Билет I. Замкнутость класса монотонных функций в алгебре логики. Лемма о немонотоной функции.

Обозначим за E_2 множество

$$E_2 = \{0, 1\}.$$

Назовём $n-$местной функцией алгебры логики

$$P_2^n = \{f : E_2^n \to E_2\}.$$

Множеством всех функций алгебры логики назовём

$$P_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_2^n.$$

Обозначим за M множество всех монотонных функций.

Определение 1

Функция f из P_2 называется монотонной, если :

$$\forall \widetilde{x_1}, \widetilde{x_2} \in E_2^n : \widetilde{x_1} \preceq \widetilde{x_2},$$

$$f(\widetilde{x_1}) \leq f(\widetilde{x_2}).$$

Где под $\widetilde{x_1} \preceq \widetilde{x_2}$ понимается поэлементная сравнимость наборов.

Определение 2

Пусть R некое подмножество функций из P_2. Замыканием R называется множество всех функций, которые можно получить путём конечного применения операций суперпозиции к функциям множества R. Замыкание обозначается $[R]$.

Определение 3

Класс функций называется замкнутым, если применяя оператор замыкания мы не выйдем за предел класса, т.е. $[R] = R$.

Операции суперпозиции:
1. Отождествление переменных.
2. Подстановка.
3. Переименование.
4. Добавление фиктивной переменной.
5. Удаление фиктивной переменной.

Замкнутость класса M

Класс монотонных функций замкнут.

$$[M] = M.$$

Доказательство

Пусть есть монотонная функция $f(x_1, ..., x_n) \in M$ и два сравнимых набора $\widetilde{x_1} = (x_1, ..., x_n) \preceq \widetilde{x_2} = (\grave{x}_1, ..., \grave{x}_n)$. Для того, чтобы проверить, является ли класс M замкнутым, достаточно проверить, не выводят ли операции суперпозиций за пределы класса.

1. Отождествление переменных.
Пусть отождествлены (без ограничения общности) последние m переменных, тогда

$$f(x_1, ..., x_{n-m}, ..., x_{n-m}) \leq f(\grave{x}_1, ..., x_{\grave{n-m}}, ..., x_{\grave{n-m}}),$$

так как первые $n - m$ элементов сравнимы, а последние m из сравнимых наборов $\Rightarrow$ тоже сравнимы.

2. Операция подстановки.
Пусть есть две монотонные функции $f(x_1, ..., x_n)$ и $g(x_1, ..., x_m)$, такие что

$$f(\widetilde{x_1}) \leq f(\widetilde{x_2}),$$

$$g(\widetilde{x_1}) \leq g(\widetilde{x_2}).$$

Без ограничения общности, подставим функцию $g(x_1, ..., x_m)$ в функцию $f(x_1, ..., x_n)$ вместо переменной x_n. Получим

$$f(x_1, ..., g(\widetilde{x_1})) \leq f(\grave{x}_1, ..., g(\widetilde{x_2})),$$

так как $g(\widetilde{x_1}) \leq g(\widetilde{x_2}) \Rightarrow$ наборы $(x_1, ..., g(\widetilde{x_1}))$ и $(\grave{x}_1, ..., g(\widetilde{x_2}))$ покомпонентно сравнимы.

3. Переименование переменных.
Пусть над переменными $x_1, ..., x_n$ совершили перестановку. Обозначим переставленные переменные за $y_1, ..., y_n$. Так как переменные в наборах покомпонентно сравнимы:

$$f(y_1, ..., y_n) \leq f(\grave{y}_1, ..., \grave{y}_n).$$

4. Добавление фиктивной переменной.
Пусть x_{n+1} и $\grave{x}_{n+1}$ — — новые фиктивные переменные, тогда

$$f(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \leq f(\grave{x}_1, ..., \grave{x}_n, \grave{x}_{n+1}),$$

так как наборы $(x_1, ..., x_n)$ и $(\grave{x}_1, ..., \grave{x}_n)$ сравнимы, а переменные x_{n+1} и $\grave{x}_{n+1}$ не влияют на значение функции.

5. Удаление фиктивной переменной.
Идентично.

Замкнутость доказана.

Лемма о немонотонной функции

Если функция $f(x_1, ..., x_n) \notin M$, то из неё путём подстановки констант 0 и 1 и переменной x можно получить функцию $\overline{x}$.

Доказательство:

Пусть функция $f(x_1, ..., x_n) \notin M$. Теперь покажем, что существует пара соседних наборов (отличающихся только по одной координате) $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ таких, что $\widetilde{\alpha} \preceq \widetilde{\beta}$ и

$$f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta}).$$

Действительно, так как $f \notin M$, существует пара наборов $\widetilde{\alpha^1}$ и $\widetilde{\beta^1}$ такие, что $\widetilde{\alpha^1} \preceq \widetilde{\beta^1}$ и $f(\widetilde{\alpha^1}) > f(\widetilde{\beta^1})$. Если $\widetilde{\alpha^1}$ и $\widetilde{\beta^1}$ соседние наборы, то цель достигнута. Если же нет, значит они отличаются на $t > 1$ координат, причём в наборе $\widetilde{\alpha^1}$ эти координаты равны нулям, а в $\widetilde{\beta^1}$ единицам. В силу этого между наборами $\widetilde{\alpha^1}$ и $\widetilde{\beta^1}$ можно вставить $t - 1$ промежуточных наборов, таких что

$$\widetilde{\alpha^1} \preceq \widetilde{\alpha^2} \preceq ... \preceq \widetilde{\alpha^t} \preceq \widetilde{\beta^1}.$$

Очевидно, что наборы, стоящие рядом в этой цепочке являются соседними. Так как $f(\widetilde{\alpha^1}) > f(\widetilde{\beta^1})$, по крайней мере на одной из этих пар соседних наборов, обозначим их $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, будет выполняться $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$. Допустим что эти наборы соседние по i координате $\Rightarrow$

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n),$$

$$\widetilde{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_{i-1}, 1, \beta_{i+1}, ..., \beta_n).$$

Теперь в функцию $f(x_1, ..., x_n)$ вместо каждого аргумента x_k подставим константу a_k, если $k \neq i$ и переменную x, если $k = i$. В результате получим функцию одной переменной

$$g(a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Теперь покажем, что функция $g(x) = \overline{x}$:

$$g(0) = g(a_1, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_n) = f(\widetilde{\alpha}) = 1,$$

$$g(1) = g(a_1, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n) = f(\widetilde{\beta}) = 0.$$

Лемма доказана.