

Следствие 1 (необходимое условие сходимости ряда) :

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится , то $u_n \to 0$ при $n \to \infty$

Доказательство: Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится , то выполнено условие $|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leq \varepsilon$. Возьмем $p = 1 : |u_{n+1}| \leq \varepsilon \; \forall n \geq N$. Это и означает , что $u_n \to 0$ при $n \to \infty$

Данное условие является НЕОБХОДИМЫМ , НО НЕ ДОСТАТОЧНЫМ условием сходимости (пример гармонический ряд $u_n = \frac{1}{n}$ расходится хотя $u_n \to 0$ при $n \to \infty$)

Следствие 2 Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится , то $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь r_n – остаток ряда.

Доказательство : Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = S$, то $S = S_n + r_n$, а поскольку $S_n \to S$ при $n \to \infty$, то $r_n \to 0$ при $n \to \infty$

Расходимость гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$

Ясно , что $\lim\limits_{n\to\infty} u_k = 0$. Однако ряд расходится. Как известно , $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $(1 + \frac{1}{n})^n < e$. Получим $n \; ln(1 + \frac{1}{n}) < 1$, т.е. $\frac{1}{n} > ln(\frac{n+1}{n})$,
$\frac{1}{n} > ln(n+1) - ln(n) \Rightarrow 1 > ln(2), \frac{1}{2} > ln(3) - ln(2), \frac{1}{3} > ln(4) - ln(3), ... \frac{1}{n} > ln(n+1) - ln(n) \Rightarrow S_n > ln(n+1)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} ln(n+1) = \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. гармонический ряд расходится .

Ряды с положительными членами. Условие сходимости положительного ряда Если все $u_k \geq 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ называется рядом с положительными членами. Последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм в этом случае будет неубывающей и поэтому для сходимости ряда с полож.членами необходимо и достаточно , чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной.

Критерий сходимости положительного ряда

Положительный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится $\Leftrightarrow$, когда последовательность его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ ограничена сверху .

Док-во: Необходимость .Так как ряд сходится, то последовательность частичных сумм имеет предел. Следовательно она ограничена. А значит она ограничена и снизу и сверху.

Достаточность .Дан положительный ряд и последовательность частичных сумм ограничена сверху. Покажем, что наша последовательность частичных сумм неубывающая:

$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$. Теперь используем свойство из теоремы о монотонной последовательности (Монотонная последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она ограничена с обеих сторон.(**Теорема Вейерштрасса об ограниченных монотонных последовательностях)**

Сходящаяся неубывающая последовательность ограничена сверху своим пределом. Сходящаяся невозрастающая последовательность ограничена снизу своим пределом) .

Получим, что последовательность частичных сумм сходится (она монотонно не убывает и ограничена сверху), следовательно ряд сходится (по определению).

Признак сравнения рядов . Пусть даны два ряда с полож. членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Если для $\forall k$ выполняется неравенство : $u_k \leq v_k$, то

1.Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

2.Тогда из расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.

Доказательство. Обозначим n – частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ соответственно через $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$. Из неравенства $u_k \leq v_k$ следует , что $S_n^{(u)} \leq S_n^{(v)}$. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится и его сумма равна S_2 . Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2$. Члены ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k > 0$, поэтому $S_n^{(v)} < S_2$ и $S_n^{(u)} \leq S_2$. Таким образом , последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, S_n^{(u)}, \ldots$ монотонно возрастает ($u_k > 0$) и ограниченна сверху числом $S_2 \Rightarrow S_n$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = S_1$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится . Пусть теперь ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ расходится. Так как члены ряда $\geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \infty$. Из $S_n^{(u)} \leq S_n^{(v)}$ получим $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(v)} = \infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ расходится .

Предельный признак сравнения Пусть даны два ряда с полож. членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_k}{v_k} = A$ $(0 < A < \infty)$, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся или расходятся одновременно .

Доказательство: По определению предела последовательности $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0, \forall n \geq n_0$ выполняется неравенство : $|\dfrac{u_k}{v_k} - A| < \varepsilon$ или

$$-\varepsilon < \frac{u_k}{v_k} - A < \varepsilon$$

$$(A - \varepsilon)v_k < u_k < (A + \varepsilon)v_k$$

Так как $A > 0$ мы можем взять ε достаточно малым , чтобы $A - \varepsilon > 0$. Но тогда $v_k < \dfrac{u_k}{A - \varepsilon}$, откуда по признаку сравнения если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, то сходится и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Аналогично $u_k < (A+\varepsilon)v_k$, если сходится $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится .

Признак Даламбера

Если $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall k > k_0$ и $p_k > 0 : \dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ $(\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ сходится (расходится)

Доказательство:(можно воспользоваться непосредственно 2-м признаком сравнения (в дополнении) , но тогда его нужно доказать)
$\dfrac{p_2}{p_1} \leq q$, $\dfrac{p_3}{p_2} \leq q$, ... , $\dfrac{p_k}{p_{k-1}} \leq q$. Перемножаем почленно неравенства : $p_k \leq p_1 q^{k-1}$. При $q < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p_1$ сходится $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ сходится . Если $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$, то $p_{k+1} \geq p_k \geq \ldots \geq p_1 > 0$ тем самым не выполнено необходимое условие сходимости ряда ($\lim\limits_{k\to\infty} p_k = 0$) .

Признак Даламбера в предельной форме Если $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = q$. Если $q < 1 (q > 1)$ то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится) .

Доказательство:

$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = A$. По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_\varepsilon \in N : \forall k > N_\varepsilon \, |\dfrac{p_{k+1}}{p_k} - A| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow A - \varepsilon < \dfrac{p_{k+1}}{p_k} < A + \varepsilon$. 1. Если $A < 1$, то положим $\varepsilon = \dfrac{1 - A}{2}$, тогда $q = A + \varepsilon < 1$, тогда по признаку Даламбера ряд сходится . 2. Если $A > 1$, то положим $\varepsilon = \dfrac{A - 1}{2}$, тогда $q = A - \varepsilon > 1$, а значит ряд расходится .

Замечание. Признак Даламбера в предельной форме не позволяет судить о расходимости или сходимости если $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{p_{k+1}}{p_k}=1$. Пример : $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$. Оба удовлетворяют условию. Но первый расходится .

Признак Коши

Если $\exists k_0\in\mathbb{N}$, что $\forall k>k_0$ и $p_k\geq 0$ $\sqrt[k]{p_k}\leq q<1(\sqrt[k]{p_k}\geq 1)$ то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится (расходится)

Доказательство: Пусть $\exists k_0\in\mathbb{N}:\forall k>k_0:\sqrt[k]{p_k}\leq q\Leftrightarrow p_k\leq q^k$. 1. Если $0<q<1$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}q^k$ будет сходится, а значит по признаку сравнения будет сходиться и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$.

Пусть $\exists k_0\in\mathbb{N}:\forall k>k_0:\sqrt[k]{p_k}\geq 1\Leftrightarrow p_k\geq 1$, что противоречит необходимому условию сходимости ряда .

Признак Коши в предельной форме . Если $\exists\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=q$. Если $q<1$ $(q>1)$ то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится (расходится)

Доказательство: $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=A$

По определению предела $\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in N:\forall k>N_\varepsilon\ |\sqrt[k]{p_k}-A|<\varepsilon\Leftrightarrow A-\varepsilon<\sqrt[k]{p_k}<A+\varepsilon$. Если $A<1$, то $q=A+\varepsilon<1$ и по признаку Коши ряд сходится . Если $A>1$, то $q=A-\varepsilon>1$, а тогда ряд расходится .

Замечание . Если $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=1$ то ряд может как сходиться , так и расходиться .

Интегральный признак Коши-Маклорена

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ является рядом с положительными членами и пусть $\exists$ функция $f(x)$, определенная при $x\geq 1$ и удовлетворяющая условиям:
1.$f(x)\geq 0$ при $x\geq 1$
2.$f(x)$ не возрастает при $x\geq 1$ (начальным значением номера n вместо 1 может быть $\forall n_0\in\mathbb{N}$ $x\geq n_0$) 3. $\forall k:f(k)=p_k$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится $\Leftrightarrow$ когда $\exists\int_1^{\infty}f(x)dx$

Доказательство: Ясно, что $p_k\leq\int_{k-1}^{k}f(x)dx\leq p_{k-1}$. Просуммируем это неравенство по k от 2 до n: $p_2+p_3+...+p_n\leq\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+...+\int_{n-1}^{n}f(x)dx\leq p_1+p_2+...+p_{n-1}$ или $S_n-p_1\leq u_n\leq S_{n-1}$, где $u_n=\int_1^n f(x)dx$ и $S_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ Так как $f(x)\geq 0$, то $\{u_k\}$ — неубывающая последовательность. Для ее сходимости , т.е. для $\exists$ предела $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ необходимо и достаточно , чтобы она была ограничена. Для сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k$ необходимо и достаточно, чтобы $\{S_n\}$ его частичных сумм была ограничена . Следовательно , S_n сходится (сходится и ряд) $\Leftrightarrow\exists\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

Дополнение:

Свойства числовых рядов:

1.Если ряд (1) сходится и его сумма равна S , то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}cu_k=cu_1+cu_2+...+cu_k+...(3)$ также сходится и его сумма cS. Если ряд (1) расходится и $c\neq 0$, то и ряд (3) расходится .

Док-во. Обозначим n — ю частичную сумму ряда (3) через $S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + ... + cu_k = c(u_1 + u_2 + ... + u_k) = c * S_n$. Следовательно , $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim\limits_{n\to\infty} cS_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n = cS$ (ряд (3) сх-ся и имеет сумму cS) . Если ряд (1) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (3) расходится. Допустим противное : ряд (3) сходится и имеет сумму S_1. Тогда $S_1 = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim\limits_{n\to\infty} cS_n = c \lim\limits_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S_1}{c}$, т.е. ряд сходится, что противоречит условию расходимости (1)

2. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ и их суммы равны S_1 и S_2 соответственно , то сходятся и ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$

Док-во. Обозначим n–ю частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ через $S_n^{(u)}, S_n^{(v)}$ и S_n соответсвенно.Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} \pm \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{v} = S_1 \pm S_2$ – каждый из рядов сходится , значит и их сумма сходится.

3. Если к ряду (1) прибавить (или отбросить) конечное число членов , то полученный ряд и ряд (1) сходятся или расходятся одновременно.

Док-во. Обозначим через S сумму отброшенных членов , через k – наибольший из номеров этих членов . На месте отброшенных членов поставили 0 . Тогда $n > k$ будет выполнено равенство $S_n - S_n^{'} = S$, где $S_n^{'}$ – это n–частичная сумма ряда, полученного из ряда (1) путем отбрасывания конечного числа членов . $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S + \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{'} \Rightarrow$ пределы в левой и правой частях одновременно $\exists$ или $\nexists$, т.е. ряд (1) сходится (расходится) $\Leftrightarrow$ когда сходятся (расходятся) ряды без конечного числа его членов . Аналогично и в случае приписывания к ряду конечного числа членов .

4.Если ряды u_k и v_k сходятся и их суммы равны соответственно S_1 и S_2 , то для $\forall \alpha, \beta$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k)$ сходится и его сумма $S = \alpha S_1 + \beta S_2$

$\forall n : \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{n} v_k \Rightarrow$ (при $n \to \infty$) $S = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = \alpha S_1 + \beta S_2$

Второй признак сравнения. Если для членов строго полож. рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$, начиная с некоторого места ($n > N$) выполняется неравенство : $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \leq \dfrac{v_{k+1}}{v_k}$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, а из расходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ следует расходимость $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$

Доказательство. $\dfrac{u_2}{u_1} \leq \dfrac{v_2}{v_1}, \dfrac{u_3}{u_2} \leq \dfrac{v_3}{v_2}, ... \dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leq \dfrac{v_n}{v_{n-1}}$. Почленно перемножим неравенства получим $\dfrac{u_n}{u_1} \leq \dfrac{v_n}{v_1}$ или $u_n \leq \dfrac{u_1}{v_1} v_n$. $\dfrac{u_1}{v_1} = c$ — положительная константа. Дальше применить признак сравнения.

Признак Раабе. Если $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, что $\forall k > k_0 : k(1 - \dfrac{p_{k+1}}{p_k}) \geq q > 1$ $(k(1 - \dfrac{p_{k+1}}{p_k}) \leq 1)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится)

Признак Раабе в предельной форме . Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} k(1 - \dfrac{p_{k+1}}{p_k}) = L$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L > 1$ и при $L < 1$ расходится

Признак Гаусса . Пусть дан $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geq 0)$ и ограниченная числовая последовательность $\{c_n\}$. Тогда если отношение $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ представимо в виде : $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha + \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{c_n}{n^\lambda}$, где $\alpha, \beta, \lambda = \text{const}$ $(\lambda > 1)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$. Если же $\alpha = 1$, то ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\beta \leq 1$

Расходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha \leq 1)$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha} = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + ... + \dfrac{1}{k^\alpha} + ...$

При $\alpha \leq 1$ $\forall k : \dfrac{1}{k^\alpha} \geq \dfrac{1}{k}$ Так как гармонический ряд расходится $\Rightarrow$ при $\alpha \leq 1$ обобщенный гармонический ряд по признаку сравнения расходится

Сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha > 1)$

Введем функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Она будет положительной и убывающей при $x \geq 1$, причем $f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha}$

Поскольку $u_n = \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\Big|_1^n = \frac{n^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \to \frac{1}{1-\alpha}$ при $n \to \infty$, то по интегральному признаку ряд сходится .

Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности $x_{n+1} \geq x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = sup\{x_n\}$ **и** $x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\}$

Любая монотонная ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, равный точной верней границе, $sup\{x_n\}$ для неубывающей и точной нижней границе, $inf\{x_n\}$ для невозрастающей последовательности.

Док-во . 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ является неубывающей ограниченной последовательностью. Поскольку последовательность неубывающая, то для $\forall n$ выполняются неравенства $x_{n+1} \geq x_n$.Поскольку последовательность ограничена, то она имеет точную верхнюю границу $a = sup\{x_n\}$. Это значит :

1. $\forall n : x_n \leq a$

2.$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N_\varepsilon : x_N > a - \varepsilon$ Поскольку последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, то при $n > N$ имеем : $x_n > x_N > a - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq a$ при $n > N$. Поскольку $a < a + \varepsilon$, то $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.Это означает что число $a = sup\{x_n\}$ является пределом последовательности $\{x_n\}$.

2.Пусть последовательность $\{x_n\}$ является невозрастающей ограниченной последовательностью. Поскольку последовательность невозрастающая , то для $\forall n$ выполняются неравенства $x_{n+1} \leq x_n$. Поскольку последовательность ограничена, то она имеет точную нижнюю границу $a = inf\{x_n\}$. Это значит :

1. $\forall n : x_n \geq a$

2.$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N_\varepsilon : x_N < a + \varepsilon$ Поскольку последовательность $\{x_n\}$ невозрастающая, то при $n > N$ имеем : $x_n \leq x_N < a + \varepsilon \Rightarrow a \leq x_n < a + \varepsilon$ при $n > N$. Поскольку $a > a - \varepsilon$, то $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$.Это означает что число $a = inf\{x_n\}$ является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Замечания 1.В признаке Даламбера неравенство $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$ нельзя заменить на $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} < 1$
Пример гармонический ряд расходится , но для этого ряда $\forall k : \dfrac{p_{k+1}}{p_k} = \dfrac{k}{k+1} < 1$
2.В признаке Коши неравенство $\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1$ нельзя заменить на $\sqrt[k]{p_k} < 1$
3.Признак Коши сильнее чем признак Даламбера . Ибо всякий раз когда действует признак Даламбера действует и признак Коши . Обратное неверно. Пример. $\dfrac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}$
По Коши : $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}} = \dfrac{1}{2}$. По Даламберу : $\nexists \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\dfrac{(-1)^{k+1} + 3}{2^{k+2}}}{\dfrac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}}$
4. Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд. Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящейся так и расходящейся.
5.Спросят определения пределов по Гейне и по Коши .

Ссылки :

1.https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B9_%D1%81%D1%85%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BC%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8_%D0%B7%D0%BD%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D1%80%D1%8F%D0%B4%D0%BE%D0%B2

2.Ильин , Садовничий , Сендов . Часть 2

3.http://matematika.phys.msu.ru/files/people/97/Series.pdf

4.http://dmvn.mexmat.net/content/calculus/calculus-3s-podolsky-doc.rar

5. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D1%82%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C

6. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%92%D0%B5%D0%B9%D0%B5%D1%80%D1%88%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%81%D0%B0_%D0%BE%D0%B1_%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D0%B2%D0%BE%D0%B7%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%8E%D1%89%D0%B5%D0%B9_%D0%BF%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%B8

7. https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%BE%D1%87%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%B8_%D0%BD%D0%B8%D0%B6%D0%BD%D1%8F%D1%8F_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D1%86%D1%8B#%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%BE_%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%8F%D1%85

8 https://1cov-edu.ru/mat-analiz/predel-posledovatelnosti/teorema-vejershtrassa/