Билет 5. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.

Определение

Функция $F(x)$ называется первообразной функцией(или просто первообразной) для $f(x)$ на (a,b), если $\forall x \in (a,b)$ $F(x)$ дифференцируема и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$.

Замечание. Аналогично определяется первообразная для функции $f(x)$ на бесконечной прямой и на полупрямой.

Можно ввести первообразную для функции $f(x)$ и на сегменте $[a,b]$, понимая под такой первообразной функцию $F(x)$, имеющей производную $F'(x)$ в любой *внутренней* точке сегмента $[a,b]$, равную $f(x)$, и, кроме того, имеющую правую производную $F'(a+0)$, равную $f(a+0)$,и левую производную $F'(b-0)$, равную $f(b-0)$.

Теорема 1

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – $\forall$ первообразные для $f(x)$ на (a,b), то всюду на этом интервале $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – константа $\forall x \in (a,b)$.

Доказательство. $\square$ Пусть $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Так как $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дифференцируемы на (a,b), то $\Phi(x)$ тоже дифференцируема на (a,b), причем всюду на этом интервале $\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \Phi(x) = C$.$\blacksquare$

Следствие. Если $F(x)$ – одна из первообразных функций для функции $f(x)$ на (a,b), то любая первообразная $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.

Определение

Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале(a,b) называется неопределенным интегралом от $f(x)$(на этом интервале) и обозначается

$$\int f(x)dx.$$

Если $F(x)$ – одна из первообразных функций для функции $f(x)$ на (a,b), то в силу следствия из теоремы 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – любая постоянная.

Свойства

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ (достаточно взять дифференциал от обоих частей формулы $\int f(x)dx = F(x) + C$ и учесть, что $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$).

2. $\int dF(x) = F(x) + C$ (так как $dF(x) = f(x)dx$).

3. $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (достаточно показать, что $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ – первообразная для $g(x)$, то функция $F(x) \pm G(x)$ является первообразной для $f(x) \pm g(x)$, это вытекает из $[F(x) \pm G(x)]' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x)$).

4. $\int[Af(x)]dx = A\int f(x)dx$, $A = const$ (используем равенство $[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x)$).

Замечание. 3^oи 4^o свойства обычно называют *линейными свойствами интеграла*. Равенство в формулах 3^oи 4^o следует понимать как равенство правой и левой частей с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Методы интегрирования

Интегрирование заменой переменных(подстановкой). Пусть $t = \varphi(x)$ определена и дифференцируема на множестве $\{x\}$ (это либо интервал, либо открытая полупрямая, либо бесконечная прямая), $\{t\}$ – множество значений функции t. Пусть для $g(t)$ $\exists$ на множестве $\{t\}$ первообразная функция $G(t)$, то есть

$$\int g(t)dt = G(t) + C.$$

Тогда всюду на $\{x\}$ для $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ $\exists$ первообразная равная $G[\varphi(x)]$, то есть

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G[\varphi(x)] + C.$$

Доказательство. $\square$ Для доказательства этого утверждения достаточно воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dx}[G(\varphi(x))] = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$$

и учесть, что по определению первообразной $G'(t) = g(t)$. Предположим теперь, что нам требуется вычислить интеграл

$$\int f(x)dx.$$

В ряде случаев удается выбрать в качестве новой переменной такую дифференцируемую функцию $t = \varphi(x)$, что имеет место равенство

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

причем функция $g(t)$ легко интегрируется, то есть интеграл

$$\int g(t)dx = G(t) + C$$

просто вычисляется. Доказанное выше утверждение позволяет получить следующую формулу:

$$\int f(x)dx = G[\varphi(x)] + C.$$

Этот прием вычисления интеграла и называется *интегрированием путем замены переменной.*$\blacksquare$

Интегрирование по частям. Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве $\{x\}$, и, кроме того, на этом множестве $\exists$ первообразная для $v(x)u'(x)$. Тогда на $\{x\}$ $\exists$ первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство. $\square$ $[u(x)v(x)]' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$. Умножим это равенство на dx и возьмем интеграл от обеих частей полученного таким путем равенства. Так как по условию для всех x из множества $\{x\}$ существует $\int v(x)u'(x)dx$ и $\int [u(x)v(x)]'dx = u(x)v(x)+C$(см. свойство 2^o), то для всех x из множества $\{x\}$ существует и интеграл $\int u(x)v'(x)dx$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.\blacksquare$$

Замечание. Определение дифференциала и свойство инвариантности его формы позволяют записать формулу в виде

$$\int udv = u(x)v(x) - \int vdu.$$

Вычисление интеграла $\int udv$ посредством применения этой формулы и называют *интегрированием по частям.*

Определение

$\measuredangle f(x) \in R[a,b]$. Пусть $p \in [a,b]$. Тогда для $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \in R[p,x]$ (если $x > p$, иначе, если $x < p$, то $R[x,p]$) и поэтому на $[a,b]$ определена функция $F(x) = \int_p^x f(t)dt$, которая называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 2

Если $f(x) \in R[a,b]$, $p - \forall$ точка сегмента $[a,b]$, то производная функции $F(x) = \int_p^x f(t)dt$ $\exists$ в каждой точке x_0 непрерывности подынтегральной функции, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. $\square$ Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, если$\mid x - x_0 \mid < \delta$. $\forall t \in [x_0, x]$ выполняется $\mid t - x_0 \mid \leq \mid x - x_0 \mid < \delta \Rightarrow$

$$\forall t \ \ f(x_0) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Тогда

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{1}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \leq f(x_0) + \varepsilon$$

при $\mid x - x_0 \mid < \delta$.

Но $\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$, следовательно, при $\mid x - x_0 \mid < \delta$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon,$$

то есть $F'(x) \exists$ и равна $f(x_0)$. Теорема доказана.$\blacksquare$

Замечание. Если точка x_0 совпадает с одним из концов сегмента $[a,b]$, то под производной в точке x_0 функции $F(x)$ понимается левая и правая производная соответственно. Доказательство теоремы при этом не меняется.

Следствие. Любая непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на этом сегменте первообразную. Одной из первообразных является функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Замечание 1. Теорема остается справедливой, если $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b). В этом случае в качестве нижнего предела надлежит взять любую точку p этого интервала. Все рассуждения сохраняются.

Замечание 2. Можно рассматривать и функцию нижнего предела интеграла от $f(x)$, то есть функцию $\Phi(x) = \int_x^a f(t)dt$. Для такой функции

$$\Phi'(x) = -f(x).$$

Замечание 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом сегменте, содержащемся в интервале (a, b), то интеграл с переменным верхним пределом есть непрерывная на (a, b) функция верхнего предела.

Д е й с т в и т е л ь н о, пусть $F(x) = \int_p^x f(t)dt$, $p \in (a, b)$. Тогда

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu \Delta x,$$

где

$$\inf_{x \in [x, x+\Delta x]} f(x) \le \mu \le \sup_{x \in [x, x+\Delta x]} f(x)$$

по первой формуле среднего значения. Если функция $f(x)$ интегрируема, то она ограничена, а поэтому для всех достаточно малых Δx ограничена и величина μ, зависящая от x и Δx. Более точно, $\inf_{x \in [c,d]} f(x) \le \mu \le \sup_{x \in [c,d]} f(x)$. Здесь $[c, d]$ – какой-либо фиксированный сегмент, принадлежащий (a, b) и такой, что $x \in [c, d]$, $x + \Delta x \in [c, d]$. Поэтому $\Delta F \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Замечание 4. Интгералы с переменным верхним (или нижним) пределом можно использовать для *определения* новых функций, не выражающихся через элементарные функции.

Так, например, интеграл $\int_0^x e^{-t^2} dt$ называется интегралом Пуассона, интеграл $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t)}}$, $0 < k < 1$ называется эллиптическим интегралом, интеграл $\int_0^x \frac{sint}{t} dt$ – интегральным синусом, $\int_1^x \frac{cost}{t} dt$ – интегральным косинусом и т.д.

Теорема 3 (Ньютона-Лейбница)

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл по сегменту $[a, b]$ от $f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция, следует вычислить значение произвольной ее первообразной в точке b и в точке a и вычесть из первого значения второе, то есть

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Доказательство. $\square$ Из выше написанного известно, что любые две первообразные функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, отличаются на постоянную. Поэтому если $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, а $\Phi(x)$ – любая другая первообразная функции $f(x)$, то $\Phi(x) - F(x) = C = const$, то есть $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Положим в последней формуле сначала $x = a$, а затем $x = b$. $\int_a^a f(t)dt = 0$ для любой функции, принимающей конечное значение в точке a, поэтому $\Phi(a) = C$, $\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx + C$. Отсюда

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).\blacksquare$$

Замечание. Данное выражение называют основной формулой интегрального исчисления.

Список литературы

[1] В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Математический анализ. Часть 1, стр. 291 – 303, стр. 357 – 360.