Билет 3. Теорема Поста о полноте системы функций

Рассмотрим некоторые замкнутые классы в P_2 и докажем, что каждый из этих классов является замкнутым. Для доказательства покажем, что ни одна из операций суперпозиции не выводит за пределы класса.

Операции суперпозиции:

1. Отождествление переменной.
2. Перестановка переменных.
3. Подстановка функции.
4. Добавление фиктивной переменной.
5. Удаление фиктивной переменной.

$T_0 : \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 |\ f(0, ..., 0) = 0\}$

Утверждение. $[T_0] = T_0$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in T_0$.

1. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$
$$f'(0, ..., 0) = f(0, ..., 0) = 0 \ \Rightarrow f' \in T_0.$$

2. Если после перестановки переменных подставить вместо них константу 0, то значение функции останется равным 0.

3. Пусть $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in T_0$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_{n+1}, ..., x_m)).$$

Т.к. $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in T_0$, то ее значение на наборе из 0 будет равным 0, следовательно, подстановка ее вместо одной из переменных функции $f(x_1, ..., x_n)$ не выведет за пределы T_0.

4. Если мы добавим фиктивную переменную x_{n+1}, то значение функции не изменится. Возьмем $x_{n+1} = 0$, тогда $f(0, ...0, 0) = 0$.

5. При удалении фиктивной переменной значение функции останется неизменным. Следовательно, значение функции по прежнему будет равным 0 на наборе из всех 0.

□

$T_1 : \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 |\ f(1, ..., 1) = 1\}$

Утверждение. $[T_1] = T_1$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in T_1$.

1. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$
$$f'(1, ..., 1) = f(1, ..., 1) = 1 \ \Rightarrow f' \in T_1.$$

2. Если после перестановки переменных подставить вместо них константу 1, то значение функции останется равным 1.

3. Пусть $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in T_1$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_{n+1}, ..., x_m)).$$

Т.к. $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in T_1$, то ее значение на наборе из 1 будет равным 1, следовательно, подстановка ее вместо одной из переменных функции $f(x_1, ..., x_n)$ не выведет за пределы T_1.

4. Если мы добавим фиктивную переменную x_{n+1}, то значение функции не изменится. Возьмем $x_{n+1} = 1$, тогда $f(1, ...1, 1) = 1$.

5. При удалении фиктивной переменной значение функции останется неизменным. Следовательно, значение функции по прежнему будет равным 1 на наборе из всех 1.

□

$S : \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 |\ \overline{f}(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = f(x_1, ..., x_n)\}$

Утверждение. $[S] = S$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, ..., x_n) \in S$.

1. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$
$$\overline{f'}(\overline{x_1}, ..., \overline{x_{n-1}}, \overline{x_n}) = \overline{f}(\overline{x_1}, ..., \overline{x_{n-1}}, \overline{x_{n-1}}).$$

В силу самодвойственности f

$$\overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x_{n-1}}, \overline{x_{n-1}}). = f(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1}).$$

Следовательно,

$$\overline{f'}(\overline{x}_1, ..., \overline{x_{n-1}}, \overline{x_n}). = f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_n).$$
$$f'(x_1, ..., x_n) \in S.$$

2. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ...x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}).$$
$$\overline{f'}(\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) = \overline{f}(\overline{x_{i_1}}, ..., \overline{x_{i_n}}).$$

В силу самодвойственности f

$$\overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x_n}). = f(x_1, ..., x_n).$$

Следовательно,

$$\overline{f'}(\overline{x}_1, ..., \overline{x_n}). = f'(x_1, ..., x_n).$$
$$f'(x_1, ..., x_n) \in S.$$

3. Пусть $g(x_{n+1}, ..., x_m) \in S$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n+1}, ..., x_m) = f(x_1, ..., x_{n-1}, g(x_{n+1}, ..., x_m)).$$

Т.к. $g(x_{n+1},...,x_m) \in S$, то ее значения на обратных наборах будут обратными, следовательно, подстановка ее вместо одной из переменных функции $f(x_1,...,x_n)$ не выведет за пределы S.

4. Добавление фиктивной переменной не влияет на значение функции, а следовательно не выводит ее за пределы класса.

5. При удалении фиктивной переменной значение функции останется неизменным. Следовательно, значения функции на обратных наборах останутся обратными. □

$M: \{f(x_1,...,x_n) \in P_2 | \ \forall \alpha,\ \beta:\ \alpha \preceq \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)\}$

Утверждение. $[M] = M$.

Доказательство. Пусть $f(x_1,...,x_n) \in M$.

1. Отождествление переменной не влияет на сравнимость двух наборов, следовательно не выводит за пределы класса.

2. Аналогично, при перестановке переменных наборы α и β останутся сравнимыми.

3. Пусть $g(x_{n+1},...,x_m) \in M$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1,...,x_{n-1},x_{n+1},...,x_m) = f(x_1,...,x_{n-1},g(x_{n+1},...,x_m)).$$

Т.к. $g(x_{n+1},...,x_m) \in M$, то на наборах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ таких, что $\overline{a} \preceq \overline{b}$ $g(\overline{a}) \leq g(\overline{b})$. Таким образом, $\alpha' \preceq \beta'$, где $\alpha' = (a_1,...,g(\overline{a})),\quad \beta' = (b_1,...,g(\overline{b}))$. Отсюда следует, что

$$f(\alpha') \leq f(\beta')$$

или

$$f'(\alpha) \leq f'(\beta)$$
$$f'(x_1,...,x_{n-1},x_{n+1},...,x_m) \in M$$

4. Добавление фиктивной переменной не влияет на значение функции, а следовательно не выводит ее за пределы класса.

5. Удаление фиктивной переменной не влияет на значение функции, а следовательно не выводит ее за пределы класса. □

$L: \{f(x_1,...,x_n) \in P_2 | \ \exists\ a_0,...,a_n \in \{0;1\}\ f(x_1,...,x_n) = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i\}$

Утверждение. $[L] = L$.

Доказательство. Пусть $f(x_1,...,x_n) \in L$.

1. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1,...,x_{n-1},x_n) = f(x_1,...,x_{n-1},x_{n-1}).$$
$$f'(x_1,...,x_{n-1},x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + ... + a_{n-1} \cdot x_{n-1} + a_n \cdot x_{n-1}$$
$$f'(x_1,...,x_{n-1},x_n) \in L.$$

2. Пусть над переменными $x_1,...,x_n$ совершили перестановку. Обозначим переставленные переменные за $x_{i_1},...,x_{i_n}$. Получим новую функцию

$$f'(x_{i_1},...,x_{i_n}) = a_{i_0} + a_{i_1}x_{i_1} + ... + a_{i_n}x_{i_n}.$$
$$f'(x_{i_1},...,x_{i_n}) \in L.$$

3. Пусть $g(x_{n+1},...,x_m) \in M$. Рассмотрим функцию

$$f'(x_1,...,x_{n-1},x_{n+1},...,x_m) = f(x_1,...,x_{n-1},g(x_{n+1},...,x_m)).$$

Т.к. $g(x_{n+1},...,x_m) \in M$, то на наборах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ таких, что $\overline{a} \preceq \overline{b}$ $g(\overline{a}) \leq g(\overline{b})$. Таким образом, $\alpha' \preceq \beta'$, где $\alpha' = (a_1,...,g(\overline{a}))$, $\beta' = (b_1,...,g(\overline{b}))$. Отсюда следует, что

$$f(\alpha') \leq f(\beta')$$

или

$$f'(\alpha) \leq f'(\beta) \; f'(x_1,...,x_{n-1},x_{n+1},...,x_m) \in M$$

4. Пусть x_{n+1} новая фиктивная переменная, тогда коэффициент при этой переменной в полиноме Жегалкина будет равен нулю. Соответственно, при добавлении этой переменной функция не выйдет за пределы класса.

5. Аналогично доказывается случай удаления фиктивной переменной. $\square$

Теорема. *Для того, чтобы система функций B была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.*

Доказательство. Необходимость. Пусть B полна, т.е. $[B] = P_2$. Допустим, B лежит в одном из указанных классов - обозначим его за R, т.е. $B \subseteq R$. Тогда, в силу свойств замыкания и замкнутости R имеем

$$P_2 = [B] \subset [R] = R.$$

Значит, $R = P_2$, а это не так. Необходимость доказана.

Доказательству достаточности предпошлем три леммы.

Лемма 1. *Если $f(x_1,...,x_n) \notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одного переменного, т.е. константу.*

Лемма 2. *Если $f(x_1,...,x_n) \notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\overline{x}$.*

Лемма 3. *Если $f(x_1,...,x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функций вида x и $\overline{x}$, а также путем навешивания отрицания над f можно получить функцию $x_1 \& x_2$.*

Достаточность. Пусть B целиком не содержится ни в одном из пяти указанных классов. тогда из B можно выделить подсистему B', содержащую не более пяти функций, которая также обладает этим свойством. Для этого возьмем в B фнукции f_i, f_j, f_k, f_m, f_l, которые не принадлежат соответственно классам T_0, T_1, S, M, L, и положим

$$B' = \{f_i, f_j, f_k, f_m, f_l\}.$$

Можно считать, что все эти функции зависят от одних и тех же переменных $x_1, ..., x_n$.

Доказательство достаточности будем проводить в три этапа:

I. Построение при помощи функций f_i, f_j и f_k констант 0 и 1.

Рассмотрим функцию $f_i \notin T_0$. Возможны два случая:

1. $f_i(1, ..., 1) = 1$. Тогда $\phi(x) = f_i(x, ..., x)$ есть константа 1, т.к.

$$\phi(0) = f_i(0, ..., 0) = 1, \quad \phi(1) = f_i(1, ..., 1) = 1.$$

Вторая константа получается из $f_j: \ f_j(1, ..., 1) = 0$.

2. $f_i(1, ..., 1) = 0$. Тогда $\phi(x) = f_i(x, ..., x)$ есть $\overline{x}$, т.к.

$$\phi(0) = f_i(0, ..., 0) = 1, \quad \phi(1) = f_i(1, ..., 1) = 0.$$

Возьмем f_k ($f_k \notin S$). Т.к. мы имеем $\overline{x}$, то в силу леммы 1 из f_k мы можем получить константу. Из полученной константы и $\overline{x}$ можно получить вторую константу.

Итак, в обоих случаях имеем константы 0 и 1.

II. Построение при помощи констант 0, 1 и функции f_m функции $\overline{x}$. Это осуществляется на основе леммы 2.

III. Построение при помощи констант 0, 1 и функций $\overline{x}$ и f_l функции $x_1 \& x_2$. Это осуществляется на основе леммы 3.

Таким образом, при помощи формул над B' (а значит и над B) мы реализовали функции $\overline{x}$ и $x_1 \& x_2$. Этим достаточность доказана. $\square$