Билет 16. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, их связь с характеристическими корнями.

Определение

Пусть дано n-мерное линейное пространство V_n. Рассмотрим преобразование этого пространства, т.е. отображение, переводящее каждый вектор a пространства V_n в некоторый вектор a' этого же пространства. Вектор a' называется образом вектора a при рассматриваемом преобразовании.

Преобразование f линейного пространства V_n называется линейным преобразованием этого пространства, если выполнены следующие условия:

1)$f(a+b) = f(a) + f(b)$

2)$f(\lambda a) = \lambda f(a)$

Утверждение

Из определения линейного преобразования следует, что линейное преобразование линейного пространства переводит любую линейную комбинацию данных векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ в линейную комбинацию образов этих векторов:

$f(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k) = \alpha_1 f(a_1) + \ldots + \alpha_k f(a_k)$

Доказательство вытекает из определения линейного преобразования линейного пространства.

Утверждение

Любое линейное преобразование линейного пространства V_n, оставляет нулевой вектор O неподвижным:

$f(O) = O$

Доказательство данного утверждения вытекает из определения линейного преобразования линейного пространства.

Утверждение

Образ противоположного вектора, для данного вектора a, есть противоположный вектор для образа вектора a:

$f(-a) = -f(a)$

Доказательство данного утверждения вытекает из определения линейного преобразования линейного пространства.

Примеры линейных преобразований линейного пространства:

1) Тождественное преобразование, оставляющее произвольный вектор a на месте:

$f(a) = a$

2) Нулевое преобразование, переводящее произвольный вектор a в O:

$f(a) = O$

Определение

L называется линейным подпространством V_n, если :

1) Если вектора $a, b \in L => (a + b) \in L$

2) Если вектор $a \in L => \alpha a \in L$ при любом значении α

Из определения следует, что если L линейное подпространство V_n, то и совокупность $f(L)$ образов всех векторов L также будет линейным подпространством.

Определение

Областью значений линейного преобразования f линейного пространства V_n, называется совокупность $f(V_n)$ образов всех векторов V_n.

Определение

Совокупность $N(f)$ всех векторов пространства V_n, отображающихся при линейном преобразовании f в нулевой вектор, будем называть ядром преобразования f.

Взаимно однозначное соответствие между линейными пре-

образованиями n-мерного линейного пространства и квадратными матрицами порядка n.

Пусть

$$e_1, e_2, \dots, e_n \ (4)$$

произвольный базис линейного пространства V_n. Так как всякий вектор a линейного пространства V_n единственным образом представляется в виде линейной комбинации (4) базиса пространства V_n, то ввиду того что, образ вектора a с теми же коэффициентами выражается через образы векторов базиса. Получается что всякое линейное преобразование f линейного пространства V_n однозначно определяется заданием образов $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ всех векторов фиксированной базы (4).

Утверждение

Какова бы ни была упорядоченная система из n векторов пространства V_n,

$$c_1, c_2, \dots, c_n \ (5)$$

существует, притом единственное, такое линейное преобразование f этого пространства, что (5) служит системой образов векторов базиса (4) при этом преобразовании,

$$f(e_i) = c_i \ ; i = 1, 2, \dots, n (6)$$

Доказательство

Единственность преобразования f уже доказана выше(в силу единственности разложения по базису) и нужно лишь доказать существование. Определим преобразование f следующим образом: если a – произвольный вектор пространства и

$$a = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \text{ – его запись в базисе (4), то положим}$$

$$f(a) = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i c_i \ (7)$$

Докажем линейность этого преобразования. Если

$$b = \Sigma_{i=1}^{n}\beta_i e_i \text{ – любой другой вектор пространства, то}$$

$$f(a+b) = f\left[\Sigma_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)e_i\right] = \Sigma_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)c_i = \Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i c_i + \Sigma_{i=1}^{n}\beta_i c_i =$$
$$= f(a) + f(b)$$

Аналогично проводим рассуждения для произвольного числа γ и значения $f(\gamma a)$, оно будет равно $\gamma f(a)$. Что же касается справедливости равенства (6), то она вытекает из определения (7) преобразования f, так как все координаты вектора e_i, кроме i-ой координаты равно единице,равны нулю.

В ходе доказательства этого утверждения было установлено взаимно однозначное соответствие между всеми линейными преобразованиями линейного пространства V_n и всеми упорядоченными системами (5) из n векторов этого пространства.

Всякие вектор c_i обладает определенной записью в базисе (4):

$$c_i = \Sigma_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j, i = 1, 2, \ldots, n \ (8)$$

Из координат вектора c_i в базисе (4) можно составить квадратную матрицу

$$A = (\alpha_{ij}) \ (9)$$

беря в качестве ее i-ой строки строку координат вектора вектора $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Так как система (5) была взята произвольно, то матрица A будет произвольной матрицей порядка n с действительными элементами. Таким образом мы установили взаимно однозначное соответствие между всеми линейными преобразованиями пространства V_n и всеми квадратными матрицами порядка n. Будем говорить что матрица A задает линейное преобразование f в базисе (4).

$$f(e) = Ae. \ (10)$$

Операции над линейными преобразованиями .

1) Пусть f, g линейные преобразования линейного пространства V_n, тогда суммой двух линейных преобразований назовем:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a). \ (14)$$

Доказательство этого свойства вытекает из представления линейного преобразования квадратной матрицей.

2) Сумма двух линейных преобразований, тоже является линейным преобразованием.

$(f+g)(a+b) = f(a+b) + g(a+b) = f(a) + f(b) + g(a) + g(b) = (f+g)(a) + (f+g)(b)$

$(f+g)(\alpha a) = f(\alpha a) + g(\alpha a) = \alpha f(a) + \alpha g(a) = \alpha(f(a) + g(a)) = = \alpha((f+g)(a))$

Следовательно сумма линейных преобразований линейна.

3) Пусть f, g линейные преобразования линейного пространства V_n, тогда произведением двух линейных преобразований назовем:

$$(fg)(a) = g(f(a)). \ (15)$$

4) Произведение двух линейных преобразований, тоже является линейным преобразованием.

$(fg)(a+b) = g(f(a+b)) = g(f(a) + f(b)) = g(f(a)) + g(f(b)) = = (fg)(a) + (fg)(b)$

5) Пусть f линейное преобразование линейного пространства V_n,а χ произвольное число, тогда произведением линейного преобразования на число назовем:

$$(\chi f)(a) = \chi f(a). \ (16)$$

6)Произведение линейного преобразования и числа, также является линейным преобразованием

$(\chi f)(a+b)=\chi f(a+b)=\chi(f(a)+f(b))=\chi f(a)+\chi f(b)=(\chi f)(a)+$
$+(\chi f)(b)$

$(\chi f)(\alpha a)=\chi f(\alpha a)=\chi(\alpha f(a))=\alpha(\chi f(a))=\alpha(\chi f)(a)$

Пусть в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ преобразования f, g задаются соответственно матрицами $A=(\alpha_{ij}), B=(\beta_{ij})$

$$f(e)=Ae, g(e)=Be.$$

Тогда в виду (14),(15),(16) получаем:

$(g+f)(e_i)=g(e_i)+f(e_i)=\Sigma_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j+\Sigma_{j=1}^{n}\beta_{ij}e_j=\Sigma_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})e_j$, то есть $(f+g)(e)=(A+B)e$

$(fg)(e_i) = g(f(e_i)) = g(\Sigma_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j) = \Sigma_{j=1}^{n}\alpha_{ij}g(e_j) = \Sigma_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(\Sigma_{k=1}^{n}\beta_{jk}e_k)=\Sigma_{k=1}^{n}(\Sigma_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{jk})e_k$, то есть $(fg)(e)=(AB)e$.

$(\chi f)(e_i) = \chi f(e_i) = \chi\Sigma_{j=1}^{n}\alpha_{ij}e_j = \Sigma_{j=1}^{n}(\chi\alpha_{ij})e_j$, то есть $(\chi f)(e) = = (\chi A)e$.

Получаем что свойства матриц сохраняются и для линейных преобразований.

Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, их связь с характеристическими корнями.

Определение

Пусть в действительном линейном пространстве V_n задано линейное преобразование f. Если вектор b, отличный от нуля, переводится преобразованием f в вектор, пропорциональный самому b, т.е.:

$$f(b)=\lambda_0 b,$$

где λ_0 — — некоторое действительное число, то b называется собственным вектором преобразования f, а число λ_0 — — собственным значением этого преобразования для собственного вектора b. Вектор $b=0$ не считается собственным вектором, хотя удовлетворяет условию для любого собственного значения.

Пусть матрица $A = (\alpha_{ij}) - -$ квадратная матрица порядка n с действительными элементами, а $\lambda-$ некоторое неизвестное. Тогда матрица $A - \lambda E$, где $E-$ единичная матрица порядка n, называется характеристической матрицей матрицы A. Определитель характеристической матрицы для матрицы A будет равен многочлену от λ степени n. Этот многочлен называется характеристическим многочленом матрицы A, а его корни будут называться характеристическими корнями этой матрицы. Так как каждому линейному преобразованию соответствует некоторая матрица, то характеристические корни и многочлен можно назвать характеристическими корнями и многочленом данного линейного преобразования.

Утверждение

Действительные характеристические корни линейного преобразования f, если они существуют, и только они служат собственными значениями этого преобразования.

Пусть преобразование f имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицу $A = (\alpha_{ij})$ и пусть вектор $b = \Sigma_{i=1}^{n} \beta_i e_i$ является собственным вектором преобразования f, $f(b) = \lambda_0 b$ (2). В силу доказанных выше свойств линейного преобразования получим: $f(b) = ((\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)A)e$ (3). В силу (2) и (3) получим систему уравнений:

$$\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{21} + \ldots + \beta_n\alpha_{n1} = \lambda_0\beta_1$$

$$\beta_1\alpha_{12} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{n2} = \lambda_0\beta_2$$

$$\ldots$$

$$\beta_1\alpha_{1n} + \beta_2\alpha_{2n} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn} = \lambda_0\beta_n$$

Так как $b \neq 0$ получается что не все числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ равны нулю таким образом система линейных однородных уравнений:

$$x_1(\alpha_{11}-\lambda_0)+x_2\alpha_{21}+\ldots+x_n\alpha_{n1}=0$$

$$x_1\alpha_{12}+x_2(\alpha_{22}-\lambda_0)+\ldots+x_n\alpha_{n2}=0$$

$$\ldots$$

$$x_1\alpha_{1n}+x_2\alpha_{2n}+\ldots+x_n(\alpha_{nn}-\lambda_0)=0$$

обладает ненулевым решением, а потому определитель матрицы составленный из коэффициентов однородной системы равен 0. Транспонируя определитель получаем $|A-\lambda_0 E|=0$, получается что собственное значение λ_0 если корень характеристического уравнения матрицы A.

В обратную сторону. Пусть λ_0 будет любым действительным характеристическим корнем преобразования f. Тогда имеет место равенство $|A-\lambda_0 E|=0$, с помощью транспонирования данного равенства получаем что система однородных линейных уравнений имеет ненулевое решение

$$x_1(\alpha_{11}-\lambda_0)+x_2\alpha_{21}+\ldots+x_n\alpha_{n1}=0$$

$$x_1\alpha_{12}+x_2(\alpha_{22}-\lambda_0)+\ldots+x_n\alpha_{n2}=0$$

$$\ldots$$

$$x_1\alpha_{1n}+x_2\alpha_{2n}+\ldots+x_n(\alpha_{nn}-\lambda_0)=0$$

Обозначим это решение через $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ (1), то будут выполняться равенства

$$\beta_1\alpha_{11}+\beta_2\alpha_{21}+\ldots+\beta_n\alpha_{n1}=\lambda_0\beta_1$$

$$\beta_1\alpha_{12}+\beta_2\alpha_{22}+\ldots+\beta_n\alpha_{n2}=\lambda_0\beta_2$$

$$\ldots$$

$$\beta_1\alpha_{1n}+\beta_2\alpha_{2n}+\ldots+\beta_n\alpha_{nn}=\lambda_0\beta_n$$

Обозначим через b вектор пространства V_n имеющий в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ строку координат (1). Тогда будут справедливы равенства (3), а из (3) и последней системы уравнений получим (2). Вектор b оказался, собственным вектором преобразования f, который относится к собственному значению λ_0.

Утверждение доказано.

Замечание

материал взят из книги Курош, стр 194