Линейное программирование. Симплекс-метод

Линейное программирование — математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения экстремальных задач на множествах n-мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств.

Определение. *Задачей линейного программирования (ЗЛП)* называется задача минимизации или максимизации линейной функции при линейных ограничениях на область изменения переменных.

Определение. *Общей (стандартной) задачей линейного программирования* называется задача нахождения максимума линейной целевой функции (линейной формы) вида:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n.$$

Задача, в которой фигурируют ограничения в форме неравенств, называется *основной задачей линейного программирования (ОЗЛП)*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

$$x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Каждое из ограничений вида

$$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \leq b_i, \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

задает полупространство. В пересечении все неравенства зададут некоторый многогранник, необязательно ограниченный.

Задача линейного программирования будет иметь *канонический вид*, если в основной задаче вместо первой системы неравенств имеет место система уравнений с ограничениями в форме равенства:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Определение. Систему $Ax = b$ назовем *непрямыми ограничениями*, систему $x \geq 0$ — *прямыми ограничениями.*

Определение. *Допустимым множеством канонической задачи* назовем множество $D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, \quad x \geq 0\}$.

Основную задачу можно свести к канонической путём введения дополнительных переменных.

Задачи линейного программирования наиболее общего вида (задачи со смешанными ограничениями: равенствами и неравенствами, наличием переменных, свободных от ограничений) могут быть приведены к эквивалентным ЗЛП (имеющим то же множество решений) заменами переменных и заменой равенств на пару неравенств.

Задачу нахождения максимума можно заменить задачей нахождения минимума, взяв коэффициенты c с обратным знаком.

Определение. Пусть M — выпуклое множество. Точка $x \in M$ называется *угловой (крайней) точкой* множества M, если не существует таких точек $x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2 : \quad x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, при $\lambda \in (0, 1)$.

Симплекс-метод

Основным численным методом решения задач линейного программирования является *симплекс-метод.*

Термин «симплекс-метод» связан с тем историческим обстоятельством, что первоначально метод был разработан применительно к задаче линейного программирования, допустимое множество которой имело вид

$$X' = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

(Это множество именуется стандартным симплексом).

Геометрический смысл симплекс-метода состоит в переходе от исходной точки (называемой первоначальной) к некоторой смежной крайней точке (вершине) многогранника ограничений.

Симплекс-метод предназначен для решения задачи линейного программирования в канонической форме

$$\begin{cases} (c, x) \to max \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

где А – матрица размера $m \times n, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad c \in \mathbb{R}^n$.

Будем предполагать, что $m < n$ и что в матрице A нет линейно зависимых строк, то есть $rk(A) = m$ (если $m > n$, то в матрице А строки линейно зависимы, то есть можно привести к $m \leq n$; если $m = n$ и $rk(A) = m$, то не имеет места задача оптимизации, так как в этом случае точка, удовлетворяющая непрямым ограничениям, единственна).

Обозначим через $a_1, a_2, ..., a_n$ столбцы матрицы A.

Определение. *Базисом матрицы* A называется набор m линейно независимых столбцов $B = \{A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_m}\}$.

Для удобства будем считать, что на первых m местах матрицы A расположены линейно независимые столбцы, образующие базис матрицы. Представим матрицу A в виде совокупности двух подматриц $A = (B, N)$, где B — базис матрицы. Для получения x, удовлетворяющего системе непрямых ограничений, представим его в виде

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix},$$

где x_B — вектор первых m координат; x_N — вектор $(n - m)$ последних координат вектора x.

Систему непрямых ограничений можно представить в виде

$$Bx_B + Nx_N = b,$$

откуда

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

По этой формуле будем вычислять вектор x_B, задавая произвольные значения компонентам вектора x_N, тем самым получим x, удовлетворяющий непрямым ограничениям.

Определение. Вектор x_B называется *вектором базисных переменных*, а вектор x_N — *вектором небазисных переменных*.

Определение. *Базисным решением* x системы непрямых ограничений, соответствующим базису B назовем частное решение системы алгебраических уравнений

$$Bx_B + Nx_N = b,$$

в котором $x_N = 0$.

При $x_N = 0$

$$x_B = \overline{x} = B^{-1}b.$$

То есть, при $B^{-1}b \geq 0$ x будет удовлетворять системе прямых ограничений $x \geq 0$.

Определение. Базисное решение x, удовлетворяющее системе прямых органичений $x \geq 0$, назовем *допустимым базисным решением.*

Определение. Базисное решение x называется *вырожденным*, если вектор базисных переменных x_B имеет нулевые компоненты.

Теорема. $x \in D$ является допустимым базисным решением ЗЛП $\Leftrightarrow$ $x \in D$ является угловой точкой.

Доказательство. От противного.

Необходимость. Пусть

$$x = (x_1, x_2, ..., x_m, \underbrace{0, ..., 0}_{n-m})^T,$$

где $x_1 \geq 0, ..., x_m \geq 0$ — допустимое базисное решение ЗЛП. Необходимо доказать, что в этом случае невозможно представление в виде

$$x = \lambda x' + (1 - \lambda)x'',$$

где $x', x'' \in D$ и $0 < \lambda < 1$, другими словами, x — крайняя точка D.

Если $x = 0$ — вырожденное допустимое базисное решение, то невозможность его представления в виде $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$, где $0 < \lambda < 1$ и $x' \neq x''$ — допустимые базисные решения, очевидна, то есть $x = 0$ — крайняя точка области допустимых решений D.

Пусть допустимое базисное решение задачи $x \neq 0$. Докажем от противного: предположим, что точка x не является крайней точкой D, то есть существует $x' \neq x'' \in D$, где $x' = (x'_1, ..., x'_m, 0, ..., 0)^T$ и $x'' = (x''_1, ..., x''_m, 0, ..., 0)^T$, что $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$, для любых $\lambda \in (0, 1)$.

В таком случае $Ax = \lambda Ax' + (1 - \lambda)Ax'' = b$. Из допустимости x' и x'', то есть $Ax' = b, \quad Ax'' = b$, следует, что $A(x' - x'') = 0$, где $0 = (0_1, ..., 0_m)^T$ — нулевой вектор. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m} (x'_j - x''_j)A_j = 0,$$

где $A_j = (a_{1j}, ..., a_{mj})^T$ — вектор-столбец базисной матрицы B, т.е. получили тривиальную линейную комбинацию линейно зависимых вектор-столбцов $A_1, A_2, ..., A_m$ матрицы A (так как $x' - x'' \neq 0$). Противоречие с тем, что x — допустимое базисное решение. Следовательно, всякому допустимому базисному решению соответствует крайняя точка из области допустимых решений D ЗЛП.

Достаточность. Докажем, что если x — крайняя точка из D, то x — допустимое базисное решение из D.

Предположим, что это не так, т.е. вектор x, являясь допустимым для нашей задачи, не является допустимым базисным решением. Представим x в виде $x = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)^T$, где $x_j > 0, \quad j = \overline{1, k}$ (номера индексов ненулевых координат). Тогда $A_1, A_2, ..., A_k$ — линейно зависимые векторы и поэтому существует тривиальная линейная комбинация линейно зависимых векторов, то есть существуют $y_1, ..., y_k \in \mathbb{R}$, не все одновременно равные нулю, что справделиво равенство

$$\sum_{j=1}^{k} y_j A_j = 0.$$

Расширим вектор $y^T = (y_1, ..., y_k)$ нулями до n-мерного. Значит,

$$Ay = 0, \quad y \neq 0.$$

Являясь допустимым, x удовлетворяет условию

$$Ax = b.$$

Умножим обе части равенства $Ay = 0$ на некоторый параметр ε и сначала вычтем почленно $Ay = 0$ из $Ax = b$, затем сложим $Ay = 0$ и $Ax = b$:

$$A(x - \varepsilon y) = b, \quad A(x + \varepsilon y) = b.$$

Так как $x_j > 0 \quad (j = \overline{1, k})$, то очевидно, что для последних систем уравнений при достаточно малом положительном ε должно выполняться условие $x \pm \varepsilon y \geq 0$. Тогда эти равенства означают, что n-мерные векторы

$$x' = x + \varepsilon y, \quad x'' = x - \varepsilon y$$

являются допустимыми решениями задачи. При этом из $x' = x + \varepsilon y$ и $x'' = x - \varepsilon y$ имеем $x = (x' + x'')/2$, что противоречит тому, что x — крайняя точка. Следовательно, x — допустимое базисное решение. ■

Следствие. Выпуклое множество $D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, \quad x \geq 0\}$ имеет конечное число крайних точек $\nu(D) \leq C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$.

Доказательство. Максимальное число базисов, извлеченных из матрицы A, равно числу возможностей выбора m столбцов из n, т.е. C_n^m, и не все они — допустимые базисные решения.■

Последовательность крайних точек в симплекс-методе выбирается таким образом, что целевая функция при переходе от точки x_k, соответствующей базису B_k, к точке x_{k+1}, соответствующей базису B_{k+1}, строго возрастает, т.е.

$$(c, x_k) < (c, x_{k+1}).$$

Суть симплекс-метода составляют 3 правила:

1. Правило оптимальности — позволяет заключить, что x_k является решением задачи.

2. Правило отсутствия решения — позволяет заключить, что ЗЛП не имеет решения.

3. Правило перехода к лучшей крайней точке — указывает новую крайнюю точку x_{k+1}, для целевой функции которой выполняется строгое неравенство $(c, x_k) < (c, x_{k+1})$.

В каждом шаге симплекс-метода будет справедливо одно из правил. Так как число крайних точек конечно, то за определенное число шагов будет получено решение ЗЛП.

Процесс перехода к новому допустимому базисному решению

Рассмотрим представление целевой функции

$$c^T x = c_B^T \overline{x} - (c_B^T X - c_N^T) x_N,$$

где $B = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ — базис матрицы A;

$\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m)^T = B^{-1}b$ — вектор значений базисных переменных $\{x_{j_1}, ..., x_{j_m}\}$, т.е. $x_{j_i} = \overline{x_i}, \quad i = \overline{1, m}$;

$X = B^{-1}N = \{X_{m+1}, ..., X_j, ..., X_n\}$;

$X_j = B^{-1}a_j$ — координаты разложения небазисного вектор-столбца A_j по базису B.

Определение. Назовем *симплекс-разностью* для j-й переменной в базисе B величину

$$\Delta_j = c_B^T B^{-1} A_j - c_j = c_B^T X_j - c_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Симплекс-разность можно рассматривать как оценку вектора A_j при данном x_j допустимом базисном решении. Так как координаты разложения базисного вектор-столбца A_j по базису B — единичный вектор-столбец, т.е. $X_j = E_j (j = \overline{1,m})$ и $c_B^T E_j = c_j$, то симплекс-разности для базисных переменных — нулевые, а для небазисных — коэффициенты возрастания или убывания целевой функции (так как $x_N \geq 0$).

Значит, для возрастания целевой функции целесообразно увеличивать небазисные переменные с отрицательными симплекс-разностями. Выберем некоторую небазисную переменную x_t, $\quad (t \in J_N$ — множество индексов, соответствующих номерам небазисных вектор-столбцов A_t матрицы $A)$ и выясним вопрос, до какого значения ее можно увеличивать. Рассмотрим

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \geq 0.$$

При $x_t \geq 0$ и при всех остальных небазисных переменных, равных 0, должно выполняться условие

$$x_B = \overline{x} - X_t x_t \geq 0,$$

где $X_t = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{mt})^T$. Решая эту систему неравенств относительно x_t, получим $x_{it}x_t \leq \overline{x}_i, \quad x_t \leq \frac{\overline{x}_i}{x_{it}}$, где $x_{j_i} = \overline{x}_i$, откуда

$$x_t = \min_{x_{it}>0} \left\{ \frac{\overline{x}_i}{x_{it}} \right\}, \quad \forall i = \overline{1,m}.$$

В случае, если все координаты вектора X_t отрицательные или нулевые $(x_{it} \leq 0, \quad i = \overline{1,m})$, то x_t не ограничена сверху, то есть, бесконечно увеличивая x_t при отрицательной симплекс-разности, можно получить произвольно большое значение целевой функции и в этом случае ЗЛП не будет иметь решения.

Теорема (критерий неограниченности целевой функции, правило выявления отсутствия решения). Если для какого-нибудь допустимого базисного решения x существует хотя бы одна отрицательная симплекс-разность, т.е. $\Delta_t < 0 \quad (t \in J_N)$ такая, что для нее все коэффициенты разложения $X_t = B^{-1}A_t$ вектор-столбца A_t матрицы A по базису B не положительны $x_{it} \leq 0 \quad (i = \overline{1,m})$, то это означает, что целевая функция данной ЗЛП на максимум не ограничена сверху на допустимом множестве решений D, т.е.

$$c^T x = c_B^T \overline{x} - \Delta_t x_t \to +\infty.$$

Теорема. Пусть в матрице A размерности $m\times n(n>m)$ ЗЛП первые m столбцов образуют базис

$$B_0=\{A_1,A_2,...,A_k,...,A_m\}.$$

Заменим в этом базисе вектор a_k некоторым вектором $a_t \quad (t\in J_N)$ из матрицы A. Полученная система векторов:

$$B_1=\{A_1,A_2,...,A_{k-1},A_t,A_{k+1},...,A_m\}$$

образует базис $\Leftrightarrow$ в разложении вводимого вектора A_t по базису B_0:

$$A_t=x_{1t}A_1+...+x_{kt}A_k+...+x_{mt}A_m$$

коэффициент при заменяемом векторе A_k отличен от нуля ($x_{kt}\neq 0$).

Доказательство.

Необходимость. Покажем, что если система векторов B_1 — базис матрицы A, то в разложении $A_t \quad x_{kt}\neq 0$. Предположим, что это не так и $x_{kt}=0$. Из соотношения

$$A_t=x_{1t}A_1+...+x_{kt}A_k+...+x_{mt}A_m$$

следует, что коэффициент при A_t в тривиальной линейной комбинации

$$x_{1t}A_1+...+x_{k-1,t}A_{k-1}-A_t+x_{k+1,t}A_{k+1}+...+x_{mt}A_m=0$$

отличен от 0 (равен -1), то есть векторы B_1 линейно зависимы и, следовательно, не могут составлять базис матрицы A. Получили противоречие с тем, что B_1 — базис по условию теоремы. Значит, $x_{kt}\neq 0$.

Достаточность. Пусть $x_{kt}\neq 0$. Тогда система векторов B_1 — базис. Предположим, что это не так, то есть система векторов B_1 линейно зависима:

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+...+\alpha_{k-1}A_{k-1}+\alpha_kA_t+\alpha_{k+1}A_{k+1}+...+\alpha_mA_m=0,$$

где не все $\alpha_i=0, \quad i=\overline{1,m}$. Заметим, что коэффициент α_k при A_t не равен 0, так как иначе векторы системы B_0 были бы линейно зависимыми как содержащие $A_1,...,A_{k-1},A_{k+1},...,A_m$ — линейно-зависимую часть системы B_0. Следовательно

$$A_t=-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}A_1-...-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}A_{k-1}-0\cdot A_k-\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}A_{k+1}-...-\frac{\alpha_m}{\alpha_k}A_m.$$

Но, по смыслу B_0, справедливо разложение

$$A_t = x_{1t}A_1 + ... + x_{kt}A_k + ... + x_{mt}A_m.$$

Это значит, что для вектора A_t существует 2 различных разложения по базису B_0 (коэффициенты при A_k различны). Так как разложение по базису единственно, то предположение о линейной зависимости векторов B_1 неверно. Значит, векторы B_1 образуют базис.■

Теорема об оптимальности допустимого базисного решения. Если для данного допустимого базисного решения все симплекс-разности $\Delta_k \quad (k = \overline{1,n})$ в текущем базисе неотрицательны, то это решение оптимальное.

Доказательство. Пусть для данного допустимого базисного решения $x = (\overline{x}, 0)^T = (x_1, x_2, ..., x_m, 0_{m+1}, ..., 0_n)^T$ и, следовательно, его базиса

$$B = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$$

выполнены условия теоремы

$$\Delta_k = c_B^T B^{-1} A_k - c_k \geq 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Возьмем любое другое допустимое решение $y \geq 0 \quad (Ay = b)$ канонической ЗЛП. Умножим каждое из неравенств $c_B^T B^{-1} A_k - c_k \geq 0$ на компоненту вектора $y = (y_1, ..., y_n)^T$ с соответствующим номером, которая по условию неотрицательна, и просуммируем неравенства. В результате имеем

$$c_B^T B^{-1} Ay - c^T y \geq 0.$$

По условию $Ay = b$. Из $c_B^T B^{-1} b = c_B^T \overline{x}$ получаем $c_B^T \overline{x} \geq c^T y$. ■

Алгоритм симплекс-метода

Дана ЗЛП в канонической форме с невырожденным допустимым базисным решением (выбираем такое):

$$\begin{cases} c^T x \to max\ (min), \\ Ax = b, \\ x = (\bar{x}_{j_1} \dots \bar{x}_{j_m}, 0_{j_{m+1}} \dots 0_{j_n})^T \geq 0. \end{cases}$$

Исходный базис этой задачи составят векторы:

$$B = \{A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}\}.$$

1. Инициализация
Нужно разложить по исходному базису небазисные вектор-столбцы матрицы A. Ищем координаты $X_j = B^{-1}A_j$ $(j \in J_N)$, где J_N — множество номеров небазисных переменных. Разложения базисных вектор-столбцов и значения базисных переменных известны:

$$X_{j_i} = E_i = (0_1 \ldots 0_{i-1}, 1_i, 0_{i+1} \ldots 0_m)^T,$$
$$\bar{x} = B^{-1}b.$$

2. Условие оптимальности
Если все $\Delta_j \geq 0$ (≤ 0), то данное базисное решение **оптимально**. Процесс решения задачи окончен.
Иначе существует $\Delta_j < 0$ (> 0). Переходим к шагу 3.

3. Условие отсутствия решения
Если существует $\Delta_j < 0$ (> 0) : все координаты X_j не положительны, т.е. $x_{ij} \leq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, то целевая функция **не ограничена** сверху (снизу) на допустимом множестве. Процесс решения задачи окончен.
Иначе существует $x_{ij} > 0$. Переходим к шагу 4.

4. Итерация (Переход к новому базицу B')

$$\Delta_t = \max_{\Delta_j < 0} |\Delta_j|, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Соответствующая вектор-столбцу X_t небазисная переменная x_t вводится в базис. Вычислить отношения $\frac{\bar{x}_i}{x_{it}}$ для всех i, для которых $x_{it} > 0$, и найти минимальное из этих отношений:

$$\frac{\bar{x}_k}{x_{kt}} = \min_{x_{it} > 0} \frac{\bar{x}_i}{x_{it}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Соответствующая k-й строке матрицы A текущая базисная переменная $x_{j_k} = \bar{x}_k$ обращается в нуль и выводится из базиса. t-я вводимая в базис переменная принимает значение $(x_{B'})_{t_k} = x_t = \bar{x}'_k = \frac{\bar{x}_k}{x_{kt}} > 0$.
Переходим к новому базису B' путем замены вектора A_k вектором A_t:

$$\{B'\} = \{B \setminus A_k\} \cup \{A_t\}.$$

Переходим к шагу 2.