Алгоритм быстрой сортировки. Теорема о среднем времени работы

Алгоритм. Дан массив сравнимых объектов A размера n.

1. Массив $A[l..r]$ разбивается на 2 (возможно, пустых) подмассива $A[l..q]$ и $A[q+1..r]$: $\forall a \in A[l..q]$ $a \leq A[q]$ и $\forall b \in A[q+1..r]$ $b \geq A[q]$, где $A[q]$ - опорный элемент, q - индекс опорного элемента, который выбирается в ходе процедуры разбиения массива.

2. Подмассивы $A[l..q]$ и $A[q+1..r]$ сортируются с помощью рекурсивного вызова процедуры быстрой сортировки. Алгоритм завершается по достижении условия $l \geq r$.

Теорема 1. *Среднее время работы алгоритма быстрой сортировки равно* $O(n \log n)$.

Доказательство. Предположим, что все элементы массива различны. Пусть X - полное количество сравнений элементов с опорным за время работы алгоритма. Переименуем элементы массива как $z_1 ... z_n$, где z_i - наименьший по порядку элемент. Введем множество $Z_{ij} = z_i, z_{i+1}, ..., z_j$.
Сравнение каждой пары элементов происходит не более одного раза, так как элемент сравнивается с опорный, а опорный элемент после разбиения больше не будет участвовать в сравнении.
Так как каждая пара сравнивается не более одного раза, то

$$X_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij},$$

где

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } z_i \text{ сравнивается с } z_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Применим к обеим частям равенства операцию вычисления математического ожидания и воспользуемся ее линейностью, свойством вероятности индикаторного события:

$$M(X) = M[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} M[X_{ij}] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P\{z_i \text{ сравнивается с } z_j\}$$

Осталось вычислить величину $P\{z_i \text{ сравнивается с } z_j\}$. Так как по предположению все элементы различны, то при выборе опорного элемента x впоследствии не будут сравниваться никакие z_i и z_j, для которых $z_i < x < z_j$. С другой стороны, если в качестве опорного выбран элемент z_i, то он будет сравниваться с каждым элементым из множества Z_{ij}, кроме себя самого. Аналогично и для z_j. Таким образом элементы z_i и z_j сравниваются $\Leftrightarrow$ первым в роли опорного в множестве Z_{ij}.
Перед тем, как выбрать опорный элемент в множестве Z_{ij}, все это множество является неразделенным, и любой его элемент может стать опорным с одинаковой

вероятностью. Так как в этом множестве $j - i + 1$ элемент, а опорный элемент выбирается независимо и случайным образом, то вероятность того, что элемент будет выбран опорным равна $1/(j - i + 1)$. Таким образом:

$$\begin{gathered} P\{z_i \text{ сравнивается с } z_j\} = \\ = P\{\text{первым выбран } z_i \text{ или } z_j\} = P\{\text{первым выбран } z_i\} + P\{\text{первым выбран } z_j\} = \\ = \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1} = \frac{2}{j-i+1}. \end{gathered}$$

Далее получаем:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}.$$

Эту сумму можно оценить, воспользовавшись заменой $(k = j - i)$ и границей гармонического ряда:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k} = \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) = O(n \log n)$$

□