1. Дискретная математика

Билет №04 - Теорема Янова

Определение: F подмножество функций из P_k. Замыканием F называется множество функций, которые можно получить конечным применением операций суперпозиции из F.

Определение: Базисом в M, M $\subseteq P_k$, называется система функций, замыкание которой даёт всё M и никакое собственное подмножество этого базиса этим свойством уже не обладает.

Определение: Класс F замкнут, если $[F] = F$.

Формулировка (Теорема Янова): Для всякого k ($k \geq 3$) существует в P_k замкнутый класс, не имеющий базиса.

Доказательство: Рассмотрим последовательность функций

$$f_0 = 0,$$

$$f_i(x_1, ..., x_i) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_1 = ... = x_i = 2, i = 1, 2, 3..., \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Докажем, что множество$\{f_0, f_1, ...\}$ замкнуто. Это верно, потому что:

1) Операция отожденствления уменьшает индекс функции.

2) Операция переименования не меняет функцию.

3) Операция удаления фиктивной переменной не влияет на существенные переменные функции.

4) Операция добавления фиктивной переменной не влияет на существенные переменные функции.

5) Операция подстановки дает f_0.

Предположим, что у множества F=$\{f_0, f_1, ...\}$ есть базис. Это возможно при двух случаях:

1) Базис содержит две функции f_{n_0} и f_{n_1}, причем $n_1 > n_0$. Так как f_{n_0} может быть получена из f_{n_1} путём отождествления переменных, то f_{n_0} выражается через f_{n_1}, что противоречит определению базиса.

2) Базис состоит из единственной функции f_{n_0}. В таком случае никакая функция f_n при $n > n_0$ не может быть получена из f_{n_0}. Вновь достигнуто противоречие.

Таким образом остаётся предположить, что M_k не имеет базиса.
Теорема доказана.