Билет 2. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора .

Определние 1 (Определение непрерывности.)**.**

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, x) > 0\ \forall x' \in X |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

Определние 2 (Определение равномерной непрерывности)**.**

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x', x'' \in X\ |x'' - x'| < \delta\ |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Утверждение 1. *Функция равномерно непрерывна на X, непрерывна на нем.*

Доказательство. Пусть $x' = x_0 \in X-$ фиксировано, тогда

$$\forall x_0 \in X \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0\ \forall x'' \in X, |x'' - x_0| < \delta : |f(x'') - f(x_0)| < \varepsilon$$

- определние непрерывной функции. □

Утверждение 2. *Функция равномерно непрерывна на X, непрерывна $\forall X' \subset X$.*

Примеры:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \geq 1)$.

$$|f(x') - f(x'')| = |\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| = |\frac{x'' - x'}{x'x''}| = \frac{|x'' - x'|}{x'x''} \leq |x'' - x'|$$

– равномерно непрерывна . Для этого положим $\delta = \varepsilon$

2. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ $(0, 1)$. Рассмотрим две последовательности $\{x'_n\}, \{x''_n\} \in (0, 1)$
$x'_n = \frac{1}{\pi n}$ и $x''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot n}$, $n = \mathbb{N}$

$$|f(x') - f(x'')| = |\sin(\pi \cdot n) - \sin(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot n)| = 1$$

. Если $\varepsilon = \frac{1}{2}$ то будет нарушено условие равномерной непрерывности

3. $f(x) = x^2$ - не равномерно непрерывная на $x \in [1, \infty)$.

$$|f(x'') - f(x')| = |(x'' - x') \cdot (x'' + x')| = |(x'' - x')| \cdot |(x'' + x')| > x' \cdot |x'' - x'|,$$

но

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon,$$

при

$$x' = \frac{2 \cdot \varepsilon}{\delta},\ x'' = x' + \frac{\delta}{2} \Rightarrow\ |f(x'') - f(x')| > x' \cdot |x'' - x'| = \frac{2 \cdot \varepsilon}{\delta} \cdot |\frac{2 \cdot \varepsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2} - \frac{2 \cdot \varepsilon}{\delta}| = \varepsilon$$

Теорема 1. *Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте .*

Доказательство. (От противного.)

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Предположим , что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a,b]$.

Тогда

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x', x'' \in [a,b]\ |x'' - x'| < \delta$$

, но

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon$$

Возьмем последовательность

$$\{\delta_n\} \to 0, \delta_n > 0$$

(например $\delta_n = \dfrac{1}{n}$)

Согласно нашему предположению ,

$$\forall\delta_n\ \exists x'_n, x''_n \in [a,b]$$

, для которых

$$|x''_n - x'_n| < \delta_n$$

, но

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$. Она ограничена (так $\{x'_n\} \in [a;b]$) и поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $c \in [a,b]$.

В силу того , что $|x''_n - x'_n| < \delta_n$ и $\delta_n \to 0$, имеем :

$$|x''_{n_k} - c| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| \leq |x'_{n_k} - c|$$
$$x''_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} c$$

.

По условию $f(x)$ непрерывна в точке $c \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ f(x'_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(c), f(x''_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(c) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| = 0$$

.

С другой стороны , в силу неравенства

$$\forall n \in \mathbb{N}\ |f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

получаем что

$$|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} |f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| > 0$$

. Получили противоречие . □

Теорема 2 (теорема Больцано - Вейерштрасса)**.** *Из всякой ограниченной последовательности точек пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*