Абдурахманов Арсланбек.

Билет 5

Теорема Мучника о существовании в P_k замкнутого класса со счетным базисом

Определение.

Пусть U=$\{u_1, u_2, .., u_m, ...\}$ — исходный алфавит переменных. Будем рассматривать функции f($u_{i_1}, u_{i_2}, .., u_{i_n}$), аргументы которых определены на множестве E_k={1,2,3,...,k-1}, так что f($\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n$) $\in E_k$ и $\alpha_i \in E_k$.

Определение.

Через P_k обозначим множество всех функций k–значной логики над алфавитом U, а также констант 0,1,2,...,k-1.

$$P_k^{(n)} = \{f : E_k^n \Longrightarrow E_k\}$$

$$P_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_k^{(n)}$$

Число функций в P_k, зависящих от n переменных равно k^{k^n}.

Определение.

Пусть F – подмножество функций из P_k. Замыканием F, называется множество всевозможных функций полученных с помощью конечного применения операции суперпозиции к функциям из F.

[F]

Теорема Мучника.

Для всякого k $\geq$ 3, существует в P_k замкнутый замкнутый класс со счетным базисом.

Доказательство.

Рассмотрим систему функций F.

$$f_i(x_1, x_2, .., x_i) = \begin{cases} 1 & x_1 = ... = x_{j-1} = x_{j+1} = ... = x_i = 2, x_i = 1; \\ & (j = 1, 2, ..., i) \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

(i=2,3,4,....)

Возьмем замыкание системы F. Для доказательства того, что F есть базис покажем, что никакая функция $f_m \in F$ не может быть представлена в виде других функций из F. Т.е. невозможно следующее $f_m = u[f_2, ..., f_{m-1}, f_{m+1}, ...]$, где u[...] – какая-то формула.

Для удобства запишем
$f_m = u[f_2, ..., f_{m-1}, f_{m+1}, ...] = f_r(u_1[f_2, ..., f_{m-1}, f_{m+1}, ...], ..., u_r[f_2, ..., f_{m-1}, f_{m+1}, ...])$.
Т.е. функция f_m выражается через функцию f_r.

Возможны три случая:

1) Найдутся хотя бы две формулы u_i, u_j отличные от переменных. Тогда значениями этих формул при разных наборах может быть только 0 или 1. Значит на i и j позиции формулы f_r будут следующие значения: (0,0),(1,0),(0,1) и (1,1), следовательно $f_r = 0$, противоречие.

2) Найдется одна формула u_i отличная от переменных, остальные формулы равны переменным. Найдется такое $u_s = x_q$, тогда рассмотрим набор $x_1 = x_2 = ... = x_{q-1} = x_{q+1} = ... = x_m = 2, x_q = 1$. Значение функции f_m при таком наборе равно 1, в тоже время значение u_i 0 или 1, следовательно f_r примет значение 0. Получается что 1=0, противоречие.

3)Все $u_i, (i = 1, .., r)$ переменные. В этом случае r>m (т.к. если r<m, найдется набор на котором значение левой части будет 0,а правой 1, если m=r получаем что $f_m = f_m$). Возьмем набор $x_1 = x_2 = ... = x_{p-1} = x_{p+1} = ... = x_m = 2, x_p = 1$, на этом наборе значение функции $f_m = 1$, в тоже время значение f_r на таком наборе может быть равно 0, т.к. какое-то x_p будет повторятся в f_r. Получаем противоречие.

Во всех случаях получаем противоречия, а следовательно f_m не выводится не из формул функций системы F, кроме как из себя. **Теорема доказана.**

Замечание.

Для случая K=2, следует сослаться на большую теорему Поста, что множество замкнутых систем в P_2 счетно, а базис замкнутого класса по мощности не больше 4.