Билет 20

Теорема Форда-Фалкерсона о масимальном потоке через сеть

Определение. *Сетью* называется конечный ориентированный связный, не имеющий петель, граф $G = (V, E)$, в котором выделяются две вершины: исток s и сток t, и при этом каждое ребро графа $(u, v) \in E$ имеют неотрицательную пропускную способность $c(u, v) \geq 0$. Если $(u, v) \notin E$, то для удобства определим $c(u, v) = 0$.

Определение. *Стационарным потоком* в сети G называется функция $f(u, v) : E \to Z^+$, где E – множество ребер, удовлетворяющая следующим условиям:
1) Ограничение пропускной способности. $\forall u, v \in V$

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v). \tag{1}$$

2) Сохранение потока. $\forall u \in V \setminus \{s, t\}$

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v), \text{ где при } (u, v) \notin E \text{ имеем } f(u, v) = 0. \tag{2}$$

Определение. *Мощность потока* назовем неотрицательную величну $|f(s, V)|$, которая определяется как

$$|f(s, V)| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s). \tag{3}$$

Определение. За $|f(V_1, V_2)|$, где $V_1, V_2 \in V$, обозначим

$$\sum_{v_1 \in V_1} \sum_{v_2 \in V2} |f(v_1, v_2)|.$$

Определение. Поток наибольшей мощности носит название *максимального потока.*

Определение. *Остаточную пропускную способность* $c_f(u,v)$ определим как

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v), \text{ если } (u,v) \in E, \\ f(v,u), \text{ если } (v,u) \in E, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Определение. Для заданной сети G и потока f, *остаточная сеть* G, порожденная потоком f, представялет собой граф $G_f = (V, E_f)$, где

$$E_f = \{(u,v) \in E : c_f(u,v) > 0\}. \tag{5}$$

Определение. Для заданной сети G и потока f *увеличивающим путем* p является простой путь из s в t в остаточной сети G_f.

Определение. Максимальная величина, на которую можно увеличить поток в каждом ребре увеличивающего пути p, называется *остаточной пропускной способностью пути* p и задается формулой

$$c_f(p) = min\{s_f(u,v) : (u,v) \text{ принадлежит } p\}. \tag{6}$$

Определим функцию $f_p : E \to Z^+$, p – увеличивающий путь в G_f, как

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p), \text{ если } (u,v) \text{ принадлежит } p, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases} \tag{7}$$

Тогда f_p является потоком в G_f с величиной $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Определение. *Разрезом* сети $G = (V, E)$ называется разбиение множеств вершин V на множества S и $T = V \setminus S$, такие, что $s \in S$, а $t \in T$.

Определение. Если f – поток, то *чистый поток* $f(S,T)$ через разрез (S,T) определяется как

$$f(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v,u). \tag{8}$$

Определение. *Проспускной способностью* разреза (S,T) является

$$c(S,T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v). \tag{9}$$

Определение. *Минимальным разрезом сети* является разрез, пропускная способность которого среди всех разрезов сети минимальна.

Лемма 1. Если f поток в сети G от s к t и (S,T) $-$ разрез в сети G, то мощность поток $|f(s,V)|$ через разрез (S,T) не превосходит $c(S,T)$, то есть

$$|f(s,V)| \leq c(S,T). \tag{10}$$

Доказательство. Используя условие сохранения потока для любого внутреннего узла можно записать следующее неравенство:

$$|f(s,V)| = |f(s,V)| + |f(S-s,V)| = \langle |f(S-s,V)| = 0\rangle = |f(S,V)| =$$
$$= |f(S,S\cup T)| = |f(S,S)| + |f(S,T)| = |f(S,T)| \leq c(S,T).$$

Замечание. Если в (10) имеет место равенство, то сразу можно сделать вывод о максимальном потоке f и минимальном разрезе.

Теорема (О максимальном потоке и минимальном разрезе) Для любой сети величина максимального потока из s в t равна пропускной способности минимального разреза, отделяющего s от t.

Доказательство. Пусть $\bar{f}-$ максимальный поток. Такой поток существует, потому что в сети G из-за ограничений допустимости и требования целочисленности имеется лишь конечное множество потоков. Будем говорить, что ребро (x,y) насыщенно потоком $\bar{f}$, если выполянется равенство $\bar{f}(x,y) = c(x,y)$. Определим разрез (S,T) следующим образом. Узел $x \in S$, если $x = s$ или если существует остаточный путь от s к x, то есть последовательность ребер $(s,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_k,x)$, ни одно из которых не является насыщенным. За T берется, как обычно дополнение множества S. Чтобы показать, что $(S,T)-$ разрез, нужно установить лишь принадлежность t к T. Но если бы $t \in S$, то имелся бы остаточный путь p из s в t, то есть для всех ребер $(x,y) \in p$ $\bar{f}(x,y) < c(x,y)$. Тогда если положить

$$\delta = \min_{(x,y)\in p} [c(x,y) - \bar{f}(x,y)], \tag{11}$$

то можно определить новый поток f', для которого

$$f'(x,y) = \begin{cases} \bar{f}(x,y) + \delta \text{ при } (x,y) \in p, \\ \bar{f}(x,y) \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда следует, что мощность f' больше мощности $\bar{f}$, что противоречит максимальности потока $\bar{f}$.

Теперь можно показать, что если $\bar{f}$ – максимальный поток, то в соотношении леммы 1 имеет место равенство. Действительно, если бы было

$$\bar{f}(S,T) < c(S,T), \tag{12}$$

то для некоторых $x \in S$ и $y \in T$ оказалось бы $\bar{f}(x,y) < c(x,y)$. С другой стороны, из определения S следует, что имеется остаточный путь от s к x. Так как ребро (x,y) также ненасыщенно, то можно продолжить остаточный путь от s к y, что противоречит $y \in T$. Следовательно, неравенство (12) невозможно и теорема доказана.

Алгоритм отыскания максимального потока в сети (Алгоритм Форда-Фалкерсона)

Этот алгоритм можно сформулировать следующим образом:
1) Построить некоторый начальный поток $\bar{f}$ (например, поток, состоящий из нулевых компонент).
2) Проверить, попала ли вершина t в множество вершин S, достижимых по ненасыщенным ребрам из вершины s. Если вершина t не попала в множество S **(случай а)**, то построенный поток максимален и алгоритм завершается. Если вершина t попала в множество S **(случай б)**, перейти к п.3.
3) Выделить путь, состоящий из ненасыщенных ребер и ведущий из s в t, и увеличить поток через каждое ребро этого пути на величину из (2). Построить новый поток и перейти к п.2.

Заметим, что алгоритм может завершиться, только если на каком-нибудь шаге будет иметь место случай а). На каждом шаге, на котором реализовался случай б), алгоритм может быть продолжен. Вместе с тем на каждом шаге при выполнении п.3 образуется по крайней мере одно новое насыщенное ребро (то самое ребро, на котором достигается минимум в (11)). А так как число ребер в сети конечно, то п.3 может выполняться лишь конечное число раз, поэтому указанный алгоритм обязательно построит максимальный поток, и притом за конечное число шагов.