Доверительные интервалы для неизвестных параметров нормально распределённой генеральной совокупности

Аннотация

Точечная оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ является приближенным значением независимо от свойства этой оценки. Чтобы получить представление о точности и надежности оценки $\tilde{\theta}_n$ параметра θ используют интервальную оценку.

Ключевые слова: выборка, квантиль, параметрическая статистическая модель, центральная статистика, выборочное среднее, выборочная дисперсия, нормальное распределение, распределение хи-квадрат, распределение Стьюдента, теорема Фишера.

1 Основные определения

1.1 Теория вероятностей

Определение. *Случайной величиной (СВ)* ξ называется отображение пространства элементарных событий во множество вещественных чисел, т. е. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Определение. Система СВ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется *многомерной (n-мерной) СВ* или *случайным вектором* $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Определение. Функцию $F(x) = F_\xi(x) := P(\xi < x)$ (вероятность того, что СВ ξ примет значение, меньшее x) называют *функцией распределения (ФР)* СВ ξ.

Определение. Функцию $f(x) = f_\xi(x) := F'(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ называют *плотностью распределения (вероятности)* непрерывной СВ ξ.

Определение. СВ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются *независимыми*, если для любой группы $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}$ этих величин имеет место равенство

$$P(\xi_{i_1} < x_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k} < x_{i_k}) = P(\xi_{i_1} < x_{i_1}) \ldots P(\xi_{i_k} < x_{i_k})$$

при произвольных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ и любом k, $1 \leq k \leq n$.

Случайный вектор есть функция элементарных событий ω:

$$f(\omega) = (\xi_1, \ldots, \xi_n),$$

то есть каждому ω ставится в соответствие несколько действительных чисел $x_1, \ldots, x_n$, которые приняли СВ $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в результате испытания.

В этом случае вектор $x := (x_1, \dots, x_n)$ называется *реализацией СВ* ξ.
Определение. *Начальный момент* k-го порядка СВ ξ определяется как

$$\nu_k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, \text{ если } \xi \text{ - непрерывная;} \\ \sum_{j=1}^{n} x_i^k p_i, \text{ если } \xi \text{ - дискретная.} \end{cases}$$

Примечание. Начальный момент 1-го порядка есть *математическое ожидание* $\nu_1 =: M(\xi)$.

Определение. *Центральный момент* k-го порядка СВ ξ определяется как

$$\mu_k = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(\xi))^k f(x)dx, \text{ если } \xi \text{ - непрерывная;} \\ \sum_{j=1}^{n} (x_i - M(\xi))^k p_i, \text{ если } \xi \text{ - дискретная.} \end{cases}$$

Примечание. Центральный момент 2-го порядка есть *дисперсия* $\mu_2 =: D(\xi)$.

Определение. *Квантилью уровня* p ФР $F(x)$ СВ ξ называется минимальное значение x_p, при котором $F(x)$ не меньше значения $p \in (0, 1)$, то есть

$$x_p := min\{x : F(x) \geq p\}, \, p \in (0, 1).$$

1.2 Математическая статистика

Определение. *Однородной выборкой (выборкой) объема* n при $n \geq 1$ называется случайный вектор $\zeta_n := (\xi_1, \dots, \xi_n)$, компоненты которого ξ_i, $i = 1, \dots, n$, называемые *элементами выборки*, являются независимыми СВ с одной и той же ФР $F(x)$.

Определение. *Реализацией выборки* называется неслучайный вектор $z_n := (x_1, \dots, x_n)$, компонентами которого являются реализации соответствующих элементов выборки ξ_i, $i = 1, \dots, n$.

Замечание. Из двух определений вытекает, что реализацию выборки z_n можно также рассматривать как последовательность $x_1, \dots, x_n$ из n реализаций одной и той же СВ ξ, полученных в серии из n независимых опытов, проводимых в одинаковых условиях. Поэтому можно говорить, что выборка ζ_n *порождена* наблюдаемой СВ ξ, имеющей распределение $F(x)$.

Определение. Если компоненты вектора ζ_n независимы, но их распределения $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$ различны, то такую выборку называют *неоднородной*.

Определение. Множество S всех реализаций выборки ζ_n называется *выборочным пространством.*

Определение. Вся подлежащая изучению совокупность объектов (наблюдений) называется *генеральной совокупностью.*

Определение. Пара $(S, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ – некоторый класс (семейство) распределений, называется *статистической моделью* описания серии опытов, порождающих выборку ζ_n.

Определение. Если распределения $F_{\zeta_n}(z_n, \theta)$ из класса $\mathcal{F}$ определены с точностью до некоторого векторного параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$, то такая статистическая модель называется *параметрической* и обозначается через $(S_\theta, F_{\zeta_n}(z_n, \theta))$.

Определение. СВ $\zeta := \varphi(\zeta_n)$, где $\varphi(\zeta_n)$ – произвольная функция, определенная на выборочном простарнстве S и не зависящая от распределения $F_{\zeta_n}(z_n, \theta)$, называется *статистикой.*

Определение. Для выборки $\zeta_n := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, порожденной СВ ξ с ФР $F(x)$, *выборочным средним* СВ ξ является

$$\hat{m}_\xi := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Определение. Для выборки $\zeta_n := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, порожденной СВ ξ с ФР $F(x)$, *выборочной дисперсией* СВ ξ является

$$\hat{d}_\xi := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \hat{m}_\xi)^2.$$

1.3 Распределения

Определение. Непрерывная СВ ξ имеет *нормальный закон распределения* с параметрами a и σ^2, если

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Обозначение. СВ ξ, имеющую нормальный закон распределения, обозначим через $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.

Свойства. Если $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, то $M(\xi) = a$ и $D(\xi) = \sigma^2$, а также

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = 0.5 + \Phi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \tag{1.1}$$

$$\text{где } \Phi_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \textit{функция Лапласа}. \tag{1.2}$$

Определение. Пусть независимые СВ $\xi_k \sim N(0,1)$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда СВ

$$\zeta_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$$

имеет *распределение хи-квадрат* (χ^2*-распределение*) *с* n *степенями свободы.*

Обозначение. $\zeta_n \sim \chi^2(n)$.

Свойства. Если $\zeta_n \sim \chi^2(n)$, то $M(\xi) = n$ и $D(\xi) = 2n$, а также

$$f_{\zeta_n}(x, n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{(n/2)-1} e^{-x/2} \text{ при x} > 0, \tag{1.3}$$

$$\text{где } \Gamma(m) := \int_0^{+\infty} y^{m-1} e^{-y} dy - \textit{гамма-функция}. \tag{1.4}$$

Определение. Пусть $\xi \sim N(0,1)$ и $\zeta_n \sim \chi^2(n)$, где ξ и ζ_n – независимы. Тогда СВ

$$\tau_n := \frac{\xi}{\sqrt{\zeta_n / n}}$$

имеет *распределение Стьюдента с* n *степенями свободы.*

Обозначение. $\tau_n \sim S(n)$.

Свойства. Если $\tau_n \sim S(n)$, то

$$M(\tau_n) = 0 \text{ при } n > 0,$$

$$D(\tau_n) = \frac{n}{n-2} \text{ при } n > 2,$$

$$f_{\tau_n}(x, n) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi\Gamma(\frac{n}{2})}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right). \tag{1.5}$$

2 Интервальные оценки

2.1 Основные понятия

Пусть имеется параметрическая статистическая модель $(S_\theta, F_{\zeta_n}(z_n, \theta))$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, и по выборке $\zeta_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, соответствуюущей распределению $F(x, \theta)$ наблюдаемой СВ ξ, требуется определить неизвестный параметр θ.

Определение. Интервал $[\theta_1(\zeta_n), \theta_2(\zeta_n)]$ со случайными концами, накрывающий с вероятностью $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$, неизвестный параметр θ, то есть

$$P(\theta_1(\zeta_n) \leq \theta \leq \theta_2(\zeta_n)) = 1 - \alpha,$$

называется *доверительным интервалом* или *интервальной оценкой уровня надежности (доверия)* $1-\alpha$ параметра θ.

Определение. Доверительный интервал $[\theta_1(\zeta_n), \theta_2(\zeta_n)]$ называется *центральным*, если

$$P(\theta \leq \theta_2(\zeta_n)) = 1 - \frac{\alpha}{2} \text{ и } P(\theta \geq \theta_1(\zeta_n)) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Определение. Функция $G(\zeta_n, \theta)$ случайной выборки ζ_n, такая, что ее распределение не зависит от параметра θ и при любом значении z_n функция $G(\zeta_n, \theta)$ является непрерывной и монотонной по θ, называется *центральной статистикой* для параметра θ.

Зная распределение центральной статистики, можно найти такие числа g_1 и g_2, удовлетворяющие условию

$$P(g_1 \leq G(\zeta_n, \theta) \leq g_2) = 1 - \alpha.$$

Тогда границы доверительного интервала могут быть найдены, если разрешить следующие неравенства:

$$g_1 \leq G(\zeta_n, \theta) \leq g_2.$$

Теорема 1 (Теорема Фишера)**.** *Пусть $\zeta_n := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – выборка, порожденная СВ $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, а $\hat{m}_\xi$ и $\hat{d}_\xi$ – выборочные среднее и дисперсия. Тогда*

1. *СВ $\hat{M}_\xi := (\hat{m}_\xi - a)/(\sigma/\sqrt{n})$ имеет распределение $N(0,1)$.*
2. *СВ $\hat{D}_\xi := n\hat{d}_\xi/\sigma^2$ имеет распределение $\chi^2(n-1)$.*
3. *СВ $\tilde{M}_\xi := (\hat{m}_\xi - a)\sqrt{(n-1)/\hat{d}_\xi}$ имеет распределение $S(n-1)$.*
4. *СВ $\hat{m}_\xi$ и $\hat{d}_\xi$ независимы.*

2.2 Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания при известной дисперсии

По выборке ζ_n из нормального распределения требуется построить доверительный интервал для неизвестного a при известной σ^2.

◀ Из теоремы Фишера следует, что $\hat{M}_\xi \sim N(0,1)$, которое не зависит от a, и

$$G(\zeta_n, a) := \hat{M}_\xi = \frac{\hat{m}_\xi - a}{\sigma/\sqrt{n}}$$

является непрерывной и убывающей по a. Значит, $\hat{M}_\xi$ является центральной статистикой. Поэтому доверительный интервал для a можно найти, если разрешить относительно a двойное неравенство

$$g_1 \leq \frac{\hat{m}_\xi - a}{\sigma/\sqrt{n}} \leq g_2,$$

где величины g_1 и g_2 подобраны таким образом, что это неравенство выполняется с вероятностью $1-\alpha$. Учитывая симметрию относительно оси ординат плотности стандартного нормального распределения, интервал имеет минимальную длину, если $g_1 = -g_2$, и при этом он оказывается центральным. Таким образом, получим

$$\hat{m}_\xi - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\gamma \leq a \leq \hat{m}_\xi + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\gamma,$$

где u_γ – квантиль уровня $\gamma := 1 - \frac{\alpha}{2}$ стандартного нормального распределения. ▶

2.3 Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания при неизвестной дисперсии

По выборке ζ_n из нормального распределения требуется построить доверительный интервал для неизвестного a при неизвестной σ^2.

◀ Используем утверждение 3) теоремы Фишера и выберем в качестве центральной статистики $\tilde{M}_\xi$, то есть

$$G(\zeta_n, a) := \tilde{M}_\xi = \frac{\hat{m}_\xi - a}{\sqrt{\hat{d}_\xi/(n-1)}}.$$

Доверительный интервал для a можно найти, если разрешить относительно a двойное неравенство

$$g_1 \le \frac{\hat{m}_\xi - a}{\sqrt{\hat{d}_\xi/(n-1)}} \le g_2.$$

Получим (учитывая симметрию относительно оси ординат плотности распределения Стьюдента)

$$\hat{m}_\xi - \sqrt{\frac{\hat{d}_\xi}{n-1}} t_\gamma \le a \le \hat{m}_\xi + \sqrt{\frac{\hat{d}_\xi}{n-1}} t_\gamma,$$

где $t_\gamma = t_\gamma(n-1)$ – квантиль уровня $\gamma := 1 - \frac{\alpha}{2}$ распределения Стьюдента $S(n-1)$. ►

2.4 Доверительный интервал для неизвестной дисперсии при неизвестном математическом ожидании

По выборке ζ_n из нормального распределения требуется построить доверительный интервал для неизвестной σ^2 при неизвестном a.

◄ Используем утверждение 2) теоремы Фишера и выберем в качестве центральной статистики $\hat{D}_\xi$, то есть

$$G(\zeta_n, a) := \hat{D}_\xi = \frac{n\hat{d}_\xi}{\sigma^2}.$$

Доверительный интервал для σ^2 можно найти, если разрешить относительно σ^2 двойное неравенство

$$g_1 \le \frac{n\hat{d}_\xi}{\sigma^2} \le g_2.$$

Получим

$$\frac{n\hat{d}_\xi}{x_\gamma} \le \sigma^2 \le \frac{n\hat{d}_\xi}{x_{1-\gamma}},$$

где x_γ и $x_{1-\gamma}$ – квантили уровней $\gamma := 1 - \frac{\alpha}{2}$ и $1 - \gamma = \frac{\alpha}{2}$ распределения $\chi^2(n-1)$. ►