

Билет 17.  
Задача Коши. Теорема о существовании и  
единственности.

Дифференциальным уравнением называется соотношение, содержащее независимые переменные, искомые функции этих переменных и производные этих функций.

Если неизвестные функции, входящие в уравнение зависят от одной переменной, то такое уравнение называют обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же неизвестная функция зависит от нескольких переменных и содержит частные производные, то его называют дифференциальным уравнением с частными производными.

**Определение 1.** Обыкновенным дифференциальным уравнением  $n$ -ного порядка называется соотношение вида

$$F\left(x, y(x), \frac{\partial x}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^n x}{\partial^n y}\right) = 0. \quad (1.1)$$

**Определение 2.** Наивысший порядок производной, входящей в уравнение называется порядком дифференциального уравнения.

**Определение 3.** Функция  $f = \varphi(x)$  называется решением уравнения (1.1), если при подстановке ее в уравнение (1.1) оно обращается в тождество.

Дифференциальные уравнения имеют бесконечно много решений. Чтобы выделить единственное решение, нужно задавать дополнительные условия. Если дополнительные условия задаются в 1-ой точке, то они называются начальными условиями или условиями Коши. Если дополнительные условия задаются более чем в 1-ой точке, то они называются граничными или краевыми условиями.

Дифференциальные уравнения вместе с начальными условиями называют задачей Коши или начальной задачей. Дифференциальные уравнения вместе с граничными условиями называют краевой задачей.

**Определение 4.** Функция  $f = \varphi(x, c_1, \dots, c_n)$ , где  $c_1, \dots, c_n$  — произвольные постоянные, называется общим решением дифференциального уравнения (1.1), если все значения постоянных  $c_1, \dots, c_n$  удовлетворяют уравнению и при соответствующем выборе этих постоянных из него можно получить любое решение уравнения (1.1).

**Определение 5.** Общее решение, которое имеет неявный вид

$$\Phi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0,$$

называется общим интегралом.

Частное решение — общее решение при заданных константах.

Частный интеграл — общий интеграл при заданных константах.

**Определение 6.** Множество, каждый элемент которого входит в него вместе с некоторой окрестностью называется открытым множеством.

**Теорема.**

Пусть

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

— дифференциальное уравнение. Будем предполагать, что функция  $f(t, x)$  задана на некотором открытом множестве  $\Gamma$  плоскости  $P$  переменных  $t, x$ . Относительно функции  $f$  предположим, что и она сама и её частная производная  $\frac{\partial f}{\partial x}$  являются непрерывными на всём открытом множестве  $\Gamma$ . Тогда:

1) для всякой точки  $(t_0, x_0)$  множества  $\Gamma$  найдётся решение  $x = \varphi(t)$  уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$\varphi(t_0) = x_0;$$

2) если два решения  $x = \psi(t)$  и  $x = \chi(t)$  уравнения (1) совпадают хотя бы для одного значения  $t = t_0$ , т.е. если

$$\psi(t_0) = \chi(t_0),$$

то эти решения тождественно равны для всех тех значений  $t$ , для которых они оба определены.

Докажем теорему методом последовательных приближений Пикара, но для начала сформулируем и докажем несколько вспомогательных идей.

Основные идеи доказательства:

Первым шагом доказательства является переход от дифференциального уравнения к интегральному.

А) Пусть  $x = \varphi(t)$  — некоторое решение уравнения (1), определённое на интервале  $r_1 < t < r_2$  так, что выполнено тождество

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{2}$$

и пусть

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad (3)$$

— некоторое начальное условие, которому это решение удовлетворяет. Оказывается, что тогда для функции  $\varphi(t)$  на всём интервале  $r_1 < t < r_2$  выполнено интегральное тождество

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \quad (4)$$

И обратно, если для некоторой непрерывной функции  $\varphi(t)$  на интервале  $r_1 < t < r_2$  выполнено тождество (4), то функция  $x = \varphi(t)$  дифференцируема, является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальному условию (3). Кратко говоря, интегральное уравнение (4) эквивалентно дифференциальному уравнению (2) вместе с начальным условием (3).

Докажем это.  $\Leftarrow$

Допустим сначала, что выполнено соотношение (4). Заменяя в нём переменную  $t$  её значением  $t_0$ , получаем:  $\varphi(t_0) = x_0$ , что есть начальное условие (3). Далее, так как правая часть тождества (4) очевидно дифференцируема по  $t$ , дифференцируема и его левая часть. В результате дифференцирования получаем тождество (2).

$\Rightarrow$

Пусть выполнены соотношения (2) и (3). Интегрируя (2) в пределах от  $t_0$  до  $t$ , получаем:

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

где  $\varphi(t_0) = x_0$  в силу (3).

Таким образом А) доказано. ■

Теперь введём некоторые обозначения, используемые для доказательства

Б) Пусть  $x = \varphi(t)$  — такая непрерывная функция, определённая на некотором отрезке  $r_1 \leq t \leq r_2$ , что её график целиком расположен в открытом множестве  $\Gamma$ , и  $t_0$  — некоторая точка отрезка  $r_1 \leq t \leq r_2$ . Тогда пользуясь правой частью тождества (4), можно функции  $\varphi(t)$  поставить в соответствие функцию  $\varphi^*(t)$ , определённую на том же отрезке при помощи равенства

$$\varphi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \quad (5)$$

Таким образом, эту правую часть тождества (4) можно рассматривать как оператор, ставящий в соответствие функции  $\varphi(t)$  функцию  $\varphi^*(t)$ . Обозначая этот оператор одной буквой  $A$ , мы запишем соотношение (5) в виде

$$\varphi^*(t) = A\varphi \quad (6).$$

А интегральное уравнение (4) можно записать в виде:

$$\varphi(t) = A\varphi \quad (7).$$

В) Пусть  $\varphi(t)$  — некоторая непрерывная функция, определённая на отрезке  $r_1 \leq t \leq r_2$ . Нормой  $\|\varphi\|$  этой функции называется максимум её модуля

$$\|\varphi\| = \max_{r_1 \leq t \leq r_2} |\varphi(t)|.$$

Если  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$  — две непрерывные функции, заданные на отрезке  $r_1 \leq t \leq r_2$ , то норма  $\|\psi - \chi\|$  их разности  $\psi(t) - \chi(t)$  является неотрицательным числом, оценивающим насколько сильно отличаются эти функции друг от друга. Если это число мало, то функции  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$  "близки" друг к другу. Равенство  $\|\psi - \chi\| = 0$  имеет место тогда и только тогда, когда функции  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$  тождественно совпадают.

Теперь с помощью понятия нормы сформулируем условие равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Пусть

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_i(t), \dots \quad (8)$$

— последовательность непрерывных функций, заданных на отрезке  $r_1 \leq t \leq r_2$ . Последовательность (8) равномерно сходится к функции  $\varphi$ , определённой на том же отрезке, если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0.$$

Для того, чтобы последовательность (8) равномерно сходилась, достаточно, чтобы имели место неравенства

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leq a_i,$$

где числа  $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots$  образуют сходящийся ряд.

### Доказательство теоремы

Начальные значения  $t_0$  и  $x_0$  искомого решения уравнения (1) являются координатами точки  $t_0, x_0$ , лежащей в множестве  $\Gamma$ . Выберем какой-либо прямоугольник  $\Pi$  с центром в этой точке и сторонами, параллельными осям, который целиком вместе со своей границей содержится в множестве  $\Gamma$ . Длину горизонтальной (параллельной оси  $t$ ) стороны прямоугольника обозначим через  $2q$ , а длину вертикальной — через  $2a$ . Таким образом точка  $(t, x)$  тогда и только тогда принадлежит прямоугольнику  $\Pi$ , когда выполнены неравенства

$$|t - t_0| \leq q, \quad |x - x_0| \leq a. \quad (9)$$

Так как прямоугольник  $\Pi$  есть замкнутое множество, содержащееся в  $\Gamma$ , то непрерывные на нём функции  $f(t, x)$  и  $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$  ограничены, и потому существуют такие положительные числа  $M$  и  $K$ , что для  $t$  и  $x$ , удовлетворяющих условиям (9), выполнены неравенства

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right| \leq K. \quad (10)$$

Наряду с прямоугольником  $\Pi$  будем рассматривать более "узкий" прямоугольник  $\Pi_r$ , определяемый неравенствами

$$|t - t_0| \leq r, \quad |x - x_0| \leq a, \quad (11)$$

где

$$r \leq q.$$

Более точно число  $r$  определим далее.

Обозначим через  $\Omega_r$  семейство всех непрерывных функций, заданный на отрезке  $|t - t_0| \leq r$ , графики которых проходят в прямоугольнике  $\Pi_r$ . Таким образом, функция  $\varphi$ , определённая на отрезке  $|t - t_0| \leq r$ , тогда и только тогда принадлежит семейству  $\Omega_r$ , когда для любого  $t$ , принадлежащего этому отрезку, выполняется неравенство

$$|\varphi(t) - x_0| \leq a. \quad (12)$$

Постараемся теперь выбрать число  $r$  таким образом, чтобы были выполнены следующие условия:

- а) Если  $\varphi(t) \in \Omega_r$ , то функция  $\varphi^*(t) = A\varphi$  также принадлежит семейству  $\Omega_r$ .
- б)  $\exists k, 0 < k < 1$ , что  $\forall \psi(t), \chi(t) \in \Omega_r$  :

$$\| A\psi - A\chi \| \leq k \| \psi - \chi \|. \quad (13)$$

Рассмотрим условие а). Для того, чтобы функция  $\varphi^*(t) = A\varphi$  принадлежала семейству  $\Omega_r$ , необходимо и достаточно, чтобы при  $|t - t_0| \leq r$  было выполнено неравенство

$$|\varphi^*(t) - x_0| \leq a.$$

В силу (5) и (10) мы имеем:

$$|\varphi^*(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq Mr.$$

Отсюда видно, что при

$$r \leq \frac{a}{M} \quad (14)$$

условие а) выполнено.

Рассмотрим теперь условие б). Мы имеем:

$$\psi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \psi(\tau)) d\tau,$$

$$\chi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \chi(\tau)) d\tau.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$|\psi^* - \chi^*| = \left| \int_{t_0}^t (f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))| d\tau \right|. \quad (15)$$

Оценим теперь последнее подынтегральное выражение, пользуясь формулой Лагранжа и вторым из неравенств (10):

$$|f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))| = \left| \frac{\partial f(\tau, \theta)}{\partial x} (\psi(\tau) - \chi(\tau)) \right| \leq K * |\psi(\tau) - \chi(\tau)|; \quad (16)$$

Здесь  $\tau$  — число, заключённое между  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$  и, следовательно, удовлетворяющее неравенству  $|\theta - x_0| \leq a$ . Из (15) и (16) следует:

$$\|A\psi - A\chi\| = \|\psi^* - \chi^*\| \leq Kr \|\psi - \chi\|.$$

Таким образом, условие б) выполнено, если число  $k = Kr$  меньше единицы, т.е. если

$$r < \frac{1}{K} \quad (17)$$

Итак, если число  $r$  удовлетворяет неравенствам (11), (14) и (17), то для семейства  $\Omega_r$  выполнены условия а) и б). В дальнейшем будем считать число  $r$  выбранным таким образом, что неравенства (11), (14) и (17) для него выполнены.

Построим теперь последовательность

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots \quad (18)$$

функций, определённых на отрезке  $|t - t_0| \leq r$ , положив:

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \quad (19)$$

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Так как функция (19) принадлежит семейству  $\Omega_r$ , то и все функции последовательности (18) принадлежат этому же семейству (из условия а)). Далее, мы имеем (из (12)):

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| = \max_{|t-t_0| \leq r} |\varphi_1 - x_0| \leq a.$$

В силу (13) получаем:

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| = \|A\varphi_i - A\varphi_{i-1}\| \leq k \|\varphi_i - \varphi_{i-1}\|,$$

откуда

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leq ak^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, в силу В), последовательность (18) равномерно сходится на отрезке  $|t - t_0| \leq r$  к некоторой непрерывной функции  $\varphi$ . Так как все функции последовательности (18) принадлежат семейству  $\Omega_r$ , то и функция  $\varphi \in \Omega_r$  (из (12)). Покажем, что функция  $\varphi$  удовлетворяет уравнению (7). Для этого заметим, что последовательность

$$A\varphi_0, A\varphi_1, \dots, A\varphi_i, \dots$$

равномерно сходится к функции  $A\varphi$ ; действительно, мы имеем:

$$\|A\varphi - A\varphi_i\| \leq k \|\varphi - \varphi_i\|.$$

Переходя в соотношении (20) к пределу при  $i \rightarrow \infty$ , получаем:

$$\varphi = A\varphi.$$

Итак, существование решения  $x = \varphi(t)$  уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (3), доказано; при этом установлено, что решение  $x = \varphi(t)$  определено на интервале  $|t - t_0| < r$ , где  $r$  — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам (11), (14) и (17).

Перейдём теперь к доказательству единственности. Пусть  $x = \psi(t)$  и  $x = \chi(t)$  — два решения уравнения (1) с общими начальными значениями  $t_0, x_0$  и  $r_1 < t < r_2$  — интервал, являющийся пересечением интервалов существования решений  $\psi$  и  $\chi$ ; очевидно, что  $r_1 < t_0 < r_2$ . Покажем, что если решения  $x = \psi(t)$  и  $x = \chi(t)$  совпадают в некоторой точке  $t_1$  интервала  $r_1 < t < r_2$ , то они совпадают и на некотором интервале  $|t - t_1| < r$ , где  $r$  достаточно малое положительное число. Положим  $x_1 = \psi(t_1) = \chi(t_1)$ ; тогда величины  $t_1, x_1$  могут быть приняты за начальные значения обоих решений  $x = \psi(t)$  и  $x = \chi(t)$ . В этом смысле точка  $(t_1, x_1)$  ничем не отличается от точки  $(t_0, x_0)$ , и поэтому мы сохраним за точкой  $(t_1, x_1)$  обозначение  $(t_0, x_0)$ . Это позволяет нам сохранить другие прежние обозначения. Переходя от дифференциального уравнения (1) к интегральному (4), мы получаем для обеих функций  $\psi$  и  $\chi$  интегральные равенства, которые могут быть записаны в виде

$$\psi = A\psi, \quad \chi = A\chi. \quad (21)$$

Выберем теперь в открытом множестве  $\Gamma$  прямоугольник  $\Pi$  с центром в точке  $(t_0, x_0)$ , а затем прямоугольник  $\Pi_r$  таким образом, чтобы число  $r$  кроме неравенств (11), (14) и (17) удовлетворяло ещё тому условию, что при  $|t - t_0| \leq r$  функции  $\psi$  и  $\chi$  определены и удовлетворяют неравенствам

$$|\psi(t) - x_0| \leq a, \quad |\chi(t) - x_0| \leq a.$$

Это возможно, так как функции  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$  непрерывны. Тогда функции  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$ , рассматриваемые на отрезке  $|t - t_0| \leq r$ , входят в семейство  $\Omega_r$ , и, следовательно, в силу неравенства (13) и соотношений (21) получаем:

$$\|\psi - \chi\| = \|A\psi - A\chi\| \leq k \|\psi - \chi\|,$$

а это возможно только при  $\|\psi - \chi\| = 0$ , т.е. когда функции совпадают на отрезке  $|t - t_0| \leq r$ .

Докажем теперь, что  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$  совпадают на всём интервале  $r_1 < t < r_2$ . Пусть не так, тогда  $\exists$  точка  $t^*$  интервала  $r_1 < t < r_2$ , для которой  $\psi(t^*) \neq \chi(t^*)$ . Ясно, что  $t^* \neq t_0$ . Для определённости будем считать, что  $t^* > t_0$ .

Обозначим через  $N$  множество всех тех точек  $t$  отрезка  $t_0 \leq t \leq t^*$ , для которых  $\psi(t) = \chi(t)$ , и докажем, что множество  $N$  замкнуто. В самом деле, пусть  $\tau_1, \tau_2, \dots$  — последовательность точек множества  $N$ , сходящаяся к некоторой точке  $\tau$ . Тогда

$$\psi(\tau_1) = \chi(\tau_1),$$

и потому, в силу непрерывности функций  $\psi$  и  $\chi$ :

$$\psi(\tau) = \lim_{i \rightarrow \infty} \psi(\tau_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \chi(\tau_i) = \chi(\tau),$$

т.е. точка  $\tau$  также принадлежит множеству  $N$ .

Обозначим через  $t_1$  точную верхнюю грань множества  $N$ . Так как  $N$  замкнуто, то  $t_1$  принадлежит этому множеству, т.е.  $\psi(t_1) = \chi(t_1)$ ; следовательно,  $t_1 < t^*$ . Но тогда, в силу ранее доказанного, функции  $\psi(t)$  и  $\chi(t)$  должны совпадать на некотором интервале  $|t - t_1| < r$ , и точка  $t_1$  не может быть точной верхней гранью множества  $N$ . Пришли к противоречию.

Теорема доказана. ■