Билет 4. Определенный интеграл Римана. Интегральные суммы и их предел. Критерий интегрируемости с использованием сумм Дарбу

Рассмотрим функцию f(x), определенную во всех точках интервала [a, b].
Определение 1. Разбиение $\{x_k\}$ отрезка [a, b] - множество точек $x_0, x_1, ..., x_n$, таких что a $= x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n =$ b.
Опеределение 2. Разбиение $\{x'_k\}$ сегмента [a,b] называется измельчением разбиения $\{x_k\}$, если каждая точка разбиения $\{x_k\}$ принадлежит разбиению $\{x'_k\}$.
Определение 3. Разбиение $\{x_k\}$ сегмента [a, b] называется объединением разбиений $\{x'_k\}$, $\{x''_k\}$ сегмента [a, b], если все точки разбиений $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$ принадлежат разбиению $\{x_k\}$ и $\{x_k\}$ состоит только из точек $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$
Интегральная сумма - число $\sigma = \sigma(x_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) * \Delta x_k$, где $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$. σ зависит от разбиения $\{x_k\}$ и выбора точек ξ_k.
$[x_{k-1}, x_k]$ - частичный сегмент, ξ_k - промежуточная точка.
$d = \max\limits_{0 \leq k \leq n} \Delta x_k$ - диаметр разбиения.
Определение 4. Число I называется пределом интегральных сумм $\sigma(x_k, \xi_k)$ при $d \to 0$, если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из $d < \varepsilon$ при $\forall$ выборе $\xi_k \Rightarrow |I - \sigma| < \varepsilon$

$$I = \lim_{d \to 0} \sigma(x_k, \xi_k)$$

Определение 5. Функция f(x) называется интегрируемой по Риману на сегменте [a, b], если для этой функции на указанном сегменте $\exists$ предел I ее интегральных сумм при $d \to 0$.
I - определенный интеграл Римана от функции f(x) в пределах от a до b и обозначается $\int_a^b f(x)dx$
a - нижний предел интегрирования, b - верхний предел интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy$$

Геометрический смысл определенного интеграла

Рассмотрим криволинейную трапецию - фигуру, ограниченную графиком неотрицательной функции y = f(x), заданной на [a,b], прямыми x=a, x=b и отрезком [a, b].

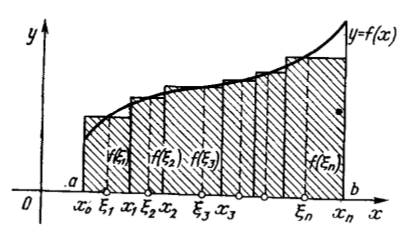

Рис. 1: Геометрический смысл интегральных сумм

На рисунке 1 видно, что интегральная сумма $\sigma(x_k, \xi_k)$ - площадь заштрихованной фигуры.
Пример f(x) = c = const.
При любом выборе точек $\xi_k f(\xi_k) = c$. Значит

$$\sigma(x_k, \xi_k) = c\Delta x_1 + c\Delta x_2 + ... + c\Delta x_n = c(\Delta x_1 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n) = c(b-a).$$

Значит

$$\int_a^b cdx = \lim_{d\to 0} \sigma(x_k, \xi_k) = \lim_{d\to 0} c(b-a) = c(b-a).$$

Следовательно функция интегрируема.
Утверждение. Если функция f(x) не является ограниченной на сегмента [a, b], то эта функция не интегрируема на сегменте [a, b].
Доказательство
Пусть f(x) не ограничена на [a, b]. Без ограничения общности предположим, что она неограничена на частичном сегменте $[x_0, x_1]$. На остальных сегментах зафиксируем произвольные промежуточные точки ξ_k

$$\sigma_1 = \sigma_1(x_k, \xi_k) = f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Так как функция не ограничена на сегменте $[x_0, x_1]$, значит $\forall$ M>0 $\exists$ $\xi_1 \in [x_0, x_1]$ такая, что

$$|f(\xi_1)| \geq \frac{|\sigma_1| + M}{\Delta x_1}.$$

$$\Rightarrow |f(\xi_1)|\Delta x_1 \geq |\sigma_1| + M.$$

$$|\sigma(x_k, \xi_k)| = |\sum_k^n f(\xi_k) * \Delta x_k| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \sigma_1| \geq |f(\xi_1)|\Delta x_1 - |\sigma_1| \geq M.$$

Пусть функция интегрируема на сегменте и $\exists$ предел I. Значит для M = |I| + 1 $\exists$ σ такая, что $|\sigma| > |I| + 1$. Значит $|\sigma - I| \geq |\sigma| - |I| > |I| + 1 - |I|$. $|\sigma - I| > 1$, что противоречит определению предела I.
Пример ограниченной неинтегрируемой функции
Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in R \setminus Q \end{cases}$$

Построим 2 интегральные суммы σ_1, σ_2 со сколь угодно малым d. Для σ_1 возьмем иррациональные $\xi_k \Rightarrow \sigma_1 = 0$. Для σ_2 возьмем рациональные $\xi_k \Rightarrow \sigma_2 = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = (b-a)$.
Пусть существует предел I, возьмем $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$

$$|\sigma_1 - I| < \frac{b-a}{2}, |\sigma_2 - I| < \frac{b-a}{2}$$

$$|\sigma_2 - \sigma_1| = |(\sigma_2 - I) + (I + \sigma_1) \leq |\sigma_2 - I| + |I - \sigma_1| < (b-a).$$

Но это противоречит тому, что $|\sigma_2 - \sigma_1| = b - a$.
Верхние и нижние суммы

Обозначим $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ - точные нижние и верхние грани соответственно на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$.

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

- верхняя сумма Дарбу

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

- нижняя сумма Дарбу
для данного разбиения x_k сегмента [a, b].
Геометрический смысл верхних и нижних сумм
Рассмотрим криволинейную трапецию.

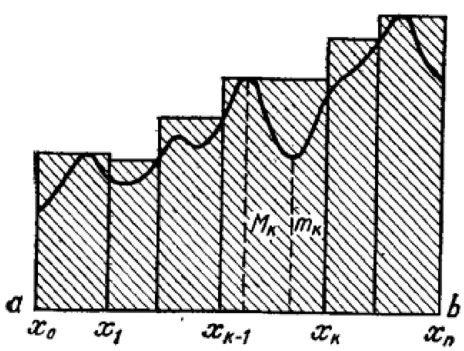

Рис. 2: Геометрический смысл верхних сумм.

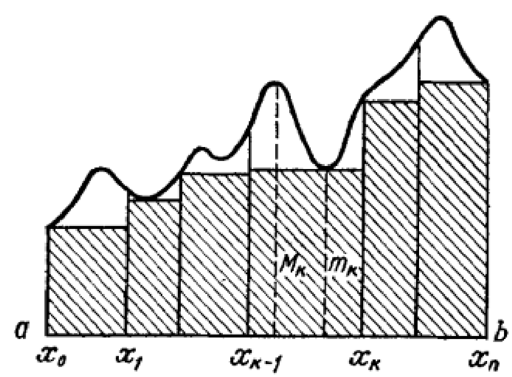

Рис. 3: Геометрический смысл нижних сумм.

По рисунку 2 видно, что верхняя сумма равна плозади элементарной ступенчатой фигуры, которая содержит криволинейную трапецию. Эта площадь заштрихована на рисунке. По рисунку 3 видно, что нижняя сумма равна плозади элементарной ступенчатой фигуры, которая содержится в криволинейной трапеции. Эта площадь заштрихована на рисунке 3.

Свойства верхних и нижних сумм

Свойство 1. Пусть σ, S, s соответствуют одному и тому же разбиению x_k, тогда при любом выборе ξ_k справедливо

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Доказательство

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$$

$$m_k \Delta x_k \leq f(\xi_k)\Delta x_k \leq M_k \Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

Свойство 2. Пусть x_k - произвольное разбиение сегмента [a, b], ε - произвольное положительное число. Тогда можно выбрать ξ_k так, что $0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon$ и выбрать η_k так что $0 \leq \sigma(x_k, \eta_k) - s \leq \varepsilon$.

Доказательство

Зафиксируем x_k и ε>0. Т.к. $M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, то для выбранного ε $\exists \xi_k$, такая что

$$0 \leq M_k - f(\xi_k) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$0 \leq (M_k - f(\xi_k))\Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k.$$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k))\Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k.$$

$$0 \leq S - \sigma(x_k, \xi_k) < \varepsilon$$

Второе двойное неравенство доказывается аналогично.

Следствие Для любого разбиения x_k

$$S = \sup_{\xi_k} \sigma(x_k, \xi_k), s = \inf_{\eta_k} \sigma(x_k, \eta_k)$$

Свойство 3. При измельчении разбиения верхняя сумма может только уменьшиться, а нижняя - увеличиться.

Доказательство

Пусть x'_k - измельчение x_k путем добавления точки $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда в выражении S слагаемое $M_k \Delta x_k$ изменится на $M'_k(\bar{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \bar{x})$, где $M'_k = \sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq \bar{x}} f(x)$, $M''_k = \sup\limits_{\bar{x} \leq x \leq x_k} f(x)$.

Точная верхняя грань функции на части сегмента не превосходит точной верхней грани на всем сегменте. $M'_k \leq M_k$, $M''_k \leq M_k$,

$$M'_k(\bar{x} - x_{k-1}) + M'_k(x_k - \bar{x}) \leq M_k[(\bar{x} - x_{k-1}) + (x_k - \bar{x})] = M_k \Delta x_k.$$

Остальные слагаемые остаются без изменений. Следовательно свойство доказано. Для нижней суммы доказывается аналогично.

Свойство 4. Для двух разбиений x'_k, x''_k нижняя сумма одного из разбиений не превосходит верхней суммы другого.

Доказательство

x_k - объединений разбиений x'_k, x''_k с суммами S, s. x_k - измельчение для x'_k и x''_k. Согласно св.3

$$S' \geq S, S'' \geq S, s' \leq s, s'' \leq s.$$

Согласно св.1

$$s \leq S$$

$$s' \leq s \leq S \leq S”$$

$$s'' \leq s \leq S \leq S'.$$

Следствие Множество верхних сумм функции, отвечающих всевозможным разбиениям сегмента [a, b], ограничено снизу. Множество нижних сумм ограничено сверху.

Определение 6

Верхний интеграл Дарбу от функции f(x) - число $I^* = \sup\limits_{\{x_k\}} S$.

Нижний интеграл Дарбу от функции f(x) - число $I_* = \inf\limits_{\{x_k\}} s$.

Лемма 1. $I_* \leq I^*$.

Доказательство. Допустим, что это не так, тогда $I_* - I^* = \varepsilon > 0$. Тогда $\exists$ разбиение x'_k такое, что для его верхней суммы S' верно $S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$ и разбиение x''_k,что для его s'' верно $s'' > I_* - \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$S' - s'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2} - I_* + \frac{\varepsilon}{2} = I^* - I_* + \varepsilon = -\varepsilon + \varepsilon = 0.$$

Следовательно, $S' - s'' < 0 \Rightarrow s'' > S'$, что противоречит св.4. Наше предположение неверно, лемма доказана.

$M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Пусть x'_k - разбиение путем добавления l новых точек к разбиение x_k.

Лемма 2 $S - S' \leq (M-m)ld, s' - s \leq (M-m)ld$

Доказательство. Без ограничения общности, пусть x'_k получается путем добавления только одной точки $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Суммы S и S' будут отличаться только одним слагаемым. У S оно будет выражаться $M_k \Delta x_k$, а у S' - $M'_k(\bar{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \bar{x})$, где $M'_k = \sup\limits_{x_{k-1}\leq x\leq \bar{x}} f(x), M''_k = \sup\limits_{\bar{x}\leq x\leq x_k} f(x)$.Тогда

$S - S' = M_k\Delta x_k - [M'_k(\bar{x} - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \bar{x})]$, где $M_k \leq M, m \leq M'_k, m \leq M''_k$.

$$S - s \leq M\Delta x_k - m[(\bar{x} - x_{k-1}) + (x_k - \bar{x})] = (M-m)\Delta x_k \leq (M-m)d.$$

Доказательство для нижних сумм аналогично.

Определение 7. Число A называется пределом верхних сумм S при $d \to 0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, что при $d < \delta$ верно $|S - A| < \varepsilon$.

$A = \lim\limits_{d\to 0} S$

Аналогично определяется предел $B = \lim\limits_{d\to 0} s$.

Основная лемма Дарбу

$I^* = \lim\limits_{d\to 0} S, I_* = \lim\limits_{d\to 0} s.$.

Доказательство.

1 случай: f(x) = c = const. S = c(b-a), I^* = c(b-a). Значит, $I^* = \lim\limits_{d\to 0} S$.

2 случай: f(x) непостоянна, а значит M > m.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. По определению I^* существует разбиение x^*_k, такое что $S^* - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть L - множество точек x^*_k, не совпдающих с a, b. l=|L|

Пусть x_k - произвольное разбиение сегмента [a, b], у которого $d < \delta = \frac{\varepsilon}{2l(M-m)}$ и S - верхняя сумма.

Возьмем разбиение $x'_k = x_k \cup L$ - измельчение разбиений x_k, x^*_k. По лемме 2:

$$0 \leq S - S' \leq (M-m)ld < \frac{\varepsilon}{2}$$

С другой стороны согласно определению I^* и св.3:

$$I^* \leq S' \leq S^*$$

$$0 \leq S' - I^* \leq S^* - I^*$$

т.к. $S^* - I^* < \frac{\varepsilon}{2}, 0 \leq S' - I^* < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$0 \leq S' - I^* + S - S' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$0 \leq S - I^* < \varepsilon$ при d$<\delta$. Следовательно $I^* = \lim\limits_{d\to 0} S$. Для нижних сумм доказательство аналогично.

Вспомогательная теорема f(x) интегрируема на [a,b] $\Leftrightarrow I_* = I^*$.

Доказательство

$\Rightarrow$:

f(x) интегрируема $\Rightarrow \exists I = \lim\limits_{d\to 0} \sigma(x_k, \xi_k) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall\xi_k$ при $d < \delta$: $|I - \sigma(x_k, \xi_k)| < \frac{\varepsilon}{4}$

Согласно св.2 $\exists\xi_k', \xi_k''$:

$$S - \sigma(x_k, \xi_k') < \frac{\varepsilon}{4}, \sigma(x_k, \xi_k'') - s < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Также по определению I верно:

$$|I - \sigma(x_k, \xi_k'')| < \frac{\varepsilon}{4}, |I - \sigma(x_k, \xi_k''| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

$$S - s = S - \sigma(x_k, \xi_k')] + [\sigma(x_k, \xi_k') - I + [I - \sigma(xi_k, \xi_k'')] + [\sigma(x_k, \xi_k'') - s] < \varepsilon.$$

т.к. $s \leq I_* \leq I^* \leq S$, то из S-s$<\varepsilon$ следует $0 \leq I_* - I^* < \varepsilon$. Т.к. верно для $\forall\varepsilon$, то $I_* = I^*$.

$\Leftarrow$:

Пусть $I^* = I_* = A$. По основной лемме Дарбу $I^* = \lim\limits_{d\to 0} S, I_* = \lim\limits_{d\to 0} s$. $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, что для любого разбиения с d$<\delta$ верно $I_* - s = A - s < \varepsilon, S - I^* = S - A, \varepsilon$.

По св. 1 $s \leq \sigma \leq S$

$$A - \varepsilon < s \leq \sigma \leq S < A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \sigma < A + \varepsilon$$

$$|A - \sigma| < \varepsilon$$

Значит, по определению предела $A = \lim\limits_{d\to 0} \sigma$. Значит f(x) интегрируема на [a,b].

Основная теорема. Ограниченная на [a,b] функция f(x) интегрируема на сегменте $\Leftrightarrow$ для $\forall\varepsilon\ \exists x_k$ сегмента [a,b], для которого $S - s < \varepsilon$.

Доказательство

$\Rightarrow$: см. $\Rightarrow$ вспомогательной теоремы.

$\Leftarrow$: Пусть для $\forall\varepsilon\ \exists x_k$ сегмента [a,b], для которого $S - s < \varepsilon$. Т.к. $s \leq \sigma \leq S$, то $I^* = I_*$. Значит, по вспомогательной теореме получаем, что функция интегрируема.

Теорема 1 Непрерывные на [a,b] функции интегрируемы на этом сегменте по Риману.

Доказательство. Пусть f(x)$\in C[a, b] \Rightarrow$ f(x) равномерно непрерывна на [a,b]. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для него $\exists\delta$ такой, что для $\forall\xi', \xi''$, для которых $|\xi' - \xi''| < \delta$, верно $|d(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Возьмем такое разбиение x_k, что $d < \delta$. Значит, для $\forall$сегмента$[x_{k-1}, x_k]$ верно $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

$$S - s = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon.$$

$$S - s < \varepsilon.$$

Значит по основной теореме функция интегрируема.
Теорема 2. Монотонная на [a,b] функция f(x) интегрируема по Риману на этом сегменте.
Доказательство
Пусть f(x) неубывающая функция. Зафиксируем ε и возьмем разбиение такое, что $d < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.
$S - s = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)$.
т.к. функция монотонная, $\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = f(b) - f(a)$
Значит $S - s < \varepsilon$, а значит функция интегрируема.
Свойства интегриируемых функций
Свойство 1. Пусть функция f(x) интегрируема по Риману на [a,b], M и m - ее точные верхняя и нижняя грани на [a,b]. Пусть далее, функция $\varphi(x)$ определена на сегменте [m, M] и удовлетворяет условию Липшица: существует $C \geq 0$ такое, что для $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$$

Тогда сложная функция $h = \varphi(f(x))$ интегрируема по Риману на [a,b]. *Доказательство.*
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Т.к. f(x) интегрируема на [a,b] $\Rightarrow \exists x_k : S - s < \frac{\varepsilon}{C}$.
Пусть $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $m*_k = \inf\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} h(x), M*_k = \sup\limits_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} h(x)$
x,y - произвольные точки из $[x_{k-1}, x_k]$

$$h(x) - h(y) \leq |h(x) - h(y)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| \leq C|f(x) - f(y)| \leq C(M_k - m_k)$$

Т.к. x,y - произвольные точки из $[x_{k-1}, x_k]$, то $M *_k - m_* k \leq C(M_k - m_k)$.

$$S * - s* = \sum_{k=1}^{n} M *_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m *_k \Delta x_k \leq c\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \leq C(S - s) < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

$$S * - s* < \varepsilon.$$

По основной теореме h(x) интегрируема на [a,b].
Следствие. $f^2(x)$ интегрируема на [a,b], если f(x) интегрируема на сегменте.
Доказательство. Проверим условие Липшица функции $\phi(t) = t^2$.
$|t_1^2 - t_2^2| = |t_2 - t_1| \cdot |t_2 + t_1| \leq C|t_2 - t_1|$, где C=max(2|m|, 2|M|).
Свойство 2. Пусть функции f(x) интегрируемы на сегменте [a,b]. Тогда функции f(x)±g(x) интегрируемы на сегменте, причем $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x) \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.
Доказательство.
$\sum\limits_{k=1}^{n}[f(\xi_k) \pm g(\xi_k)]\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \pm \sum\limits_{k=}^{n} g(\xi_k)$
Т.к существует предел правой части, то существует предел и левой части.

Свойство 3. Если f(x) интегрируема на [a,b], то функция cf(x), где c - константа, также интегрируема на сегменте, причем $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$

Доказательство.

$\sum\limits_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Следствие Линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ интегрируемых функций $f_i(x)$ интегрируема.

Свойство 4. Пусть f(x), g(x) интегрируемы на [a,b], тогда f(x)g(x) тоже интегрируема на сегменте.

Доказательство.

$$4f(x)g(x) = [f(x)+g(x)]^2 - [f(x)-g(x)]^2$$

Применим св. 2, 3 и следствие к св.1 и получим интегрируемость f(x)g(x).

Свойство 5. Если f(x) интегрируема на сегменте [a,b]. Тогда f(x) интегрируема на любом [c,d]⊂[a,b].

Доказательство

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для него по основной теореме $\exists x_k$: $S - s < \varepsilon$.

$x'_k = x_k \cup c, d$. По св. 3 сумм Дарбу об измельчении $S' - s' < \varepsilon$. Рассмотрим разбиение отрезка [c,d] $\bar{x}_k$, состоящее из точек разбиения x'_k, принадлежащих отрезку [c,d].

$$\bar{S} - \bar{s} \leq S' - s' < \varepsilon.$$

А значит f(x) интегрируема на [c,d].

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$$

Аддитивность интеграла Римана.

Если f(x) интегрируема на [a,c] и [c,b], то она интегрируема на [a,b], причем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Доказательство.

1 случай: a<c<b

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.Для него существуют разбиения x'_k, x''_k, такие что $S' - s', \frac{\varepsilon}{2}, S'' - s'', \frac{\varepsilon}{2}$.

$x_k = x'_k \cup x''_k$

$S - s \leq S' + S'' - s' - s'' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Значит f(x) интегрируема на [a,b].

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum^{\prime} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum^{\prime\prime} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где $\sum'$ берется по частичным сегментам из [a,c], а $\sum''$ - из [c,b]. Перейдем к пределу и получим:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

2 случай: c не лежит в [a,b]. Без ограничения общности примем c<a<b. По свойству 5 f(x) интегрируема на [a,b] и согласно формуле из 1 случая:

$$\int\limits_c^a f(x)dx + \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_c^b f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

Дополнения

1.Ограниченная на сегменте [a,b] функция f(x), имеющая лишь конечное число точек разрыва, интегрируема на этом сегменте. Кусочно непрерывная на данном сегменте функция интегрируема на этом сегменте. 2. Если поменять значение функции в конечном числе точек, то это не отразится ни на существовании, ни на величине интеграла. 3. Если f(x)≥0 для $\forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

4. Если $f(x) \leq g(x)$ на [a,b], то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.

5. Если f(x) интегрируема на [a,b], то |f(x)| интегрируема на [a,b] и

$$|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

6.**Первая формула среднего значения** Если f(x), g(x) интегрируемы на [a,b], g(x)≥ $0(g(x) \leq 0)$ на [a,b], $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, то найдется число $\mu : m \leq \mu \leq M$, такое что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$$

Если f(x) непрерывна, то

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx$$

Если g(x)=≡1, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

7. **Вторая формула среднего значения** Пусть f(x) интегрируема на [a,b], а g(x) монотонна на [a,b]. Тогда $\exists\xi$:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b) \int\limits_\xi^b f(x)dx.$$