Метод вариации постоянных для систем дифференциальных уравнений

1. Нахождение частного решения методом вариации постоянных

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j(t)x^j + b^i(t), i = 1..n \tag{1.1}$$

- система линейных неоднородных уравнений, где $a_i^j(t)$ и $b^i(t)$ непрерывные функции,

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j(t)x^j, i = 1..n \tag{1.2}$$

- система однородных дифф. уравнений.

Пусть

$$\dot{y} = A(t)y + b(t) \tag{1.3}$$

- векторная запись системы (1.1) и пусть $y = \varphi(t)$ - некоторое решение этого уравнения.

$$\dot{y} = A(t)y \tag{1.4}$$

- однородная система линейных дифференциальных уравнений, $\varphi(t)$ - некоторое решение этой системы.

Из свойств линейных систем о том, что если есть частное решение системы (1.3) и общее решение (1.4), то

$$y = \varphi(t) + \psi(t)$$

- есть общее решение (1.3).

Пусть

$$\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$$

- фундаментальная система решение для (1.4), то есть это максимальный набор линейно независимых решений системы, вронскиан не равен нулю ни при каком t. Будем искать решение уравнения (1.3) в виде

$$y = c^1(t)\varphi_1(t) + ... + c^n(t)\varphi_n(t), \tag{1.5}$$

где $c^i(t)$ - неизвестные функции. Подставляя (1.5) в (1.3) $\Rightarrow$

$$\dot{c}^1(t)\varphi_1(t) + ... + \dot{c}^n(t)\varphi_n(t) + c^1(t)\dot{\varphi}_1(t) + ... + c^n(t)\dot{\varphi}_n(t) =$$

$$= A(t)[c^1(t)\varphi_1(t) + ... + c^n(t)\varphi_n(t)] + b(t).$$

Зная, что $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$ есть решение (1.4) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{c}^i(t)\varphi_i(t) = b(t). \tag{1.6}$$

Так как $\varphi^i(t)$ - линейно независимы $\Rightarrow$ $\dot{c}^i(t)$ определяются однозначно $\Rightarrow$ $c^i(t)$ можно найти, решив систему уравнений (1.6).

Пусть $\Phi(t) = (\varphi_j^i(t))$ - фундаментальная матрица решений для (1.4), обращающаяся в единичную матрицу при некотором $t = t_0$. Тогда решение (1.3) с начальными условиями t_0, y_0 записывается в следующей форме:

$$y(t) = \Phi(t)\left[y_0 + \int_{t0}^{t} \Phi^{-1}(t)b(t)dt\right]. \tag{1.7}$$

Непосредственно проверяется, что при $t = t_0$ $y = y_0$. Можно проверить, что данная формула верна непосредственной подстановкой в уравнение (1.3).
Можно также вывести методом вариации постоянных. (1.6) в векторной форме:

$$\Phi(t)\dot{c}(t) = b(t) \Rightarrow \dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t)b(t) \Rightarrow c(t) = \int \Phi^{-1}(t)b(t)dt \tag{1.8}$$

(1.5) можно представить в виде $y^i(t) = \sum_{j=1}^{n} c^i(t)\varphi_j^i(t), i = 1..n$ или $y = \Phi(t)c(t)$. Подставляя в эту формулу значение $c(t)$ из (1.8) $\Rightarrow$

$$y = \Phi(t)\left[\int \Phi^{-1}(t)b(t)dt\right] \tag{1.9}$$

- есть решение (1.3). (1.7) есть частный случай (1.9)

2. Нахождения частного решения методом подбора

Пусть

$$\dot{y} = A(t)y + b(t) \tag{2.1}$$

- векторная запись системы (1.1) и пусть $y = \varphi(t)$ - ФСР.
Перепишем уравнение следующим образом:

$$\dot{y} + A(t)y = f(t), \tag{2.2}$$

Пусть $\psi(t)$ - частное решение (2.2). Если $f(t)$ - квазимногочлен вида

$$f(t) = e^{\alpha t}\left[M_m(t)\cos(\beta t) + N_n(t)\sin(\beta t)\right],$$

где $M_m(t)$ - многочлен степени m, $N_n(t)$ - многочлен степени n, α, β - действительные числа.

Метод подбора вычисления частного решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части состоит в том, что частное решение уравнения отыскивают в виде

$$f^*(t) = e^{\alpha t}\left[P_k(t)\cos(\beta t) + Q_k(t)\sin(\beta t)\right]t^r, \tag{2.3}$$

где $P_k(t), Q_k(t)$ многочлены степени $k = max(m, n)$ с неизвестными коэффициентами,

$$P_k(t) = p_k t^k + p_{k-1}t^{k-1} + ... + p_1 t + p_0,$$
$$Q_k(t) = q_k t^k + q_{k-1}t^{k-1} + ... + q_1 t + q_0,$$

t^r - резонансный сомножитель. Резонанс имеет место в случаях, когда среди корней характеристического уравнения есть корень $\alpha \pm i\beta$ кратности r. Т.е. если среди корней характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения есть такой, что его действительная часть совпадает с коэффициентом в показателе степени экспоненты, а мнимая — с коэффициентом в аргументе тригонометрической функции в правой части уравнения, и кратность этого корня r, то в искомом частном решении присутствует резонансный сомножитель t^r. Если же такого совпадения нет ($r = 0$), то резонансный сомножитель отсутствует.
Для более подробной информации см. `http://mathprofi.ru/kak_podobrat_chastnoe_reshenie_dy.pdf`.

Для нахождения неизвестных коэффициентов подставляем (2.3) в исходное уравнение и приравниваем в правой и левой части полученного равенства коэффициенты при

$$\begin{gathered} e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t), \\ te^{\alpha t}\cos(\beta t), te^{\alpha t}\sin(\beta t), \\ t^2 e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \\ \dots, \\ t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t), t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Полученная таким образом система $2k+2$ уравнений относительно $2k+2$ неизвестных имеет единственное решение.

Список литературы

[1] Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Издачние четвертое

[2] Подбор частного решения http://mathprofi.ru/kak_podobrat_chastnoe_reshenie_dy.pdf

[3] Примеры решения на метод подбора http://mathprofi.ru/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka.html

[4] Примеры решения на метод вариации http://mathprofi.ru/metod_variacii_proizvolnyh_postoyannyh.html