# Билет №6 Функции многих переменных. Частные производные и полный дифференциал для функций многих переменных. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Можем рассматривать Евклидово пространство ($\mathbb{E}^n$) в смысле конечномерного (имеется конечный базис) вещественного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ с введённым на нём положительно определённым скалярным произведением или как метрическое пространство. В статье будет использоваться оба варианта.
Говоря об изменении двух независимых переменных x и y, мы должны всякий раз указывать, какие пары значений (x, y) они могут принимать совместно; множество M этих пар и будет областью изменения переменных x, y.

**Определение:** Переменная z (с областью изменения $\mathbb{Z}$) называется функцией независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в множестве M, если каждой паре $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ их значений из M - по некоторому правилу или закону ставится в соотстветствие одно определённое значение z из $\mathbb{Z}$

Назовём m-мерной 'точкой' систему из m вещественных чисел: M$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_m$ являются координатами этой точки M. Множество всех мыслимых m-мерных точек составляет m-мерное 'пространство', которое иногда называют арифметическим. Введём понятие 'расстояния' $\overline{MM'}$ между двумя m-мерными точками $M(x_1, x_2, \ldots, x_m), M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_m)$:

$$\overline{MM'} = \overline{M'M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i)^2}$$

Множества точек m-мерного пространства $\mathbb{E}^m$:
1. m-мерный шар: $(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x2')^2 + \cdots + (xm - xm0)R2$
2. m-мерный параллелепипед: $|x_1 - x'_1| \leq d_1, |x_2 - x'_2| \leq d2, \ldots, |x_m - x'_m| \leq dm$

**Определение:** Будем называть $\epsilon$-окрестностью точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ m–мерного евклидового пространства $\mathbb{E}^m$ открытый m-мерный шар радиуса $\epsilon$ с центром в точке $M_0$

Точка множества называется **внутренней точкой** этого множества, если существует некоторая $\epsilon$ окрестность точки M, все точки которой принадлежат множеству M, а если помимо этого эта окрестность содержит точки не принадлежащие M, то точка называется **граничной**.
**Определение:** Множество, целиком состоящее из внутренних точек, будем называть открытой областью.
**Определение:** Если каждая граничная точка множества является точкой этого множества, то множество называется замкнутым.
**Определение:** Если все точки множества находятся внутри некоторого шара, то эта область называется ограниченной.

Пример функции двух переменных:

$$u = \sqrt{cos(x^2 + y^2)}$$

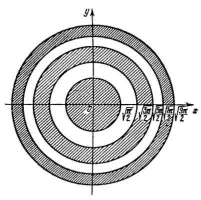
Рис. 14.1.

Областью задания функции является множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{cos(x^2 + y^2)} \geq 0$. Это неравенство эквивалентно неравенствам $0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$, $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, k = 1, 2, ...
Таким образом, множество точек состоит из круга радиуса $\sqrt{\pi/2}$ с центром в точке O(0,0) и кольцеобразных областей. Получившаяся область - несвязная (рис 14.1)

Для упрощения, далее, иногда будет рассматриваться случай 2 или трёх переменных; всё дальнейшее справедливо и для функций m переменных.

**Определение предела и непрерывности для функции многих переменных**

**Определение:** Пусть функция z = f(x, y) определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется пределом функции z = f(x, y) при x $\to x_0$ и y $\to y_0$ (или, что то же самое при M(x, y) $\to M_0(x_0, y_0)$), если для $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0$ такое, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \epsilon$.

Из определения можно сделать вывод, что раз уж предел существует, то он не зависит от пути по которому M стремится к $M_0$, а таких направлений бесконечно, когда как для функции одной переменной всего два.

**Определение:** Функция z = f(x, y) (или f(M)) называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$, если она:
1) определена в этой точке и некоторой её окрестности
2) имеет предел $\lim_{M \to M_0} f(M)$
3) этот предел равен значению функции z в точке $M_0$, т.е. $\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$

Или на языке $\epsilon - \delta$ - $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta > 0$: $|f(x_0, \ldots, x_m) - f(x_0', \ldots, x_m)| < \epsilon$ лишь только $|x_1 - x_1'| < \delta, \ldots, |x_m - x_m'| < \delta$. (Отличие от определения предела в том, что функция должна быть определена и в самой точке тоже; ну а если можем подобрать такое $\delta > 0$ по $\epsilon > 0$, что оно годно для всех точек $(x_0, y_0)$ из M одновременно, то f равномерно непрерывна в M, ничего нового).

Пример:
$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ - функция определена на всей плоскости за исключением x=0,y=0. Если взять две частичные последовательности точек $M_n(1/n, 1/n)$ и $M_n'(2/n, 1/n)$, сходящихся к точке (0,0) то окажется, что при всех n
$f(M_n) = 1/2$, а $f(M_n')$=2/5. Отсюда следует, что упомянутого предела не существует.

***функция $f(x_1, \ldots, x_m) = f(M)$ имеет пределом число A при стремлении переменных $x_1, \ldots, x_m$, соответственно, к $a_1, \ldots, a_m$ (или — короче — при стремлении точки M к точке $M_0$), если, какую бы ни извлечь из $\mathscr{M}$ последовательность (8) отличных от $M_0(a_1, \ldots, a_m)$ точек, сходящуюся к $M_0$, числовая последовательность $\{f(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})\} = \{f(M_n)\}$, состоящая из соответствующих значений функции, всегда сходится к A.***

Наоборот существует предел у $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ это вытекает из неравенства $|\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \leq 1/2|x|$

**Частные производные и дифференцируемость для функций многих переменных. Связь этих понятий. Полный дифференциал для функций многих переменных. Достаточные условия дифференцируемости**

**Определение:** Частная производная функции f(x, y, z) по x в точке (x меняется, стремясь к $x_0$, остальные переменные - фиксированы) $(x_0, y_0, z_0)$:

$$\lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta_x} = \frac{f(x_0 + \Delta_x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta_x}$$

Теперь придадим всем трём независимым переменным некоторые приращения, тогда $\Delta_u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y, z_0 + \Delta_z) - f(x_0, y_0, z_0)$ называется полным приращением функции.

**Определение:** f дифференцируема, если её полное приращение представимо в виде: $\Delta_u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta_x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta_y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta_z + \alpha \cdot \Delta_x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z$, где $\alpha, \beta, \gamma$ бесконечно малые функции от $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ (1) и вместе с ними стремятся к нулю.

**Определение:** Линейная часть приращения функции, называется её полным дифференциалом и обозначается символом $df(x_0, y_0, z+_0)$: $df(x_0, y_0, z+_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta_x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta_y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta_z$

**Теорема (Лагранжа, о конечных приращениях):** Пусть f(x) определена и непрерывна в замкнутом промежутке [a,b], существует конечная производная f'(x), хотя бы в (a,b). Тогда между a и b найдётся такая точка c (a<c<b), что для неё выполняется равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

**Теорема (Необходимое условие дифференцируемости функции в точке):** Если функция дифференцируема в точке $x_0$, то она имеет в точке $x_0$ все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), i = \overline{1, n}$. (Доказательство см. Тер-Крикоров А.М. "Курс математического анализа стр 242-249 `https://www.dropbox.com/s/1rz1bs2hg0pbi0g/Ter-Krikorov.djvu`)

**Теорема (Достаточное условие дифференцируемости):** Если существуют непрерывные частные производные в точке $(x_0, y_0, z_0)$ и некоторой её окрестности, то функция f дифференцируема.
*Доказательство:* Представим приращение функции $\Delta_u$ в виде:

$$\Delta_u = [f(x_0{+}\Delta_x, y_0{+}\Delta_y, z_0{+}\Delta_z) - f(x_0, y_0{+}\Delta_y, z_0{+}\Delta_z)] + [f(x_0, y_0{+}\Delta_y, z_0{+}\Delta_z) - f(x_0, y_0, z_0{+}\Delta_z)] + [f(x_0, y_0, z_0{+}\Delta_z) -$$

Каждая из этих разностей представляет частное приращение функции лишь по одной переменной. Так как мы предположили существование частных производных в окрестности точки $(x_0, y_0, z_0)$, то - при достаточной малости приращений - к этим разностям по отдельности можно применить формулу конечных приращений:

$$\Delta_u = f'_x(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \Delta_y, z_0 + \Delta_z) \cdot \Delta_x + f'_x(x_0, y_0 + \theta_1\Delta_y, z_0) \cdot \Delta_y + f'_x(x_0, y_0, z_0 + \theta_2\Delta_z) \cdot \Delta_z.$$

(Если рассмотрим первую разность, то там происходит переход от x = $x_0$ к x = $x_0 + \Delta_x$. Производная по x от этой функции, по предположению, существует для всех значений x в промежутке $[x_0, x_0 + \Delta_x]$ - можем применять формулу конечных приращений. Точка c по формуле у нас лежит в промежутке, поэтому приращение берём с $\theta < 1$) Если положить здесь
$f'_x(x_0 + \theta\Delta_x, y_0 + \Delta_y, z_0 = f'_x(x_0, y_0, z_0) + \alpha$
$f'_x(x_0, y_0 + \theta_1\Delta_y, z_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0) + \beta$
$f'_x(x_0, y_0, z_0 + \theta_2\Delta_z) = f'_z(x_0, y_0, z_0) + \gamma$
то придём к выражению (1) для $\Delta_u$. Устремляем приращения к 0, тогда аргументы производных в левых частях этих равенств стремятся к $x_0, y_0, z_0$ (тк $\theta, \theta_1, \theta_2$ - правильные дроби), следовательно, сами производные, ввиду предположенной непрерывности их для этих значений переменных, стремятся к производным в правых частях, а $\alpha, \beta, \gamma$ - к нулю. Доказательство закончено.

**Связь дифференцируемости и непрерывности для функции многих переменных.**

(Скорей всего имелась ввиду одна из следующих теорем; привожу доказательство первой)
**Теорема:** Если функция нескольких переменных дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.
*Доказательство:* Тк функция f(x,y) дифференцируема, тогда её полное приращение в точке a можно записать в виде: $\Delta f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\Delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\Delta_y + \alpha\Delta_x + \beta\Delta_y$, где $\alpha \to 0, \beta \to 0$ при $\Delta_x \to 0, \Delta_y \to 0$. Из этого следует, что существует предел: $\lim \Delta_x \to 0 \Delta f(a) = 0$, означающий, что функция f(x,y) непрерывна в точке a. (тк непрерывная функция характеризуется тем, что бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое же приращение функции) Доказательство закончено.

**Теорема:** Предположим, что: 1) функция f(x,y) определена в открытой области D, 2) в этой области существуют первые производные $f'_x$ и $f'_y$, а также вторые смешанные производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ и, наконец, 3) эти последние производные, как функции x и y, непрерывны в некоторой точке $(x_0, y_0)$ области D. Тогда в этой точке:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

**Производная по направлению. Градиент дифференцируемой функций**

Производная по направлению — это обобщение понятия производной на случай функции нескольких переменных. Производная по направлению показывает, насколько быстро функция изменяется при движении вдоль заданного направления.
Пусть функция u = f(x,y,z) задана в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим некоторое направление, определяемое единичным вектором $\overline{a}$ с координатами $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ (из аналитической геометрии известно, что если единичный вектор $\overline{a}$ составляет с осями координат углы $\alpha, \beta, \gamma$, то координаты этого векторы равны $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$). Проведём через точку $M_0$ ось l, направление которой совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, возьмём на этой оси произвольную точку M(x,y,z) и обозначим через L величину направленного отрезка $\overline{M_0M}$ указанной оси.

Величиной L направленного отрезка $\overline{M_0M}$ оси l называется число, равное его длине, взятой со знаком плюс, если направление этого отрезка совпадает с направлением оси l, и со знаком минус, если направление этого отрезка противоположно направлению оси l. Из аналитической геометрии известно, что координаты x,y,z, точки M определяются равенствами: $x = x_0 + L\cos\alpha, y = y_0 + L\cos\beta, z = z_0 + L\cos\gamma$.
На указанной оси l функция u = f(x,y,z) является сложной функцией одной переменной величины L.
**Определение:** Под производной рассматриваемой сложной функции в данном направлении $\overline{l = (l_x; l_y; l_z)}$ понимается выражение:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}$$

, а тк $\frac{\partial x}{\partial l} = \cos\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial l} = \cos\beta$, $\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\gamma$,, то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

**Определение:** Градиентом функции u = f(x,y,z) в точке $M_0$ называется вектор, обозначаемый символом gradu и имеющий координаты, соответственно равные производным $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, взятым в точке $M_0$.
Производная функции u в точке $M_0$ по направлению, определяемому градиентом этой функции в

указанной точке, имеет максимальное значение по сравнению с производной по любому другому направлению в точке $M_0$. (Почему? Да потому https://studfiles.net/preview/3924470/page:8/)
Почитать дополнительно http://mathprofi.ru/proizvodnaja_po_napravleniju_i_gradient.html