Билет 17.
Задача Коши. Теорема о существовании и единственности.

Задача Коши — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).

Теорема

Пусть
$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$
— дифференциальное уравнение. Будем предполагать, что функция $f(t, x)$ задана на некотором открытом множестве Γ плоскости P переменных t, x. Относительно функции f предположим, что и она сама и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются непрерывными на всём открытом множестве Γ. Тогда:
1) для всякой точки (t_0, x_0) множества Γ найдётся решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию
$$\varphi(t_0) = x_0;$$

2) если два решения $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ уравнения (1) совпадают хотя бы для одного значения $t = t_0$, т.е. если
$$\psi(t_0) = \chi(t_0),$$
то эти решения тождественно равны для всех тех значений t, для которых они оба определенны.

Доказажем теорему методом последовательных приблежений Пикара, но для начала сформулируем и докажем несколько вспомогательных идей.

Основные идеи доказательства:

Первым шагом доказательства является переход от дифференциального уравнения к интегральному.

А) Пусть $x = \varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (1), определённое на интервале $r_1 < t < r_2$ так, что выполнено тождество

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi t), \tag{2}$$

И пусть

$$\varphi(t_0) = x_0 \tag{3}$$

— некоторое начальное условие, которому это решение удовлетворяет. Оказывается, что тогда для функции $\varphi(t)$ на всём интервале $r_1 < t < r_2$ выполнено интегральное тождество

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau. \tag{4}$$

И обратно, если для некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$ на интервале $r_1 < t < r_2$ выполнено тождество (4), то функция $x = \varphi(t)$ дифференциируема, является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальному условию (3). Кратко говоря, интегральное уравнение (4) эквивалентно дифференциальному уравнению (2) вместе с начальным условием (3).

Докажем это. $\Leftarrow$

Допустим сначала, что выполнено соотношение (4). Заменяя в нём переменную t её значением t_0, получаем: $\varphi(t_0) = x_0$, что есть начальное условие (3). Далее, так как правая часть тождества (4) очевидно дифференциируема по t, дифференциируема и его левая часть. В рузельтате дифференциирования полчаем тождество (2).

$\Rightarrow$

Пусть выполнены соотношения (2) и (3). Инегрируя (2) в пределах от t_0 до t, получаем:

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau,$$

где $\varphi(t_0) = x_0$ в силу (3).

Таким образом А) доказано. ■

Теперь введём некоторые обозначения, используемые для доказательства

Б) Пусть $x = \varphi(t)$ — такая непрерывная функция, определённая на некотором отрезке $r_1 \le t \le r_2$, что её график целиком расположен в открытом множестве Γ, и t_0 — некоторая точка отрезка $r_1 \le t \le r_2$. Тогда пользуясь правой частью тождества (4), можно функции $\varphi(t)$ поставить в соответсвие функцию $\varphi^*(t)$, определённую на том же отрезке при помощи равенства

$$\varphi^*(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau. \tag{5}$$

Таким образом, эту правую часть тождества (4) можно рассматривать как оператор, ставящий в соответствие функции $\varphi(t)$ функцию $\varphi^*(t)$. Обозначая этот оператор одной буквой A, мы запишем соотношение (5) в виде

$$\varphi^*(t) = A\varphi \qquad (6).$$

А интегральное уравнение (4) можно записать в виде:

$$\varphi(t) = A\varphi \qquad (7).$$

В) Пусть $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная функция, определённая на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$. Нормой $\parallel \varphi \parallel$ этой функции называется максимум её модуля

$$\parallel \varphi \parallel = \max_{r_1 \leq t \leq r_2} |\varphi(t)|.$$

Если $\psi(t)$ и $\chi(t)$ — две непрерывные функции, заданные на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$, то норма $\parallel \psi - \chi \parallel$ их разности $\psi(t) - \chi(t)$ является неотрицательным числом, оценивающим насколько сильно отличаются эти функции друг от друга. Если это число мало, то функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ "близки"друг к другу. Равенство $\parallel \psi - \chi \parallel = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ тождественно совпадают.

Теперь с помозью понятия нормы сформулируем условие равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Пусть

$$\varphi_0(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_i(t), ... \qquad (8)$$

—последовательность непрерывных функций, заданных на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$. Последовательность (8) равномерно сходится к функции φ, определённой на том же отрезке, если

$$\lim_{i \to \infty} \parallel \varphi - \varphi_i \parallel = 0.$$

Для того, чтобы последовательность (8) равномерно сходилась, достаточно, чтобы имели место неравенства

$$\parallel \varphi_{i+1} - \varphi_i \parallel \leq a_i,$$

где числа $a_0, a_1, ..., a_i, ...$ образуют сходящийся ряд.

Доказательство теоремы

Начальные значения t_0 и x_0 искомого решения уравнения (1) являются координатами точки t_0, x_0, лежащей в множестве Г. Выберем какой-либо прямоугольник П с центром в этой точке и сторонами, параллельными осям, который целиком вместе со своей границей содержится в множестве Г. Длину горизонтальной(параллельной оси t) стороны прямоугольника обозначим через $2q$, а длину вертикальной — через $2a$. Таким образом точка (t, x) тогда и только тогда принадлежит прямоугольнику П, когда выполнены неравенства

$$|t - t_0| \leq q, \qquad |x - x_0| \leq a. \qquad (9)$$

Так как прямоугольник П есть замкнутое множество, содержащееся в Г, то непрерывные на нём функции $f(t, x)$ и $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ ограничены, и потому существуют такие положительные числа M и K, что для t и x, удовлетворяющих условиям (9), выполнены неравенства

$$|f(t,x)| \leq M, \quad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \leq K. \tag{10}$$

Наряду с прямоугольником Π будем рассматривать более "узкий"прямоугольник Π_r, определяемый неравенствами

$$|t - t_0| \leq r, \qquad |x - x_0| \leq a, \tag{11}$$

где

$$r \leq q.$$

Более точно число r определим далее.

Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных функций, заданный на отрезке $|t - t_0| \leq r$, графики которых проходят в прямоугольнике Π_r. Таким образом, функция φ, определённая на отрезке $|t - t_0| \leq r$, тогда и только тогда прнадлежит семейству Ω_r, когда для любого t, принадлежащего этому отрезку, выполняется неравенство

$$|\varphi(t) - x_0| \leq a. \tag{12}$$

Постараемся теперь выбрать число r таким образом, чтобы были выполнены следующие условия:

а) Если $\varphi(t) \in \Omega_r$, то функция $\varphi^*(t) = A\varphi$ также принадлежит семейству Ω_r.

б) $\exists k, 0 < k < 1$, что $\forall \psi(t), \chi(t) \in \Omega_r$:

$$\| A\psi - A\chi \| \leq k \| \psi - \chi \| . \tag{13}$$

Рассмотрим условие а). Для того, чтобы функция $\varphi^*(t) = A\varphi$ принадлежала семейству Ω_r, необходимо и достаточно, чтобы при $|t - t_0| \leq r$ было выполнено неравенство

$$|\varphi^*(t) - x_0| \leq a.$$

В силу (5) и (10) мы имеем:

$$|\varphi^*(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leq Mr.$$

Отсюда видно, что при

$$r \leq \frac{a}{M} \tag{14}$$

условие а) выполнено.

Рассмотрим теперь условие б). Мы имеем:

$$\psi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau)) d\tau,$$

$$\chi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \chi(\tau))d\tau.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$|\psi^* - \chi^*| = \left|\int_{t_0}^{t}(f(\tau,\psi(\tau)) - f(\tau,\chi(\tau)))d\tau\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,\psi(\tau)) - f(\tau,\chi(\tau))|d\tau\right|. \quad (15)$$

Оценим теперь последнее подынтегральное выражение, пользуясь формулой Лагранжа и вторым из неравенств (10):

$$|f(\tau,\psi(\tau)) - f(\tau,\chi(\tau))| = \left|\frac{\partial f(\tau,\theta)}{\partial x}(\psi(\tau) - \chi(\tau))\right| \leq K * |\psi(\tau) - \chi(\tau))|; \quad (16)$$

Здесь τ — число, заключённое между $\psi(t)$ и $\chi(t)$ и, следовательно, удовлетворяющее неравенству $|\theta - x_0| \leq a$. Из (15) и (16) следует:

$$\| A\psi - A\chi \| = \| \psi^* - \chi^* \| \leq Kr \| \psi - \chi \| .$$

Таким образом, условие б) выполнено, если число $k = Kr$ меньше единицы, т.е. если

$$r < \frac{1}{K} \quad (17)$$

Итак, если число r удовлетворяет неравенствам (11), (14) и (17), то для семейства Ω_r выполнены условия а) и б). В дальнейшем будем считать число r выбранным таким образом, что неравенства (11), (14) и (17) для него выполнены.

Построим теперь последовательность

$$\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_i, ... \quad (18)$$

функций, определённых на отрезке $|t - t_0| \leq r$, положив:

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \quad (19)$$

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, ... \quad (20)$$

Так как функция (19) принадлежит семейству Ω_r, то и все функции последовательности (18) принадлежат этому же семейству(из условия а)). Далее, мы имеем(из (12)):

$$\| \varphi_1 - \varphi_0 \| = \max_{|t-t_0|\leq r} |\varphi_1 - x_0| \leq a.$$

В силу (13) получаем:

$$\| \varphi_{i+1} - \varphi_i \| = \| A\varphi_i - A\varphi_{i-1} \| \leq k \| \varphi_i - \varphi_{i-1} \|,$$

откуда

$$\| \varphi_{i+1} - \varphi_i \| \leq ak^i, \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Таким образом, в силу В), последовательность (18) равномерно сходится на отрезке $|t-t_0| \leq r$ к некоторой непрерывной функции φ. Так как все функции последовательности (18) принадлежат семейству Ω_r, то и функция $\varphi \in \Omega_r$ (из (12)). Покажем, что функция φ удовлетворяет уравнению (7). Для этого заметим, что последовательность

$$A\varphi_0, A\varphi_1, ..., A\varphi_i, ...$$

равномерно сходится к функции $A\varphi$; лействительно, мы имеем:

$$\| A\varphi - A\varphi_i \| \leq k \| \varphi - \varphi_i \| .$$

Переходя в соотношении (20) к пределу при $i \to \infty$, получаем:

$$\varphi = A\varphi.$$

Итак, существование решения $x = \varphi(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (3), доказано; при этом установлено, что решение $x = \varphi(t)$ определено на интервале $|t-t_0| < r$, где r — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам (11), (14) и (17).

Перейдём теперь к доказательству единственности. Пусть $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ — два решения уравнения (1) с общими начальными значениями $t_0 . x_0$ и $r_1 < t < r_2$ — интервал, являющийся пересечением интервалов существования решений ψ и χ; очевидно, что $r_1 < t_0 < r_2$. Покажем, что если решения $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ совпадают в некоторой точке t_1 интервала $r_1 < t < r_2$, то они совпадают и на некотором интервале $|t - t_1| < r$, где r достаточно малое положительное число. Положим $x_1 = \psi(t_1) = \chi(t_1)$; тогда величины t_1, x_1 могут быть приняты за начальные значения обоих решений $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$. В этом смысле точка (t_1, x_1) ничем не отлечается от точки (t_0, x_0), и поэтому мы сохраним за точкой (t_1, x_1) обозначение (t_0, x_0). Это позволяет нам сохранить другие прежние обозначения. Переходя от дифференциального уравнения (1) к интегральному (4), мы получаем для обеих функций ψ и χ интегральные равенства, которые могут быть записаны в виде

$$\psi = A\psi, \quad \chi = A\chi. \tag{21}$$

Выберем теперь в открытом множестве Γ прямоугольник Π с центром в точке (t_0, x_0), а затем прямоугольник Π_r таким образом, чтобы число r кроме неравенств (11), (14) и (17) удовлетворяло ещё тому условию, что при $|t - t_0| \leq r$ функции ψ и χ определены и удовлетворяют неравенствам

$$|\psi(t) - x_0| \leq a, \quad |\chi(t) - x_0| \leq a.$$

Это возможно, так как функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны. Тогда функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$, рассматриваемые на отрезке $|t - t_0| \leq r$, входят в семейство Ω_r, и, следовательно, в силу неравенства (13) и соотношений (21) получаем:

$$\| \psi - \chi \| = \| A\psi - A\chi \| \leq k \| \psi - \chi \|,$$

а это возможно только при $\| \psi - \chi \| = 0$, т.е. когда функции совпадают на отрезке $|t - t_0| \leq r$.

Докажем теперь, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают на всём интервале $r_1 < t < r_2$. Пусть не так, тогда $\exists$ точка t^* интервала $r_1 < t < r_2$, для которой $\| \psi(t^*) \neq \chi(t^*) \|$. Ясно, что $t^* \neq t_0$. Для определённости будем считать, что $t^* > t_0$.

Обозначим через N множество всех тех точек t отрезка $t_0 \leq t \leq t^*$, для которых $\psi(t) = \chi(t)$, и докажем, что множество N замкнуто. В самом деле, пусть $\tau_1, \tau_2, ...$ — последовательность точек множества N, сходящаяся к некоторой точке τ. Тогда

$$\psi(\tau_1) = \chi(\tau_1),$$

и потому, в силу непрерывности функций ψ и χ:

$$\psi(\tau) = \lim_{i \to \infty} \psi(\tau_i) = \lim_{i \to \infty} \chi(\tau_i) = \chi(\tau),$$

т.е. точка τ также принадлежт множеству N.

Обозначим через t_1 точную верхнюю грань множества N. Так как N замкнуто, то t_1 принадлежит этому множеству, т.е. $\psi(t_1) = \chi(t - 1)$; следовательно, $t_1 < t^*$. Но тогда, в силу ранее доказанного, функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ должны совпадать на некотором интервале $|t - t_1| < r$, и точка t_1 не может быть точной верхней гранью множества N. Пришли к противоречию.

Теорема доказана. ■