Билет № 9

Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Признаки Вейерштрасса и Дини. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Пусть на числовой прямой E^1 или в m-мерном евклидовом пространстве E^m задано некоторое множество $\{x\}$.

Определение 1

Если каждому числу n из натурального ряда чисел 1, 2, ... , n, ... ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве $\{x\}$, то множество занумерованных функций $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ называется ***функциональной последовательностью***.

Обозначение: $\{f_n(x)\}$.

Отдельные функции $f_n(x)$ - ***элементы функциональной последовательности***.

Множество $\{x\}$, на котором определены все функции $f_n(x)$ - ***область определения функциональной последовательности***.

Если область определения $\{x\}$ является множеством в m-мерном евклидовом пространстве E^m, то каждая функция $f_n(x)$ является функцией m переменных $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, ..., x_m)$, где $x_1, x_2, ..., x_m$ - координаты точек x.

Рассмотрим функциональную последовательность $\{u_n(x)\}$, областью определения которой является некоторое множество $\{x\}$.

Определение 2.

Формально написанная сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... \tag{1}$$

называется ***функциональным рядом***.

Отдельные функции $u_n(x)$ - ***элементы функционального ряда***.

Множество $\{x\}$, на котором определены все функции $u_n(x)$ - ***область определения функционального ряда***.

Изучение функциональных рядов эквивалентно изучению функциональных последовательностей, т.к. каждому функциональному ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ однозначно соответствует функциональная последовательность его частичных сумм

$$S_1(x), S_2(x), ..., S_n(x), ... \qquad (2),$$

а каждой функциональной последовательности (2) однозначно соответсвует функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ с членами $u_1(x) = S_1(x), u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ при $n \geq 2$.

Пусть областью определения функциональной последовательности (ряда) является множество $\{x\}$ пространства E^m. Фиксируем произвольную точку $x_0 = (x_1, x_2, ..., x_m)$ множества $\{x\}$ и рассмотрим все члены функциональной последовательности (ряда) в этой точке. Получим числовую последовательность (ряд).

Если указанная числовая последовательность (числовой ряд) сходится, то *функциональная* последовательность (функциональный ряд) ***сходится в точке*** x_0.

Множество всех точек x_0, в которых сходится данная функциональная последовательность (функциональный ряд), называется ***областью сходимости*** этой последовательности (ряда).

Пусть для каждого $x \in \{x\}$ функциональная последовательность имеет конечный предел. Так как он определяется значением x, то также является функцией от $x \in \{x\}$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (3),$$

которая называется ***предельной функцией*** для функциональной последовательности или для функции $f_n(x)$.

Пусть функциональный ряд (1) сходится при каждом $x \in \{x\}$. Тогда его сумма так же представит собой некоторую функцию от x: $S(x)$. Эта сумма определится предельным равенством вида (3), если под $S_n(x)$ подразумевать частичную сумму

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) \qquad (4)$$

.

Пример 1

Рассмотрим последовательность функций, каждая из которых опеределена на сегменте $0 \le x \le 1$ и имеет вид

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi n x}{2}, & \text{при } 0 \le x < \dfrac{1}{n}, \\ \\ 0, & \text{при } \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \qquad (0.1)$$

Областью сходимости этой последовательности является весь сегмент $0 \le x \le 1$. $f_n(0) = 1$ для всех номеров n, то есть в точке $x = 0$ последовательность сходится к единице. Зафиксируем любое x из полусегмента $(0, 1]$. Тогда все функции $f_n(x)$, начиная с некоторого номера, зависящего от x, будут в этой точке x равны нулю. Отсюда следует, что в любой точке x полусегмента $(0, 1]$ заданная последовательность сходится к 0.

Итак, заданная функциональная последовательность сходится на всем сегменте $0 \le x \le 1$ к предельной функции $f(x)$, имеющей вид

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ 0, & \text{при } 0 < x \le 1 \end{cases} \qquad (0.2)$$

Пусть функциональная последовательность

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ... \qquad (5)$$

сходится на множестве $\{x\}$ пространства E^m к предельной функции $f(x)$.

Определение 3

Последовательность (5) сходится к функции $f(x)$ ***равномерно на множестве*** $\{x\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, удовлетворяющих условию $n \ge N(\varepsilon)$, и для всех точек $x \in \{x\}$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (6)$$

.

Замечание 1

В этом определении номер N зависит только от ε и не зависит от точек x, т.е. утверждается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство (6) справедливо ***сразу для всех точек*** x множества $\{x\}$.

Замечание 2

Равномерная на множестве $\{x\}$ сходимость функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ эквавилентна бесконечной малости числовой последовательности $\{\varepsilon_n\}$, каждый член ε_n которой представляет собой точную верхнюю грань функции $|f_n(x) - f(x)|$ на множестве $\{x\}$.

Замечание 3

Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на всем множестве $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на любом подмножестве множества $\{x\}$.

Вообще, из сходимости фукнциональной последовательности на множестве не следует ее равномерная сходимость на этом множестве.

Пример 2

Обратимся к последовательности (0.1). Было доказано, что эта последовательность сходится на всем сегменте $[0, 1]$ к предельной функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0, \\ 0, & \text{при } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Докажем, что эта последовательность ***не сходится равномерно на*** $[0, 1]$.

Рассмотрим последовательность точек $x_n = 1/(2n)(n = 1, 2, ...)$, принадлежащих сегменту $[0, 1]$. В каждой из этих точек (то есть для каждого номера n) справедливы соотношения

$$f_n(x_n) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, f(x_n) = 0.$$

Таким образом, для любого номера n

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

следовательно, при $\varepsilon \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ неравенство (6) не может выполняться сразу для всех точек x сегмента $[0, 1]$ ни при одном номере n. Это и означает отсутствие равномерной сходимости рассматриваемой последовательности.

Стоит отметить, что рассматриваемая последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi n x}{2}, & \text{при } 0 \le x < \dfrac{1}{n}, \\ \\ 0, & \text{при } \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

сходится к предельной функции $f(x)$ ***равномерно на каждом сегменте*** $[\delta, 1]$, где δ — любое фиксированное число из интервала $0 < \delta < 1$. Действительно, для любого выбранного δ найдется номер N_0, начиная с которого все элементы $f_n(x)$ равны нулю на всем сегменте $[\delta, 1]$. Т. к. и предельная функция $f(x)$ равна нулю на сегменте $[\delta, 1]$, то левая часть (6) равна нулю на всем сегменте $[\delta, 1]$, начиная с найденного номера N_0. Таким образом, начиная с номера N_0, неравенство (6) справедливо для всех x из сегмента $[\delta, 1]$ при любом $\varepsilon > 0$.

Определение 4

Функциональный ряд называется ***равномерно сходящимся на множестве*** $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.

Пусть $\varphi_n(x)$ — остаток сходящегося ряда, т.е.

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x),$$

где $S(x)$ - сумма ряда, а $S_n(x)$ - частичная сума ряда.

Определение(эквивалентное опр. 4)

Ряд (1), сходящийся для $\forall x \in \{x\}$, называется ***равномерно сходящимся*** в этой области, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такой ***не зависящий от*** x номер N, что при $n > N$ неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \text{ или } |\varphi_n(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

выполняется ***одновременно для*** $\forall x \in \{x\}$.

Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности(ряда)

Теорема 1

Для того чтобы функциональная последовательность:
1) имела предельную функцию
2) сходилась к этой функции **равномерно** относительно $x \in \{x\}$,
необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ такой $N(\varepsilon)$, чтобы при $n > N$ и любом $m = 1, 2, ...$ неравенство

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{8}$$

имело место для всех $x \in \{x\}$ одновременно.

Теорема 2

Для того чтобы функциональный ряд (1) сходися **равномерно** относительно $x \in \{x\}$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ такой $N(\varepsilon)$, чтобы при $n > N$ и любом $m = 1, 2, ...$ неравенство

$$|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)| < \varepsilon \tag{9}$$

имело место для всех $x \in \{x\}$ одновременно.

Теорема 2 является следствием теоремы 1. В левой части (9) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ частичных сумм с номерами $n+p$ и n функционального ряда (1). Поэтому докажем только теорему 1.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на $\{x\}$. Тогда зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем для него номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

будет справедливо для $\forall n : n \geqslant N(\varepsilon)$ и $\forall x \in \{x\}$.

Так как $n \geqslant N(\varepsilon)$ и $p = 1, 2, ...$, то $n + p \geqslant N(\varepsilon)$. Отсюда справедливо неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11}$$

для $\forall n : n \geqslant N(\varepsilon), \forall\, p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in \{x\}$.

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то в силу (10) и (11) получим что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |\,[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]\,| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для $\forall n : n \geqslant N(\varepsilon), \forall\, p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in \{x\}$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть условие, указанное в теореме, выполнено. Тогда какое бы значение $x \in \{x\}$ мы не зафиксировали, мы получим числовую последовательность, для которой выполняется условие критерия Коши сходимости *числовой* последовательности. Следовательно, для этой последовательности существует конечный предел, чем доказано существование для $\{f_n(x)\}$ предельной функции $f(x)$.

Теперь возьмем произвольное $n > N$ и $x \in \{x\}$, и в неравенстве (8) безгранично начнем увеличивать m (при постоянных n и x). Перейдем к пределу и получим:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

. Этим устанавливается **равномерная сходимость** $f_n(x)$ к $f(x)$.

□

Признаки Вейерштрасса и Дини

Следующие признаки считаются **достаточными** для доказательства равномерной сходимости последовательности или рядов.

Теорема 3 (признак Вейерштрасса)

Если члены функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{12}$$

на множестве $\{x\}$ удовлетворяют неравенству

$$|u_k(x)| \leqslant c_k \text{ (k = 1,2,...)}, \tag{13}$$

где c_k - члены некоторого **сходящегося числового** ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \qquad (14),$$

то ряд (12) сходится на $\{x\}$ **равномерно**.

Доказательство.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Т. к. числовой ряд (14) сходится, то в силу критерия Коши сходимости числового ряда $\exists\ N(\varepsilon)$ такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \tag{15}$$

для $\forall n : n \geqslant N(\varepsilon), \forall\ p \in \mathbb{N}$.

Из нервенств (13) и (15) и из того, что модуль суммы p слагаемых не превосходит сумму их модулей, получаем

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

для $\forall n : n \geqslant N(\varepsilon), \forall\ p \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in \{x\}$.

В силу критерия Коши равномерной сходимости (теорема 2) ряд (12) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

□

Замечание 1. Признак Вейерштрасса может быть сформулирован так: *функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.*

Замечание 2. Признак Вейерштрасса является достаточным, но *не необходимым признаком равномерной сходимости функционального ряда.*

Пример 3

Применим признак Вейерштрасса для установления равномерной сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2x + ky + z)}{k^2}.$$

Можно утверждать, что этот ряд сходится равномерно во всем трехмерном евклидовом пространстве, т.к. для любой точки (x, y, z) этого пространства он может быть мажорирован сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Известно, что сумма конечного числа непрерывных фукнций непрерывна. Справедливо ли подобное утверждение для случая бесконечного числа слагаемых? Следующий пример показывает, что это не всегда так.

Пример 4.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x) = (1-x) + x(1-x) + ... + x^{n-1}(1-x) + ..., (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

. При $x = 1$ все члены ряда, а с ними - и сумма ряда, обращаются в 0; при $x < 1$, суммируя прогрессию, получаем 1. Хотя члены ряда непрерывны в промежутке $[0, 1]$, но сумма ряда в точке $x = 1$ терпит разрыв. Стоит отметить, что сходимость ряда здесь не равномерна, так как остаток ряда после $n-$го члена, равный x^n (для $x < 1$), стремится к 0 неравномерно.

(Если $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$, то $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при $x < 1$ и $f(1) = 1$. В этом случае невозможность неравенства $x^n < \varepsilon$ (при $\varepsilon < 1$) **одновременно для всех** $x < 1$ видна хотя бы из того, что $x^n \to 1$, если (при фиксированном n) $x \to 1$).

Теорема 4

Если функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, ...$) определены и непрерывны в промежутке $X = [a, b]$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... \tag{16}$$

сходится в X **равномерно к сумме** $S(x)$, то и эта сумма будет непрерывна в промежутке $[a, b]$.

Доказательство.

Возьмем в $[a, b]$ какую-либо точку x_0 и установим непрерывность функции $S(x)$ в этой точке. При любом $n = 1, 2, ...$ и $\forall x \in X$:

$$S(x) = S_n(x) + \varphi_n(x) \tag{17}$$

и, в частности,

$$S(x_0) = S_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$

откуда

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |S_n(x) - S_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)| \qquad (18).$$

Зададимся теперь произвольным $\varepsilon > 0$. Т. к. ряд равномерно сходится, можно зафиксировать номер n так, чтобы неравенство

$$|\varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{19}$$

выполнялось для $\forall x \in X$ (в том числе и для $x = x_0$). При *фиксированном* n функция $S_n(x)$ есть сумма определенного конечного числа функций $u_k(x)$, непрерывных в точке $x = x_0$. Поэтому она также непрерывна в этой точке, и по заданному $\varepsilon > 0$ найдетя такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ будет

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{20}$$

. Тогда ввиду (18), (19) и (20), неравенство $|x - x_0| < \delta$ влечет за собой

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

. (Фактически здесь доказано, что из непрерывности членов ряда в определенной точке следует непрерывность его суммы в этой же точке).

□

Пример 5

Равномерная сходимость фигурирует в теореме лишь как **достаточное** условие и не следует думать, что это условие **необходимо** для непрерывности суммы ряда. Например, ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}\right], \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

в промежутке $[0, 1]$ имеют непрерывную сумму, тождественно равную 0, хотя в указанном промежутке оба сходятся **неравномерно**

Теорема 4*

Если последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$$

определенных и непрерывных в промежутке $X = [a, b]$, сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно в X, то и $f(x)$ непрерывна в X.

Случай положительных рядов

Для рядов этого типа, как доказал Дини, равномерная сходимость является не только достаточным, но и *необходимым* условием непрерывности суммы ряда:

Теорема 5 (Теорема Дини)

Пусть члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

непрерывны в промежутке $X = [a, b]$ и **неотрицательны**. Если ряд имеет сумму $S(x)$, также непрерывную в промежутке $[a, b]$, то ряд сходится в этом промежутке **равномерно**.

Доказательство.

Рассмотрим остатки ряда:

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = S(x) - S_n(x).$$

Функция $\varphi_n(x)$, как разность двух непрерывных функций, непрерывна. Т.к. члены ряда положительны, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, при постоянном x, является убывающей (невозрастающей):

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant ... \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant ...$$

Наконец, т.к. наш ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в промежутке X, при любом постоянном x

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Для того чтобы установить равномерную сходимость ряда, достаточно доказать, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ хотя бы одно значение n, при котором $\varphi_n(x) < \varepsilon$ одновременно для всех x (т.к. для больших значений n это неравенство выполнялось бы подавно).

Доказывать будем от противного. Пусть, для *некоторого* $\varepsilon > 0$ такого номера n не существует. Тогда при $\forall\ n\ \in \mathbb{N}$ в промежутке X найдется такое значение $x = x_n$, что $\varphi_n(x_n) \geqslant \varepsilon$. К последовательности $\{x_n\}$, все элементы которой содержатся в $[a, b]$, применим лемму Больцано-Вейерштрасса и выделим из нее частичную последовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к пределу x_0.

Так как $\varphi_m(x)$ непрерывна, имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0),$$

каким бы ни было m. С другой стороны, при $\forall m$, для достаточно больших k :

$$n_k \geqslant m, \text{ так что } \varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon.$$

Перейдем здесь к пределу при $k \to \infty$, найдем, что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon.$$

А это неравенство, имеющее место при $\forall m$, противоречит тому, что

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0.$$

□

Теорема 5*

Пусть последовательность непрерывных в промежутке $X = [a, b]$ функций стремится при $n \to \infty$ к предельной функции $f(x)$, **ммонотонно возрастая**, так что

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x).$$

Если функция $f(x)$ также непрерывна в X, то $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ **равномерно** в X.

Почленный переход к пределу.

Рассмотрим произвольную точку x_0 пространства E^m и произвольное множество $\{x\}$ пространства E^m, для которого эта точка является предельной. При этом точка x_0 может сама не принадлежать множеству $\{x\}$.

Теорема 6

Если функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{21}$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$ и у всех членов этого ряда существует в точке x_0 предел

$$\lim_{x\to x_0} u_k(x) = b_k,$$

то и сумма этого ряда $S(x)$ имеет в этой точке предел, причем

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{x\to x_0} u_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{22}$$

т.е. к пределу можно переходить почленно.

Доказательство.

1) Докажем сходимость числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

По критерию Коши для функционального ряда, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$ такой, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{23}$$

для $\forall\ n : n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall\ p \in \mathbb{N}$ и $\forall\ x \in \{x\}$. Зафиксируем в этом неравенстве номера n и p и перейдем к пределу при $x \to x_0$ (такой предельный переход можно осуществить по любой последовательности точек множества $\{x\}$, сходящейся к точке x_0), получим

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + ... + b_{n+p}| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon$$

(для $\forall\ n : n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall\ p \in \mathbb{N}$). В силу критерия Коши рял $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

2) Оценим разность

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

для $\forall x \in \{x\}$ из достаточно малой окрестности точки x_0. Так как

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

для всех x из $\{x\}$, то для любого номера n справедливо тождество

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

из которого получаем неравенство

$$|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k| \leqslant |\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k| + |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)| + |\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k| \tag{24}$$

справедливо для $\forall x \in \{x\}$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то для фиксированного $\varepsilon > 0\ \exists\ n$, что для $\forall x \in \{x\}$

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k| < \frac{\varepsilon}{3}, |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{25}$$

Так как предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного $\varepsilon > 0$ и выбранного номера n можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{26}$$

для $\forall x \in \{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x, x_0) < \delta$. Из (24), (25), (26) следует, что для всех таких x

$$|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k| < \varepsilon.$$

Это доказывает существование предела $S(x)$ в точке x_0, а следовательно, и справедливость равенства (22).

□

Теорема 6*

Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$ и все элементы этой пoсследовательности имеют предел в точке x_0, то и предельная функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, причем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} (\lim_{x\to x_0} f_n(x)),$$

т.е. к пределу при $x \to x_0$ можно переходить почленно.

Следствие 1 из теоремы 6

Если в условиях теоремы 6 дополнительно потребовать, чтобы точка $x_0 \in \{x\}$ и чтобы все члены функционального ряда были непрерывны в этой точке, то и сумма этого ряда будет непрерывна в этой точке.

Следствие 2 из теоремы 6

Если все члены функционального ряда (функциональной последовательности) непрерывны на плотном в себе множестве $\{x\}$ и если этот функциональный ряд (последовательность) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то и сумма указанного ряда (последовательности) непрерывна на множестве $\{x\}$.

Почленное интегрирование рядов

Теорема 7

Если функции $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3...)$ непрерывны в промежутке $X = [a, b]$ и составленный из них ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... \tag{$*$}$$

сходится в этом промежутке **равномерно**, то интеграл от суммы $S(x)$ этого ряда представляется следующим образом:

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + ... \tag{27}$$

Доказательство.

Так как функции $u_n(x)$ непрерывны по условию теоремы, то функция $S(x)$ тоже непрерывна (по теореме 4). Ввиду этого существование всех этих интегралов очевидно. Проинтегрируем тождество

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + \varphi_n(x)$$

в промежутке $[a, b]$, получим:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + ... + \int_a^b u_n(x)dx + \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

Таким образом, сумма n членов ряда (27) отличается от интеграла $\int_a^b S(x)dx$ дополнительным членом $\int_a^b \varphi_n(x)dx$. Для доказательства разложения (27) нужно только установить, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = 0. \tag{28}$$

В силу равномерной сходимости ряда $(*)$, для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ номер N такой, что при $n > N$

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

сразу для всех x в рассматриваемом промежутке. Тогда для тех же значений n будет:

$$|\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx| \leqslant \int\limits_a^b |\varphi_n(x)|dx < (b-a)\varepsilon,$$

что и доказывает соотношение (28).

$\square$

Равенство (27) может быть выписано в виде

$$\int\limits_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int\limits_a^b u_n(x)dx\right\},$$

так что, в случае равномерно сходящегося функционального ряда *допустимо почленное интегрирование ряда.*

Пример 6

Как и в случае теоремы 4, тебование равномерной сходимости существенно для разложения (27), то есть не может быть просто опущено, но все же не является **необходимым**. Ряды из примера 5, как раз это показывают. Оба они в промежутке $[0,1]$ сходятся к функции $f(x) = 0$ **неравномерно.** Но интегрируя первый ряд почленно, мы в качестве суммы ряда интегралов получим

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2} dx = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n^2}) = 1,$$

хотя

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = 0;$$

для второго ряда аналогично найдем

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2)}{2n} = 0 = \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Теорема 7*

Если последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...,$$

непрерывных в промежутке $X = [a,b]$, сходится к предельной функции $f(x)$ **равномерно в** X, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\} dx,$$

то есть *допустим предельный переход под знаком интеграла.*

Почленное дифференцирование рядов

Теорема 8

Пусть функции $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3...)$ определены в промежутке $X = [a, b]$ и имеют в нем непрерывные производные $u_n'(x)$. Если в этом промежутке не только сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{29}$$

но и **равномерно** сходится ряд, составленный из производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + ... + u_n'(x) + ..., \tag{30}$$

то и сумма $S(x)$ ряда (29) имеет в X производную, причем

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{31}$$

Доказательство.

Обозначим через $S^*(x)$ сумму ряда (30); в силу теоремы 4, это будет **непрерывная** функция от x. Воспользуемся теоремой 7, проинтегрируем ряд (30) почленно в промежутке от a до произвольного значения $x \in X$; мы получим

$$\int\limits_a^x S^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^x u_n'(t)dt.$$

Но, очевидно, $\int\limits_a^x u_n'(t)dt = u_n(x) - u_n(a)$, так что

$$\int\limits_a^x S^*(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x) - u_n(a)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a).$$

Так как интеграл слева (ввиду непрерывности подинтегральной функции), имеет производную, равную $S^*(x)$, то ту же производную имеет и функция $S(x)$, которая от интеграла отличается лишь на постоянную.

□

Равенство (31) можно переписать (если использовать, следуя Коши, обозначение D для производной) в виде

$$D\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x).$$

Таким образом, при указанных условиях, допустимо *почленное дифференцирование ряда.*

Замечание

Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{-(n-1)^2x^2}-e^{-n^2x^2}\right]$$

и

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)-\frac{1}{2(n-1)}\ln(1+(n-1)^2x^2)\right]$$

Первый из них сходится к 0 при $x = 0$ и к 1 в остальных точках, а сумма второго везде равна 0. Если продифференцировать их почленно, то получатся ряды из примера 5, сходящиеся во всем промежутке $[0, 1]$ к 0, но оба — **неравномерно**. В первом случае ряд из производных сходится и при $x = 0$, где сумма первоначального ряда производной иметь не может, ибо разрывна в этой точке. Во втором случае, наоборот, почленное дифференцирование всюду приводит к верному результату. Этими примерами иллюстрируется роль требования. чтобы ряд производных сходился **равномерно**: оно существенно, но **не необходимо.**

Дополнительная информация

1. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой**, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такой, что при $\forall\ n \geqslant N$ элементы $\{\alpha_n\}$ этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

2. Если предел последовательности равен 0, то последовательность называется **бесконечно малой.**

3. Наименьшая из всех верхних граней ограниченного сверху множества $\{x\}$ называется **точной верхней гранью** этого множества и обозначается символом $\bar{x} = sup\{x\}$.

4. Число $\bar{x}$ называется **точной верхней** гранью ограниченного сверху множества $\{x\}$, если выполнены след. требования:

1) каждый элемент $x \in \{x\}$ удовлетворяет неравенству $x \leqslant \bar{x}$;

2) каково бы ни было число x', меньшее $\bar{x}$, найдется хотя бы один элемент $x \in \{x\}$, удовлетворяющий неравенству $x > x'$.

5. *Критерий Коши сходимости числовой последовательности.*

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

6. Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ такое, что для $\forall\ n :\ n \geqslant N$ и для $\forall\ p \in\ \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

7. *Теорема (использовалась в доказательстве теоремы 1)*

Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \geqslant b$ $[x_n \leqslant b]$, то и предел x этой последовательности удовлетворяет неравенству $x \geqslant b$ $[x \leqslant b]$. (Ильин, стр. 81)

8. *Критерий Коши сходимости числового ряда (используется в док-ве теоремы 3).*

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N$ такое, что для $\forall\, n:\ n \geqslant N$ и для $\forall\, p \in\ \mathbb{N}$

$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon.$$

9. *Теорема Больцано-Вейерштрасса (используется в док-ве теоремы 5.*

Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

10. Точка x бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$ называется **предельной точкой** последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε-окрестности точки x содержится бесконечно много элементов этой последовательности.

Точка x бесконечной прямой $(-\infty, \infty)$ называется **предельной точкой** последовательности $\{x_n\}$, если из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к пределу x.

11. Множество $\{x_n\}$ называется **плотным в себе**, если каждая его точка является предельной точкой этого множества.