Билет 1. Непрерывность функций одной переменной. Разрывы первого и второго рода. Первая и вторая теорема Вейерштрасса.

Определения предела функции одной переменной

Определение 1 (Предел функции (по Гейне)). *Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ (или при $x \to x_0$), если $\forall$ последовтельности значений аргумента*

$$x_1, ..., x_n, x_n \to x_0, \forall n (x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = b.$$

Определение 2 (Предел функции (по Коши)). *Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in X \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Определения 1 и 2 эквивалентны.*

Доказательство. 1. Пусть b предел функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Коши. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

По определнию сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x_0 —

$$\forall \delta > 0 \ \ \exists N > 0 : \forall n \geq N \ \ |x_n - x_0| < \delta.$$

Так как $\forall n \ (x_n \neq x_0)$, то

$$\forall n \geq N \ 0 < |x_n - x_0| < \delta \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N \ |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x_n\} \to x_0, \forall n (x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = b.$$

2. Пусть b предел функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Гейне. Пусть b не является пределом функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ по Коши. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ \exists x \in X \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ |f(x) - b| \geq \varepsilon.$$

Пусть

$$\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall \delta_n \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \ |f(x_n) - b| \geq \varepsilon,$$

но

$$\forall \delta_n \exists x_n : 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \{x_n\} \to x_0$$

и по опредлению Гейне

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = b,$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N > 0 : \forall n \geq N \;\; |f(x_n) - b| < \varepsilon \Rightarrow$$

противоречие.

□

Определение 3 (Правый (левый) предел (по Гейне)). *Число b называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если $\forall$ последовательности $\{x_n\}$,*

$$x_n \to x_0, x_n > x_0 \; \forall n \; (\textit{или } x_n < x_0) \Rightarrow f(x_n) \to b.$$

Определение 4 (Правый (левый) предел (по Коши)). *Число b называется правым (левым) пределом $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x_0 < x < x_0 + \delta \; (x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Правый предел: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$. Левый предел: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$.

Определения непрерывности функции одной переменной

Определение 5 (Формальное определение). *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$,если функция $f(x)$имеет в этой точке x_0 предел и этот предел равен частному значению $f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0, то есть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Определение 6 (по Гейне). *Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$,если*

$$\forall \{x_n\} \subset X : \; \{x_n\} \to x_0 \Rightarrow \; \{f(x_n)\} \to f(x_0).$$

Определение 7 (по Коши). *Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$,если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \; \forall x \in X \; |x - x_0| < \delta \;\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Опредления 6, 7 эквевалентна.*

Доказательство. Аналогично теореме 1. □

Определение 8. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$,если*

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \;\; \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

(То есть бесконечно малому приращению аргументна соответствует бесконечно малое приращение функции).

Определение 9. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа, если*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Определение 10. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева, если*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

Определение 11 (по Коши)**.** *$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ справа (слева), если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in X \ x_0 < x < x_0 + \delta \ (x_0 - \delta < x < x_0) \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Утверждение 1. *$f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X \Leftrightarrow$*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Доказательство. По определниям 7, 11. □

Локальные свойства:

Пусть $f(x), \ g(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$. Тогда:

1. $f(x) \pm g(x)$ - непрерывна в точке $x_0 \in X$.
2. $f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна в точке $x_0 \in X$.
3. $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна в точке $x_0 \in X$.
4. Ограниченность в δ окрестности x_0.
5. В некоторой δ окрестности x_0 функция не меняет знак.

Доказательство. 1. т.к. $f(x), \ g(x)$ - непрерывны в точке $x_0 \in X$, то по определению непрерывности функции по Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2}, x_0) > 0 \ \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}(|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\Rightarrow \ |f(x) \pm g(x) - (f(x_0) \pm g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. $f(x), \ g(x)$ - непрерывны в точке $x_0 \in X$, то по определению непрерывности функции по Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\frac{\varepsilon}{C}, x_0) > 0 \ \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}(|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}).$$

. Т.к. $\forall x \in X |x - x_0| < \delta \ |g(x)| < C_1 < \infty$,ограниченость в δ окрестности x_0(дказательство этого приводится позже), $f(x_0) = C_2 < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \ (|g(x)| + |f(x_0)|) < C,$$

то по определению Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{C}, x_0) > 0 \ \ |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| =$$

$$= |(f(x) - f(x_0) + f(x_0)) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)| = |(f(x) - f(x_0)) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))| \leq$$

$$\leq |(f(x) - f(x_0))| \cdot |g(x)| + |f(x_0)| \cdot |(g(x) - g(x_0))| < \varepsilon.$$

3. $f(x)$, $g(x)$ - непрерывны, то по определению непрерывности функции по Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\frac{\varepsilon}{C}, x_0) > 0 \ \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \ |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{C} (|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{C}).$$

Т.к.

$$\forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \quad |g(x)| < C_1 < \infty \ (C_1 \neq 0),$$

так как функция ограничена в δ окрестности x_0(дказательство этого приводится позже),

$$g(x_0) = C_2 < \infty \ (C_2 \neq 0), \ f(x_0) = C_3 < \infty \ (C_3 \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in X \quad |x - x_0| < \delta \qquad (|\frac{1}{g(x)}| + |\frac{f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0)})| < C,$$

то по определению Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{C}, x_0) > 0 \ |\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}| =$$

$$= |\frac{(f(x) - f(x_0) + f(x_0))}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}| = |\frac{(f(x) - f(x_0))}{g(x)} + f(x_0) \cdot (\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}))| =$$

$$= |\frac{(f(x) - f(x_0))}{g(x)} + f(x_0) \cdot \frac{-(g(x) - g(x_0))}{g(x) \cdot g(x_0)})| \leq$$

$$\leq |\frac{1}{g(x)}||f(x) - f(x_0)| + |\frac{f(x_0)}{g(x) \cdot g(x_0)}| \cdot |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

4. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \ -\varepsilon + f(x_0) < f(x) < \varepsilon + f(x_0)$.

5.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \ \forall x \in X \ |x - x_0| < \delta \ -\varepsilon + f(x_0) < f(x) < \varepsilon + f(x_0) \Rightarrow$$

для

$$0<\varepsilon<|f(x_0)|\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0\ \forall x\in X\ |x-x_0|<\delta\ \ -\varepsilon+f(x_0)<f(x)<\varepsilon+f(x_0)$$

- функция не меняет знак.

$\square$

Определение 12. *Пусть $x=\varphi(t)$ определена на T, $f(x)$ задана на X. Тогда говорят, что на T задана сложная функция $y=f(\varphi(t))$.*

Теорема 3. *Пусть $x=\varphi(t), t\in T-$ непрерывно в точке $t_0\in T$, а $y=f(x), x\in X-$ непрерывно в $x_0\in X$, тогда $f(\varphi(t))-$непрерына в точке $t_0\in T$.*

Доказательство. По Гейне $\varphi(t)$ $-$непрерывно в $t_0\in T\Rightarrow$

$$\Rightarrow\forall\{t_n\}\subset T:\lim_{n\to\infty}t_n=t_0\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\varphi(t_n)=\varphi(t_0),\ \varphi(t_n)=x_n,\ \varphi(t_0)=x_0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)\Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty}f(\varphi(t_n))=f(\varphi(t_0)).$$

$\square$

Определение 13. *$f(x)$-непрерывна на X ($f(x)\in C(X)$), если $\forall x\in X\ f(x)\in C(x)$.*

Определение 14 (Определение непрерывности.)**.**

$$\forall x\in X\ \ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon,x)>0\ \ \forall x'\in X\ \ |x'-x|<\delta\ \ |f(x')-f(x)|<\varepsilon$$

Точки разрыва

Определение 15. *Точки разрыва - точка в которой функция не непрерывна, т.е.:*
$x_0\in X$

1. $\nexists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$

Определение 16 (Устранимая точка разрыва)**.** $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<\infty$, *но* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

Пример 1 $f(x)=\frac{sinx}{x}$.

Решение. Очевидно, данная функция не определена при $x=0$. Поскольку $sinx$ является непрерывной функцией для всех x, то искомая функция $f(x)=\frac{sinx}{x}$ также непрерывна при всех x за исключением точки $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$, то в данной точке существует устранимый разрыв. Мы можем сконструировать новую функцию

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases} \quad ,$$

которая будет непрерывной при любом действительном x.

Определение 17 (Разрыв I-рода)**.** *$\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) < \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) < \infty$, но $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.*

Пример 2 $f(x) = arctan\frac{1}{x}$.

Решение.

Данная элементарная функция определена для всех x, исключая точку $x = 0$, где она имеет разрыв. Найдем односторонние пределы в этой точке. $\lim\limits_{x \to 0-0} arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0+0} arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Видно, что в точке $x = 0$ существует разрыв первого рода.

Определение 18 (Разрыв II-рода)**.** *$\nexists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ либо $\nexists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ либо $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$.*

Пример 3 $f(x) = \frac{1}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} \frac{1}{x} = -\infty$. $x = 0$- точка разрыв II -рода.

Глобальные свойства

Определение 19. *$f(x) \in C([a, b])$, если:*

1. *$f(x) \in C((a, b))$.*
2. *$f(x)$ - непрерывна справа в точке a.*
3. *$f(x)$ - непрерывна слева в точке b.*

Теорема 4 (Больцано - Коши)**.**

$$f(x) \in C([a, b]) \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in (a, b)(f(c) = 0).$$

Доказательство. $[a, b]$ - делим пополам.

$$[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b].$$

Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$- доказано. Пусть

$$f(\frac{a+b}{2}) \neq 0 \Rightarrow (f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0) \vee (f(b) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0).$$

Пусть $(f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0)$, тогда эту часть снова делим пополам.

Пусть

$$f(a)>0, f(b)<0,\ I_n=[a_n,b_n]:f(a_n)>0,\ f(b_n)<0$$

.

$$s=\{I_n\}, I_1\supset I_2\supset I_3\supset ...\supset I_n$$

.

$$|I_n|=b_n-a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \overset{\text{по т. Кантора}}{\Rightarrow} \exists\,!\ c\in I_n\ \forall n.$$

$$I_n=[a_n,b_n]:f(a_n)>0,\ f(b_n)<0 \overset{\text{по т. Кантора}}{\Rightarrow} (\lim_{n\to\infty} a_n=c)\wedge(\lim_{n\to\infty} b_n=c) \overset{\text{т.к. } f(x)\in C([a,b])}{\Longrightarrow}$$

$$(\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(c)\geq 0)\wedge(\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(c)\leq 0)\Rightarrow f(c)=0.$$

□

Теорема 5.

$$f(x)\in C([a,b])\wedge(f(a)=A)\wedge(f(b)=B)\wedge(A\neq B)\Rightarrow \forall C\in[A,B]\vee[B,A]\ \exists c\in[a,b](f(c)=C).$$

Доказательство. $A=B$ - не рассматривается, т.к. очевидно.

Пусть $(A\neq B)\wedge(A<B)$. Рассмотрим Функцию $\varphi(x)=f(x)-C-$ непрерывна, т.к. $f(x), C$ - непрерывны.

$$(\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0)\wedge(\varphi(b)=f(b)-C=B-C>0) \overset{\text{по теореме Больцано-Коши}}{\Longrightarrow}$$

$$\exists c\in[a,b]:\varphi(c)=f(c)-C=0\Rightarrow f(c)=C.$$

□

Теорема 6 (I- теорема Вейерштрасса)**.**

$$f(x)\in C([a,b])\Rightarrow(\forall x\in[a,b](|f(x)|<M<\infty)).$$

Доказательство. f-ограничено на $[a,b]$

$$\Leftrightarrow(\exists m,\ M\in\mathbb{R}\ \forall x\in X(f(x)\leq M)\wedge(f(x)\geq m)).$$

Т.е.

$$\exists M>0:\ \forall x\in[a,b]\ (|f(x)|<M).$$

От противного. Пусть

$$f\in C([a,b])\wedge(\forall M>0\ \exists x\in[a,b]\ (|f(x)|>M)).$$

Пусть $M = n \in \mathbb{N}$

$M = 1 : \exists x_1 \in [a, b] \ (|f(x)| > 1)$

...

$M = n : \exists x_1 \in [a, b] \ (|f(x)| > n)$

Получим

$$\{x_k\} \subset [a, b] \overset{\text{по теореме Б-В}}{\Longrightarrow} \exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} : \ \{x_{n_k}\} \xrightarrow{k \to \infty} x_0.$$

$\forall \ a \leq x_{n_k} \leq b \Rightarrow \ a \leq x_0 \leq b.$

$\lim\limits_{x_{n_k} \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$, т.к. функция непрерына, но по предположению $\lim\limits_{x_{n_k} \to x_0} f(x_{n_k}) = \infty$ - противоречие. □

Определение 20. *Число M (m) называется точной верхней (точной нижней) гранью $f(x)$ на X, если:*

1. $\forall x \in X (f(x) < M)$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : f(x) > M - \varepsilon \ \ (f(x) < m + \varepsilon)$.

Теорема 7 (II- теорема Вейерштрасса)**.** *$f(x) \in C([a, b]) \Rightarrow$, то $f(x)$ достигает на этом сегменте точной верхней и точной нижней грани.*

Доказательство. Пусть M-точная верхняя грань, не достижима, т.е. $\forall x \in X \ (f(x) < M)$. Тогда рассмотрим

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

(Можем рассмотреть, т.к. $M - f(x)$ не обращается в 0)

$$(M - f(x) \in C([a, b])) \land (M - f(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]) \Rightarrow F(x) \in C([a, b]) \Rightarrow$$

$F(x)-$ ограничена, т.е.

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \geq A \ \forall x \in [a, b] \Rightarrow f(x) \geq M - \frac{1}{A} \ \forall x \in [a, b] \Rightarrow$$

$M-$ не точная верхняя грань. Противоречие. Для точной нижней грани аналогично. □

Определение 21. *Последовательность вложенных отрезков $[x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset ... \supset [x_n, y_n]$ называется последовательностью стягивающихся отрезков, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in N : \forall n > N \mid y_n - x_n \mid < \varepsilon$.*

Теорема 8 (теорема Кантора)**.** *Если $[x_1, y_1], [x_2, y_2], ..., [x_n, y_n]$ - последовательность стягивающихся отрезков, то $\exists!$ точка, принадлежащая всем этим отрезкам.*

Теорема 9 (теорема Больцано - Вейерштрасса)**.** *Из всякой ограниченной последовательности точек пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*