Филиал Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова в г. Ташкенте

Адилов Санжар

Понятие плоского и планарного графа. Формула Эйлера. Непланарность K_5 и $K_{3,3}$.

Ташкент 2018

Определение. *Графом* G называется пара (V, E), где V – конечное непустое множество и E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы V называются *вершинами* графа, элементы E – *ребрами.*

Определение. *Плоским графом* называется изображение графа на плоскости, причем вершинам графа сопоставлены точки на плоскости, а ребрам – кусочно гладкие линии, соединяющие соответствующие вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме концевых вершин.

Определение. *Гранью* называется область, ограниченная ребрами в плоском графе и не содержащая внутри себя вершин и ребер графа. Одна из граней не ограничена и называется *внешней* гранью, а остальные – *внутренними* гранями. *Границей грани* будем считать множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани.

Определение. Граф называется *планарным*, если он представим в виде плоского графа.

Вспомогательное определение. Максимальный связный подграф в G называется *компонентой связности* графа G.

Вспомогательное определение. $G' \subseteq G$ является *остовным подграфом* в G, если $V' = V$.

Обозначение. K_5 – полный граф из 5 вершин, то есть между двумя любыми вершинами из множества вершин $V(K_5)$ существует ребро.

Обозначение. $K_{3,3}$ – полный двудольный граф, то есть множество вершин $V(K_{3,3})$ разбито на 2 класса по 3 вершины и каждые две вершины из разных классов соединены ребром, а вершины из одного и того же класса не соединены.

Примечание. Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Лемма 1. *В любом дереве T с n вершинами количество ребер равно $n-1$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ тривиально. Пусть $n > 1$, $e \in E(T)$. В T нет циклов $\Rightarrow T - e$ имеет ровно две компоненты T_1 и T_2, каждая из которых есть дерево. Пусть T_i содержит n_i вершин и m_i ребер, $i = 1, 2$. По индуктивному предположению $m_i = n_i - 1$. Далее имеем:
$m = m_1 + m_2 + 1 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 1 = (n_1 + n_2) - 2 + 1 = n - 1.$ $\square$

Теорема 1 (Формула Эйлера)**.** *Для произвольного плоского связного графа G с n вершинами, m ребрами и f гранями справедливо:*

$$n - m + f = 2$$

.

Доказательство. Рассмотрим некоторое остовное дерево T графа G. В T n вершин, $n-1$ ребро (по доказанной лемме) и одна грань (внешняя). Отсюда $n - (n-1) + 1 = 2$, то есть формула верна. Будем поочередно добавлять к T недостающие ребра в G. В результате, на каждом шаге число вершин не меняется, число ребер увеличивается на 1, число граней так же увеличивается на 1, поскольку при соединении двух вершин ребром грань, на границе которой содержатся эти вершины, разбивается на две грани. Таким образом, для всех графов, получаемых при этой процедуре, в частности, и для G, формула остается верной. □

Теорема 2 (Общая формула Эйлера)**.** *Для произвольного плоского графа G с n вершинами, m ребрами, f гранями и k компонентами связности справедливо:*

$$n - m + f = 1 + k$$

.

Доказательство. Рассмотрим каждую компоненту связности G_i, $i = 1, \ldots, k$ и проведем доказательство, опираясь на теорему 1. □

Теорема 3. *K_5 непланарен.*

Доказательство. От противного. Так как $n = 5$, $m = 10$, по формуле Эйлера для планарности K_5 должно быть $f = 7$. Каждое ребро принадлежит двум граням; всякая грань ограничена по крайней мере тремя ребрами. Значит, $2m \geq 3f$, то есть $20 \geq 21$. Противоречие. □

Теорема 4. *$K_{3,3}$ непланарен.*

Доказательство. От противного. Так как $n = 6$, $m = 9$, по формуле Эйлера для планарности $K_{3,3}$ должно быть $f = 5$. Каждое ребро принадлежит двум граням; всякая грань ограничена по крайней мере четырьмя ребрами (двудольный граф не содержит нечетных циклов). Значит, $2m \geq 4f$, то есть $18 \geq 20$. Противоречие. □