Будем рассматривать линейные системы, разрешенные относительно производных:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{1,1}(x) \cdot y_1 + \ldots + a_{1,n}(x) \cdot y_n + f_1(x) \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n,1}(x) \cdot y_1 + \ldots + a_{n,n}(x) \cdot y_n + f_n(x) \end{cases}$$

$a_{i,j}(x), f_i(x), \quad i,j = \overline{1,n}$ — заданные непрерывные функции. В дальнейшем будем предполагать, что они замкнуты на интервале $x \in (\alpha, \beta)$. x — независимая переменная, $y_1(x) \ldots y_n(x)$ — неизвестные функции.

А так-же рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_1^{(0)} \\ \ldots \\ y_n(x_0) = y_n^{(0)} \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \ldots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \ldots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ \ldots \\ y_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

Теорема (Теорема о существовании и единственности для линейных систем). *Пусть* $a_{i,j}(x)$, $f_i(x)$, $i,j=\overline{1,n}$ *— определены и непрерывны на* $x\in(\alpha,\beta)$. *Тогда для любой точки* $x_0\in(\alpha,\beta)$ *и для любого набора* $-\infty<y_i^{(0)}<+\infty$ *существует единственное решение задачи (1,2) определенное на всем интервале* (α,β).

Функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(m)}(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (α, β), если существуют постоянные $c_1, \ldots, c_m$, не все равные нулю, такие что:

$$c_1 y^{(1)}(x) + \ldots + c_m y^{(m)}(x) = 0, \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Теорема (1, О свойствах решений линейных однородных систем)**.** *Линейная комбинация решений линейной однородной системы* $\sum\limits_{k=1}^{m} c_k y^{(k)}(x)$ *является так же решением этой системы.*

Определение. Определитель

$$W\left(x\right)=\begin{vmatrix} y_1^{(1)}\left(x\right) & \dots & y_1^{(n)}\left(x\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^{(1)}\left(X\right) & \cdots & y_n^{(n)}\left(x\right) \end{vmatrix}$$

называют определителем Вронского, построенным по функциям $y^{(1)}\left(x\right)\dots y^{(n)}\left(x\right)$.

Теорема (2). *Если вектор функции $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ линейно зависимы, то определитель Вронского, построенный по этим функциям тождественно равен нулю.*

Доказательство. Вытекает из известной теоремы линейной алгебры: если столбцы определителя линейно зависимы, то определитель равен нулю. $\square$

Теорема (3). *Пусть вектор функции* $y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ *— решения линейной однородной дифференциальной системы (1). тогда если определеитель Вронского, составленный по этим вектор-функциям, равен нулю в некоторой точке* x_0, *то эти вектор функции линейно зависимы.*

Следствие. Если определитель Вронсткого, построенный по решениям линейной однородной системы (1) обращается в ноль в некоторой точке, то он тождественно равен нулю.

Определение. n линейно независимых решений линейной однородной системы (1) называется фундаментальной системой решений этой системы. n - размерность системы (1).

Теорема (4). *Фундаментальная система решений существует у каждой линейной однородной системы (1).*

Доказательство. Рассмотрим n единичных числовых векторов:

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

И построим n решений системы (1), а именно решений следующих задач Коши: $x_0 \in (\alpha, \beta)$

$$y^{(1)}(x) : \begin{cases} \dfrac{dy^{(1)}}{dx} = Ay^{(1)} \\ y^{(1)}(x_0) = e^{(1)} \end{cases}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x) : \begin{cases} \dfrac{dy^{(n)}}{dx} = Ay^{(n)} \\ y^{(n)}(x_0) = e^{(n)} \end{cases}$$

Такие решения существуют и определены на всем интервале (α, β). Заметим, что определитель Вронского, построенный по вектор функциям имеет вид:

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Следовательно эти вектор функции не могут быть линейно зависимыми. Ну а тогда они образуют фундаментальную систему решений. $\square$