

## **1. Назначение информационно-измерительных систем. Структурная схема.**

Экспериментальные исследования и комплексные испытания новой техники немислимы в настоящее время без проведения разнообразных измерений. Объекты испытания могут быть весьма сложными, например, турбины энергетических установок, узлы и агрегаты авиационной техники (от элементов планера самолета или вертолета до вращающихся воздушных авиационных винтов, - тянущих, несущих, рулевых), изделия космической техники, сложные технологические установки. Число параметров, которые характеризуют состояние объекта в различных режимах работы и которые надо контролировать в ходе испытаний, может достигать нескольких тысяч. При этом обычно на габариты и вес измерительной аппаратуры накладываются жесткие массогабаритные ограничения. В этих условиях невозможно обеспечить измерения требуемого числа разнообразных параметров с помощью набора соответствующих измерительных приборов. Помимо громоздкости такого набора показаниями измерительных приборов трудно будет пользоваться, так как получение всего объема измерительной информации необходимо выполнить за ограниченное время, и человек-оператор в силу физиологических ограничений не сможет это сделать.

Поэтому современная измерительная техника, предназначенная для использования в описанных выше случаях, наряду с измерениями должна обеспечивать информационное обслуживание исследуемого объекта. Информационное обслуживание предполагает автоматический сбор, представление, доставку, запоминание, регистрацию, отображение, обработку и анализ измерительной информации, полученной в результате отдельных измерений. Эту задачу решает не отдельный измерительный прибор, а информационно-измерительная система (ИИС).

Исходя из изложенного, обобщенную структурную схему ИИС можно представить в следующем виде (рисунок 1.1).

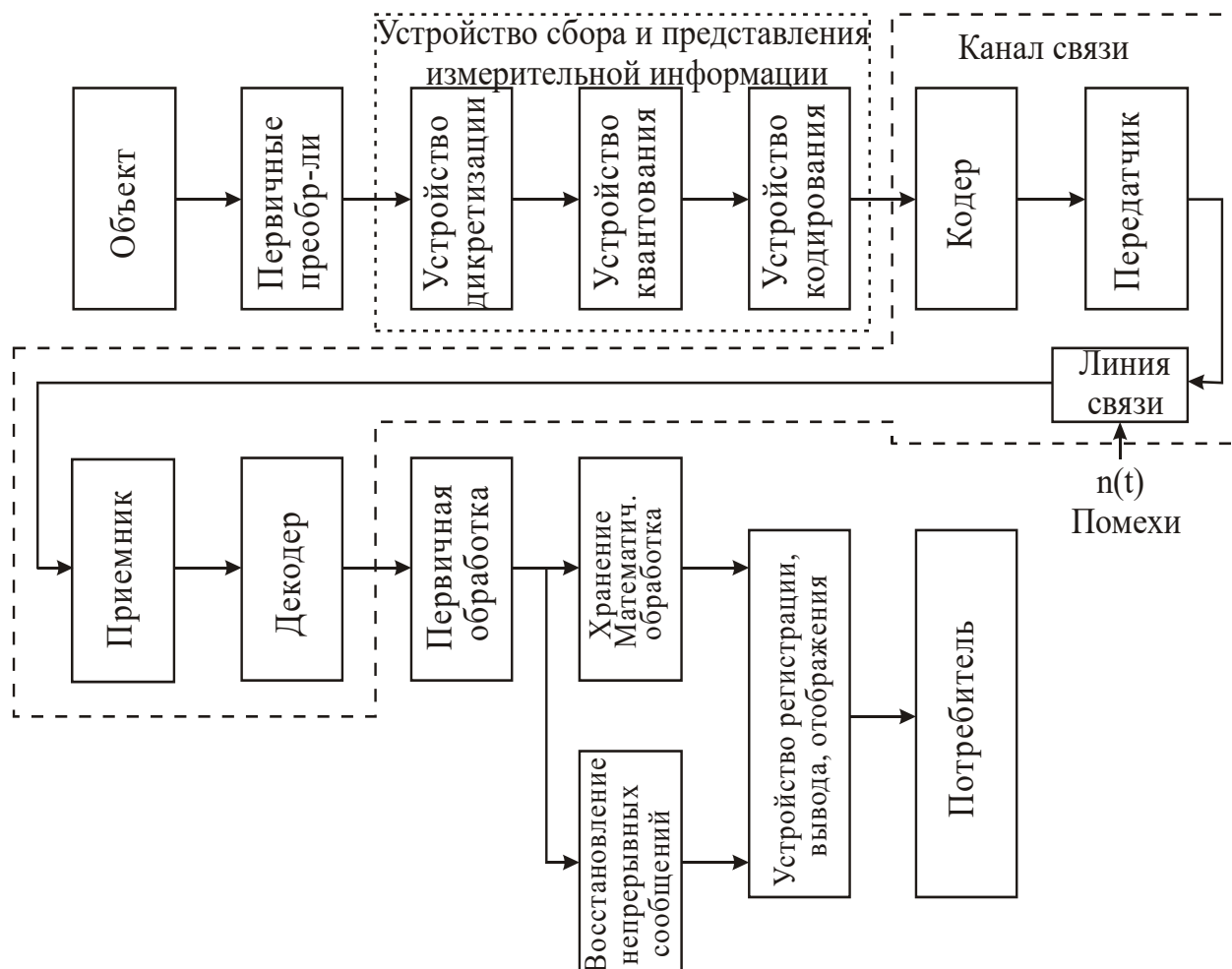


Рисунок 1.1 – Обобщенная структурная схема ИИС

## 2. Основные определения: измерительная система, измерительный канал, компонент измерительной системы.

**Измерительная информационная система (ИИС)** — это совокупность функционально объединенных измерительных, вычислительных и других вспомогательных технических средств, для получения измерительной информации, ее преобразования, обработки с целью представления потребителю в требуемом виде, либо автоматического осуществления логических функций контроля, диагностики, идентификации и др.

**Измерительная информация** – это информация, которая может быть представлена совокупностью масштабированных чисел, сопоставимых с единицами измерений определенных физических величин.

В зависимости от выполняемых функций ИИС реализуются в виде:

- измерительных систем (ИС),

- систем автоматического контроля (САК),
- систем технической диагностики (СТД) и др.

Системы технической диагностики выдают на основании результатов измерений обобщенные заключения о состоянии исследуемого объекта, характере неисправностей и способах их устранения. Поэтому такие системы должны иметь хорошо развитые вычислительные и логические устройства.

В системах автоматического контроля осуществляется сопоставление реальных значений параметров, характеризующих процесс или объект, со значениями этих параметров, принятыми за норму. Информация, выдаваемая системой, носит качественный характер и отвечает на вопрос, находится ли объект в заданном режиме или нет.

В измерительных системах осуществляются, как правило, прямые измерения. Информация в таких системах представляется непосредственно оператору в виде именованных чисел, отнесенных к соответствующей единице измерения, то есть в виде измерительной информации.

Естественно, приведенное деление систем условно. Каждая из приведенных видов систем обычно снабжается функциями и других систем. Например, в измерительной системе может производиться распределение значений измеряемой величины по уровню. В этом случае ИС должна содержать элементы системы автоматического контроля, осуществляющие сравнение измеренного значения с заданным уровнем.

**Измерительная система** – это совокупность измерительных, связующих, вычислительных компонентов, образующих измерительные каналы, и вспомогательных устройств (компонентов измерительной системы), функционирующих как единое целое, предназначенная для:

- получения информации о состоянии объекта с помощью измерительных преобразований в общем случае множества изменяющихся во времени и распределенных в пространстве величин, характеризующих это состояние;
- машинной обработки результатов измерений;
- регистрации и индикации результатов измерений и результатов их машинной обработки;
- преобразования этих данных в выходные сигналы системы в разных целях.

**Измерительный канал измерительной системы** – это конструктивно или функционально выделяемая часть ИС, выполняющая законченную функцию от восприятия измеряемой величины до получения результата ее измерений, выражаемого числом или соответствующим ему кодом, или до получения

аналогового сигнала, один из параметров которого — функция измеряемой величины.

**Компонент измерительной системы** – это входящее в состав ИС техническое устройство, выполняющее одну из функций, предусмотренных процессом измерений.

В соответствии с этими функциями компоненты подразделяют на измерительные, связующие, вычислительные, комплексные и вспомогательные.

**Измерительный компонент измерительной системы** – это средство измерений, для которого отдельно нормированы метрологические характеристики, например измерительный прибор, измерительный преобразователь, мера.

**Связующий компонент измерительной системы** - это техническое устройство или часть окружающей среды, предназначенное или используемое для передачи с минимально возможными искажениями сигналов, несущих информацию об измеряемой величине от одного компонента ИС к другому (проводная линия связи, радиоканал, телефонная линия связи, высоковольтная линия электропередачи с соответствующей каналообразующей аппаратурой, а также переходные устройства — клеммные колодки, кабельные разъемы и т. п.).

**Вычислительный компонент измерительной системы** – это цифровое вычислительное устройство (или его часть) с программным обеспечением, выполняющее вычисления результатов измерений (выражаемых числом или соответствующим ему кодом) по результатам первичных измерительных преобразований в ИС, а также логические операции и управление работой ИС.

**Вспомогательный компонент измерительной системы** – это техническое устройство (блок питания, система вентиляции устройства, обеспечивающие удобство управления и эксплуатации ИС и т. п.), обеспечивающее нормальное функционирование ИС, но не участвующее непосредственно в измерительных преобразованиях.

Выделим из обобщенной структурной схемы ИИС один измерительный канал (рисунок 1.2). Он содержит все перечисленные компоненты ИИС.

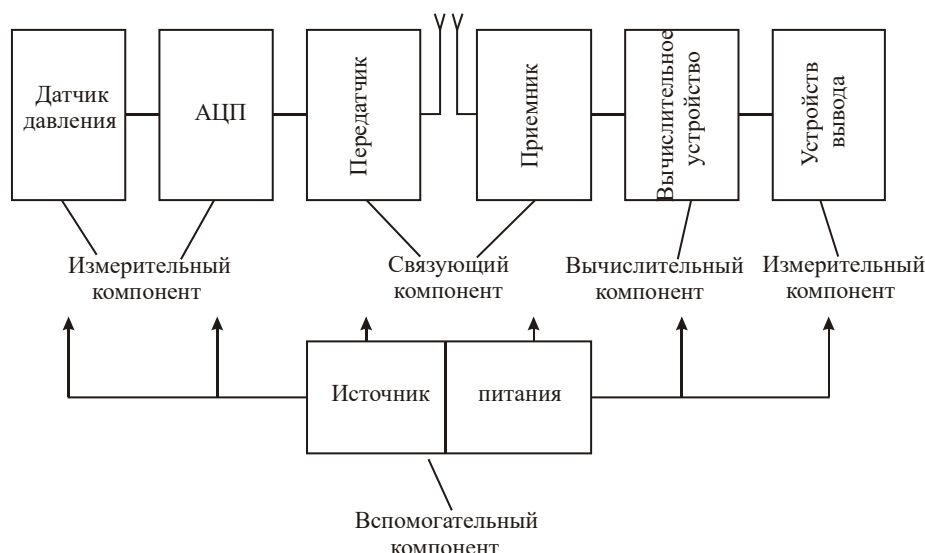


Рисунок 1.2 – Измерительный канал

Вспомогательные компоненты обычно обслуживают всю измерительную систему.

### 3. Классификация информационно-измерительных систем.

#### Разделение ИИС по характеристикам входных сигналов.

##### Классификация ИИС

При классификации ИИС отвлекаются от частных деталей, определяемых узким назначением систем и их конструктивным исполнением, и обращают внимание на наиболее общие, системные отличительные особенности. Исходя из этого, в классификации должен быть отражен характер входных величин, вид выходной информации и общие принципы построения систем.

##### Входные величины

Поступающие на входы ИИС сигналы соответствуют большому количеству однородных или разнородных по физической природе величин, например механических, электрических, тепловых и т.п. Целесообразно выделить особенности исследуемых величин, определяющих принцип действия ИИС с точки зрения системотехники. Наиболее типовыми являются следующие характеристики входных величин, позволяющие разделить их на классы (таблица 2.1).

Классификационный признак	Классы	
Количество величин	$n=1$	$n \geq 2$
Поведение во времени	Неизменное	Изменяющееся
Расположение в пространстве	Сосредоточенное в точке	Распределенное по пространству
Характер величин	Непрерывный	Дискретный

Энергетический признак	Активные	Пассивные
Взаимосвязь внешних помех с входными величинами	Независимые помехи	Помехи, связанные с входными величинами

Количество входных величин  $n$  определяется суммой всех величин, даже если они однородные. Фактически  $n$  определяет число точек, в которых производятся измерения. При  $n \geq 2$  входные величины могут быть как независимыми друг от друга, так и взаимосвязанными.

Измерение одной величины ( $n=1$ ) реализуется, как правило, измерительными приборами, а измерение множества величин ( $n \geq 2$ ) реализуется с помощью ИСС.

Входные величины могут изменяться во времени и быть распределенными в пространстве. В таких случаях говорят об исследуемых процессах, которые описываются временными или/и пространственными функциями.

Активными называют величины, оказывающие энергетическое воздействие на входные устройства ИС. Такими величинами являются электрический ток и напряжение, световые, тепловые излучения и т.п.

Пассивными являются такие величины, как сопротивления электрических цепей, твердость, жесткость и т.п. Первичные преобразователи, преобразующие эти величины в электрический сигнал, требуют подачи на них электропитания.

Внешние по отношению к ИИС помехи могут быть не связаны с входными измеряемыми величинами, например помеха от сети промышленной частоты 50 Гц. В ряде случаев помехи неотделимы от входных величин, так как физически вызываются теми же явлениями. Например, трудно разделить деформацию детали, вызванную ее нагревом и действием механических сил.

#### **4. Классификация информационно-измерительных систем.**

##### **Разделение ИИС по виду выходной информации.**

Вид выходной информации

По виду выходной информации ИИС могут быть разделены на измерительные системы, на выходах которых получают измерительную информацию, и на системы, выдающие на выходах суждения о состоянии исследуемых объектов, - контрольные, диагностические, распознающие системы. Выше мы кратко перечислили особенности каждой из этих систем. Для информационно-измерительных систем ключевым является слово «измерительные». Согласно ГОСТ (16263-70) измерение – это нахождение значений физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Таким образом, для измерительных систем основными являются измерительные процедуры. Под измерительной процедурой понимают восприятие входных величин и преобразование их в электрические сигналы, сравнение полученных сигналов с мерами и получение измерительных сигналов, преобразование измерительных сигналов, в том числе получение цифровых значений этих сигналов.

Современные ИИС выполняют, как правило, и вычислительные процедуры. К вычислительным процедурам относятся математические преобразования аналоговых, дискретных и цифровых сигналов. В настоящее время в состав ИС входят компьютеры, микропроцессоры и другие средства вычислительной техники.

Выходная информация ИС зависит от цели измерения. Под целью измерения понимается физическая величина, количественная оценка которой в конечном счете является задачей всего исследования.

Основные цели измерения.

1. Измерение направлено на нахождение значений входных величин (температура, механические нагрузки, напряжение и т.п.). При этом в зависимости от характера взаимосвязи между входными величинами выделяют:

1.1 ИС для измерения независимых входных величин  $X = \{[x_1], [x_2], \dots, [x_n]\}$ ;

1.2 ИС для измерения входных величин  $G = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , непосредственное раздельное измерение которых невозможно, то есть величины  $q_i$ , являются зависимыми.

2. Измерение направлено на нахождение функциональных зависимостей. При этом целью измерения могут быть:

2.1 функции от входных величин  $f(X)$ , например мощность, скорость, и т.п.;

2.2 параметры зависимости  $\{F[X(\Lambda)]\}$  входных величин  $X(\Lambda) = x_1(\lambda_1), x_2(\lambda_2), \dots, x_n(\lambda_n)$ , от заданного аргумента  $\Lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , например, измерение коэффициентов корреляции, спектральной плотности мощности.

## 5. Классификация информационно-измерительных систем.

### Разделение ИИС по структуре построения.

Принципы построения

В наиболее общем виде выделяют следующие классификационные признаки, характеризующие принципы построения ИИС

Классификационный признак	Классы	
Наличие специального канала связи	Отсутствует	Имеется
Порядок выполнения операций получения информации	Последовательный	Параллельный
Агрегатирование состава системы	Агрегатированный	Неагрегатированный

Использование стандартного интерфейса	Не используется	Используется
Наличие программно-управляемых вычислительных устройств (микропроцессоры и т.п.)	Отсутствуют	Имеются
Наличие контуров информационной обратной связи	Разомкнутые системы	Компенсационные (одно- и многоконтурные) системы
Изменение скоростей получения и выдачи информации	Без изменения (в реальном времени)	С изменением
Сигналы, используемые в ИИС	Аналоговые	Кодоимпульсные
Структурная и информационная избыточность	Безизбыточные системы	Избыточные системы
Адаптация к исследуемым величинам	Неадаптивные системы	Адаптивные системы

## **6. Принципы линейного разделения измерительных каналов: принцип частотного разделения измерительных каналов, принцип временного разделения измерительных каналов.**

### *Линейное разделение каналов*

В классификации ИИС по характеристикам входных величин мы выделили класс ИИС с числом входных величин  $n \geq 2$ . Такие ИИС называются многоканальными, и они применяются обычно при проведении комплексных исследований и испытаний сложных объектов. Число входных величин, которые надо измерить, может достигать нескольких сотен. При этом должна быть решена задача уплотнения (разделения) измерительных каналов. Это значит, что сначала измерительные сигналы надо представить в виде, обеспечивающим их передачу по общей для всех измерительных каналов линии связи (уплотнить каналы), а затем из принятого группового сигнала выделить сигналы каждого измерительного канала (разделить каналы) для их последующей обработки и выдачи потребителю.

Часто в обоих случаях употребляют термин «разделение каналов», поэтому в дальнейшем будем употреблять именно этот термин.

Линейное разделение каналов может осуществляться при использовании для формирования канальных сигналов линейно независимых неортогональных функций или линейно независимых ортогональных функций. Линейная независимость функций определяются теоремой Грама:



«Чтобы функции  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ , заданные на интервале  $0 \leq t \leq T$ , были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы был отличен от нуля определитель матрицы, элементы  $a_{ij}$  которой вычислены с помощью выражения

$$a_{ij} = \int_0^T f_i(t) \cdot f_j(t) dt \quad (3.1)$$

$$G(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.2)$$

Пример: экспоненциальные функции  $e^{-\frac{t}{\tau_1}}, e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \dots, e^{-\frac{t}{\tau_n}}$  при

$\tau_1 \neq \tau_2 \neq \dots \neq \tau_n$  являются линейно независимыми неортогональными функциями.

Чтоб функции были ортогональными, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_i(t) \cdot f_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ E, & i = j \end{cases} \quad (3.3)$$

Пример: тригонометрические функции  $\sin(\omega \cdot t), \sin(2\omega \cdot t), \dots, \sin(n\omega \cdot t)$  - линейно независимые ортогональные функции.

### Принцип частотного разделения каналов

При частотном разделении каналов каждому сигналу сообщения отводится своя полоса частот на оси частот, такая, чтобы спектры разных канальных сигналов не пересекались. Перенос спектров сигналов сообщений (рисунок 3.1) в более высокочастотную область (рисунок 3.2) осуществляется при модуляции сигналом сообщения более высокочастотного сигнала, называемого поднесущей. В качестве поднесущих используются гармонические колебания вида

$$U_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad (3.4)$$

где  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $N$  – число каналов, подлежащих уплотнению.

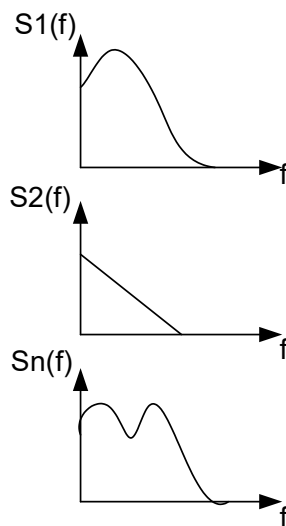
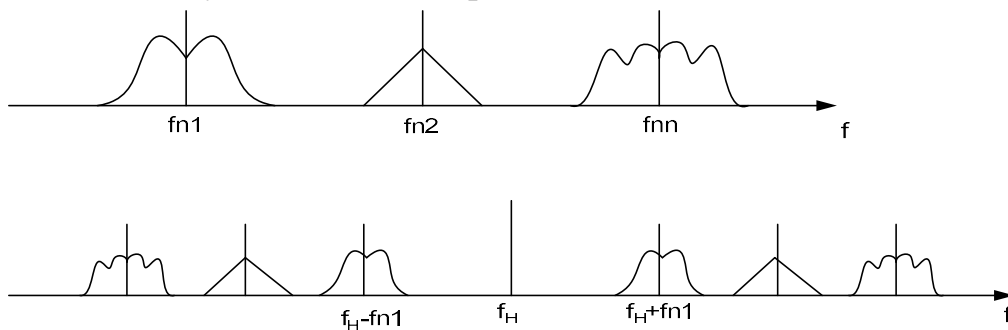


Рисунок 3.1 – Спектры исходных сигналов сообщений

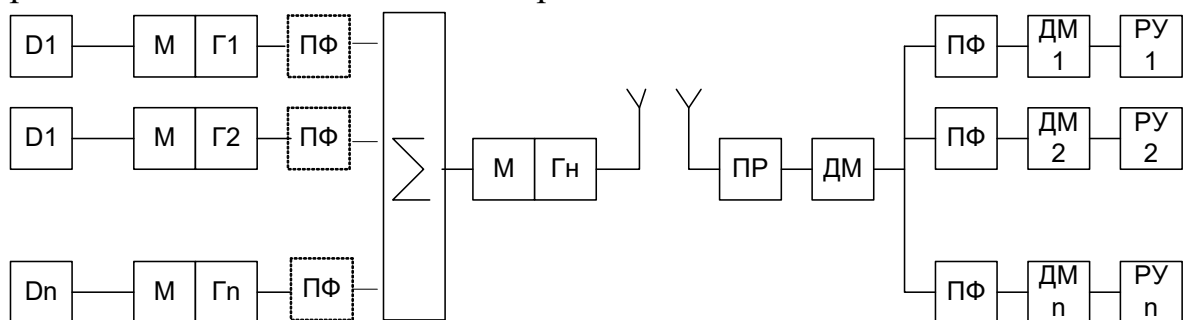


$f_n$  - поднесущая частота,

$f_H$  - несущая частота

Рисунок 3.2 – Спектры сигналов в групповом тракте (линии связи)

На рисунке 3.3 представлена структурная схема многоканальной измерительной системы с частотным разделением каналов



Д – датчики, М – модулятор, Г – генератор,  $\Sigma$  - сумматор,

Гн – генератор несущей, ПР – приемник,

ПФ – полосовой фильтр для ограничения влияния других каналов,

ДМ – демодулятор, РУ – регистрирующее устройство

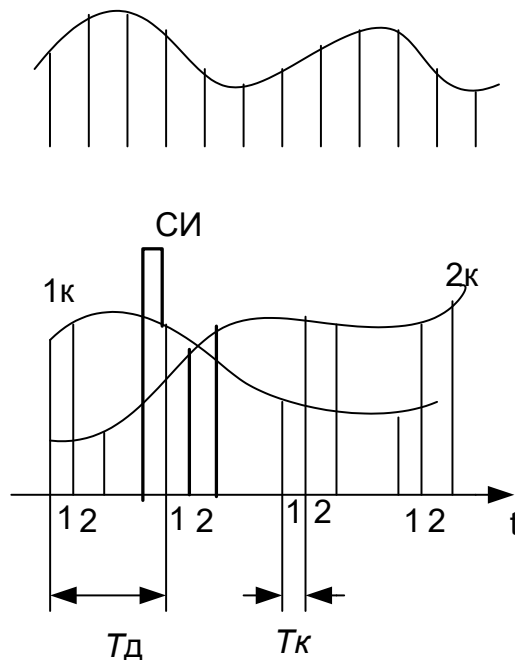
Рисунок 3.3 – Реализация принципа частотного разделения каналов

## Принцип временного разделения каналов

В основе временного разделения каналов лежит теорема В.А. Котельникова о том, что непрерывный сигнал, спектр которого ограничен максимальной частотой  $F_{c_{\max}}$  полностью определяется его дискретными отсчетами, взятыми через интервалы времени

$$\Delta t = \frac{1}{2F_{c_{\max}}}.$$

При этом в промежутках между отсчетами одного канала можно передать отсчеты сигналов других каналов. Таким образом, сигналы от разных источников подключаются к общей линии поочередно, не перекрываясь друг с другом (рисунок 3.4). Такие сигналы удовлетворяют условиям линейной независимости и ортогональности.

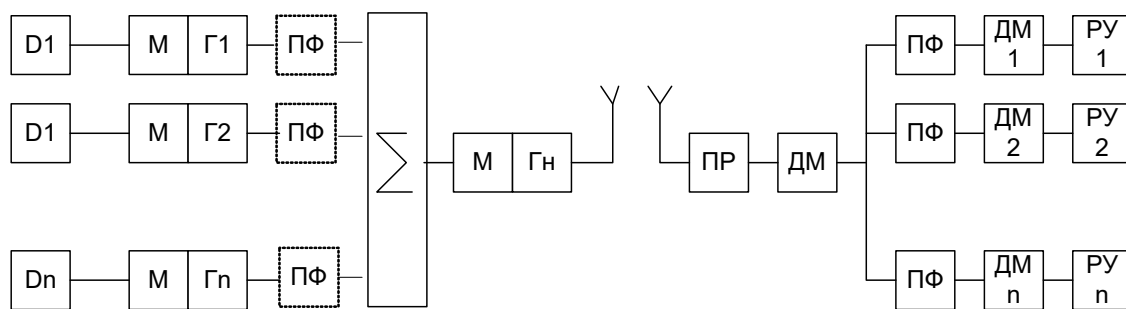


$T_d$  – период дискретизации,  $T_k$  – канальное время, СИ – синхроимпульс

Рисунок 3.4 – Иллюстрация принципа временного разделения каналов

## 7. Структурные схемы многоканальных измерительных систем.

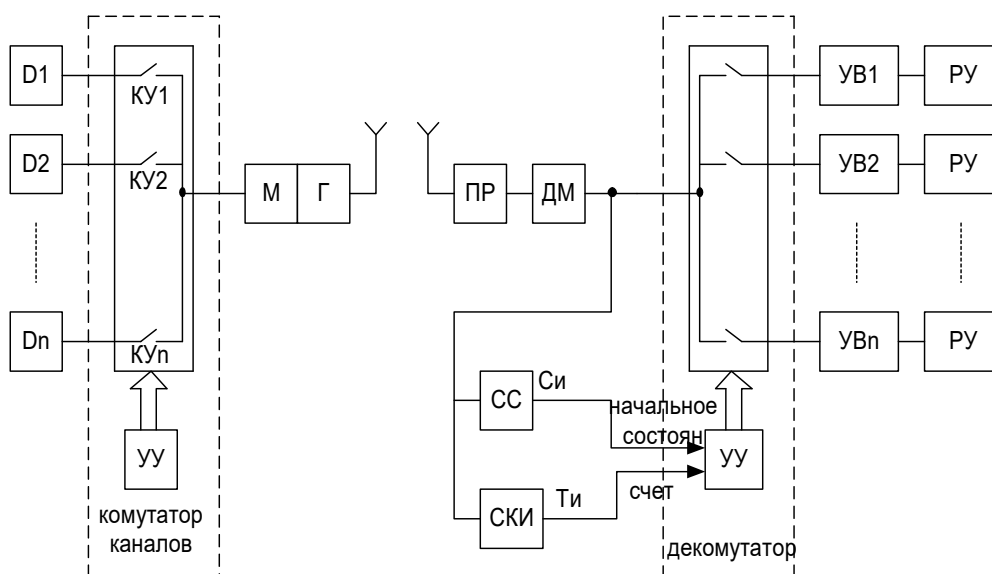
На рисунке 3.3 представлена структурная схема многоканальной измерительной системы с частотным разделением каналов



$D$  – датчики,  $M$  – модулятор,  $\Gamma$  – генератор,  $\Sigma$  – сумматор,  
 $\Gamma_n$  – генератор несущей,  $ПР$  – приемник,  
 $ПФ$  – полосовой фильтр для ограничения влияния других каналов,  
 $ДМ$  – демодулятор,  $РУ$  – регистрирующее устройство

Рисунок 3.3 – Реализация принципа частотного разделения каналов

На рисунке 3.5 показана структурная схема многоканальной измерительной системы с временным разделением каналов и линией связи в виде радиолинии. Вместо радиолинии в ряде случаев может быть использована проводная линия связи.



$D$  – датчик,  $КУ$  – ключевое устройство,  $УУ$  – устройство управления,  
 $M$  – модулятор,  $\Gamma$  – генератор,  $ПР$  – приемник,  $ДМ$  – демодулятор,  
 $УВ$  – устройство восстановления,  $РУ$  – регистрирующее устройство,  
 $СС$  – селектор синхроимпульсов,  
 $СКИ$  – селектор канальных импульсов

Рисунок 3.5 – Структурная схема измерительной системы с временным разделением каналов

Для образования разделяемых измерительных каналов работа устройств управления ( $УУ$ ) ключевыми элементами ( $КУ$ ) на передающей и приемной стороне должно быть синхронная и синфазная. Поэтому один из каналов отводится для

передачи синхроимпульса, существенно отличающийся по одному из параметров от информационных импульсов (отсчетов сигналов) (СИ на рисунке 3.4 имеет амплитуду, большую, чем максимальное значение отсчета измерительного сигнала). СИ выделяется на приемной стороне селектором синхроимпульса (СС), и устанавливает счетчик каналов на приемной стороне в начальное состояние, с которого начинается счет каналов, т.е. обеспечивает синфазность УУ.

Селектор канальных импульсов (СКИ) формирует из принимаемого группового сигнала синхронный канальный импульс, который поступает на счетный вход УУ и осуществляет переключение счетчика каналов в темпе поступления отсчетов соседних каналов.

Как видно из схемы, первичное преобразование измерительных сигналов в СВРК всегда есть преобразование непрерывных сигналов в дискретные, то есть дискретизация. Соответственно, в первой ступени модуляции осуществляется, как правило, АИМ-1.

Групповой сигнал с выхода коммутатора каналов может подвергаться вторичному преобразованию. Если пропорционально модулирующему сигналу (сигналу датчика) изменяется ширина канального импульса  $\tau_k$ , то получаем широтно-импульсную модуляцию (ШИМ). Рис. \_\_\_\_

Если по закону изменения сигнала датчика меняется положение переднего фронта импульса относительно начала отсчета (обычно начало канального интервала), то получим время-импульсную модуляцию (ВИМ).

Сигнал с выхода коммутатора каналов может также преобразовываться в цифровой сигнал, т. е. в код. Такой вид преобразования еще называют кодо-импульсной модуляцией (КИМ).

Во второй ступени модуляции последовательности импульсов, образующих сигналы с АИМ, ШИМ или ВИМ, может модулировать несущую по амплитуде (АМ), частоте (ЧМ) или фазе (ФМ).

## **8. Достоинства и недостатки ИИС с частотным разделением измерительных каналов.**

### ***Измерительные системы с частотным разделением каналов***

#### **Достоинства**

1) Одновременная (параллельная) передача сигналов от каждого датчика, независимо друг от друга. Благодаря этому практически отсутствует задержка получения измерительных сигналов на приемной стороне (если не учитывать время распространения сигнала в линии связи, которое увеличивается при увеличении дальности передачи).

2) «Живучесть» системы, которая обеспечивается опять же независимой передачей сигналов по каждому измерительному каналу.

## Недостатки

- 1) Ограниченное число измерительных каналов.
- 2) Неэффективное использование пропускной способности канала связи.

1) Нелинейность характеристик общего тракта передачи сигналов в СЧРК вызывает ограничение максимального количества каналов, которое может быть реализовано.

Пусть нелинейность характеристики общего тракта СЧРК описывается нелинейным уравнением:

$$U_{\text{ВЫХ}} = a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3 + \dots \quad (4.1)$$

$U_{\text{ВЫХ}}$  - сигнал с выхода группового тракта,  $U$  – сигнал на выходе сумматора. (Нелинейным элементом, в частности может являться модулятор несущей).

Сигнал  $U(t)$  образуется суммированием сигналов всех поднесущих в сумматоре:

$$U(t) = \sum_{k=1}^N E_k \cos \omega_k t. \quad (4.2)$$

Пусть для всех поднесущих амплитуды  $E_k=1$ .

Подставляя (4.2) в (4.1) получим в выходном сигнале следующие составляющие:

$$U_{\text{ВЫХ}} \rightarrow \begin{cases} \cos \omega_1 t, & \cos \omega_2 t, & \dots \\ \cos^2 \omega_1 t, & \cos^2 \omega_2 t, & \dots \\ 2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t, & 2 \cos \omega_1 t \cos \omega_3 t, & \dots \end{cases}$$

$$\text{Проведем замену } \cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t = \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t].$$

Таким образом, сигнал на выходе группового тракта, а соответственно на входах всех разделительных полосовых фильтров на приемной стороне, содержит не только составляющие входного сигнала, но и большой набор комбинационных частот типа  $\omega_1 \pm \omega_2$ . Чем больше число каналов  $N$ , тем больше комбинационных частот появляется в спектре сигнала.

При малом числе каналов ( $N \leq 6$ ) еще можно подобрать поднесущие частоты  $F_1, F_2, \dots, F_N$  так, чтобы комбинационные частоты не попадали в полосы пропускания разделительных фильтров. С увеличением числа каналов этого сделать уже не удастся.

Если ограничиться тремя слагаемыми в выражении (4.1), то число комбинационных частот вида  $\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$  равно 480 при числе каналов  $N=10$  и 1820

при  $N=15$ . Эти комбинационные частоты попадают в полосу пропускания канальных полосовых фильтров и создают помехи, которые называют перекрестными помехами. При большом числе каналов перекрестные помехи по своему характеру приближаются к флуктуационным шумам. Поэтому и бороться с этими помехами надо теми же способами, как и при борьбе с шумами. Один их путей – применение широкополосных видов модуляции, т. е. в поднесущих надо применять не АМ, а ЧМ. Применение ЧМ позволяет снизить требования к линейности характеристик общего тракта, поэтому в СЧРК наиболее широко применяется ЧМ поднесущих.

## **9. Достоинства и недостатки ИИС с временным разделением измерительных каналов.**

*Измерительные системы с временным разделением каналов*

Достоинства

1) Эффективное использование пропускной способности канала связи.

Вспомним теорему Котельникова, на которой основан принцип временного разделения каналов. В соответствии с этой теоремой период дискретизации непрерывного сигнала определяется значением максимальной частоты в его

спектре  $\Delta t = \frac{1}{2F_{c_{\max}}}$ . При переходе к частоте дискретизации получим  $F_{\text{д}} = 2F_{c_{\max}}$ .

Если измерительные сигналы неоднородны по частотным свойствам, то есть имеют разные  $F_{c_{\max}}$ , то для каждого измерительного сигнала можно выбрать в соответствии с теоремой Котельникова свою индивидуальную частоту дискретизации  $F_{\text{д}i}$ .

В групповой тракт каждую секунду поступает поток отсчетов

$$V_u = \sum_{i=1}^N F_{\text{д}i} = \sum_{i=1}^N 2F_{c_{i}}. \quad (4.12)$$

Скорость  $R$  поступления информации в групповой тракт равна

$$R = H(X)V, \quad (4.13)$$

где  $H(X)$  – энтропия совокупности сообщений  $N$  независимых датчиков,

$V$  – реальный поток отсчетов на входе группового тракта ( $V > V_u$ ).

Поскольку за пропускную способность канала связи принимают максимально возможную скорость передачи сообщений по этому каналу, то из (4.7) и (4.13) получим

$$H(X)V \leq W \log \left( 1 + \frac{\overline{P_C}}{P_{III}} \right). \quad (4.14)$$

Из (4.14) следует, что, снижая значение  $V$  в пределе до  $V_u$ , определяемого (4.12), можно обеспечить передачу сигналов всех измерительных каналов при минимальной широкополосности  $W$  группового тракта, то есть эффективно использовать его пропускную способность.

## 2) Практически неограниченное число измерительных каналов.

При рассмотрении принципа временного разделения каналов мы отмечали, что при дискретизации каждый измерительный сигнал преобразуется в последовательность отсчетов, следующих с периодом дискретизации  $T_d$  и имеющих длительность  $T_K$ , которая определяется временем, занимаемым отсчетом в групповом тракте многоканальной системы. Интервал  $T_K$  называют канальным интервалом, то есть интервалом, отведенном на передачу отсчета одного измерительного канала через групповой тракт. Минимальное значение  $T_K$  ограничено быстродействием устройств группового тракта. Эти устройства являются общими для всех измерительных каналов и поочередно преобразуют отсчеты измерительных сигналов, например в цифровой код. Время преобразования входных сигналов в таких групповых устройствах не может превышать канальный интервал:  $T_{ПР} \leq T_K$ .

В простейшем случае, когда периоды дискретизации измерительных сигналов всех каналов одинаковы, максимально возможное число каналов определяется как

$$N_{\max} = \frac{T_d}{T_{ПР \min}}. \quad (4.15)$$

Современная элементная база позволяет обеспечить время преобразования АЦП менее 1 мкс. Это значит, что при частоте дискретизации 1000 отс/с (типовая частота опроса измерительных сигналов, отображающих процессы в элементах и узлах изделий авиационной техники) число измерительных каналов может достигать 1000. Для реализации такого количества каналов в многоканальных измерительных системах последние строят по специальным структурам. Более подробно этот вопрос мы будем рассматривать позднее.

## Недостатки

1) Задержка восстановленного по дискретным отсчетам непрерывного измерительного сигнала относительно исходного сигнала.

Восстановление непрерывных сигналов по дискретным отсчетам может осуществляться двумя методами: фильтрационным и интерполяционным.

При фильтрационном методе дискретные отсчеты подают на вход фильтра нижних частот (ФНЧ), который выделяет нулевую спектральную зону из спектра



дискретизированного сигнала. В этой спектральной зоне содержатся все спектральные составляющие измерительного сигнала. Для более точного выделения составляющих измерительного сигнала требуется применение ФНЧ высоких порядков. Но чем выше порядок фильтра, тем больше задержка выходного сигнала относительно входного.

При интерполяционном методе в восстановлении непрерывного сигнала могут участвовать все дискретные отсчеты, полученные за время его существования, или некоторая группа рядом расположенных отсчетов.

В первом случае результат можно получить только после прихода самого последнего отсчета, т. е. задержка восстановленного сигнала будет равна длительности этого сигнала (пример – ряд Котельникова). В ряде случаев, например при оперативном контроле состояния исследуемого объекта, это недопустимо.

Во втором случае интерполирование называют скользящим, поскольку на каждом шаге дискретизации из группы отбрасывается самый крайний левый отсчет и добавляется справа очередной отсчет. Группа все время содержит  $Q$  отсчетов, которые как бы скользят вдоль всей последовательности отсчетов. На каждом шаге дискретизации через  $Q$  отсчетов проводится полином  $n$ -й степени.  $Q$  и  $n$  связаны соотношением  $Q=n+1$ . Отрезки этого полинома и принимаются за восстановленный непрерывный сигнал. В данном случае задержка восстановленного сигнала может составлять от одного до  $n$  периодов дискретизации.

2) При отказе элементов группового тракта становится невозможной передача измерительных сигналов по всем измерительным каналам многоканальной системы.

## **10. Информационное обслуживание. Задачи информационного обслуживания.**

### ***Информационное обслуживание***

Информационным обслуживанием объекта исследования (контроля) называют обеспечение сбора, обработки и представления сообщений, содержащих интересующую потребителей информацию об объекте.

Информационное обслуживание характеризуется:

реализуемыми программами измерения,  
информационной гибкостью,  
организацией сбора измерительной информации.

**Программа измерений** включает в себя:

1) перечень контролируемых параметров,

2) показатели потока передаваемых сообщений по каждому контролируемому параметру, например частоты дискретизации,

3) характеристики используемых видов представления сообщений, показатели верности представления.

**Информационная гибкость** описывается совокупностью показателей, характеризующих возможность изменения программы измерений для обслуживания разных объектов, а также изменения программы измерений в процессе обслуживания одного объекта.

**Организация сбора** измерительной информации характеризуется системой ограничений на потоки сообщений близко территориально расположенных источников информации, группируемых с целью уплотнения измерительных цепей.

Такими ограничениями могут быть: требования по однотипности частотных свойств, т. е. источники информации группы должны выдавать равные потоки сообщений; потоки сообщений могут быть разными, но суммарный поток не должен превышать некоторого максимального значения и т. п.

**Основные задачи** информационного обслуживания:

1) обеспечение экономного (в смысле расхода весов, габаритов, стоимости и т.п.) сбора измерительной информации от разных источников информации;

2) представление измерительных сигналов в форме, обеспечивающей минимальную информационную загрузку линии связи и запоминающих устройств.

Вторая задача может быть представлена как задача обеспечения выдачи потребителю максимального количества информации при ограниченной пропускной способности линии связи и ограниченном объеме памяти устройств, запоминающих эту информацию.

Из сравнения многоканальных измерительных систем с частотным и временным разделением каналов мы установили, что при исследованиях и испытаниях сложных объектов предпочтение следует отдать системам с временным разделением каналов. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать именно эти системы.

## **11. Режимы информационного обслуживания. Пути согласования производительности датчиков с пропускной способностью канала связи.**

### ***Режимы информационного обслуживания***

Решение перечисленных задач информационного обслуживания может быть выполнено многоканальными измерительными системами с различными режимами информационного обслуживания.

В современных ИИС используются следующие режимы информационного обслуживания: регулярный, программируемый и адаптивный.

**При регулярном режиме** программа измерений задается перед началом работы системы. В процессе работы программа измерений не может быть изменена.

При этом программы измерений для разных объектов могут быть записаны в памяти системы и устанавливаться перед началом испытаний соответствующего объекта. Для каждого канального измерительного сигнала может быть задана индивидуальная частота дискретизации.

**Программируемые режимы** характерны тем, что программа измерений может быть изменена в процессе работы системы по решению оператора.

**Адаптивный режим** обеспечивает автоматическое (без участия оператора) изменение программы измерений на основе анализа текущей информации о поведении объекта. Например, в зависимости от скорости изменения сигналов датчиков возможно автоматическое изменение частоты дискретизации. Для участков с высокой скоростью изменения сигнала частота дискретизации увеличивается, при малой скорости изменения сигнала частота дискретизации снижается.

### ***Пути согласования производительности датчиков с пропускной способностью канала связи.***

Рассмотрим, каким образом можно согласовать скорости выдачи информации датчиками разных каналов с пропускной способностью многоканальной измерительной системы.

Из выражения (4.14)  $(H(X)V \leq W \log \left( 1 + \frac{\overline{P_C}}{P_{\text{ш}}} \right)$  см. тему №3) следует, что

требуемая широкополосность  $W$  устройств группового тракта, а соответственно и пропускная способность канала связи, существенно зависит от числа отсчетов  $V$ , поступающих в секунду на вход группового тракта. Таким образом, для уменьшения широкополосности устройств группового тракта при заданной производительности датчиков и известном отношении сигнал/шум необходимо уменьшать число отсчетов  $V$ , поступающих на вход группового тракта в единицу времени.

Число отсчетов  $V$  складывается из дискретных отсчетов сигналов всех датчиков, то есть определяется частотой дискретизации, называемой также частотой опроса, каждого измерительного сигнала (см. выражение (4.12)

$V_u = \sum_{i=1}^N F_{\text{Ди}} = \sum_{i=1}^N 2F_{\text{Ci}}$  в теме №2). Значение суммарного потока отсчетов зависит от организации опроса датчиков. При организации опроса источников информации различают:

1. простейший опрос, когда все датчики опрашивают с одинаковой максимальной для данной их совокупности частотой опроса;
2. опрос каждого датчика с индивидуальной частотой опроса;
3. опрос с сокращением избыточных отсчетов.

Наиболее распространен в силу простоты реализации опрос всех датчиков многоканальной измерительной системы с одинаковой максимальной частотой опроса, которую определяют, ориентируясь на самый широкополосный из всех измерительных сигналов:

$$F_{\text{Дмакс}} = 2F_{\text{смакс}}\lambda, \quad (5.1)$$

где  $F_{\text{смакс}}$  - максимальная частота в спектре самого широкополосного сигнала,  $\lambda$  - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличивается частота дискретизации сигнала по сравнению с ее значением, следующим из теоремы В. А. Котельникова, и зависящий от принятого метода последующего восстановления непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам и требуемой точности восстановления.

Во втором случае частота дискретизации сигнала  $i$ -го датчика

$$F_{\text{д}i} = 2F_{\text{с}i}\lambda_i, \quad (5.2)$$

где  $F_{\text{с}i}$  – максимальная частота в спектре сигнала  $i$ -го датчика,  $\lambda_i$  - коэффициент, показывающий, во сколько раз увеличивается частота дискретизации  $i$ -го сигнала сообщения по сравнению с ее значением, следующим из теоремы В. А. Котельникова.

В третьем случае, анализируя скорость изменения сигнала сообщения, изменяют соответствующим образом частоту опроса либо устраняют из суммарного потока отсчетов, поступающих на вход группового тракта, незначащие отсчеты.

Сравним указанные режимы опроса датчиков по значению суммарного потока отсчетов  $V$ , поступающих на вход группового тракта многоканальной измерительной системы.

Суммарный поток отсчетов в первом случае имеет максимальное значение

$$V_{\text{макс}} = NF_{\text{Дмакс}} \quad (5.3)$$

Практическая ширина спектров измерительных сигналов, передаваемых по разным каналам многоканальной измерительной системы, может различаться в сотни раз. Поэтому суммарный поток отсчетов, определяемый выражением (5.3), содержит много избыточных отсчетов, что повышает требования к широкополосности устройств группового тракта и, кроме того, требует большего объема памяти для запоминания избыточных отсчетов в устройстве обработки.

Во втором случае суммарный поток отсчетов на входе группового тракта определяется соотношением

$$V_u = \sum_{i=1}^N F_{\text{д}i}, \quad (4.12)$$

и его значение близко к минимально возможному для данной совокупности измерительных сигналов.

В третьем случае при сокращении избыточных отсчетов наиболее распространены полиномиальные методы предсказания и интерполяции [4, 3-7, 9], причем для упрощения реализации этих методов зачастую ограничиваются полиномами первой степени. При этом в многоканальной измерительной системе все датчики опрашиваются с одинаковой частотой опроса  $F_{\text{д макс}}$ , определяемой в соответствии с (5.1), а в цепь каждого датчика включается устройство сокращения избыточных отсчетов (УСО). Суть действия УСО заключается в том, что рассчитанное для каждого дискретного момента времени значение отсчета сравнивают со значением реального отсчета в этот момент времени. Если разность значений попадает в установленную зону допустимой погрешности представления отсчета, то реальный отсчет исключается из общего потока отсчетов как избыточный, при выходе разности за пределы зоны допустимой погрешности реальный отсчет признается значащим и передается на выход УСО и далее на вход группового тракта. Поток отсчетов на входе группового тракта, образуемый в данном случае оставленными отсчетами, обозначим  $V_o$ . Введение в каждый канал системы УСО усложняет систему в целом. Кроме того, поскольку нарушается регулярность последовательности отсчетов, то для последующего правильного восстановления исходных сигналов датчиков необходимо передавать дополнительную информацию о значениях моментов времени, соответствующих значащим отсчетам. При действии на измерительный сигнал шумовых помех эффективность сокращения избыточных отсчетов снижается.

Таким образом, при большом числе каналов в многоканальной измерительной системе наиболее эффективно задачи информационного обслуживания могут решить системы с индивидуальными частотами опроса сигналов датчиков в каждом измерительном канале. Эффективность здесь проявляется как в снижении массогабаритных затрат на реализацию информационного обслуживания объекта контроля, так и в существенном снижении информационной загрузки линии связи. При этом режим информационного обслуживания может быть как регулярным, так и программным.

Организовать опрос измерительных сигналов с индивидуальными частотами опроса можно с помощью соответствующих режимов коммутации измерительных цепей. Рассмотрим эти режимы.

## 12. Режимы коммутации измерительных каналов. Коммутация измерительных сигналов с разными частотами опроса.

### *Режимы коммутации измерительных цепей*

Порядок и частоту предоставления каналных интервалов в групповом тракте многоканальной измерительной системы различным источникам информации называют режимом коммутации.

Режим коммутации может быть с постоянной частотой опроса для всех источников и с индивидуальными источниками опроса для каждого источника.

Простейший режим коммутации – это когда каналные интервалы  $T_k$ , предоставляемые различным цепям, равны между собой, и повторяются через одинаковое для всех каналов время, равное периоду дискретизации (периоду опроса  $T_{опр}$ ) (см. рисунок). Число измерительных каналов  $N$  (измерительных цепей) равно числу коммутируемых цепей.

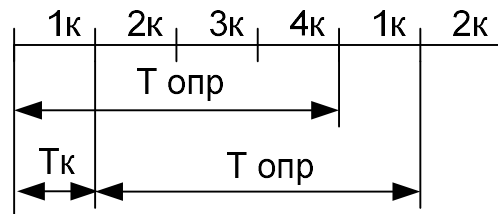


Рисунок 6.1 – Простейший режим коммутации измерительных цепей

Соотношение времени  $T_k$ , отводимого на передачу информации одного измерительного канала, периода опроса  $T_{опр}$  датчика этого канала и общего числа  $N$  каналов измерительной системы определяется выражением, аналогичным выражению (4.15) из лекции №4:  $T_k = \frac{T_{опр}}{N}$ .

Для простейшего режима коммутации суммарный поток отсчетов на входе группового тракта определяется выражением (5.3). Его называют также информативностью многоканальной измерительной системы и обозначают как  $I = F_{опр}N$ , где  $F_{опр} = F_{опр1} = F_{опр2} = \dots = F_{опрi} = F_{опр\max}$  - частота опроса, определяемая для самого широкополосного входного сигнала.

Простейший режим коммутации измерительных цепей эффективен только в случаях, когда контролируемые сигналы имеют приблизительно одинаковую ширину спектра или в системах с малым числом измерительных каналов.

### Коммутация измерительных цепей с разными частотами опроса

Для уменьшения информационной загрузки линии связи в случае, когда контролируемые параметры неоднородны по ширине спектра, каждому измерительному каналу назначают свою индивидуальную частоту опроса. Информативность многоканальной системы при этом определяется выражением, аналогичным выражению (4.12)

$$I = \sum_{i=1}^N F_{\text{ОПР}i} . \quad (6.1)$$

Если контролируемые параметры можно разделить на группы таким образом, что в одну группу будут входить близкие по практической ширине спектра параметры, то для каждой группы назначается своя частота опроса. В этом случае информативность определяется как

$$I = \sum_{i=1}^p n_i \cdot F_{\text{ОПР}i} , \quad (6.2)$$

где  $n_i$  – число каналов в  $i$ -й группе,  $\sum_{i=1}^p n_i = N$ ,

$p$  – число разных групп.

Сформировать сигнала опроса с различными частотами повторения можно следующими способами:

- 1) запараллеливанием коммутируемых цепей;
- 2) изменением графика работы распределителя импульсов;
- 3) запрограммировав порядок и частоту повторения сигналов опроса.

Запараллеливание коммутируемых цепей

Для повышения частоты опроса отдельных датчиков их подключают к нескольким коммутируемым цепям коммутатора каналов, т. е. запараллеливают несколько входов коммутатора (рисунок 6.2). Запараллеливаемые цепи должны быть выбраны таким образом, чтобы сохранилась равномерность следования сигналов опроса (рисунок 6.3).

Интервал времени в течении которого опрашиваются все источники информации называется кадром многоканальной измерительной системы.

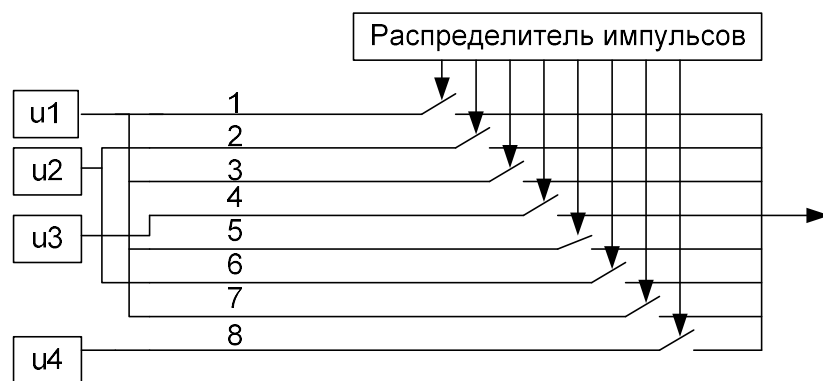


Рисунок 6.2 – Запараллеливание коммутируемых цепей

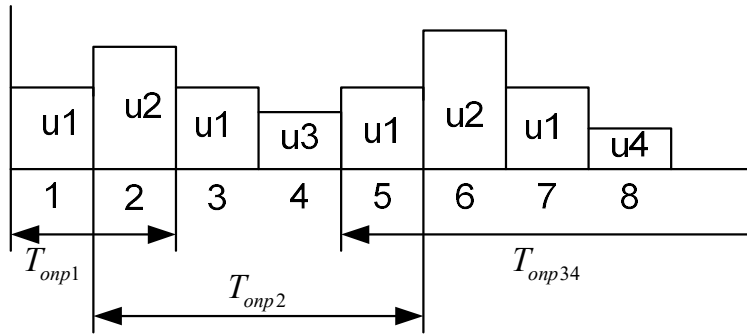


Рисунок 6.3 – Опрос датчиков при запараллеливании входов коммутатора каналов

За время кадра каждая коммутируемая цепь замыкается один раз, соединяя соответствующий вход коммутатора каналов с его выходом. Обозначим частоту замыкания каждой цепи как  $F_{\text{ОПР}}$ . В приведенном на рисунке 6.2 примере с частотой  $F_{\text{ОПР}}$  опрашиваются датчики  $u3$  и  $u4$ .

Если подключить один датчик, например  $u2$ , к двум входам коммутатора, подключаемых к выходу через интервал времени, равный половине длительности кадра, то этот датчик будет опрашиваться в два раза чаще, т.е.  $F_{\text{ОПР}2} = 2F_{\text{ОПР}}$ .

Если же подключить один датчик, например  $u1$ , к четырем входам коммутатора, подключаемых к выходу через интервал времени, равный четверти длительности кадра, то этот датчик будет опрашиваться в четыре раза чаще, т.е.  $F_{\text{ОПР}1} = 4F_{\text{ОПР}}$ .

Что дает опрос каждого источника с индивидуальной частотой опроса? Если все четыре датчика опрашивать, ориентируясь на самый широкополосный сигнал, т.е. для всех каналов выбрать  $F_{\text{ОПР}}^* = 4 F_{\text{ОПР}}$ , то информативность системы будет равна

$$I^* = 4 \cdot 4 F_{\text{ОПР}} = 16 F_{\text{ОПР}}.$$

Если же для каждого датчика использовать индивидуальную частоту опроса, как показано на примере, то информативность определится в соответствии с (6.2) как

$$I = F_{\text{ОПР}1} + F_{\text{ОПР}2} + 2F_{\text{ОПР}} = 4 F_{\text{ОПР}} + 2 F_{\text{ОПР}} + 2 F_{\text{ОПР}} = 8 F_{\text{ОПР}}.$$

Таким образом, тот же объем информации можно передать при меньшей информативности системы, а значит при меньшей информационной нагрузке группового тракта (линии связи).

Число канальных интервалов (позиций), содержащихся в кадре, определяется как

$$Q = \frac{I}{F_{\text{ОПР} \text{ мин}}} . \quad (6.3)$$



Недостаток метода запараллеливания коммутируемых цепей заключается в аппаратной избыточности при его реализации.

#### Изменение графика работы распределителя импульсов

Аппаратные затраты на формирование сигналов опроса с разными частотами повторения можно сократить, если построить распределитель импульсов таким образом, что сигналы на его выходах будут иметь требуемую частоту повторения (рисунок 6.4).

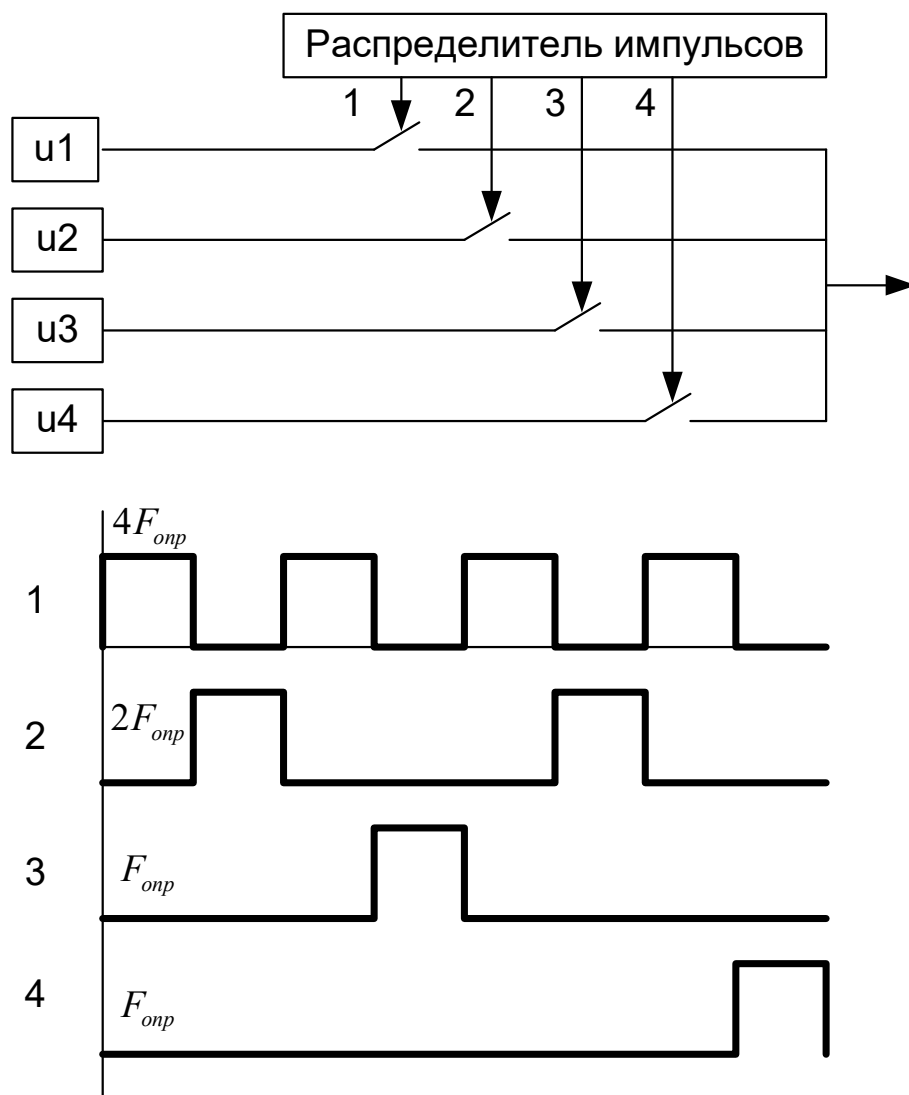


Рисунок 6.4 – Изменение графика работы распределителя импульсов

Такой режим работы распределителя импульсов можно обеспечить, если при формировании сигналов опроса исключить из числа входных сигналов логических избирательных схем сигналы с выходов последнего разряда счетчика каналов, с двух последних и т.д. (рисунок 6.5).

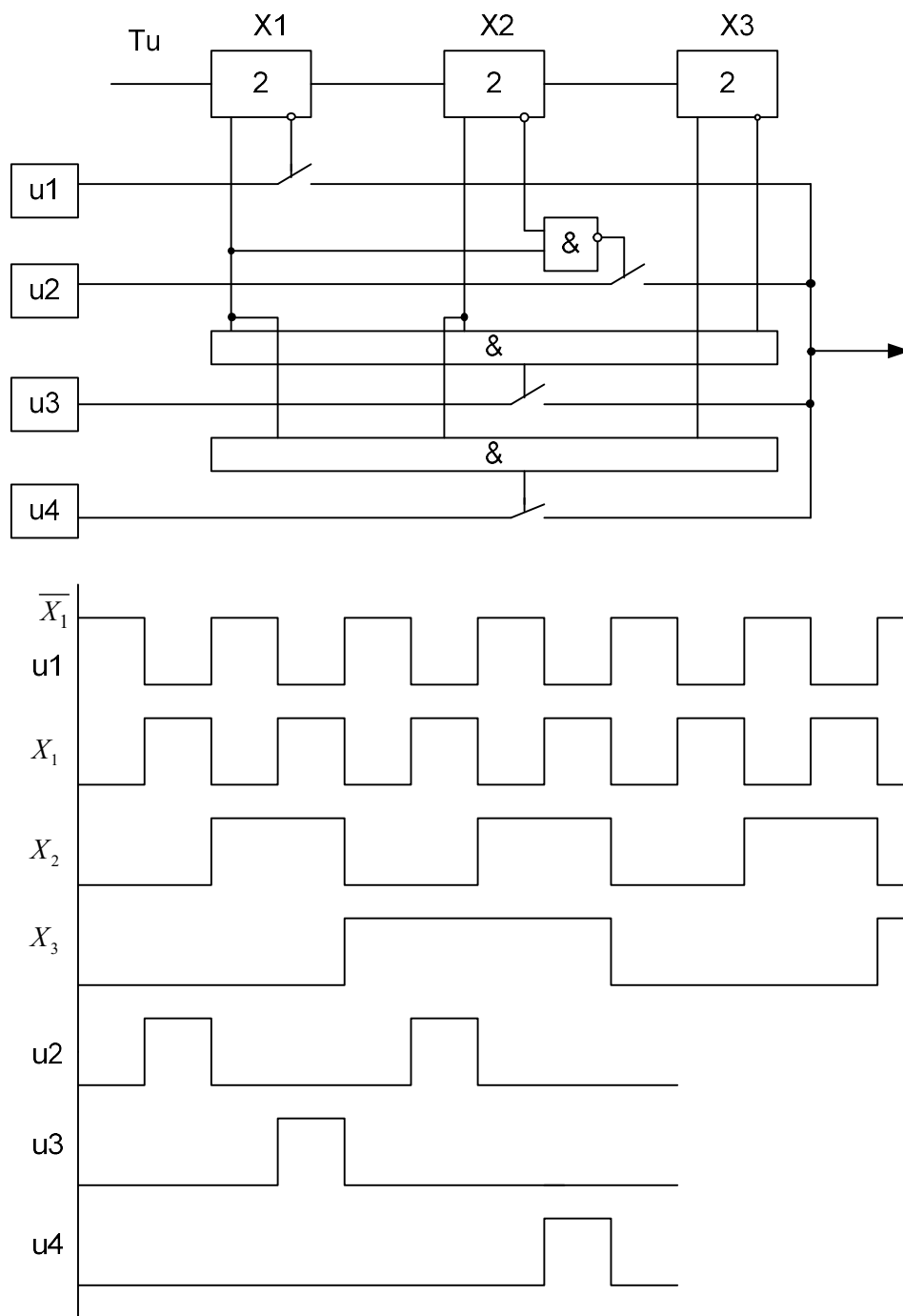


Рисунок 6.5 – Реализация принципа изменения графика работы распределителя импульсов

#### Программная реализация сигналов опроса

При программной реализации формирования сигналов опроса с разными частотами повторения в памяти устройства записывается последовательность адресов датчиков, которые должны быть опрошены на каждой очередной временной позиции кадра многоканальной системы (таблица 6.1).

Таблица 6.1 – Последовательность и частота опроса датчиков

№ ячейки памяти	Адрес канала	№ коммутируемого датчика
1	00	1
2	01	2
3	00	1
4	10	3
5	00	1
6	01	2
7	00	1
8	11	4

Пример МС 590КНЗ (4-х канальный коммутатор). ADG408

### **13. Многоступенчатая коммутация измерительных цепей.**

Многоступенчатая коммутация измерительных цепей

При большом числе измерительных каналов применяют многоступенчатую коммутацию измерительных цепей.

Рассмотрим принципы организации многоступенчатой коммутации измерительных цепей на примере двухступенчатой коммутации.

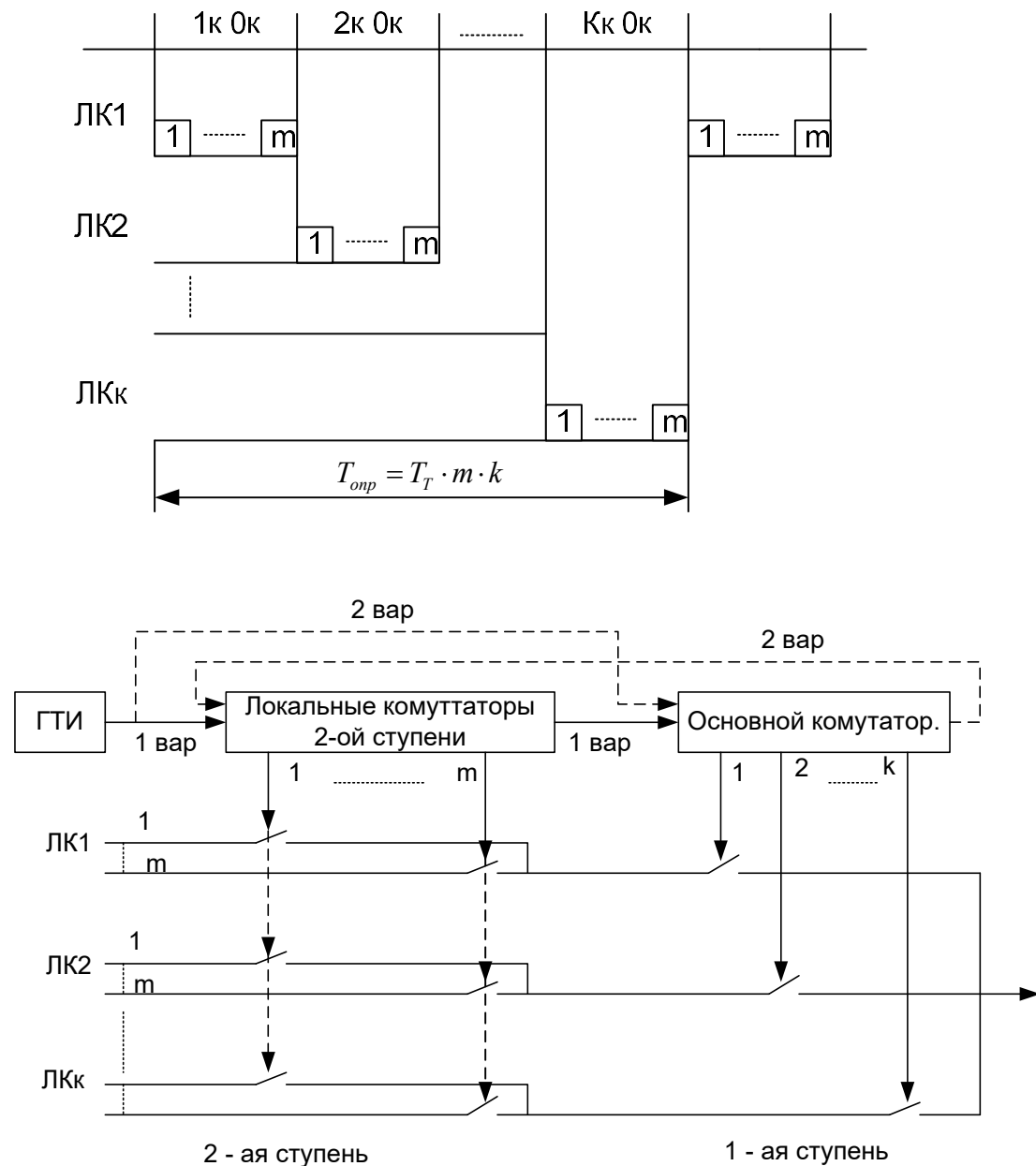
Здесь возможны два варианта:

1) с последовательным опросом коммутаторов канала второй ступени (локальных коммутаторов (ЛК));

2) с чередующимся опросом коммутаторов каналов второй ступени.

В первом варианте счетчик локальных коммутаторов в коммутаторе первой ступени (основном коммутаторе (ОК)) переключается от счетчика каналов коммутатора второй ступени, т.е. имеют меньшую частоту переключения. При этом время включения коммутируемой цепи 1-й ступени опрашиваются все каналы подключенного к этой цепи локального коммутатора 2-й ступени (рисунок 7.1). Временные диаграммы, соответствующие этому случаю, показаны на рисунке 7.2.

Рисунок 7.1 – Варианты организации опроса цепей первой и второй ступеней



$T_T$  - время такта.

Рисунок 7.2 – Временные диаграммы при меньшей частоте переключения цепей основного коммутатора

Посмотрим на такую организацию опроса измерительных цепей с точки зрения возможности обеспечения информационной гибкости, т.е. возможности получения разных частот опроса для разных источников информации.

Из временной диаграммы (рисунок 7.2) следует, что сохранения равномерного опроса источников информации можно запаараллеливать только входные цепи коммутатора первой ступени (основного коммутатора). Нельзя запаараллеливать входные цепи коммутаторов второй ступени, т. к. при этом нарушается периодичность повторения сигналов опроса.

При запараллеливании входных цепей ОК уменьшается количество ЛК, а в оставшихся ЛК, подключенных к нескольким входным цепям ОК, частота опроса увеличивается сразу по всем каналам.

Таким образом, коммутация измерительных цепей с меньшей скоростью переключения в первой ступени имеет ограниченные возможности по формированию разных частот опроса.

Во втором варианте счетчик локальных коммутаторов в коммутаторе первой ступени (основном коммутаторе) переключается от генератора тактовых импульсов, а счетчики каналов всех коммутаторов второй ступени – от счетчика коммутатора первой ступени, т.е. имеют меньшую частоту переключения. При этом за время включения коммутируемой цепи 1-й ступени опрашивается одна коммутируемая цепь второй ступени. За полный 1-й цикл переключения основного коммутатора ( $k$  канальных интервалов) опрашиваются все первые каналы всех  $k$  локальных коммутаторов 2-й ступени (рисунок 7.1). за полный второй цикл ОК опрашиваются все вторые каналы всех ЛК и т.д. Временные диаграммы, соответствующие этому случаю, показаны на рисунке 7.3.

При опросе коммутируемых цепей с меньшей скоростью переключения во второй ступени можно запараллеливать непосредственно входные цепи второй ступени. Причем делать запараллеливание можно в любом ЛК независимо от других ЛК. Периодичность опроса датчиков при этом сохраняется.

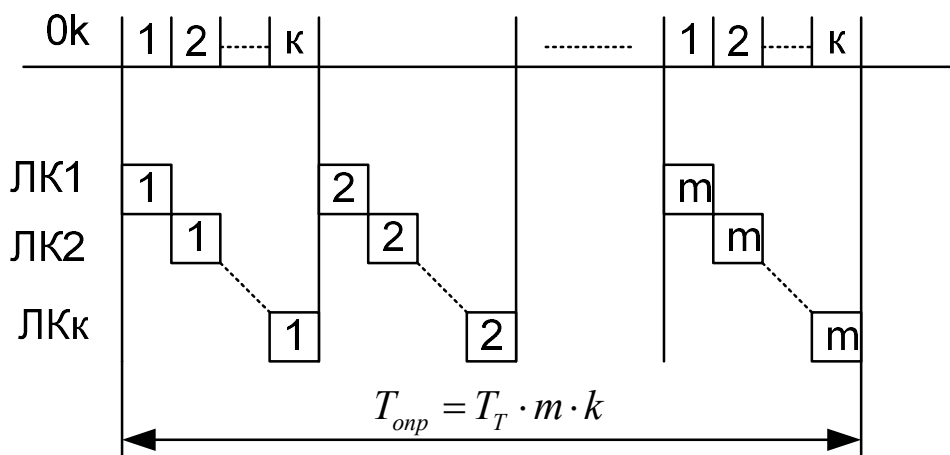


Рисунок 7.3 – Временные диаграммы при меньшей частоте переключения локальных коммутаторов

Таким образом, коммутация измерительных цепей с меньшей скоростью переключения во второй ступени дает больше возможностей для формирования разных частот опроса, т.е. обеспечивает бóльшую информационную гибкость ИИС по сравнению с первым вариантом многоступенчатой коммутации.

#### 14. Понятие кольцевого распределителя (КР). Способы запуска КР.

##### Достижимое число разных периодов опроса.

Достижимое число разных частот опроса

Ранее было введено понятие кадра многоканальной измерительной системы, как времени, в течение которого опрашиваются все источники информации. При аппаратном формировании сигналов опроса длительность кадра определяется как произведение канального интервала на емкость счетчика распределителя импульсов, а при программном – как произведение канального интервала на число ячеек памяти, в которых записаны адреса всех каналов.

Дадим еще одно определение кадра многоканальной измерительной системы, которое не противоречит первому, а конкретизирует его для каждого конкретного случая построения многоканальной системы.

Периодически повторяющийся набор сигналов опроса заданного числа датчиков  $N$  с соответствующими периодами опроса  $T_j$  отдельных датчиков или групп датчиков называют кадром многоканальной измерительной системы.

Период повторения кадров, являющийся длительностью кадра, обозначим  $T_{КАДР}$ . Очевидно, что длительность кадра должна быть кратна каждому периоду опроса, то есть быть наименьшим общим кратным всех периодов опроса

$$T_{КАДР} = [T_1, T_2, \dots, T_j, \dots, T_p]. \quad (7.1)$$

В примере из предыдущей лекции (лекция №6) период опроса первого датчика ( $D_1$ ) равен  $2T_k$ , второго ( $D_2$ ) –  $4T_k$ , двух остальных датчиков ( $D_3, D_4$ ) –  $8T_k$ . Соответственно длительность кадра равна  $8T_k$ , то есть является наименьшим общим кратным всех периодов опроса.

В пределах одного кадра канальные интервалы, на которых расположены сигналы опроса с периодом  $T_j$ , занимают определенные позиции. В силу временного разделения каналов сигналы опроса разных датчиков не должны занимать одни и те же позиции.

##### Понятие кольцевого распределения

При аппаратной реализации сигналов опроса с разными периодами повторения выражению (7.5) можно сопоставить устройство формирования сигналов опроса, выполненное на основе системы кольцевых распределителей (КР) разделенных на  $q$  групп по  $c_j$  кольцевых распределителей в каждой  $j$ -й группе (рисунок 7.4). Такое сопоставление позволяет более наглядно показать процесс получения максимально возможного количества различных делителей числа  $\Theta$ , соответствующих разным периодам опроса.

При этом КР включены по смешанной схеме: первые в каждой группе кольцевые распределители переключаются одновременно (т.е. первые КР включены параллельно) сигналами тактового генератора, а все последующие КР в

каждой группе переключаются от предыдущих в этой группе (т. е. КР в каждой группе включены последовательно).

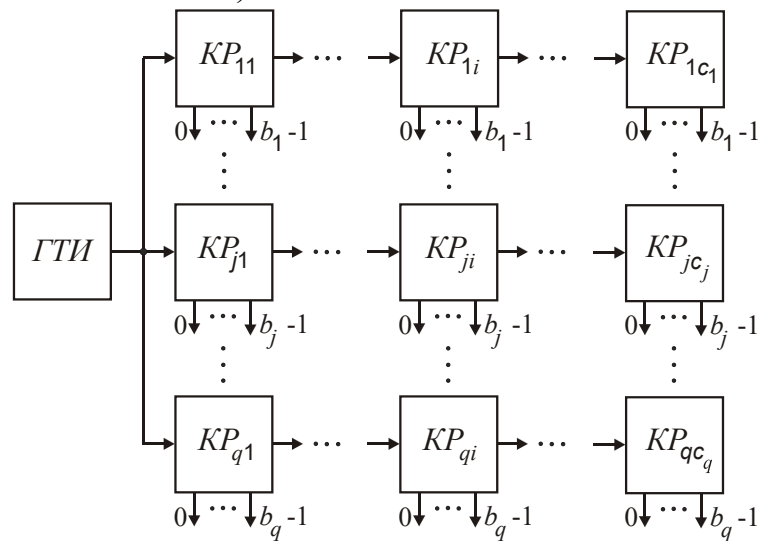


Рисунок 7.4 – Смешанное включение кольцевых распределителей

Общее число кольцевых распределителей равно сумме кольцевых распределителей каждой группы

$$c = \sum_{j=1}^q c_j, \quad (7.8)$$

Кольцевым распределителем называют устройство, осуществляющее формирование на своих выходах периодических последовательностей прямоугольных импульсов, сдвинутых один относительно другого на один тактовый интервал. *Показать график и пример реализации на основе 561ИЕ9*

Примеры КР на три и пять внутренних состояний и временные диаграммы на их выходах приведены на рисунке 7.5.

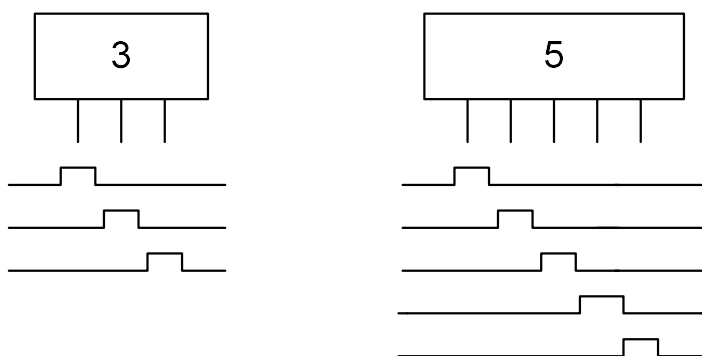


Рисунок 7.5 – Примеры кольцевых распределителей

Число внутренних состояний каждого кольцевого распределителя, входящего в  $j$ -ю группу равно  $b_j$ . Соответственно число выходов, сигналы которых могут использоваться для формирования сигналов опроса, также равно  $b_j$ . Обозначим эти выходы числами  $0, 1, 2, \dots, (b_j - 1)$ .

Число внутренних состояний группы из  $c_j$  кольцевых распределителей определяется значением сомножителя вида  $b_j^{c_j}$  в выражении (7.5):

$$N_j = b_j^{c_j}. \quad (7.9)$$

Так как значения  $b_j$  в (7.5) являются попарно взаимно простыми числами, то и числа  $N_j$ , определяемые (7.9), также будут попарно взаимно простыми числами.

Общее число  $N$  внутренних состояний системы из  $s$  кольцевых распределителей определяется произведением чисел внутренних состояний всех групп, то есть произведением

$$N = \prod_{j=1}^q N_j. \quad (7.10)$$

Из сопоставления (7.10), (7.9) и (7.5) следует, что  $N=\Theta$ , то есть число внутренних состояний системы из  $s$  кольцевых распределителей равно числу позиций в относительной длительности кадра.

### 15. Число разных периодов опроса, реализуемых при разных способах запуска КР.

Изменяя число кольцевых распределителей в каждой группе и схемы их запуска, можно перейти от структуры со смешанным запуском кольцевых распределителей к более простым структурам: с параллельным запуском (рисунок 7.6) и с последовательным запуском (рисунок 7.7) кольцевых распределителей.

Пусть каждая группа состоит только из одного кольцевого распределителя, то есть  $c_j=1$ . Тогда число групп  $q$  равно общему числу  $s$  кольцевых распределителей (рисунок 7.6). В соответствии с (7.6) все числа внутренних состояний КР должны быть попарно взаимно-простыми числами.

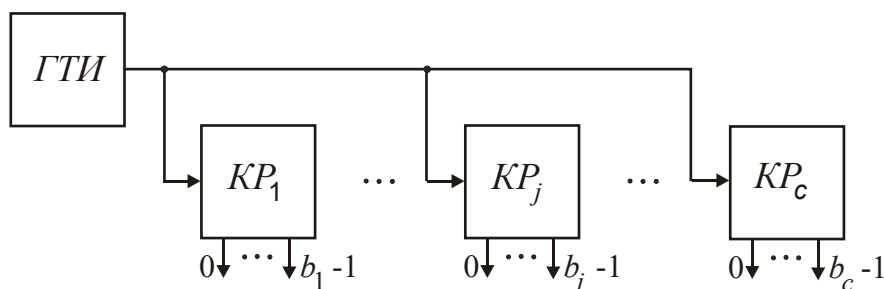


Рисунок 7.6 – Параллельное включение кольцевых распределителей

Пусть имеется только одна группа кольцевых распределителей, то есть  $q=1$ . Число кольцевых распределителей в такой группе, естественно, равно  $s$ , и запускаться они могут только один от другого, то есть последовательно (рисунок 7.7).



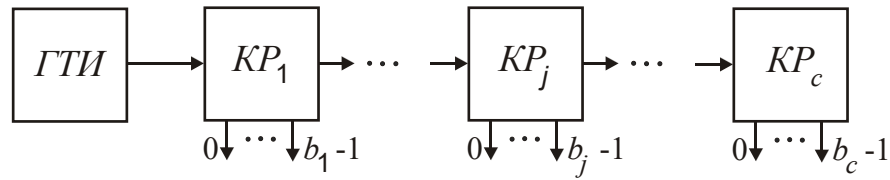


Рисунок 7.7 – Последовательное включение  
кольцевых распределителей

Количество различных делителей положительного числа  $\Theta$  и количество соответствующих им разных периодов опроса  $T_j$ , зависит от способа формирования этих делителей, а применительно к аппаратной реализации, от способа соединения кольцевых распределителей.

Наиболее общим случаем является способ формирования делителей числа  $\Theta$ , когда используются все возможные сочетания произведений сомножителей  $b_j$  в разных степенях  $z_j$  в соответствии с (7.7). Этому случаю при аппаратной реализации сигналов опроса соответствует смешанное соединение кольцевых распределителей.

$$d = b_1^{z_1} b_2^{z_2} \cdot b_j^{z_j} \cdot b_q^{z_q}, \quad (7.7)$$

где  $0 \leq z_1 \leq c_1, 0 \leq z_2 \leq c_2, \dots, 0 \leq z_j \leq c_j, \dots, 0 \leq z_q \leq c_q$ .

Из (7.7) следует, что если поочередно принять  $z_1 = c_1$ , а  $z_j = 0$ , где  $j = 2, 3, \dots, q$ , затем  $z_2 = c_2$ , а  $z_j = 0$ , где  $j = 1, 3, 4, \dots, q$ , и т. д., то получим

$$c_1 + c_2 + \dots + c_q$$

разных делителей числа  $\Theta$ .

Принимая одновременно равными соответствующим значениям  $c$  по два, три и т. д. до  $q$  включительно значений  $z$ , получим соответственно

$$\begin{aligned} & c_1 c_2 + c_1 c_3 + \dots + c_1 c_q + c_2 c_3 + \dots + c_2 c_q + \dots + c_{q-1} c_q, \\ & c_1 c_2 c_3 + \dots + c_1 c_2 c_q + c_2 c_3 c_4 + \dots + c_2 c_3 c_q + \dots + c_{q-2} c_{q-1} c_q, \\ & \dots \\ & c_1 c_2 \dots c_q \end{aligned}$$

различных делителей числа  $\Theta$ .

Суммируя числа разных делителей числа  $\Theta$ , полученные для каждого из приведенных частных случаев, определим максимальное количество разных делителей числа  $\Theta$

$$Nd = \prod_{j=1}^q (c_j + 1) - 1. \quad (7.11)$$

Частному случаю  $c_1 = c_2 = \dots = c_j \dots = c_q = 1$  соответствует параллельное включение кольцевых распределителей. Число групп  $q$  при этом равно общему числу  $c$  кольцевых распределителей. Учитывая это, из (7.11) получим

$$Nd_{ПАР} = 2^c - 1. \quad (7.12)$$

Частный случай последовательного соединения кольцевых распределителей имеет место при  $q=1$  и  $c_j=c$ . Из (7.11) получим

$$Nd_{ПОСЛ} = c. \quad (7.13)$$

Из сравнения выражений (7.11), (7.12) и (7.13) следует, что наибольшее число разных периодов опроса при заданном числе  $c$  кольцевых распределителей можно обеспечить при параллельном запуске кольцевых распределителей, а наименьшее – при последовательном запуске.

Однако, тот факт, что сигналы опроса с периодами повторения  $T_j$  и  $T_k$ , где  $j \neq k \in \{1, 2, \dots, Nd\}$ ,  $Nd$  определяется из выражений (7.11), (7.12) или (7.13), могут быть сформированы, еще не означает, что они могут быть совместно реализованы в данной многоканальной измерительной системе. Поэтому необходимо выяснить условия совместной реализуемости разных периодов опроса и определить число разных периодов опроса, реализуемых совместно с заданным периодом опроса.

#### **16. Понятие относительного периода. Подмножества чисел, описывающие сигналы опроса с заданными периодами. Понятие классов вычетов.**

Введем понятие относительного периода. Относительным периодом будем называть отношение периода опроса к длительности канального интервала

$$\Theta_j = \frac{T_j}{T_k}. \quad (7.2)$$

Отношение длительности кадра к канальному интервалу назовем относительной длительностью кадра

$$\Theta = \frac{T_{КАДР}}{T_k}. \quad (7.3)$$

Физически относительная длительность кадра  $\Theta$  определяет число канальных интервалов (временных позиций), содержащихся в кадре многоканальной измерительной системы.

Из сопоставления (7.3), (7.2) и (7.1) следует, что относительная длительность кадра есть наименьшее общее кратное всех относительных периодов опроса:

$$\Theta = [\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_j, \dots, \Theta_p]. \quad (7.4)$$

Числа  $\Theta$  и  $\Theta_j$ , определяющие относительные длительность кадра и периоды опроса, являются целыми числами.

С учетом введенных обозначений требование разнообразия возможных периодов опроса можно выполнить тем лучше, чем больше делителей будет иметь относительная длительность кадра  $\Theta$ , определяемая (7.4).

Любое целое число можно представить в виде (каноническое разложение числа на простые сомножители или система счисления с переменным основанием)

$$\Theta = b_1^{c_1} b_2^{c_2} \dots b_j^{c_j} \dots b_q^{c_q}, \quad (7.5)$$

где  $b_j$  – попарно различные простые числа,

$c_1, c_2, \dots, c_j, \dots, c_q$  – натуральные числа.

Для попарно различных простых чисел выполняется условие

$$(b_j, b_k) = 1, \quad (7.6)$$

где  $j \neq k \in \{1, 2, \dots, q\}$ ,

запись  $(x, y)$  означает наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ .

Положительное число  $d$  является делителем числа  $\Theta$ , если выполняется условие

$$d = b_1^{z_1} b_2^{z_2} \dots b_j^{z_j} \dots b_q^{z_q}, \quad (7.7)$$

где  $0 \leq z_1 \leq c_1, 0 \leq z_2 \leq c_2, \dots, 0 \leq z_j \leq c_j, \dots, 0 \leq z_q \leq c_q$ .

Факт того, что положительное число  $d$  является делителем положительного числа  $\Theta$ , обозначим как  $d|\Theta$ . Если  $d$  не является делителем  $\Theta$ , то обозначение этого  $d \nmid \Theta$ .

Представление  $\Theta$  системой кольцевых распределителей

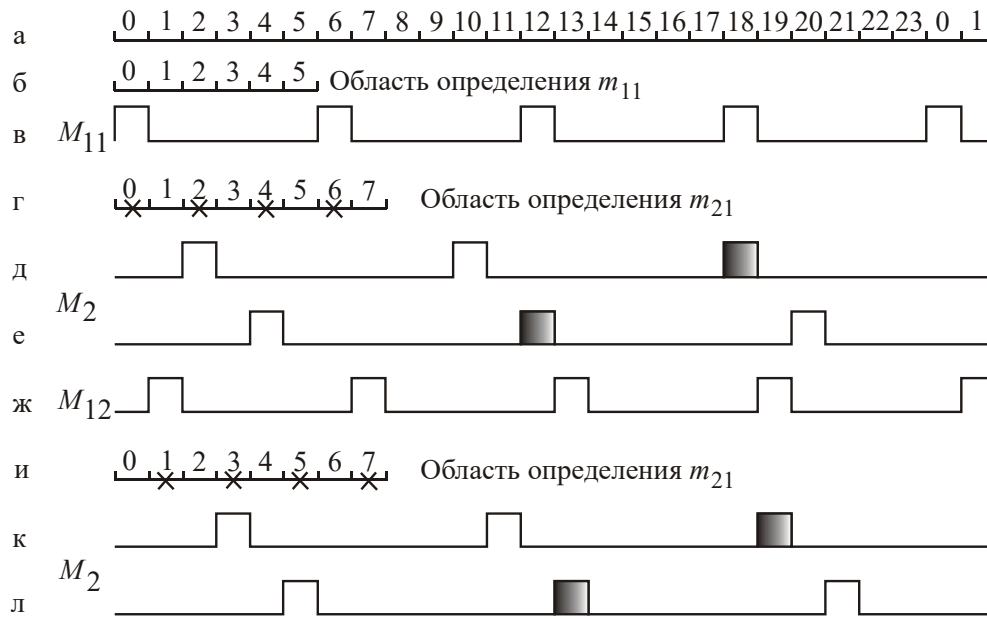
## 17. Условие совместной реализуемости разных периодов опроса.

### Запрещенные классы вычетов. Примеры.

Условие совместной реализуемости разных периодов опроса

Вопросы совместной реализуемости разных периодов опроса неизбежно возникают при проектировании многоканальных систем с временным уплотнением каналов. Для решения этих вопросов наиболее пригоден аппарат теории чисел, в частности сравнения. При анализе условий совместной реализуемости сигналов опроса с разными периодами будем использовать такие характеристики этих сигналов, которые обычно задаются при проектировании многоканальных измерительных систем: это период опроса  $T_j$  и число датчиков  $n_j$ , опрашиваемых с данным периодом.

Мы ранее ввели понятие кадра многоканальной измерительной системы, относительного кадра и относительного периода опроса. Обозначим номера канальных интервалов (номера позиций), входящих в один кадр, числами натурального ряда, включая ноль:  $0, 1, 2, \dots, (\Theta-1)$ .



Мы также знаем, что при увеличении частоты опроса, например с помощью запараллеливания коммутируемых цепей, сигналы опроса будут занимать в кадре системы несколько позиций. Тогда сигналы опроса с периодом  $T_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, Nd\}$ , можно представить в виде подмножества чисел, взятых из множества  $\{0, 1, 2, \dots, \Theta-1\}$ :

$$M_j = m_{j1} + \Theta_j x_j, \quad (8.1)$$

где  $m_{j1} \in \{0, 1, 2, \dots, \Theta_j - 1\}$  – начальный член подмножества и его возможные значения;

$x_j = 0[1] \left( \frac{\Theta}{\Theta_j} - 1 \right)$  – переменная, последовательно принимающая ряд значений 0, 1, 2, ...,  $(\Theta/\Theta_j - 1)$  с шагом, равным единице. *Пояснить на временной диаграмме.*

Все числа подмножества (8.1) сравнимы между собой по модулю  $\Theta_j$ . Числа  $a$  и  $b$  называют сравнимыми по модулю  $M$ , если разность  $b - a$  делится на  $M$ , то есть если  $M|b-a$ . Для положительных чисел это эквивалентно тому, что при делении чисел  $a$  и  $b$  на  $M$  получается один и тот же остаток.

Соотношение между числами  $a, b, M$ , означающее, сравнимость чисел  $a$  и  $b$  по модулю  $M$ , записывают в виде

$$a \equiv b \pmod{M}.$$

Классом по данному модулю  $M$  называют множество всех целых чисел, сравнимых с некоторым данным числом  $a$ . Таким образом, числа (8.1) принадлежат одному классу по модулю  $\square_j$ .

При выяснении вопроса о совместной реализуемости неодинаковых периодов опроса примем, что  $\Theta_1 < \Theta_2 < \dots < \Theta_j < \dots < \Theta_k < \dots < \Theta_{Nd}$ .

Числа подмножества (8.1) составляют класс  $\overline{m_{j1}}$  по модулю  $\Theta_j$ .

Сигналы с разными периодами опроса  $T_j$  и  $T_k$ ,  $j \neq k \in \{1, 2, \dots, Nd\}$ , совместно реализуются, если соответствующие им подмножества чисел вида (8.1) не пересекаются:

$$M_j \not\cap M_k. \quad (8.2)$$

Условие (8.2) выполняется, если числа, образующие подмножества  $M_j$  и  $M_k$ , принадлежат разным классам по соответствующему модулю.

В соответствии с (8.1) числа подмножества  $M_j$ , принадлежат по модулю  $\Theta_j$  классу  $\overline{m_{j1}}$ . Теперь сравним эти числа между собой по другому модулю  $\Theta_k$ .

В данном случае числа подмножества  $M_j$ , принадлежащие по модулю  $\Theta_j$  классу  $\overline{m_{j1}}$ , образуют по другому модулю  $\Theta_k$  классы

$$\overline{m_{j1}}, \overline{m_{j1} + d_{jk}}, \overline{m_{j1} + 2d_{jk}}, \dots, \overline{m_{j1} + \left(\frac{\Theta_k}{d_{jk}} - 1\right)d_{jk}}. \quad (8.3)$$

Номера классов (8.3) составляют подмножество чисел

$$R_{jk} = m_{j1} + d_{jk} x_{jk}, \quad (8.4)$$

где  $d_{jk} = (\square_j, \square_k)$  – наибольший общий делитель чисел  $\square_j$  и  $\square_k$ ,

$$x_{jk} = 0 \left[ 1 \left( \frac{\Theta_k}{d_{jk}} - 1 \right) \right]. \quad \text{Показать пример с } m1=8 \text{ и } m2=12, d12=4$$

Числа подмножества  $M_k$  могут образовывать по модулю  $\Theta_k$  классы  $\overline{m_{k1}}$ , номера которых определяются как

$$R_k = m_{k1}, \quad (8.5)$$

где  $m_{k1} \in \{0, 1, 2, \dots, \Theta_k - 1\}$ .

Если среди множества допустимых значений  $m_{k1}$ , принадлежащих подмножествам  $M_k$ , имеются такие, что  $m_{k1} = r_{jk}$ , где  $r_{jk} \in R_{jk}$ , определяемого выражением (8.4), то числа соответствующих подмножеств  $M_k$  принадлежат тем же классам по модулю  $\Theta_k$ , что и числа подмножества  $M_j$  по этому же модулю. Следовательно подмножества  $M_j$  и  $M_k$  пересекутся, и соответствующие им периоды опроса  $T_j$  и  $T_k$  не могут быть совместно реализованы.

Таким образом, числа подмножеств  $M_k$  не должны образовывать по модулю  $\Theta_k$  классы, номера которых определяются выражением (8.4). Поэтому назовем классы (8.4) запрещенными для подмножеств  $M_k$ .

Из (8.4) следует, что число запрещенных классов, образуемых одним подмножеством  $M_j$  для подмножеств  $M_k$  равно

$$z_{jk} = \frac{\Theta_k}{d_{jk}} . \quad (8.6)$$

Если имеется  $i$  разных подмножеств вида (8.1), то они образуют по модулю  $\Theta_k$  для подмножеств  $M_k$

$$Z_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^i z_{jk} \quad (8.7)$$

запрещенных классов.

Как следует из (8.5),  $m_{k1}$  может принимать только  $\Theta_k$  целых значений, поэтому условие непересечения подмножеств  $M_k$  с существующими подмножествами  $M_1, \dots, M_j, \dots, M_i$ , а, следовательно, условие реализуемости периода опроса  $T_k$  совместно с периодами  $T_1, \dots, T_j, \dots, T_i$  имеет вид

$$\Theta_k - Z_k > 0 . \quad (8.8)$$

Число разных периодов опроса, реализуемых совместно с заданным периодом опроса

Определим число различных периодов опроса  $T_k$ , попарно реализуемых совместно с заданным периодом  $T_j$  ( $T_j < T_k$ ,  $j \neq k \in \{1, 2, \dots, Nd\}$ ,  $Nd$  - максимально возможное число неодинаковых периодов опроса, определяемое для соответствующей реализации устройства формирования сигналов опроса. Этот вопрос мы рассмотрели на предыдущей лекции.

Последовательное соединение кольцевых распределителей. В этом случае для любых пар периодов опроса  $T_j < T_k$ , где  $j \neq k \in \{1, 2, \dots, Nd_{ПОСЛ}\}$ , выполняется соотношение  $d_{jk} = (\Theta_j, \Theta_k) = \Theta_j$ , так как относительный период  $\Theta_k$  полной смены всех внутренних состояний  $k$ -го кольцевого распределителя является наименьшим общим кратным относительных периодов всех кольцевых распределителей,

включенных перед ним. Тогда, согласно (8.6),  $z_{jk} = \frac{\Theta_k}{\Theta_j}$ . Условие (8.8) для случая

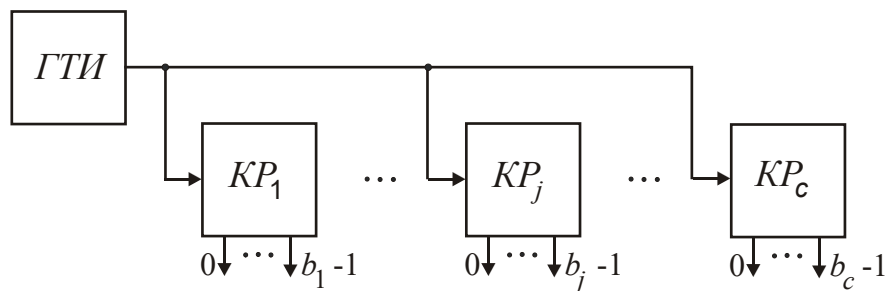
совместной реализации двух разных периодов опроса примет вид  $\frac{\Theta_k}{\Theta_j} < \Theta_k$ , откуда следует, что оно выполняется при любых  $j \neq k \in \{1, 2, \dots, Nd_{ПОСЛ}\}$ .

Таким образом, при формировании сигналов опроса на основе кольцевых распределителей с последовательным запуском совместно реализуемы любые два

неодинаковые периода опроса из числа  $Nd_{\text{ПОСЛ}}$ . Так как  $Nd_{\text{ПОСЛ}}=c$ , (см. выражение (7.13)), то число различных периодов опроса, реализуемых совместно с заданным периодом  $T_j$ , равно, включая и  $T_j$ ,

$$Nd_{\text{ПОСЛ}p}=c. \quad (8.9)$$

Параллельное соединение кольцевых распределителей. Пусть сигналы опроса с периодом  $T_j$  формируются с помощью  $j$  кольцевых распределителей, а сигналы опроса с другим периодом  $T_k$  – с помощью любых сочетаний всех  $c$  кольцевых распределителей. Среди этих сочетаний имеются сочетания  $(c-j)$  кольцевых распределителей, при которых имеет место соотношение  $d_{jk}=(\Theta_j, \Theta_k)=1$ .  
Показать на структуре с параллельным вкл. КР



$$z_{jk} = \frac{\Theta_k}{d_{jk}}. \quad (8.6)$$

Из (8.6) получим  $z_{jk} = \Theta_k$ . Таким образом, не выполняется условие (8.8), то есть сигналы опроса, сформированные с помощью  $(c-j)$  кольцевых распределителей, не могут быть совместно реализованы с сигналами опроса, сформированными с помощью  $j$  кольцевых распределителей. Число их определяется выражением, аналогичным (7.12):

$$Nd_{\text{ПАР}n} = 2^{c-j} - 1. \quad (8.10)$$

Вычитая (8.10) из (7.12), получим максимально возможное число разных периодов опроса, включая и период  $T_j$ , попарно реализуемых совместно с периодом  $T_j$ ,

$$Nd_{\text{ПАР}p} = 2^{c-j} (2^j - 1) \quad (8.11)$$

Смешанное включение кольцевых распределителей. Пусть сигналы опроса с периодом  $T_j$  формируются с помощью кольцевых распределителей, входящих в  $j$  групп из общего числа  $q$  групп, а сигналы опроса с другим периодом  $T_k$  – с помощью любых сочетаний кольцевых распределителей всех  $q$  групп. Среди сигналов опроса с периодом  $T_k$  имеются такие, которые сформированы с помощью кольцевых распределителей  $k=q-j$  групп. Так как у кольцевых распределителей,

входящих в разные группы, должны быть взаимно простыми число внутренних состояний, то получим  $d_{jk}=(\Theta_j, \Theta_k)=1$ . В соответствии с (8.6)  $z_{jk}= \Theta_k$ , что приводит к невыполнению условия (8.8). Таким образом, сигналы опроса, сформированные с помощью кольцевых распределителей  $k=(q - j)$  групп, не могут быть совместно реализованы с сигналами опроса, сформированными с помощью кольцевых распределителей остальных  $j$  групп. Число таких нереализуемых периодов опроса определяется выражением, аналогичным (7.11):

$$Nd_{CM\ n} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^q (c_k + 1) - 1 \quad . \quad (8.12)$$

Вычитая (8.12) из (7.11), получим максимально возможное число разных периодов опроса, включая и период  $T_j$ , попарно реализуемых совместно с периодом  $T_j$ ,

$$Nd_{CM\ p} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^q (c_k + 1) \left[ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^q (c_j + 1) - 1 \right]. \quad (8.13)$$

Таким образом, из сравнения (8.6), (8.7) и (8.8) следует, что принципиальным условием совместной реализации периода опроса  $T_j$  попарно с одним из периодов опроса  $T_k$  ( $T_j < T_k$ ,  $j \neq k \in \{1, 2, ..., Nd\}$ ) является отличие от единицы наибольшего общего делителя их относительных периодов  $\Theta_j$  и  $\Theta_k$ .

Для предельного случая, когда формируется один сигнал опроса с периодом  $T_j$  и один с периодом  $T_k$ , оценки максимально возможного числа разных периодов опроса  $T_k$ , попарно совместно реализуемых с заданным периодом опроса  $T_j$  определяются выражениями (8.9), (8.11), (8.13) для соответствующего способа формирования сигналов опроса.

В реальных многоканальных измерительных системах с периодом  $T_j$  опрашивается не один датчик, а несколько, например  $n_j$ . С другим периодом  $T_k$  должны опрашиваться  $n_k$  датчиков и т. д. Однако могут ли быть реализованы сигналы с периодом  $T_k$ , если существуют  $n_j$  сигналов опроса с периодом  $T_j$ , и если да, то может ли их число достичь  $n_k$ , зависит от способа формирования сигналов опроса и от соотношения их относительных периодов  $\Theta_j$  и  $\Theta_k$ , а также от способа организации структуры кадра многоканальной измерительной системы.



## 18. Рациональная организация опроса источников информации в многоканальной телеметрической системе с временным разделением каналов.

Организацией структуры кадра многоканальной измерительной системы называют сопоставление моментам опроса каждого датчика определенных позиций кадра, номера которых взяты из множества  $\{0, 1, 2, \dots, \Theta-1\}$ .

Рациональной считается такая организация структуры кадра, при которой вместе с опросом  $n_j$  датчиков с периодом опроса  $T_j$  может быть опрошено возможно большее число датчиков с периодом опроса  $T_k$ , вместе с опросом  $n_j$  датчиков с периодом опроса  $T_j$  и  $n_k$  датчиков с периодом  $T_k$  может быть опрошено возможно большее число датчиков с периодом  $T_r$  ( $T_j < T_k < T_r$ ) и так далее при минимальном значении относительной длительности кадра  $\Theta$ .

### Группирование подмножеств

Мы с Вами перешли от абсолютных значений периодов опроса  $T_j$  и  $T_k$  к относительным  $\Theta_j$  и  $\Theta_k$ . При этом выяснили, что числа подмножества  $M_j$ , принадлежащие по модулю  $\Theta_j$  классу  $\overline{m_{j1}}$ , образуют по другому модулю  $\Theta_k$  классы вычетов с номерами

$$R_{jk} = m_{j1} + d_{jk} x_{jk}. \quad (8.4)$$

Эти классы вычетов мы назвали запрещенными для подмножеств  $M_k$ , т.к. на позициях кадра системы, имеющих номера (8.4), нельзя располагать сигналы опроса с периодом  $T_k$ . Мы определили также из (8.4), что число запрещенных классов, образуемых одним подмножеством  $\Theta_j$  для подмножеств  $\Theta_k$  равно

$$z_{jk} = \frac{\Theta_k}{d_{jk}}. \quad (8.6)$$

На каких позициях следует разместить другие  $n_j-1$  сигналов опроса с периодом  $T_j$ , чтобы образовалось наименьшее число запрещенных позиций для сигналов с периодом опроса  $T_k$ ?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся следующим свойством сравнений: сравнение не изменяется при добавлении или отбрасывании членов, делящихся на модуль.

Выберем начальные члены подмножеств  $M_{j\ i}$ ,  $i \in \{2, 3, \dots, n_j\}$ , из условия

$$m_{j\ 1}(M_{j\ i}) = m_{j1}(M_{j\ 1}) + d_{jk} y_{jk}, \quad (9.1)$$

где  $y_{jk} = 0[1] \left( \frac{\Theta_j}{d_{jk}} - 1 \right)$ ,

$m_{j-1}(M_{j-1})$  - начальный член подмножества  $M_{j-1}$ , наименьший из множества допустимых значений  $\{0,1,2,...,(\Theta_j - 1)\}$ .

$$\Theta_j=6 \quad M_{j1} = 0 \quad 6 \quad 12 \quad 18 \quad R_{jk}= 0 \quad 6 \quad 4 \quad 2$$

$$\Theta_j=6 \quad M_{j2} = 2 \quad 8 \quad 14 \quad 20 \quad R_{jk}= 2 \quad 0 \quad 6 \quad 4$$

$$\Theta_j=6 \quad M_{j3} = 4 \quad 10 \quad 16 \quad 22 \quad R_{jk}= 4 \quad 2 \quad 0 \quad 6$$

Каждое из подмножеств  $M_{j i}$  образует по модулю  $\Theta_k$  запрещенные классы вычетов, определяемые выражением (8.4). Учитывая, что начальные члены подмножеств  $M_{j i}$  мы выбрали из условия (9.1), получим номера запрещенных классов вычетов, создаваемых любым подмножеством  $M_{j i}$  для подмножеств  $M_k$ :

$$R_{jk}(M_{j i}) = m_{j-1}(M_{j-1}) + d_{jk}y_{jk} + d_{jk}x_{jk}. \quad (9.2)$$

Все числа (9.2) сравнимы по модулю  $d_{jk}$  с  $m_{j-1}(M_{j-1})$ :

$$m_{j-1}(M_{j-1}) + d_{jk}y_{jk} + d_{jk}x_{jk} \equiv m_{j-1}(M_{j-1}) \pmod{d_{jk}} \quad (9.3)$$

В выражении (9.3) слагаемое  $d_{jk}y_{jk}$  делится на модуль  $d_{jk}$  при любом значении  $y_{jk}$ , поэтому его можно исключить из сравнения.

Таким образом, запрещенные для подмножеств  $M_k$  классы (9.2), образуемые числами подмножеств  $M_{j i}$ , совпадают с запрещенными классами (8.4), образуемые одним подмножеством  $M_{j-1}$ .

Группа первой ступени

Из (9.1) следует, что переменная  $y_{jk}$  может принимать  $\frac{\Theta_j}{d_{jk}}$  разных значений,

поэтому  $\frac{\Theta_j}{d_{jk}}$  подмножеств  $M_j$ , начальные члены которых выбраны в соответствии с условием (9.1), образуют те же самые запрещенные для подмножеств  $M_k$  классы, что и одно подмножество  $M_{j-1}$ , начальный член которого  $m_{j-1}(M_{j-1})$  наименьший среди начальных членов подмножеств  $M_{j i}$ , выбираемых из множества допустимых значений  $\{1,2,...,(\Theta_j - 1)\}$ .

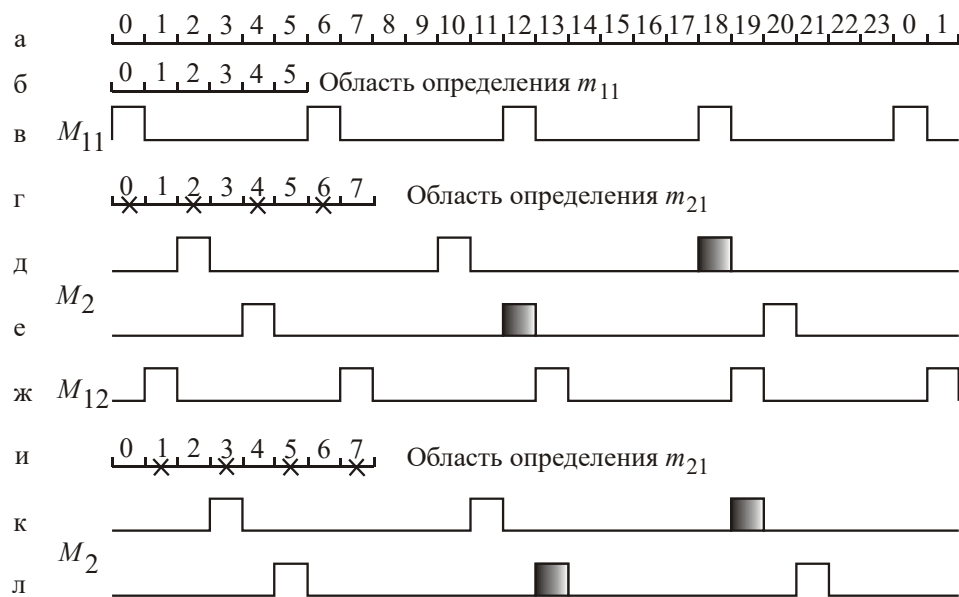
Назовем совокупность  $\frac{\Theta_j}{d_{jk}}$  подмножеств  $M_j$ , удовлетворяющих условию

(9.1), группой первой ступени и обозначим  $G_{jk}$ , а подмножество  $M_{j-1}$  назовем основным запрещающим подмножеством и обозначим  $M_{j-1 \text{ осн.}}$ .

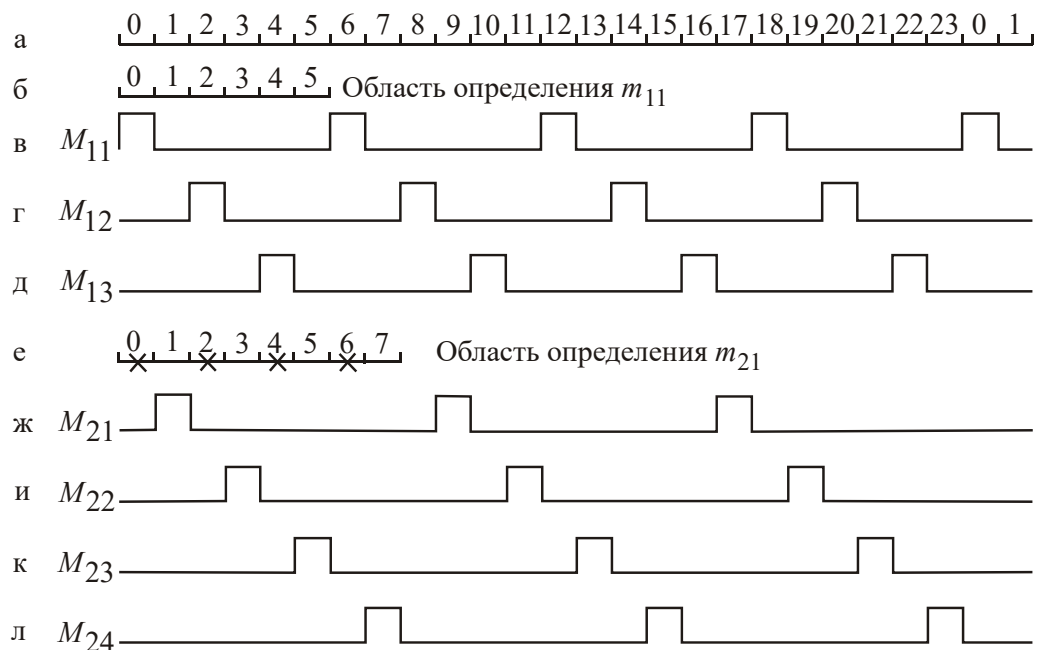
В зависимости от числа  $n_j$  подмножеств  $M_j$  группа  $G_{jk}$  может содержать  $\frac{\Theta_j}{d_{jk}}$  подмножеств  $M_j$  или меньше, чем  $\frac{\Theta_{j_0}}{d_{jk}}$ . В первом случае будем называть группу полной и обозначим  $G_{jk \text{ полн}}$ , во втором случае группу назовем неполной и обозначим  $G_{jk \text{ неполн}}$ .

В любом случае запрещенные для подмножеств  $M_k$  классы будет создавать только одно  $M_{j \text{ осн}}$ .

*Пример:*  $\Theta_1=6$ ,  $\Theta_2=8$ ,  $d_{12}=2$ ,  $\Theta=24$ .



В подмножество  $M_1$  входят числа  $M_1=\{0, 6, 12, 18\}$ . Эти числа по модулю  $\Theta_2$  образуют классы вычетов  $R_{12}=\{0, 2, 4, 6\}$ , которые являются запрещенными для сигналов с периодом  $\Theta_2$ .



## 19. Импульсные сигналы сложной формы (ИССФ) как переносчики информации в измерительных системах. Области применения импульсных сигналов сложной формы.

В ряде случаев дискретные отсчеты сигналов датчиков, полученные при дискретизации этих сигналов, целесообразно представить в другом виде, а именно в виде импульсных сигналов сложной формы (ИССФ) (рисунок 1).

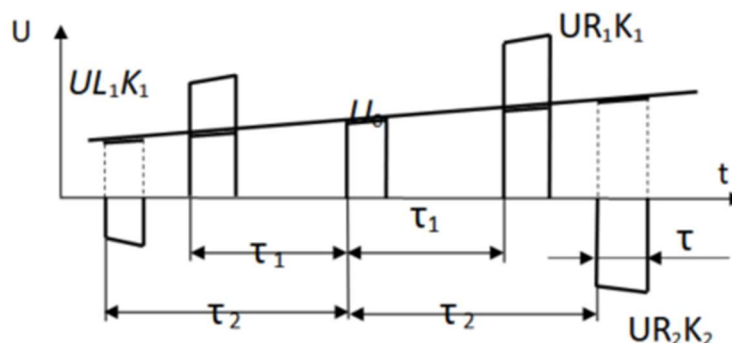


Рисунок 1– Импульсный сигнал сложной формы

Импульсные сигналы сложной формы представляют собой совокупность элементарных прямоугольных импульсов, параметры которых (амплитуда, количество, взаимное расположение на оси времени) определяются соответствующим образом с целью получения заданного спектрального состава ИССФ, обеспечивающих решение определенных задач.

Исходная периодическая последовательность прямоугольных импульсов (ПППИ) (рисунок 1,  $U_0$ ) может быть представлена совокупностью гармонических составляющих

$$U_0(t) = \frac{U_0\tau}{T} + \frac{2U_0\tau}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi\tau}{T}}{\frac{k\pi\tau}{T}} \cos 2k\pi \frac{t}{T}. \quad (1)$$

Спектр амплитуд сигнала  $U_0(t)$  показан на рисунке 2.

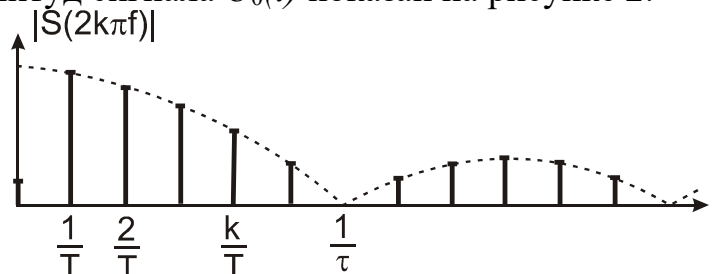


Рисунок 2 – Спектр амплитуд ПППИ

Преобразование дискретных отсчетов измерительного сигнала в ИССФ обеспечивает подавление заданного числа спектральных зон в спектре передаваемого сигнала (для иллюстрации использовать рис.2).

Применение ИССФ с заданным спектральным составом, то есть с заданным количеством и номерами подавленных спектральных зон, позволяет решать задачи, которые или принципиально не могут быть решены при использовании простых АИМ-сигналов, или требуют существенного ужесточения требований к устройствам сбора измерительных сигналов (повышение частоты дискретизации, повышения быстродействия устройств в групповом тракте и т. п.). Рассмотрим некоторые из этих задач.

### ***Задачи, решаемые с помощью импульсных сигналов сложной формы***

#### **Задача 1. Согласование спектров сигналов сообщений с полосой частот пропускания каналов связи**

Одна из основных проблем, которую необходимо решать в информационных системах, предназначенных для сбора и передачи сигналов сообщений о поведении объектов контроля – это согласование спектров сигналов в групповом тракте системы с полосой частот пропускания этого тракта.

Для некоторых объектов канал связи между источниками сообщений, находящимися на объекте, и аппаратурой обработки и регистрации имеет ограничения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в области нижних частот. (АЧХ канала)

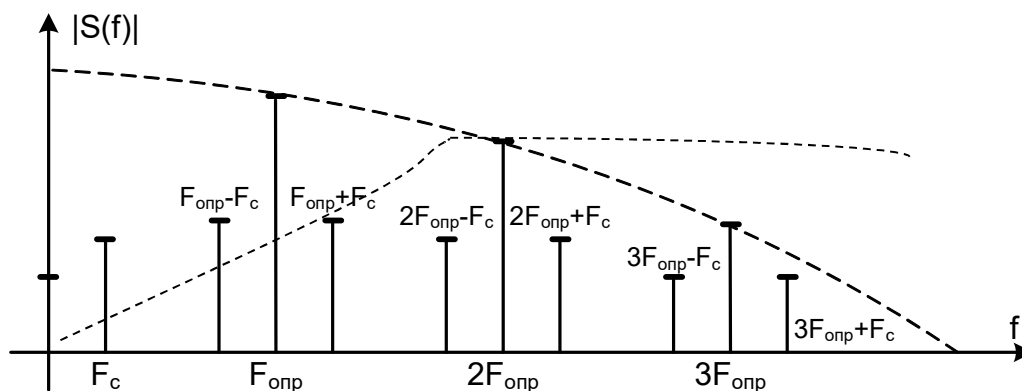


Рисунок 3 – Спектр импульсного переносчика, модулированного по амплитуде сигналом сообщения

Таковыми объектами могут быть вращающиеся узлы и агрегаты авиационной техники и энергетических установок, биологические объекты, в частности человек. Для них либо в силу конструктивных особенностей, либо из соображений техники безопасности необходимо гальваническое разделение аппаратуры сбора и передачи сигналов сообщений и аппаратуры приема и обработки этих сигналов,

Неравномерность АЧХ в области нижних частот при использовании импульсных источников информации приводит к искажению формы импульсных сигналов и к взаимному влиянию каналов в многоканальных информационных измерительных системах. Устранить этот нежелательный эффект можно следующими способами:

1) Увеличить частоту дискретизации сигналов сообщений. При этом спектр АИМ сигнала переместится в более высокочастотную область, где АЧХ канала связи равномерна. (на примере рис. 3)

Однако при этом повышаются требования к быстродействию устройств в канале связи. (Топр уменьш., при сохранении числа каналов уменьшится время на один канал, АЦП должен быть более быстрым, чтобы успеть преобразовать за  $T_k$  сигнал сообщения. Если передача без АЦП, то при уменьш. длит имп. должна быть больше ширина полосы частот канала связи)

2) обеспечить перенос спектров сигналов сообщений в область более высоких частот, где искажениями АЧХ канала связи можно пренебречь. Для этого надо использовать несущее колебание (несущую) с амплитудной или частотной модуляцией ее импульсными сигналами сообщений. Это, во-первых, усложняет передающую часть системы, а во-вторых, не всегда допустимо применение радиоканала.

3) Использование ИССФ позволяет согласовать спектр передаваемого измерительного импульсного сигнала с полосой частот пропускания канала связи за счет подавления составляющих спектра, попадающих в область частот с искаженной АЧХ канала связи. Для этого достаточно сформировать ИССФ с подавленными нулевой спектральной зоной и первыми  $n$  спектральными зонами. Число подавляемых спектральных зон  $n$  определяется видом АЧХ канала связи в области нижних частот. При этом обеспечивается простая аппаратная реализация информационной измерительной системы.

## 20. Амплитудная модуляция сигнала-переносчика.

### 2. Амплитудная модуляция гармоническим сигналом

Гармонический переносчик информации - это гармоническое колебание, которое описывается выражением

$$u(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = U_0 \cos \theta(t), \quad (22)$$

где  $U_0$  – амплитуда гармонического колебания,

$f_0$  – частота гармонического колебания ( $f_0 = 1/T$ , где  $T$  – период повторения гармонического колебания),

$\varphi_0$  – начальная фаза колебания,

$2\pi f_0 t + \varphi_0 = \theta(t)$  – мгновенная фаза колебания.

У гармонического переносчика, представленного выражением (22) информативными параметрами могут быть: амплитуда  $U_0$ , частота  $f_0$ , фаза  $\varphi_0$ . Каждый из этих параметров можно модулировать и получить соответственно амплитудную (АМ), частотную (ЧМ) и фазовую (ФМ) модуляции.

При амплитудной модуляции по закону изменения сигнала сообщения меняется амплитуда сигнала (22):

$$u = u_0 + \Delta u c(t), \quad (23)$$

где  $c(t)$  – сигнал сообщения.

Рассмотрим случай тональной амплитудной модуляции, когда  $c(t) = \cos 2\pi F_M t$ . Запишем модулированное по амплитуде колебание с учетом выражения (22) и (23), принимая  $\varphi_0 = 0$ , в следующем виде:

$$u_{AM} = u_0 (1 + m \cos 2\pi F_M t) \cos 2\pi f_0 t. \quad (24)$$

Здесь  $m = \frac{\Delta u}{u_0}$  – относительное изменение амплитуды, которое называется коэффициентом (глубиной) модуляции.

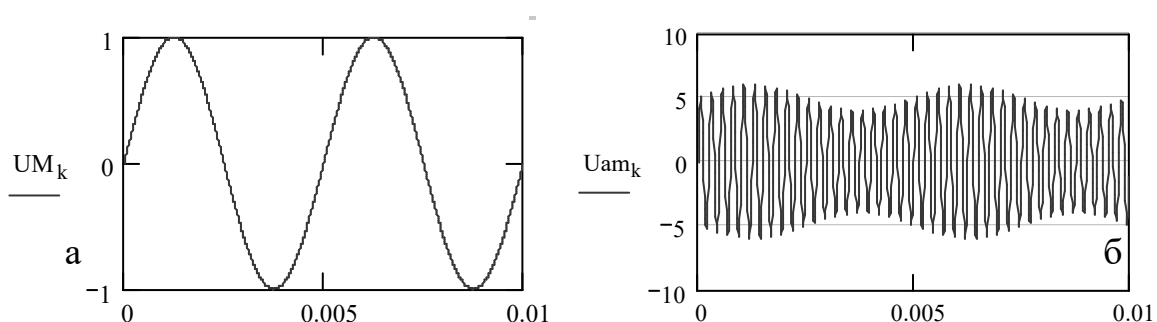
Графики модулирующего (первичного) сообщения или сигнала и модулированного колебания показаны на рис. 9,а и 9,б соответственно.

Коэффициент  $m$  можно определить как

$$m = \frac{u_{\max} - u_0}{u_0} = \frac{u_0 - u_{\min}}{u_0} = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{u_{\max} + u_{\min}}. \quad (25)$$

где  $u_0$  – амплитуда немодулированного гармонического переносчика;  $u_{\max}$  и  $u_{\min}$  – соответственно максимальная и минимальная амплитуда модулированного гармонического переносчика.

От значения  $m$  глубины модуляции зависит амплитуда огибающей сигнала-переносчика.



а – модулирующий сигнал; б – модулированный по амплитуде сигнал

Рисунок 9 – Графики модулирующего и модулированного сигналов

Как следует из рисунка 9 и выражения (25), чтобы исключить модуляционные искажения (перемодуляцию), необходимо выполнить условие  $m \leq 1$ . При  $m = 1$  модуляция будет стопроцентной ( $m=100\%$ ).

Преобразуем выражение (24) и, заменяя произведение косинусов суммой, получим

$$u_{AM} = u_0 \cos 2\pi f_0 t + \frac{m}{2} u_0 \cos 2\pi(f_0 + F_M)t + \frac{m}{2} u_0 \cos 2\pi(f_0 - F_M)t. \quad (26)$$

Таким образом, при тональной модуляции спектр модулированного по амплитуде сигнала состоит из трех гармонических составляющих: несущей с частотой  $f_0$  и двух боковых – нижней с частотой  $f_0 - F_M$  и верхней  $f_0 + F_M$ . Ширина полосы частот, занимаемая таким колебанием, равна  $2F_M$ .

Спектры модулирующего и модулированного сигналов показаны соответственно на рис. 10,а и рис. 10,б.

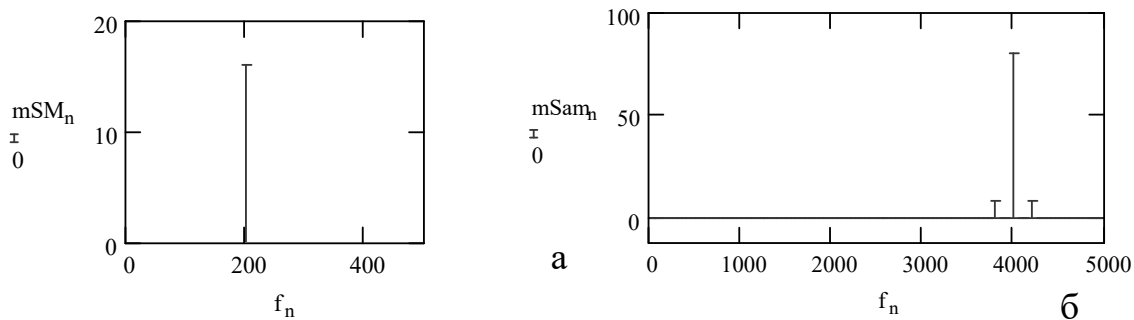


Рисунок 10 – Спектры модулирующего и модулированного сигналов  
Амплитудная модуляция сложным сигналом

Сложный модулирующий сигнал можно представить, в соответствии с преобразованием Фурье, суммой  $n$  гармонических составляющих.

Каждое гармоническое колебание с частотой  $F_i$ , входящее в состав модулирующего сигнала, обуславливает появление в спектре модулированного колебания, представленного выражением (26), двух боковых частот  $f_0 - F_i$  и  $f_0 + F_i$ .

Ширина полосы частот, занимаемая АМ-колебанием в рассмотренном случае, равна  $2F_M$ , где  $F_M$  – максимальная частота гармонического колебания, входящего в модулирующий сигнал (максимальная частота в спектре последнего).

#### Амплитудная манипуляция

Для передачи сообщений, представленных двоичным кодом, модулирующий сигнал представляет последовательность прямоугольных импульсов. При передаче символа «1» несущая излучаться будет, при передаче символа «0» излучение отсутствует (рисунок 11). При амплитудной манипуляции обычно выбирают  $m = 1$ .



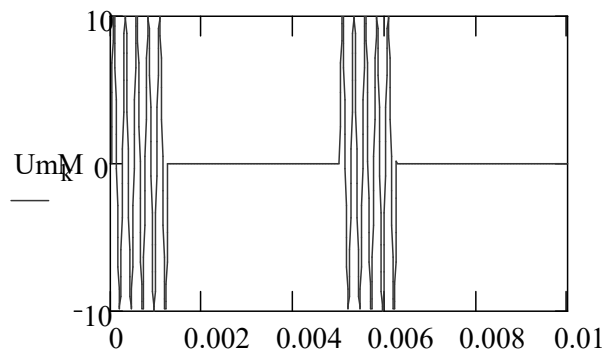
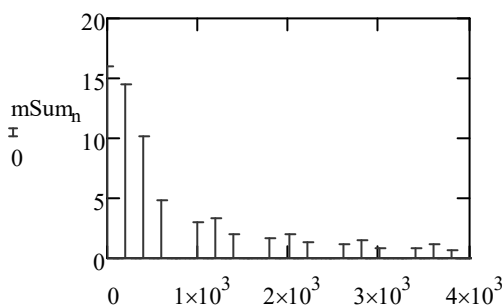


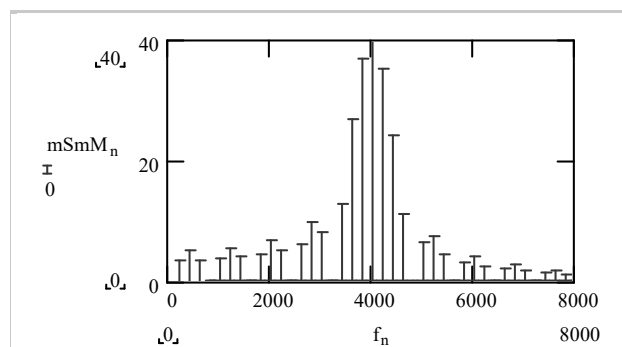
Рисунок 11 –

Амплитудная  
манипуляция

Последовательность прямоугольных импульсов можно рассматривать в соответствии с преобразованием Фурье как сложный сигнал, состоящий из отдельных гармонических составляющих. При амплитудной манипуляции спектр последовательности прямоугольных импульсов (рис. 12,а) переносится на частоту гармонического сигнала-переносчика (рис. 12,б). Это приводит к появлению в спектре манипулированного сигнала двух боковых полос с частотными составляющими  $f_0 + kF$  и  $f_0 - kF$ .



а



б

Рисунок 12 – Спектры сигналов при амплитудной манипуляции

## 21. Частотная модуляция сигнала-переносчика.

### 3. Частотная модуляция гармоническим сигналом

При частотной модуляции по закону изменения сигнала сообщения меняется частота сигнала (22):

$$f = f_0 + \Delta f c(t), \quad (27)$$

Используя (22) и (27) ЧМ-колебание при тональной модуляции можно записать в следующем виде:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \beta \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_M \cdot t + \gamma_0) + \theta_0), \quad (28)$$

где  $\beta = \frac{f_D}{F_M}$  - индекс частотной модуляции,

$f_D$  – девиации частоты, т.е. изменение частоты несущего колебания при модуляции,

$\gamma_0$  – начальная фаза модулирующего сигнала (сигнала сообщения),

$\theta_0$  – начальная фаза модулируемого сигнала (сигнала-переносчика).

Амплитуда ЧМ-колебания сохраняются неизменной (рис. 13).

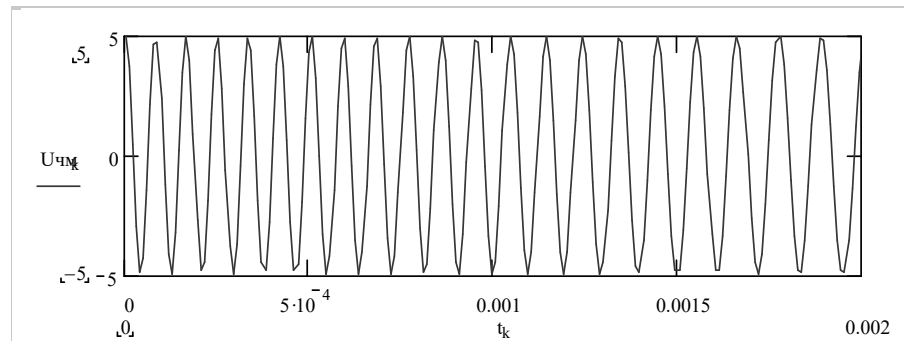


Рисунок 13 – Частотная модуляция гармонического сигнала

Для упрощения математических преобразований начальные фазы полагаются равными нулю.

В выражении (28) в состав аргумента входит тригонометрическая функция ( $\sin X$ ).

В таком случае разложение сигнала с частотной модуляцией (28) на простые гармонические колебания осуществляется с помощью функций Бесселя и имеет вид:

$$u_{\text{ЧМ}} = u_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos 2\pi(f_0 + nF_M)t, \quad (29)$$

где  $J_n(\beta)$  - функция Бесселя первого рода порядка  $n$ .

Характер изменения функций Бесселя первого рода в зависимости от порядка  $n$  и аргумента  $\beta$  показан на рисунке 14 (на рисунке  $\beta = m$ ). Из приведенных графиков видно, что функции  $J_n(\beta)$  начинают убывать, когда порядок  $n$  сравнивается с  $\beta$ .

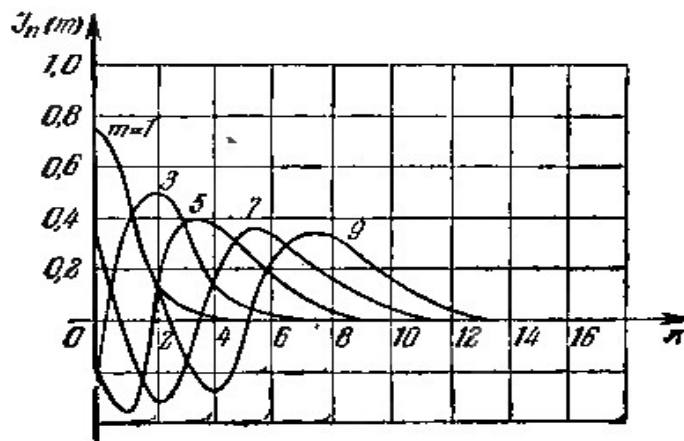


Рисунок 14 – Примеры функций Бесселя

На рисунке 15 приведен спектр ЧМ-колебания. Этот спектр дискретен и состоит из колебаний с несущей частотой  $f_0$ , амплитуда которой пропорциональна функции Бесселя нулевого порядка  $J_0(\beta)$  и бесконечного числа симметричных боковых частот  $f_0 \pm nF_M$  с амплитудами, пропорциональными функциям Бесселя соответствующих порядков.

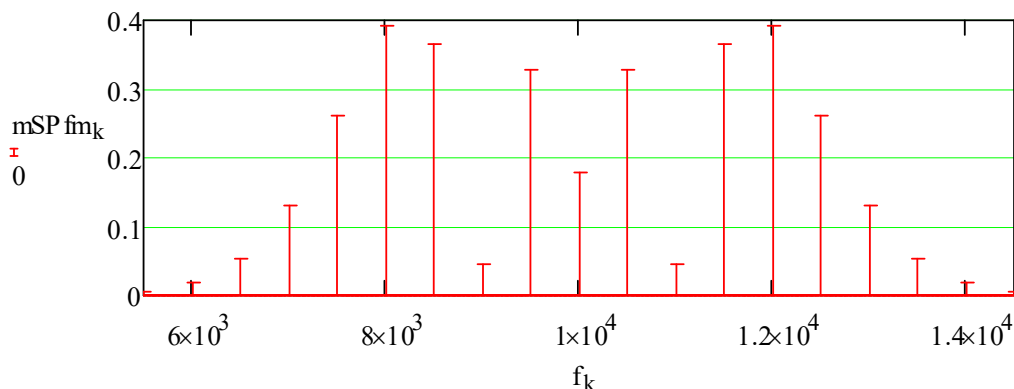


Рисунок 15 – Спектр амплитуд частотно-модулированного сигнала

#### Практическая ширина спектра при частотной манипуляции

Полоса частот, занимаемая ЧМ-колебанием, строго говоря, бесконечна. Реальные устройства и каналы связи имеют ограниченные полосы пропускания, что накладывает ограничение ширины спектра при ЧМ. На практике учитывают только те компоненты спектра, амплитуды которых превышают 1% от амплитуды немодулированной несущей, что позволяет ограничить полосу ЧМ-колебания на энергетической основе. На той же основе с достаточной точностью ширину полосы частот при тональной модуляции можно вычислить при помощи формул, полученных Манаевым Е.И.:

$$\Delta F = 2F_M(1 + \beta + \sqrt{\beta}) \quad (30)$$

или

$$\Delta F = 2\Delta f \left( 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right). \quad (31)$$

Из формулы (30) следует, что при небольших индексах модуляции (практически  $\beta \leq 0,4$ ) ширина полосы  $\Delta F$  приближается к  $2F_M$ , как в случае с АМ. Если же индексы модуляции превышают единицу (при неизменной девиации частоты  $\Delta f$ ), ширина полосы будет стремиться к  $2\Delta f$  с ростом  $\beta$ , что непосредственно следует из формулы (31).

## **22. Фильтрация измерительных сигналов. Фильтры нижних частот (ФНЧ). Характеристики в частотной области. ТЕМА 6 (ФНЧ)**

### **2 Фильтрация сигналов**

Фильтры нижних частот в устройствах восстановления измерительных сигналов. Характеристики фильтров в частотной и временной областях. Наиболее распространенные фильтры нижних частот: фильтры Баттерворта, Бесселя, Чебышева

#### **2.1 Общие определения**

Фильтрация сигнала – это выделение определенных составляющих в спектре сигнала.

Цели фильтрации:

4. Подавление помех, содержащихся в сигнале.
5. Выделение отдельных составляющих сигнала, соответствующих тем или иным свойствам исследуемого процесса.

Фильтрация является одной из наиболее распространенных операций обработки сигналов. В зависимости от того, какую часть спектра сигнала необходимо выделить применяют различные фильтры: ФНЧ, ФВЧ, полосовые фильтры. Мы с Вами ограничимся рассмотрением фильтров нижних частот (ФНЧ), поскольку процедура расчета ФНЧ используется и при расчете элементов ФВЧ, а полосовые фильтры рассчитываются как эквивалентные фильтры нижних частот.

#### **Фильтры нижних частот**

Фильтром нижних частот называют устройства, которые без изменения передают сигналы нижних частот и обеспечивают затухание сигнала на высоких частотах.

Передаточная функция фильтра зависит от частоты, поэтому может быть представлена совокупностью реальной и мнимой частей:

$$K(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) = K|\omega|e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.1)$$

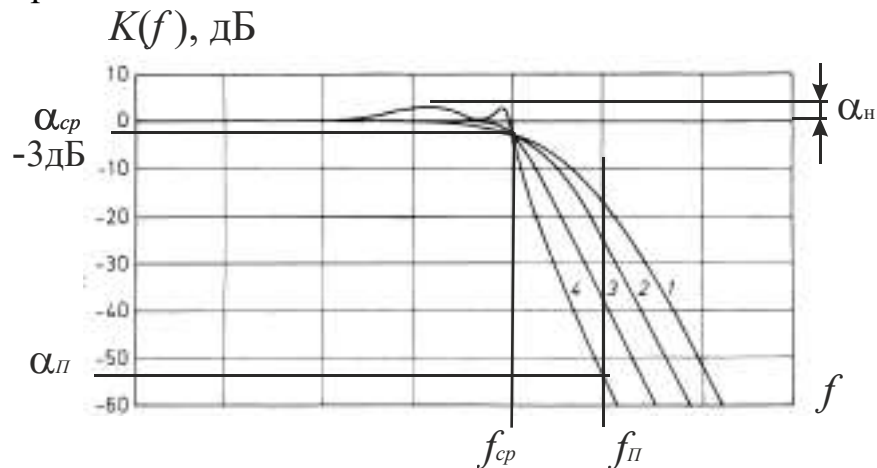
где  $K(\omega) = \sqrt{\text{Re}(\omega)^2 + \text{Im}(\omega)^2}$  - модуль или амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), т.е. зависимость коэффициента передачи ФНЧ от частоты;

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} \quad - \text{ фаза или фазо-частотная характеристика (ФЧХ), т.е}$$

зависимость фазы выходного сигнала от частоты.

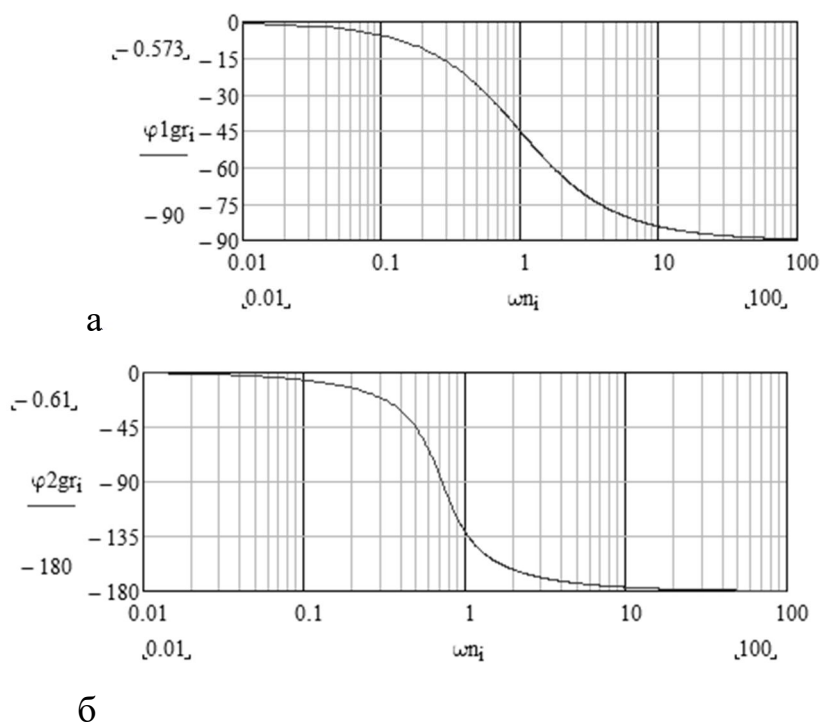
Коэффициент передачи может измеряться в «разах» или в децибелах ( $1\text{дБ}=20\log(K)$ ).

На рисунке 2.1 приведены АЧХ разных ФНЧ, а на рисунке 2.2 – фазо-частотные характеристики.



- 1– фильтр нижних частот с критическим затуханием; 2– фильтр нижних частот Бесселя; 3–фильтр нижних частот Баттерворта;  
4–фильтр нижних частот Чебышева с неравномерностью 3 дБ

Рисунок 2.1 – Амплитудно-частотная характеристика ФНЧ



а – ФНЧ первого порядка (RC-цепь),

б – ФНЧ 2-го порядка (фильтр Чебышева)  
Рисунок 2.2 – Фазо-частотная характеристика ФНЧ

## 2.2 Основные характеристики ФНЧ

### Характеристики в частотной области

Основной параметр АЧХ – **частота среза  $f_{ср}$** . Это частота, на которой коэффициент передачи  $K(f)$  уменьшится на 3 дБ (или в 1.41 раза) по отношению к коэффициенту передачи на нулевой частоте  $K_0$ ,

$$K(f_{ср}) = 0.707 K_0.$$

Коэффициент  $K_0 \geq 1$  называют номинальным коэффициентом передачи.

**Частота подавления  $f_n$**  - частота, на которой коэффициент передачи фильтра уменьшится до заданной величины  $K(f_n)$ , причем  $\frac{K(f_n)}{K_0} \ll 1$ .

**Неравномерность АЧХ** в полосе пропускания характеризуется коэффициентом допустимых пульсаций

$$\delta_H = \frac{K_{\max} - K_{\min}}{K_0}.$$

Для фильтров четного порядка вся неравномерность расположена выше коэффициента передачи на нулевой частоте, а для фильтров нечетного порядка – ниже.

При выражении коэффициента передачи децибелах (дБ) для его характеристики в зависимости от частоты используют следующие коэффициенты:

$\alpha_{ср}$  [дБ] - коэффициент характеризующий уменьшение коэффициента передачи по сравнению с  $K_0$  на 3 дБ на частоте среза;

$\alpha_n$  [дБ] - коэффициент характеризующий уменьшение коэффициента передачи по сравнению с  $K_0$  на частоте подавления;

$\alpha_H$  [дБ] – коэффициент характеризующий неравномерность АЧХ в полосе пропускания.

Для измерительных систем используется еще коэффициент

$\alpha_c$  [дБ] - коэффициент характеризующий отклонение коэффициента передачи от  $K_0$  на максимальной частоте измерительного сигнала, который обрабатывается ФНЧ. Обычно  $\alpha_c$  должен иметь достаточно малое значение, например  $\alpha_c \approx 0.1$  дБ, что эквивалентно спаду  $K(f_c)$  относительно  $K_0$  на  $\Delta K \approx 0.01 K_0$ .

**Крутизна спада АЧХ.** Она характеризует переходную область от  $f_{ср}$  до

$f_{\text{подавления}}$  и обозначается как 
$$V = \left[ \frac{\partial B}{\partial \text{дек}} \right]$$

Для фильтра 1-го порядка:  $V = -20 \frac{\partial B}{\partial \epsilon_k}$ .

Для фильтра 2-го порядка:  $V = -40 \frac{\partial B}{\partial \epsilon_k}$ ,

для 3-го порядка:  $V = -60 \frac{\partial B}{\partial \epsilon_k}$  и т. д.

Область частот от 0 до  $f_{\text{ср}}$  – полоса пропускания ФНЧ.

Область частот от  $f_{\text{ср}}$  до  $f_{\text{п}}$  образует переходную область частот.

Область частот после  $f_{\text{п}}$  является областью подавления сигнала.

**Групповое время задержки**, определяется как производная от фазовой характеристики по частоте

$$t_{gr} = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (2.2)$$

## 23. ФНЧ. Характеристики во временной области.

### 2.1 Общие определения

Фильтрация сигнала – это выделение определенных составляющих в спектре сигнала.

Цели фильтрации:

6. Подавление помех, содержащихся в сигнале.
7. Выделение отдельных составляющих сигнала, соответствующих тем или иным свойствам исследуемого процесса.

Фильтрация является одной из наиболее распространенных операций обработки сигналов. В зависимости от того, какую часть спектра сигнала необходимо выделить применяют различные фильтры: ФНЧ, ФВЧ, полосовые фильтры. Мы с Вами ограничимся рассмотрением фильтров нижних частот (ФНЧ), поскольку процедура расчета ФНЧ используется и при расчете элементов ФВЧ, а полосовые фильтры рассчитываются как эквивалентные фильтры нижних частот.

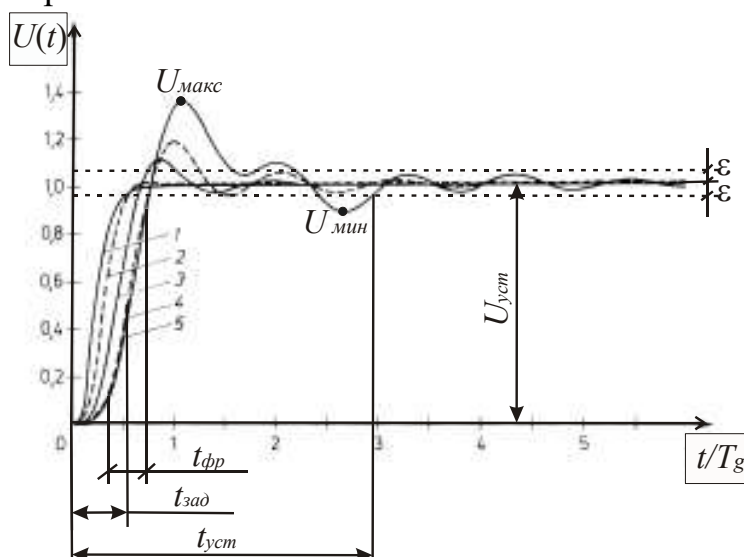
#### **Фильтры нижних частот**

Фильтром нижних частот называют устройства, которые без изменения передают сигналы нижних частот и обеспечивают затухание сигнала на высоких частотах.

#### **Характеристики во временной области**

Для анализа работы ФНЧ во временной области исследуют его переходную характеристику (рисунок 2.3).

**Переходной характеристикой  $h(t)$**  называют реакцию фильтра на единичный скачок напряжения



- 1 – фильтр нижних частот с критическим затуханием; 2 – фильтр нижних частот Бесселя; 3 – фильтр нижних частот Баттерворта; 4 – фильтр нижних частот Чебышева с неравномерностью 0.5 дБ; 5 – фильтр нижних частот Чебышева с неравномерностью 3 дБ

Рисунок 9 – Переходные характеристики ФНЧ различных типов



Параметры, характеризующие ФНЧ во временной области.

**Время задержки.** Измеряется от момента  $t_0$  до момента достижения выходным сигналом уровня 0.5.

**Время нарастания** или длительность фронта. Отрезок времени между значениями выходного сигнала, составляющими 0.1 и 0.9 от установившегося значения. Для РС цепочки длительность фронта примерно  $2.2\tau$ .

**Время установления.** За это время принимаем интервал времени от  $t_0$  до момента времени, когда сигнал на выходе фильтра войдет в заданную полосу допуска.

Коэффициент перерегулирования – превышение выходным сигналом установившегося единичного значения:

$$\delta_{\Pi} = \frac{U_{\max} - U_{уст}}{U_{уст}}. \quad (2.3)$$

**Импульсная переходная характеристика  $g(t)$**  – это реакция ФНЧ на единичный импульс ( $\delta$ -функцию). Импульсную переходную характеристику называют еще весовой характеристикой фильтра.

Импульсная переходная характеристика связана с переходной характеристикой соотношением

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.4)$$

Импульсная переходная характеристика связана с частотной характеристикой (передаточной функцией) преобразованием Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.5)$$

При прямоугольной АЧХ импульсная переходная характеристика имеет вид типа  $\sin x/x$  (рисунок 2.4)

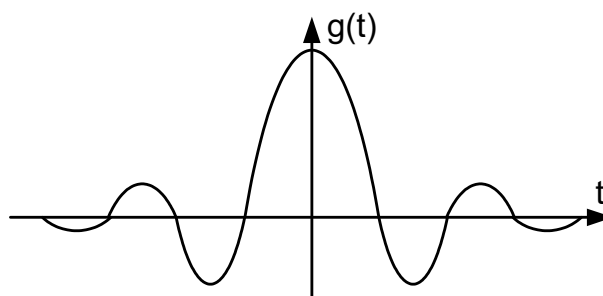


Рисунок 2.4 – Импульсная характеристика ФНЧ с прямоугольной АЧХ

При реализации фильтров на дискретных элементах обязательно присутствие в фильтре реактивных элементов ( $C$  или  $L$ ). Сколько в схеме реактивных элементов, таким будет и порядок ФНЧ.

Для общности описания и анализа характеристик фильтров используют переход от текущей частоты к нормированной комплексной переменной

$$p = j \frac{\omega}{\omega_{cp}},$$

где  $\omega$  - текущая частота,

$\omega_{cp}$  - частота среза.

Передаточная функция ФНЧ  $n$ -го порядка описывается в общем виде уравнением

$$K(p) = \frac{K_0}{1 + C_1 p + C_2 p^2 + \dots + C_n p^n}, \quad (2.6)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  - положительные действительные коэффициенты.

Для построения реального фильтра необходимо определить корни полинома  $n$ -й степени.

Если корни действительные, то передаточную функцию можно представить в виде:

$$K(p) = \frac{K_0}{(1 + \alpha_1 p)(1 + \alpha_2 p) \dots (1 + \alpha_n p)}, \quad (2.7)$$

где  $\alpha_i$  - положительные действительные коэффициенты.

Если среди корней полинома есть комплексные, то он раскладывается на произведение сомножителей второго порядка, а передаточная функция ФНЧ представляется в виде

$$K(p) = \frac{K_0}{(1 + a_1 p + b_1 p^2)(1 + a_2 p + b_2 p^2) \dots (1 + a_n p + b_n p^2)}, \quad (2.8)$$

где  $a_i, b_i$  - положительные действительные коэффициенты.

Для полиномов нечетной степени  $b_1 = 0$ .

Коэффициенты  $a_i, b_i$  определяют характер АЧХ фильтра, т.е. определяют плоскость вершины, крутизну спада АЧХ, и по этим параметрам можно оптимизировать вид АЧХ. Наиболее часто при обработке сигналов применяются следующие фильтры.

## 24. Принципы построения ФНЧ высоких порядков.

### 2.3 Активные RC-фильтры

Активные фильтры. Типовая ячейка фильтра нижних частот. Принципы построения фильтров высоких порядков. Порядок расчета активных RC-фильтров

На практике для обработки сигналов широко применяются активные фильтры на R-C элементах. Типовая ячейка фильтра нижних частот второго порядка приведена на рисунке 2.7. Она выполнена на операционном усилителе при его инвертирующем включении. Другие возможные схемные решения ФНЧ можно посмотреть в приведенных выше книгах.

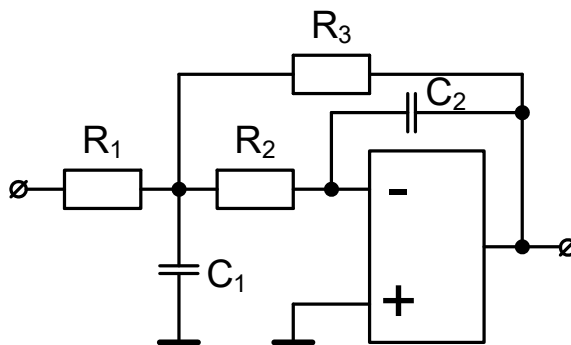


Рисунок 2.7 – Типовая ячейка ФНЧ второго порядка

Такие фильтры эффективны до частоты среза  $f_{\text{ср}}$  до 100 кГц, что вполне достаточно для обработки биомедицинских сигналов. Ограничения по частоте определяются частотными свойствами операционного усилителя. Его коэффициент усиления при разомкнутой обратной связи на частоте среза должен быть не менее 50.

### *Построение фильтров высоких порядков*

Ранее мы отмечали, что чем выше порядок фильтра, тем круче переходная область, т. е. быстрее происходит переход от полосы пропускания фильтра к полосе подавления. Это свойство используется, когда надо разделить близко расположенные спектральные составляющие сигнала, например, отделить полезный сигнал от сигнала помехи.

Типовыми блоками для построения ФНЧ являются фильтры 1-го и 2-го порядка. Из набора этих типовых блоков образуются фильтры высоких порядков. Если требуется построить фильтр четного порядка, то в его состав войдут только типовые блоки второго порядка. Если порядок фильтра нечетный, то один каскад, обычно первый, имеет первый порядок.

Рассмотрим следующий пример. Пусть необходимо реализовать фильтр 7-го порядка, т. е.  $n=7$ . Тогда в состав ФНЧ войдет один каскад первого порядка и 3 каскада второго порядка (рисунок 2.8). Передаточная функция такого фильтра описывается выражением (2.8), в котором  $b_1=0$ .

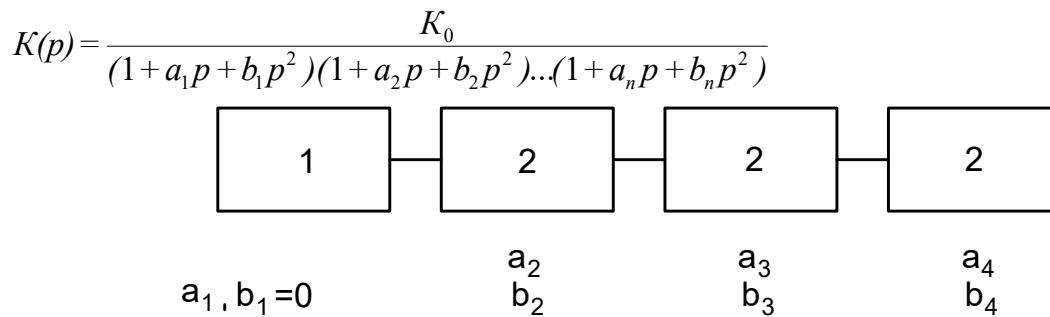


Рисунок 2.8 – Определение структуры ФНЧ высокого порядка

Для каждого типового блока, как следует из (2.8) имеется своя пара коэффициентов  $a_i, b_i$  (рисунок 2.8). Значения этих коэффициентов для разных типов фильтров заданного порядка приводятся в справочниках. Приведены они и упомянутой выше литературе. Только в первом источнике они так и обозначены  $a$  и  $b$ , а во втором –  $b$  и  $c$  соответственно. Для фильтров Чебышева при выборе коэффициентов кроме порядка фильтра необходимо задать коэффициент неравномерности АЧХ –  $\alpha_n$ , так как для каждого  $\alpha_n$  существует свой набор коэффициентов  $a$  и  $b$ .

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  используются при расчете параметров элементов  $R$  и  $C$  для каждого типа ФНЧ.

## 25. Применение ФНЧ для восстановления непрерывных сигналов по дискретным отсчетам.

### Порядок расчета активных фильтров

Рассмотрим последовательность расчета типовой ячейки второго порядка, выполненной на основе инвертирующего операционного усилителя (рисунок 2.7).

1) Задать частоту среза  $f_{cp}$  и коэффициент усиления на нулевой частоте  $K_0$  ( $K_0 < 0$ , так усилитель инвертирующий).

2) Выбрать значение емкости конденсатора  $C_1$  из соотношения

$$C_1 = \frac{10}{f_{cp} [Гц]} [мкФ] \quad (2.9)$$

Выбирается ближайшее значение из стандартного ряда.

3) Выбирать из справочника коэффициенты  $a_i$  и  $b_i$  для каждой ячейки.

4) Определить коэффициент  $m$ , связывающий параметры  $a_i$  и  $b_i$ :

$$m = \frac{4b_i(1 - K_0)}{a_i^2} \quad (2.10)$$

5) Выбрать значение  $C_2$  из условия  $C_2 \leq C_1/m$ , чтобы не получить при расчете сопротивлений  $R_i$  мнимых значений. Выбирается ближайшее меньшее значение из стандартного ряда. Слишком уменьшать значение  $C_2$  не рекомендуется.

6) Вычислить значения сопротивлений резисторов  $R_3, R_2, R_1$ :

Начинается расчет с резистора  $R_3$  в цепи обратной связи операционной схемы (рисунок 2.7) -

$$R_3 = \frac{a_i C_1 - \sqrt{a_i^2 C_1^2 - 4 C_1 C_2 b_i (1 - K_0)}}{4 \pi f_{cp} C_1 C_2}; \quad (2.11)$$

$$R_2 = \frac{b_i}{4 \pi^2 f_{cp}^2 C_1 C_2 R_3}; \quad (2.12)$$

$$R_1 = -R_3 / K_0 \quad (2.13)$$

Резисторы  $R_i$  также выбираются ближайшие из стандартного ряда (например, E192).

Если необходимо изменить частоту среза, то сделать это можно достаточно просто, изменив значения емкости конденсаторов. В случае, если требуется увеличить частоту среза  $f_{cp}^* = N f_{cp}$  то емкости конденсаторов уменьшаются в  $N$  раз:  $C_{1,2}^* = C_{1,2} / N$

Если требуется уменьшить  $f_{cp}^* = f_{cp} / N$ , то  $C_{1,2}^* = C_{1,2} N$ . Сопротивления резисторов остаются прежними.

Фильтр первого порядка может быть выполнен на основе RC цепочки и не инвертирующего повторителя напряжения (рисунок 2.9,а) или инвертирующего усилителя (рисунок 2.9,б).

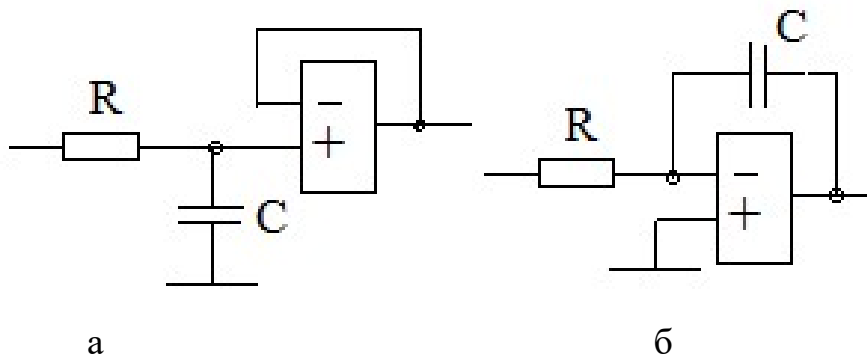


Рисунок 2.9 – Варианты выполнения фильтра нижних частот первого порядка

Для фильтра первого порядка  $C1$  рассчитывается по формуле (2.9), а  $R1$  по формуле

$$R1 = \frac{a_1}{2 \cdot \pi \cdot f_{cp} \cdot C1}. \quad (2.14)$$

Для фильтра первого порядка  $a_1=1$ . Для фильтров более высоких нечетких порядков (3, 5, 7,...)  $a_1 \neq 1$ .

## 26. Особенности восстановления с помощью ФНЧ непрерывных сигналов из отсчетов с АИМ-1 и АИМ-2.

В многоканальных измерительных системах с временным разделением каналов контролируемые непрерывные сигналы дискретизируются, полученные дискретные отсчеты поочередно во времени передаются по общей линии связи на приемную аппаратуру, где осуществляется разделение группового сигнала на каналные измерительные сигналы (см. рис. 1 в лабораторной работе № 1). На выходах аппаратуры разделения каналные сигналы представлены в виде дискретных отсчетов с АИМ. Обычно это АИМ-1, так как техническая реализация просто осуществляется непосредственно в процессе дискретизации исходных непрерывных сигналов.

При гармоническом модулирующем сигнале  $c(t) = \cos 2\pi F_M t$  спектр амплитуд сигнала с АИМ1 имеет вид [1]:

$$U_{АИМ1}(t) = \frac{U_0 \tau}{Td} + \frac{2U_0 \tau}{Td} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k \tau / Td}{\pi k \tau / Td} \cos 2\pi k F_d t + \frac{m U_0 \tau}{Td} \cos 2\pi F_C t + \\ + \frac{m U_0 \tau}{Td} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k \tau / Td}{\pi k \tau / Td} \cos 2\pi (k F_d \pm F_C) t, \quad (1)$$

где  $F_C$  – частота модулирующего сигнала,

$m = \frac{\Delta U}{U_0}$  – коэффициент амплитудно-импульсной модуляции ( $0 \leq m \leq 1$ ).

Из выражения (1) видно, что в спектре сигнала с АИМ-1 содержится составляющая с частотой  $F_C$  исходного контролируемого сигнала. Эту составляющую можно выделить с помощью фильтра нижних частот, у которого полоса частот пропускания не меньше полосы частот контролируемого сигнала.

Амплитуда восстановленного сигнала зависит от отношения длительности отсчета  $\tau$  к периоду дискретизации  $Td$ .

Для увеличения амплитуды восстановленного сигнала, на приемной стороне после разделения дискретных отсчетов по своим каналам осуществляют преобразование каналных сигналов с АИМ-1 в сигналы с АИМ-2. При этом

происходит запоминание значения отсчета на период дискретизации до следующего отсчета. Таким образом, в результате преобразования  $\tau \approx Td$ .

Спектр амплитуд сигнала с АИМ-2 имеет вид:

$$U_{АИМ2}(t) = U_0 \frac{\tau}{Td} + 2U_0 \frac{\tau}{Td} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi \frac{\tau}{Td}}{k\pi \frac{\tau}{Td}} \cos 2k\pi Fd + mU_0 \frac{\tau}{Td} \frac{\sin \pi F_c \tau}{\pi F_c \tau} \cos 2\pi F_c t +$$

$$+ mU_0 \frac{\tau}{Td} \frac{\sin \pi (kFd \pm F_c) \tau}{\pi (kFd \pm F_c) \tau} \cos 2\pi (kFd \pm F_c) t$$

(2)

Если на вход фильтра нижних частот (ФНЧ) с частотой среза  $f_{cp}$ , несколько превышающей максимальную частоту  $F_c$  в спектре исходного непрерывного сигнала, подать последовательность дискретных отсчетов непрерывного сигнала, то на выход ФНЧ пройдут только составляющие с частотой до  $f_{cp}$  (рис. 1).

В данной лабораторной работе исследуется процесс восстановления непрерывных сигналов по дискретным отсчетам. В качестве ФНЧ используются фильтр четвертого порядка Баттерворта.

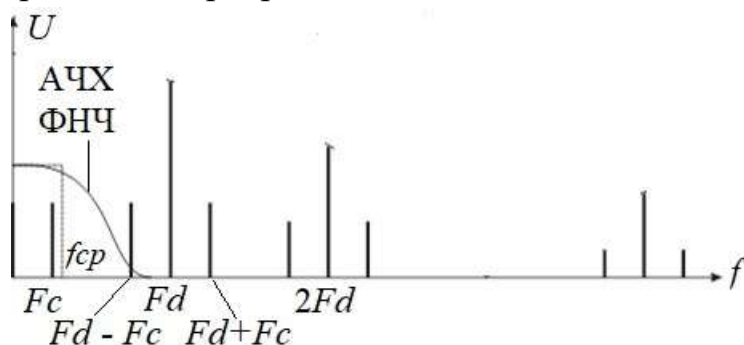


Рис. 1. Спектр АИМ-сигнала и АЧХ фильтра нижних частот

Для имитации одного из  $N$  измерительных каналов многоканальной информационно-измерительной системы используется схема, приведенная на рис. 2. В качестве входного сигнала используется синусоидальный сигнал с  $F_c = F_{c2}$  из лабораторной работы №1.

Ключ К1 имитирует один канал телеметрической системы. Он замыкается с периодом, равным периоду дискретизации  $Td/2$ , на время, равное каналному интервалу  $T_k$ . На выходе ключа К1 в точке 2 формируется сигнал с АИМ-1. Ключ К2 входит в состав УВХ. Он замыкается с тем же периодом  $Td/2$  на время  $T_{упр}$ . Обратите внимание на то, что импульс управления ключом К2 располагается по времени внутри интервала, занимаемого импульсом управления ключом К1. Для выбранного в работе соотношения  $T_{упр}$  и  $T_k$  это вторая четверть интервала  $T_k$ . В точке 3 формируется сигнал с АИМ-2.

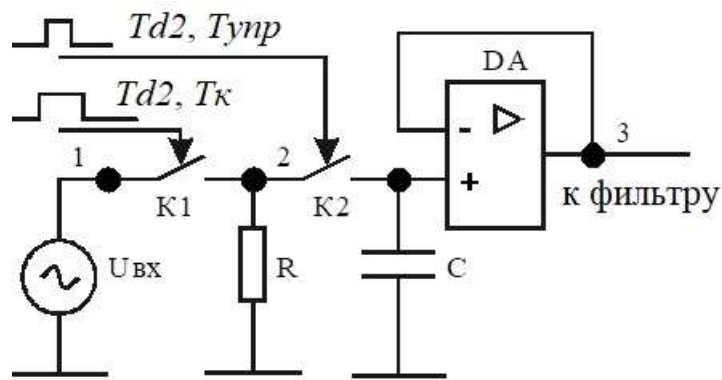


Рис. 2. Модель измерительного канала

## 27. Восстановление непрерывных сигналов по дискретным отсчетам на основе степенных полиномов.

1. Восстановление непрерывных сигналов по дискретным отсчетам. Скользящее интерполирование. Погрешности интерполяции

Одним из видов представления потребителю информации о контролируемых процессах является представление ее в виде графиков непрерывных сигналов, отображающих эти процессы. Таким образом, после проведения операций дискретизации, многоканальной передачи, разделения группового сигнала на последовательности дискретных отсчетов каждого измерительного сигнала необходимо по этим дискретным отсчетам восстановить непрерывный сигнал.

Восстановление непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам можно производить как на основе ортогональных, так и неортогональных базисных функций.

Применение ортогональных базисных функций для восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчетам мы рассмотрели ранее при изучении ряда Котельникова. В данном случае базисными функциями были функции типа  $(\sin x)/x$ .

При неортогональных представлениях непрерывных сигналов наиболее часто используются степенные алгебраические полиномы

$$U^*(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j, \quad (1)$$

где  $n$  – степень полинома,

$a_j$  – действительные коэффициенты.

Если провести полином через дискретные отсчеты таким образом, что его значения в точках отсчетов совпадают со значениями отсчетов, то такой полином называют интерполирующим.

При интерполяции строят так называемую интерполирующую функцию  $\Phi^*(t)$ .



Интерполирующая функция  $\Phi^*(t)$  в точках отсчетов разделенных периодом дискретизации совпадает с соответствующими отсчетами функции  $U(t)$ , а в остальных точках приближенно представляет функцию  $U(t)$  с той или иной степенью точности (рисунок 1).

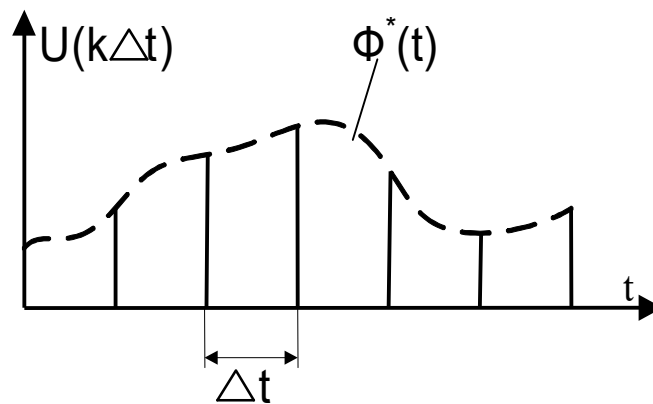


Рисунок 1 – Интерполирующая функция

## 28. Скользящее интерполирование.

### Принцип скользящей интерполяции

При восстановлении непрерывного сигнала по дискретному отсчету через конечное число отсчетов проводят полином соответствующей степени. Этот полином в точках отсчетов совпадает со значением отсчета и наз интерполирующий полином. Сначала получают дискретные отсчёты и передают их по линии связи. На приемной стороне восстанавливают его амплитуду, для каждого отсчёта надо сформировать функцию отсчёта и промасштабировать её с амплитудой дискретного отсчёта. Далее складывают все функции отсчётов и получают непрерывный сигнал. При интерполяции часто используют степенные полиномы  $U(t) = \sum_{j=0}^N a_j t^j$ , где  $a_j$  – постоянные коэффициенты. Если передача идет за время  $T_{\text{сигнала}}$ , то степень полинома  $N = 2T_c F_{c \text{ max}}$ .

На практике для восстановления непрерывного сигнала в режиме реального времени применяют скользящее интерполирование. Это значит, что интерполирование производится не сразу на всем интервале существования сигнала, а только на интервале от  $t_k$  до  $t_{k+n}$ , в котором имеется  $(n+1)$  отсчетов. Для этого берут  $n+1$  подряд идущих отсчетов, через них проводят полином степени  $n$ .

На каждом очередном периоде дискретизации из  $n+1$  отсчетов отбрасывается первый и добавляется очередной отсчет. Через вновь полученные  $n+1$  отсчетов вновь проводят полином степени  $n$ .

Интервал, содержащий  $n+1$  отсчетов, называют интервалом интерполяции.

В качестве интерпол. полинома используют полином Лагранжа  $n$ -ой степени:

$$l_n(\tau, l) = (-1)^n \frac{(\tau+l)(\tau+l-1) \dots (\tau+l-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{u_i C_n^i}{\tau+l-i}$$

## 29. Функция отсчета.

### Функция отсчета

Для каждого отсчета формируется функция отсчета, то есть реакция устройства восстановления на один отсчет. Для построения функции отсчета берется один отсчет сигнала, а все отсчеты слева и справа от него приравняются нулю. Через  $n+1$  отсчетов проводят полином  $n$ -й степени. Построения производят  $n+1$  раз. Именно столь раз можно провести отличающийся от нуля полином через  $n+1$  отсчетов.

Например, функция отсчета для полинома первой степени имеет вид равнобедренного треугольника. Результат построения получается с задержкой, так как построения возможны только после поступления последнего из  $n+1$  отсчетов. При линейной интерполяции задержка равна периоду дискретизации (рисунок 2).

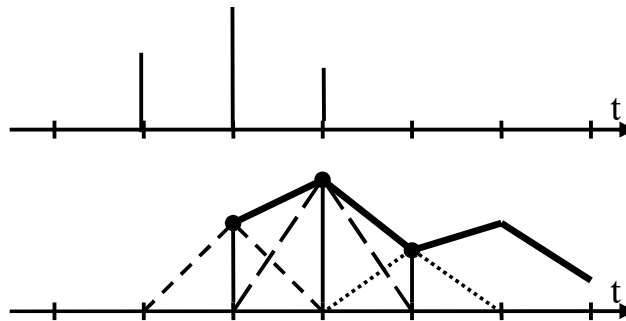


Рисунок 8.2 – Функции отсчетов

Интервал на котором значения интерполирующего многочлена присваиваются значениям интерполирующей функции называется интервалом соответствия. Интервалы соответствия обозначают буквой  $l$  и нумеруют числами от 0 до  $n-1$ :  $l=0, 1, \dots, n-1$ .

Для линейной интерполяции  $l=0$

Для полинома 2-го порядка  $l=0, 1$ .

Задержка восстановленного сигнала определяется номером интервала соответствия.

Для полинома 2 степени задержка может быть равна как периоду дискретизации (при  $l=0$ ), так и двум периодам дискретизации (при  $l=1$ ).

В общем виде время задержки определяется по формуле:

$$t_z = (n - l)\Delta t, \quad l = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (2)$$

Пример построения интерполирующей функции на основе интерполирующего полинома второй степени

Пусть есть последовательность дискретных отсчетов  $U(kT)$ .

Полином второй степени имеет вид:

$$y(t) = At^2 + Bt + C \quad (3)$$

На каждом интервале интерполяции, включающем два периода дискретизации, полином вида (3) проводится через три соседних отсчета (рисунок 3). При этом на каждом интервале интерполяции надо рассчитывать свои коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

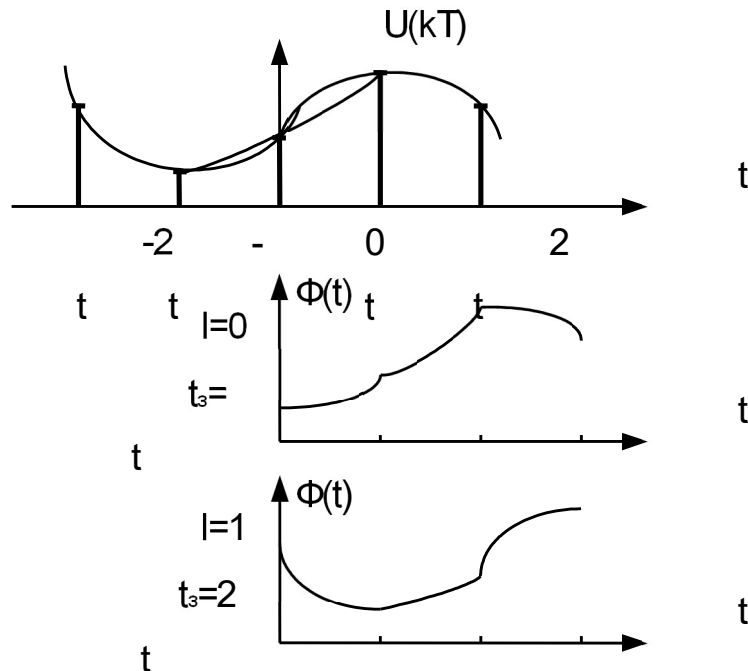


Рисунок 3 – Построение интерполирующей функции второго порядка

Для нахождения коэффициентов полинома необходимо решить систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} U(0) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C, \\ U(-\Delta t) = A\Delta t^2 - B\Delta t + C, \\ U(\Delta t) = A\Delta t^2 + B\Delta t + C; \end{cases} \quad (4)$$

В результате получим выражения для определения коэффициентов:

$$C = U(0),$$

$$B = \frac{U(\Delta t) - U(-\Delta t)}{2\Delta t},$$

$$A = \frac{U(\Delta t) + U(-\Delta t) - 2U(0)}{2\Delta t^2}$$

*Интерполирующий многочлен Лагранжа*

В качестве интерполирующего полинома при скользящем интерполировании часто применяется многочлен Лагранжа  $n$ -ной степени:

$$L_n(\tau, l) = (-1)^n \frac{(\tau + l)(\tau + l - 1) \dots (\tau + l - n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{U_i C_n^i}{\tau + l - i}, \quad (5)$$

где  $l$  – интервал соответствия,

$l=0, 1, 2, \dots, n-1$ ;  $n$  – степень полинома,

$U_i = U(t_k + i\Delta t)$  – значения отсчетов внутри интервала интерполяции,

$t_k$  – начало интервала интерполяции,

$i=0, 1, \dots, n$  – порядковый номер отсчета восстанавливаемой функции,

$\tau$  – относительное время внутри интервала интерполяции,

$$\tau = \frac{t_j - (t_k + \Delta t \cdot l)}{\Delta t}, \quad (6)$$

$t_j$  – произвольный момент времени внутри интервала интерполяции.

Многочлен Лагранжа первой степени:

$$L_1(\tau, 0) = U_0 + (U_1 - U_0)\tau$$

Многочлены Лагранжа второй степени для  $l=0$  и  $l=1$  предлагаю Вам вывести самостоятельно из общего выражения (5).

### 30. Погрешности интерполяции.

*Погрешность интерполяции*

Ограничение степени интерполирующего полинома приводит к погрешности интерполяции. В случае использования интерполирующего полинома Лагранжа максимальная погрешность интерполяции определяется остаточным членом для многочлена Лагранжа степени  $n$ :

$$\Delta L_n = \frac{M_{n+1} \Delta t^{n+1}}{(n+1)!} |(\tau + l)(\tau + l - 1) \dots (\tau + l - n)| \quad (7)$$

где  $M_{n+1}$  – максимум  $n+1$  производной восстанавливаемого сигнала.

В точках, совпадающих с отсчетами ( $\tau = 0, \tau = 1$ ) погрешность интерполяции равна нулю,  $\Delta L_n = 0$ . При  $\tau \in (0, 1)$  погрешность не равна нулю,  $\Delta L_n \neq 0$ .

Пусть  $\delta_{\text{дон}}$  – допустимая приведенная погрешность восстановления.

Зная диапазон изменения сигнала  $U_{\text{макс}}$ , определим абсолютную допустимую погрешность  $\Delta U_{\text{дон}} = \delta_{\text{дон}} U_{\text{макс}}(t)$ .

Очевидно, что при восстановлении непрерывного сигнала должно выполняться условие:  $\Delta L_n \leq \Delta U_{\text{дон}}$ . С учетом (7) это условие можно представить в виде

$$\frac{M_{n+1}T_{опр}^{n+1}}{(n+1)!} |(\tau+l)(\tau+l-1)...(\tau+l-n)| \leq \delta_{дон} U_{макс}(t). \quad (8)$$

Здесь введено новое обозначение периода дискретизации -  $T_{опр}$ , то есть период опроса. Очевидно, что чем меньше период опроса, тем точнее может быть восстановлен непрерывный сигнал по дискретным отсчетам. Задавшись допустимой погрешностью восстановления, из (8) можно определить предельно допустимое максимальное значение периода опроса

$$T_{опр} \leq \sqrt[n+1]{\frac{\delta_{дон} U_{макс}(t)(n+1)!}{M_{n+1} |(\tau+l)(\tau+l-1)...(\tau+l-n)|}}. \quad (9)$$

Выражение (9) справедливо для погрешностей восстановления  $\delta \leq 0.2$ .

В этом случае для интерполяции с использованием полиномов Лагранжа нулевого, первого и второго порядков, называемую также ступенчатой, линейной и параболической интерполяцией, справедливы выражения:

$$T_{опр\_ст} = 2\delta_{дон} \frac{U_{макс}}{M_1}, \quad (10)$$

$$T_{опр\_лин} = 2\sqrt{2\delta_{дон} \frac{U_{макс}}{M_2}}, \quad (11)$$

$$T_{опр\_пар} = 2\sqrt[3]{2\delta_{дон} \frac{U_{макс}}{M_3}}. \quad (12)$$

Последнее выражение справедливо как для  $l=0$ , так и для  $l=1$ .

Максимум  $(n+1)$ -й производной можно определить только для детерминированного сигнала, например гармонического. Для реальных сигналов невозможно определить  $M_{n+1}$ .

Для сигнала с прямоугольным спектром получены следующие соотношения [Пенин П.И. Системы передачи цифровой информации]:

$$T_{опр\_ст} = 0,55\delta_{дон}\Delta t \quad (13)$$

или 
$$F_{опр\_ст} = \frac{1}{0,55\delta_{дон}} 2F_{с\_макс}, \quad (14)$$

$$T_{опр\_лин} = 1,35\sqrt{\delta_{дон}\Delta t} \quad (15)$$

или 
$$F_{опр\_лин} = \frac{1}{1,35\sqrt{\delta_{дон}}} 2F_{с\_макс}, \quad (16)$$

$$T_{опр\_пар} = \sqrt[3]{\delta_{дон}\Delta t}, \quad (17)$$

или

$$F_{опр\_пар} = \frac{1}{\sqrt[3]{\delta_{дон}}} 2F_{с\_макс}, \quad (18)$$

где  $\Delta t$  – период дискретизации по теореме Котельникова,

$F_{с\_макс}$  – максимальная частота в спектре дискретизируемого сигнала.

*Возможные реализации ступенчатой и линейной интерполяции*

Ступенчатую интерполяцию реализует схема выборки-хранения, в которой конденсатор памяти подключается с периодом  $T_{опр}$  к последовательности дискретных отсчетов (рисунок 4).

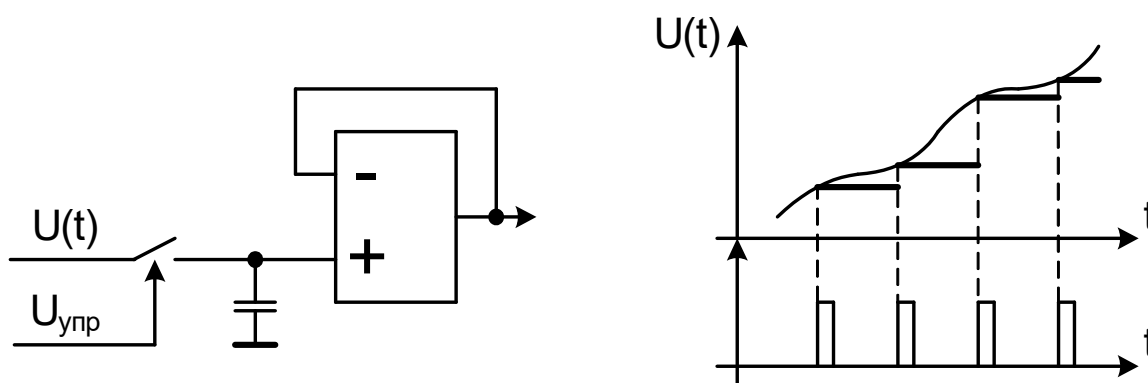


Рисунок 4 – Реализация ступенчатой интерполяции

Ступенчатый интерполятор необходим для построения и линейного интерполятора.

На рисунке 5 приведен пример реализации интерполирующего устройства на основе схемы выборки-хранения и интегратора на операционных усилителях.

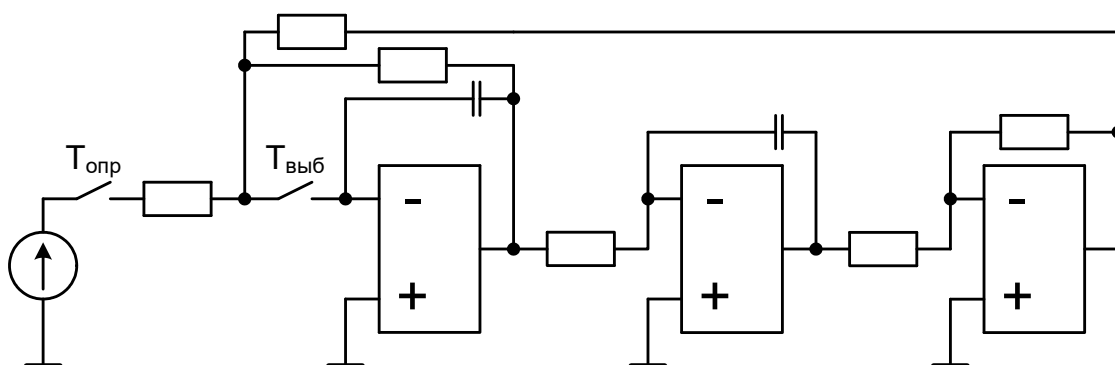


Рисунок 5 – Реализация линейной интерполяции

*Применение средств вычислительной техники для реализации ступенчатой и линейной интерполяции*

Ступенчатая интерполяция реализуется с помощью цифро-аналогового преобразователя (ЦАП). ЦАП может быть как самостоятельным, так и в составе микроконтроллера, с помощью которого проводилась обработка биомедицинского

сигнала. Подавая на информационные входы ЦАП поочередно с периодом опроса коды отсчетов, на выходе ЦАП получим ступенчатую функцию.

Линейная интерполяция, выполненная средствами вычислительной техники, фактически является ступенчатой интерполяцией с повышенной частотой следования кодовых сигналов на входах ЦАП. Для реализации ступенчатой интерполяции с помощью ЭВМ необходимо выполнить следующее.

1. Запомнить число  $N(t_k)$ , являющееся цифровым представлением значения отсчета в момент  $t_k$ .

2. Запомнить число  $N(t_{k+1})$ , являющееся цифровым представлением значения отсчета в момент  $t_{k+1}$ .

3. Вычесть из числа  $N(t_{k+1})$  число  $N(t_k)$ .

4. Разделить полученную разность на число  $K$ , которое не меньше отношения периодов опроса  $T_{\text{опр лин}}/T_{\text{опр ст}}$ , определенных из формул (15), (13).

$$K_{\text{МИН}} = \frac{1.35\sqrt{\delta_{\text{дон}}}\Delta t}{0.55\delta_{\text{дон}}\Delta t} = \frac{2.45}{\sqrt{\delta_{\text{дон}}}}.$$

Этим определяется значение элементарного приращения

$$\Delta N = \frac{N(t_{k+1}) - N(t_k)}{K}.$$

5. Поочередно прибавлять к числу  $N(t_k)$  числа  $\Delta N, 2\Delta N, \dots, i\Delta N, \dots, K\Delta N$ .

6. Полученные числа подавать с периодом  $T_{\text{опр лин}}/K$  на входы ЦАП. На выходе ЦАП получим ступенчатую функцию. Но в силу малости ступенек при выводе этой функции на печать будем видеть линию, соединяющую отсчеты в моменты времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$ .

7. Повторить операции по п.п.1-6 с отсчетами в моменты времени  $t_{k+1}$  и  $t_{k+2}$ . И т. д.

### **31. Ключевые устройства измерительных коммутаторов: требования к ключевым устройствам, типы ключевых устройств.**

#### **3 Ключевые устройства коммутаторов каналов**

Основным блоком ИИС с временным разделением каналов является измерительный коммутатор каналов, осуществляющий дискретизацию измерительных сигналов и разделение полученных отсчетов разных каналов по времени. Коммутатор каналов (рисунок 3.1) состоит из набора аналоговых ключевых устройств (КУ) и устройства управления, которое, как мы рассмотрели ранее, может быть реализовано как программно, так и аппаратно на основе кольцевых распределителей и логических избирательных схем. Аналоговые ключевые устройства определяют, в основном, метрологические характеристики измерительного коммутатора и ИИС в целом.

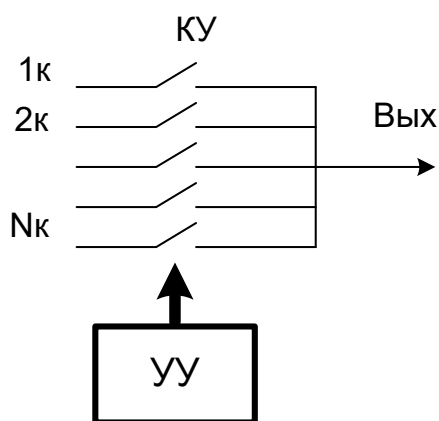


Рисунок 3.1 – Коммутатор каналов

Говорят, что КУ замкнуто (или открыто), если сигнал с его входа проходит на его выход, и разомкнуто (или закрыто) – если сигнал не проходит на выход ключевого устройства.

### 3.1 Типы ключевых устройств

Ключевые устройства могут быть последовательного, параллельного и последовательно – параллельного типа.

#### 1. Последовательный тип КУ (рисунок 3.2):

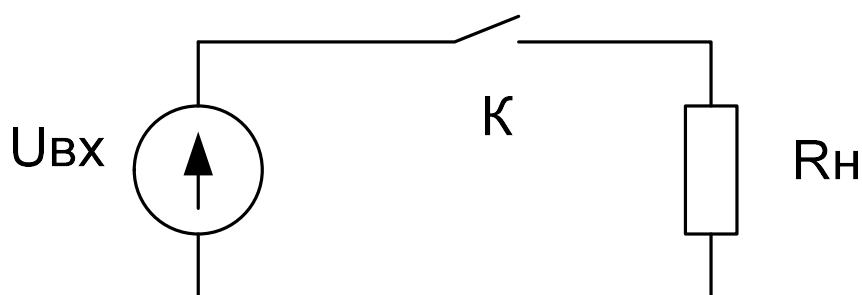


Рисунок 3.2 – Ключевое устройство последовательного типа

Для КУ последовательного типа замыкание ключевого элемента эквивалентно замыканию ключевого устройства.

#### 2. Параллельный тип КУ (рисунок 3.3):

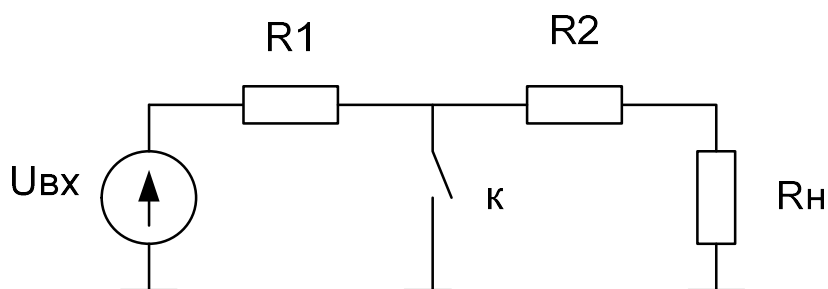


Рисунок 3.3 – Ключевое устройство параллельного типа



Назначение резисторов:

$R1$  - для исключения к. з. источника через ключ  $K$ .

$R2$  - исключает замыкания выходной точки ( $R_H$ ) через ключ на общий провод.

Для параллельного типа КУ замкнуто, если ключевой элемент  $K$  этого устройства разомкнут.

3. Последовательно – параллельный тип КУ (рисунок 3.4):

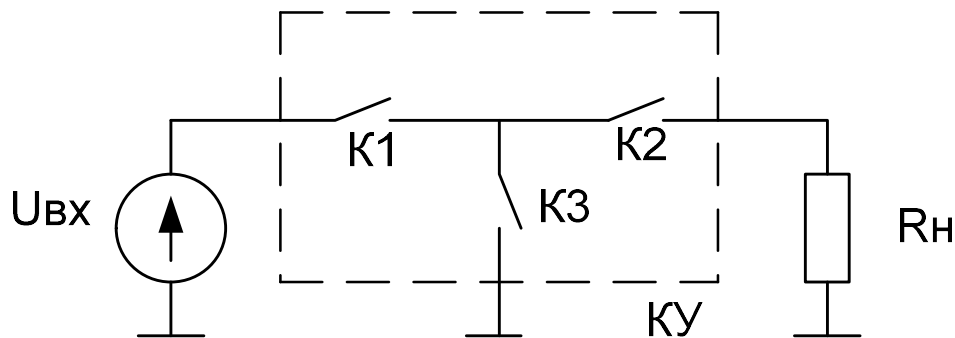


Рисунок 3.4 – Ключевое устройство последовательно-параллельного типа

Для параллельно-последовательного типа КУ:

Если  $K1$  и  $K2$  – замкнуты, а  $K3$  – разомкнут, то КУ открыто (замкнуто).

Если  $K1$  и  $K2$  – разомкнуты, а  $K3$  – замкнут, то КУ закрыто (разомкнуто).

### 3.2 Требования, предъявляемые к ключевым устройствам

1. Возможно большой коэффициент передачи в замкнутом состоянии

$$K_n = \frac{U_{BbIX}}{U_{BX}} \rightarrow 1$$

2. Независимость значения  $K_n$  от значения входного сигнала и управляющего сигнала.
3. Стабильность значения  $K_n$  и других параметров ключевого устройства во времени и при действии внешних дестабилизирующих факторов.
4. Идентичность значений  $K_n$  в разных ключевых устройствах собранных по одной ключевой схеме и используемых в одном коммутаторе каналов.
5. Отсутствие помех в выходном импульсном сигнале (от действия, например, управляющих сигналов).
6. Полоса пропускания КУ должна быть достаточна для обеспечения заданного быстродействия коммутатора канала.
7. Согласования входных и выходных сопротивлений ключевого элемента с сопротивлениями переключаемых цепей.

## 32. Схемные реализации различных типов ключевых устройств.

### 3.3 Реализация ключевых устройств

Ключевые элементы могут быть реализованы на основе диодов, биполярных транзисторов, полевых транзисторов, КМОП транзисторах.

Рассмотрим варианты выполнения ключевых устройств на биполярных и полевых транзисторах.

#### 3.3.1 Параллельный транзисторный ключ

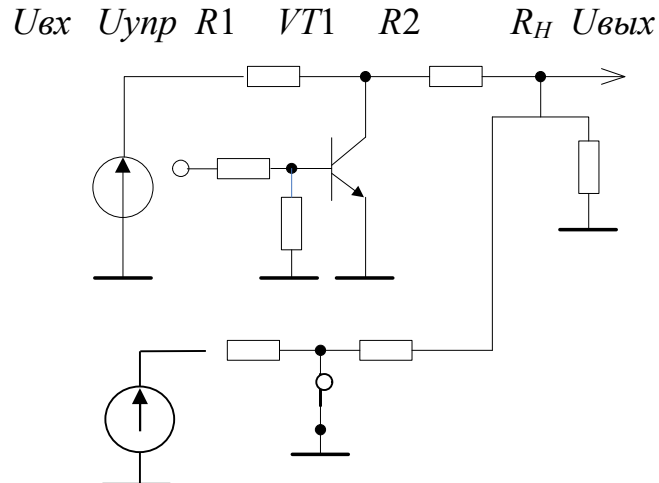


Рисунок 3.5 Ключевое устройство параллельного типа на биполярном транзисторе

Недостаток:  $U_{вх}$  должно быть больше нуля ( $U_{вх} > 0$ ).

Режим открытого ключевого устройства обеспечивается при  $U_{упр} = 0$ . Тогда транзистор  $VT1$  заперт,  $U_{вых}$  датчика проходит на выход коммутатора каналов.

Коэффициент передачи: 
$$K_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + R_H}$$

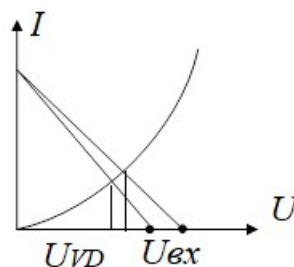
Режим отсечки:  $U_{упр} > 0$ , соответственно транзистор в насыщении. Датчик отключен от схемы.

$R_n$  – это параллельное соединение резисторов.

$$R_i = \frac{R_2}{n-1}$$

$$K_n = \frac{R_2}{(n-1) \cdot [(R_1 + R_2) \cdot (n-1) + R_2]} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2) \cdot (n-1) + R_2}$$

Для стабилизации и увеличения  $K_n$  вместо  $R2$  включают диод.



Недостатки: с изменением  $U_{вх}$  напряжение на диоде также изменяется.

В данном ключевом устройстве взаимное влияние каналов минимально.

### 3.3.2 Ключевые устройства на основе полевых транзисторов

Основные достоинства ключевых устройств на полевых транзисторах:

1. Отсутствие остаточного напряжения. Это позволяет коммутировать сигналы очень малого уровня.
2. Практически гальваническая развязка коммутируемых цепей и цепи управления.

#### 3.3.2.1 Последовательное ключевое устройство на полевом транзисторе с управляемым р-п-переходом

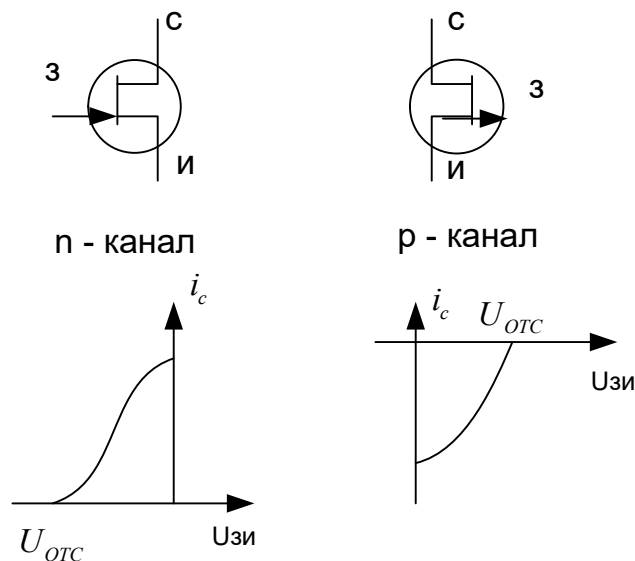


Схема ключевого устройства, входные и управляющие напряжения должны быть такими, чтобы не возник ток затвора, т. е. управляемый р-п переход не оказался бы смещенным в прямом направлении.

Схема ключевого устройства на полевом транзисторе с каналом n-типа приведена на рисунке 3.6

Рассмотрим, каким образом можно обеспечить запертое состояние ключевого устройства (отсечка) и открытое состояние (насыщение).

Отсечка. Должно выполняться условие:  $U_{зи} < U_{отс}$

Это условие должно выполняться для всего диапазона входного сигнала  $U_{вх}$ :

$$|U_{упр}| > |U_{zu}| + |U_{вх}| \quad (3.1)$$

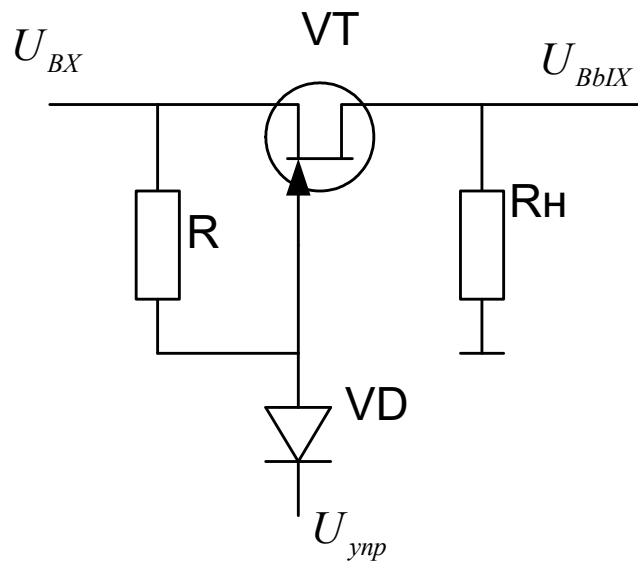


Рисунок 3.6 – Последовательное ключевое устройство на полевом транзисторе с управляемым переходом

Для подачи запирающего напряжения на затвор диод должен быть смещен в прямом направлении. Поэтому сигнал  $U_{упр}$  должен быть более отрицательным, чем входной сигнал  $U_{ВХ}$ .

Например, для полевого транзистора 2П303  $U_{отс} = -3$  В. При  $U_{ВХ} = +5$  В  $U_{упр} < 2$  В. При  $U_{ВХ} = -5$  В  $U_{упр} < -8$  В.

Таким образом, выполняется условие (3.1).

Насыщение. Обеспечивается при выполнении условия

$$U_{зи} = 0$$

Для обеспечения этого условия затвор полевого транзистора отделяется от управляющего сигнала обратным смещенным диодом. При этом благодаря включению резистора между затвором и истоком, напряжение  $U_{з-и}$  поддерживается равным 0, и к управляемому р-п переходу не прикладывается прямое смещение.

Чтобы диод был надежно заперт, должно выполняться условие

$$U_{упр} > U_{ВХ_{макс}}. \quad (3.2)$$

Резистор  $R_n$  ставят для того, чтобы при запираии ключа ослабить прохождение фронта сигнала управления через емкость затвор-сток.

Схема ключевого устройства на основе полевого транзистора с управляемым р-п переходом содержит много элементов и требует выполнения определенных условий при формировании сигналов управления.

18.03.2021чт

### 3.3.2.2 Ключевые устройства на основе МОП транзисторов

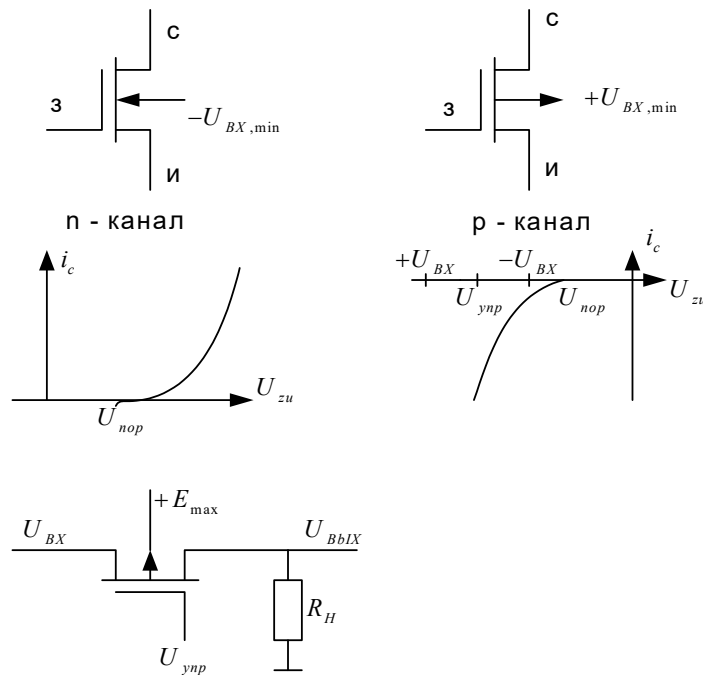


Рисунок 3.7 – Последовательное ключевое устройство на полевом МОП-транзисторе

Так как затвор изолирован от канала, нет опасности появления токов затвора (кроме, конечно, пробойных состояний).

Рассмотрим пример выполнения ключевого устройства на МОП транзисторе с р-каналом. Ключи такого типа используются в микросхемах 1КТ901 (5-канальный коммутатор), 1КТ902 (4 ключа с попарно объединенными выходами) и 168КТ2 (4 независимых ключа).

**Насыщение.** Для отпираания ключа при любом значении из диапазона  $U_{BX}$  потенциал на затворе должен быть ниже  $U_{BX}$  на значение порогового напряжения  $U_{ПОР}$ , т. е.  $U_{ЗИ} < U_{ПОР}$ .

Например, при  $U_{ПОР} = -6$  В (для перечисленных выше микросхем) для  $U_{BX} = +5$  В значение  $U_{УПР} = U_{BX} - U_{ПОР} = 5 - 6 = -1$  В, а для  $U_{BX} = -5$  В значение  $U_{УПР} = U_{BX} - U_{ПОР} = -5 - 6 = -11$  В.

Таким образом, должно выполняться условие, аналогичное условию (3.1),

$$|U_{упр}| > |U_{пор}| + |U_{BX, \max}| \quad (3.3)$$

**Отсечка.** Чтобы закрыть ключ, достаточно обеспечить  $U_{ЗИ} = 0$ . Это обеспечивается при  $U_{УПР} = U_{BX}$ .

В МОП-транзисторах подложка образует с истоком и стоком р-п переходы, которые все время должны быть заперты. Потому у МОП-транзисторов с р-каналом подложка n-типа должна быть подключена к потенциалу не меньше самого максимального положительного входного сигнала, а у транзисторов с n-каналом подложка р-типа подключается к потенциалу, меньшему самого минимального отрицательного входного сигнала.

### 33. Ключевые устройства на КМОП-транзисторах.

#### 3.3.2.3 Ключевые устройства на основе КМОП транзисторов

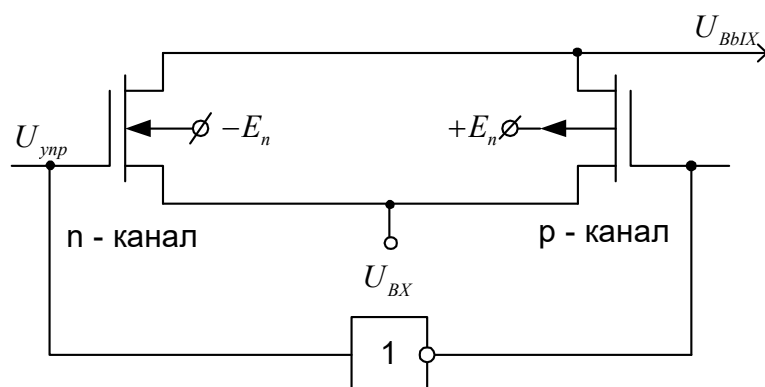


Рисунок 3.8 – Последовательное ключевое устройство на КМОП-транзисторах

Насыщение:

$$U_{ynp} = E_n$$

$$U_{BX} = E_n \quad \text{VT1 – закрыт}$$

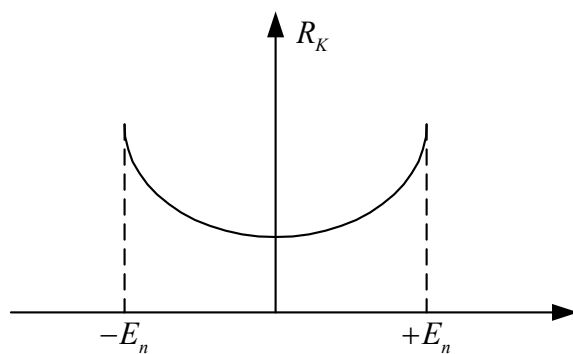
$$U_{zu1} = 0$$

$$U_{zu2} = -2E_n \quad \text{VT2 – открыт}$$

$$U_{BX} = -E_n$$

$$U_{zu1} = 2E_n \quad \text{VT1 – открыт}$$

$$U_{zu2} = 0 \quad \text{VT2 – закрыт}$$



Отсечка (КУ закрыто)

$$U_{ynp} = -E_n$$

$$U_{BX} = +E_n$$

$$U_{zu1} = -2E_n \quad \text{VT1 – закрыт}$$

$$U_{zu2} = 0 \quad \text{VT2 – закрыт}$$

$$U_{BX} = -E_n$$

$$U_{zu1} = 0 \quad \text{VT1 – закрыт}$$

$$U_{zu2} = 2E_n \quad \text{VT2 – закрыт}$$

Таким образом, чтобы ключевое устройство было открыто, должно выполняться условие

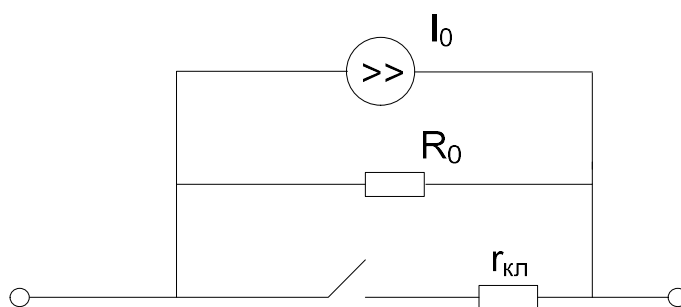
$$|U_{yup}| > |U_{nop}|. \quad (3.4)$$

В микросхемах коммутаторов каналов на КМОП-транзисторах обычно  $U_{yup} = E_n = \pm 15 \text{ В}$ .

### 34. Эквивалентная схема многоканального измерительного коммутатора каналов.

3.4 Погрешности преобразования, вносимые ключевыми устройствами

Эквивалентная схема устройства на МОП-транзисторах приведена на рисунке 3.9



$r_{кл}$  – сопротивление идеального ключа в открытом состоянии.

$R_0$  – сопротивление закрытого канала.

$I_0$  – токи утечки через закрытый канал.

Рисунок 3.9 – Эквивалентная схема ключевого устройства на МОП-транзисторе

Для КМОП транзистора  $r_{кл}$  складывается из параллельно подключенных n- и p-транзисторов.  $I_0$  меньше, чем для обычных полевых транзисторов.

Изобразим эквивалентную схему коммутатора каналов, где 1 канал включен, а остальные отключены (рисунок 3.10).

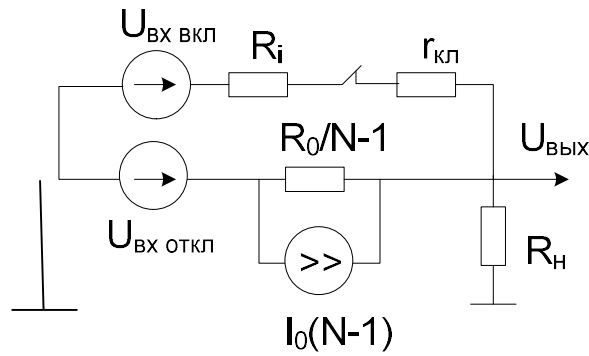


Рисунок 3.10 – Эквивалентная схема коммутатора каналов

При расчете принимается, что  $U_{\text{вых откл}}$  каналов одинаковы.

Эквивалентное сопротивление  $R_{H \text{ ЭКВ}}$  нагрузки

$$R_{H \text{ ЭКВ}} = R_H \cdot \frac{R_0}{N-1} \Big/ R_H + \frac{R_0}{N-1} = \frac{R_H \cdot R_0}{R_H \cdot (N-1) + R_0}$$

Если  $R_H$  очень велико и число каналов  $N$  тоже значительно, то

$$R_{H \text{ ЭКВ}} \rightarrow \frac{R_0}{N-1}.$$

Напряжение на выходе коммутатора каналов при одном открытом канале и  $N-1$  закрытых описывается выражением

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} \cdot \frac{R_{H \text{ ЭКВ}}}{R_i + r_{\text{кл}} + R_{H \text{ ЭКВ}}} + I_0 \cdot (N-1) \cdot (R_i + r_{\text{кл}}) + U_{\text{вх}} \cdot (N-1) \cdot \frac{(R_i + r_{\text{кл}})}{R_0} \quad (3.5)$$

Первое слагаемое – составляющая полезного сигнала. Коэффициент при  $U_{\text{вх}}$  – коэффициент передачи открытого ключевого устройства. Если  $R_i$ ,  $r_{\text{кл}}$  и  $R_0$  имеют номинальные значения, получим номинальное значение коэффициента передачи (градуировочное).

Изменение любого из параметров приводит к изменению коэффициента передачи ключевого устройства, т.е. к погрешности.

Т.к. изменился коэффициент передачи, то погрешность будет мультипликативной. Для ее учета при обработке, вводят эталонный сигнал.

Разброс параметров ключевых устройств, который всегда имеет место при их сборке, приводит к погрешности преобразования, которую называют *неидентичностью канала*. Устранить ее невозможно, но можно оценить.

В общем случае погрешность преобразования измерительного сигнала обусловленную нестабильностью какого либо параметра, оценивают с помощью частных производных по этому параметру от выражения, описывающего процесс преобразования сигнала,

$$\Delta U_{\text{ВЫХ}}(p_i) = \frac{\partial U_{\text{ВЫХ}}}{\partial p_i} \Delta p_i \quad (3.6)$$

$p_i$  – некий параметр.



Это выражение позволяет оценить влияние погрешности на выходное напряжение.

Суммарная максимальная погрешность преобразования от нестабильности  $m$  параметров определяется как сумма:

$$\Delta U_{\text{ВЫХ}} = \sum_{i=1}^m \Delta U_{\text{ВЫХ}}(p_i)$$

Неидентичность каналов происходит из-за разброса сопротивлений  $r_{\text{кл}}$  ключевых устройств разных каналов. Абсолютное значение неидентичности каналов определяется выражением

$$\Delta U_{\text{вых}}(\Delta r) = \frac{\partial U_{\text{вых}}}{\partial r_{\text{кл}}} \cdot \Delta r_{\text{кл}} = U_{\text{вх}} \cdot \frac{-\Delta r_{\text{кл}} \cdot R_{\text{нэкв}}}{R_i + r_{\text{кл}} + R_{\text{нэкв}}} = -\frac{\Delta r_{\text{кл}}}{R_{\text{нэкв}}} \cdot (3.7)$$

Знак «−» означает, что при увеличении сопротивления открытого ключа, например при повышении температуры окружающей среды, коэффициент передачи ключевого устройства уменьшается.

Относительное значение неидентичности каналов:

$$\delta_{\text{нк}} = \left| \frac{\Delta U_{\text{вых}}(\Delta r)}{U_{\text{вых}}} \right| = \left| -\frac{\Delta r_{\text{кл}}}{R_{\text{нэкв}}^2} \cdot (R_i + r_{\text{кл}} + R_{\text{нэкв}}) \right| = \frac{\Delta r \cdot (N-1)}{R_0}$$

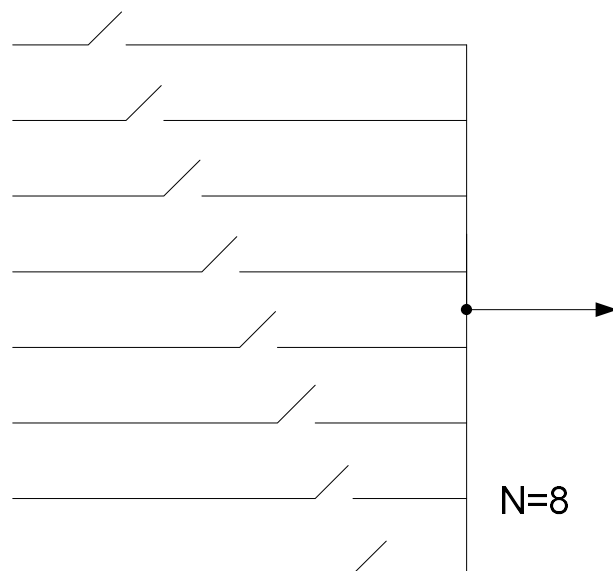
Чем больше число каналов, тем сильнее проявляется погрешность неидентичности каналов при неизменных исходных параметрах ключевого устройства.

Вторая и третья составляющие представляют собой аддитивную помеху для полезного сигнала (т.е. она складывается с полезным сигналом). Она приводит к смещению полезного сигнала относительно истинного значения.

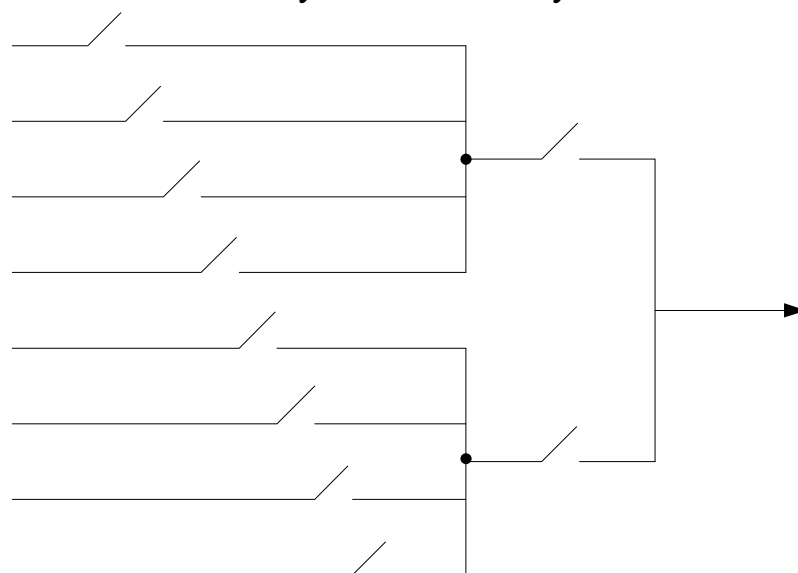
Третья составляющая – погрешность взаимного влияния каналов.

Пути уменьшения аддитивных составляющих погрешности:

1. Снижение числа каналов, сходящихся в точку. Необходимо использовать многоступенчатую коммутации.



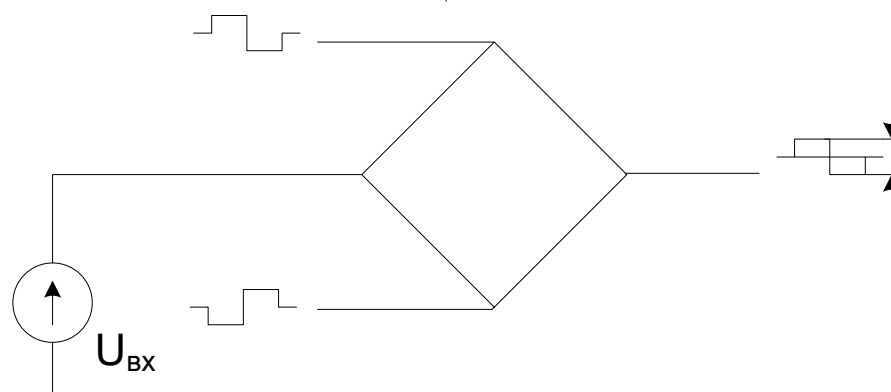
Одноступенчатая коммутация



Двухступенчатая коммутация  
( $\uparrow \Delta r$ )

2. Использование специального сигнала для питания датчика.

В этом случае информация содержится в размахе выходного сигнала, на который не влияет постоянное смещение.



### 35. Погрешности ключевых устройств.

Измерение – определение значения физической величины опытным путем с помощью технических средств.

В силу несовершенства применяемых методов измерений, а также несовершенства технических средств, реализующих эти методы, полученные в результате измерений значения физических величин не могут быть абсолютно точно равны истинным значениям этих величин.

В теории измерений приняты следующие постулаты:

- истинное значение измеряемой величины существует;
- истинное значение измеряемой величины отыскать невозможно;
- истинное значение измеряемой величины постоянно.

При любом измерении имеется погрешность, представляющая собой отклонение результата измерений от истинного значения измеряемой величины. В измерительных системах возникновение погрешностей обусловлено искажениями измерительных сигналов в процессе их преобразований, передачи и обработки в компонентах ИС.

### 36. Классификация погрешностей по форме представления.

Классификация погрешностей

По форме представления погрешности делят на абсолютную и относительную.

*Абсолютная погрешность* – это разность между измеренным и истинным значениями измеряемой величины:

$$\Delta = A_{\text{изм}} - A_{\text{ист.}} \quad (1)$$

Размерность абсолютной погрешности совпадает с размерностью измеряемой величины.

*Относительная погрешность* – это модуль отношения абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины

$$\delta = |\Delta / A_{\text{ист.}}|. \quad (2)$$

Относительная погрешность – величина безразмерная.

Чтобы можно было сравнивать по точности измерений измерительные средства с разными пределами измерений, введено понятие приведенной погрешности средства измерений.

*Приведенная погрешность* – это отношение абсолютной погрешности средства измерения к нормирующему значению

$$\gamma = |\Delta / x_{\text{нм}}|. \quad (3)$$

Приведенную погрешность выражают или в относительных единицах, в соответствии с (3), или в процентах. В последнем случае полученное из (3) значение надо умножить на 100.

В качестве нормирующего значения  $x_{\text{нм}}$  принимают:

- больший из пределов измерений, если нулевая отметка расположена на краю или вне диапазона измерения;
  - сумму модулей пределов измерения, если нулевая отметка расположена внутри диапазона измерения;
- Длину шкалы или ее части, соответствующей диапазону измерения, если шкала существенно неравномерна;
- номинальное значение измеряемой величины, если такое значение установлено;
  - модуль разности пределов измерений, если принята шкала с условным нулем (например, для температуры).

### **37. Классификация погрешностей по причинам возникновения.**

В зависимости от причин возникновения погрешности подразделяют на инструментальные, методические и субъективные.

*Инструментальная погрешность* измерения – погрешность из-за несовершенства средств измерений. Эта погрешность подразделяется на основную и дополнительную.

Основная погрешность средств измерений – это погрешность в условиях эксплуатации средства измерений, принятых за нормальные (нормальные температура, давление, влажность, номинальные напряжения питания, отсутствие механических воздействий и т.п.).

Дополнительная погрешность возникает при отличии значений влияющих величин от нормальных. Обычно различают отдельные составляющие дополнительной погрешности, например температурная погрешность, погрешность из-за изменения напряжения питания и т.п.

*Методическая погрешность* – погрешность измерения, вызванная несовершенством метода измерений. Эта погрешность может возникать из-за принципиальных недостатков метода, из-за неполноты знаний о происходящих при измерениях процессах, из-за неточности применяемых расчетных формул.

*Субъективная погрешность* обусловлена индивидуальными особенностями лица, выполняющего измерения. Автоматизация средств измерений, имеющая место в ИИС, совершенствование средств управления процессом измерений и средств отображения результатов измерений привели к тому, что субъективные погрешности обычно незначительны.

### 38. Классификация погрешностей по характеру изменения при повторных измерениях.

По характеру изменения погрешности при повторных измерениях делят на систематические и случайные.

*Систематическая погрешность* измерения – составляющая погрешности, остающаяся постоянной или закономерно изменяющейся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

В соответствии с этим систематические погрешности разделяются на постоянные и переменные.

*Постоянная систематическая погрешность* остается неизменной в течение всей серии данных измерений, например, погрешность из-за неточной установки указателя результата в ноль.

*Переменная систематическая погрешность* изменяется в процессе измерений. Переменные систематические погрешности могут быть *прогрессирующими* (например, из-за разрядки батареи питания), *периодическими* (например, из-за суточного изменения напряжения промышленной сети в связи с изменением нагрузки), *изменяющимися по сложному закону* (например, из-за изменения температуры окружающей среды).

Постоянные систематические погрешности могут быть уменьшены применением поправок, сравнением с известной образцовой величиной (метод замещения), компенсацией по знаку (выполняют два измерения таким образом, чтобы результаты имели разные знаки, окончательный результат находят как среднее двух результатов).

Возможная реализация метода компенсации для многоканальных ИИС показана на рисунках 1 и 2. Тензомост (тензорезисторы  $R1-R4$ ) каждого измерительного канала запитан от источника разнополярных импульсов напряжения. При разбалансе моста на выходе появляется сигнал, повторяющий по форме сигнал питания (рисунок 1).

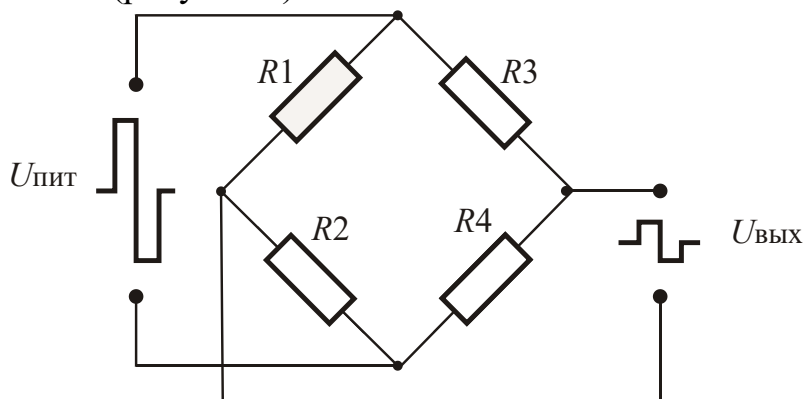


Рисунок 1 – Питание тензомоста разнополярными импульсами

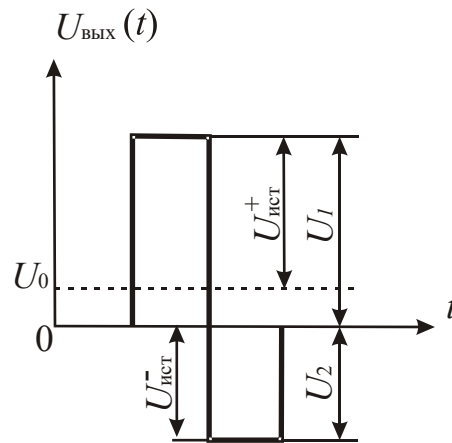


Рисунок 2 – Сигнал на выходе тензомоста при наличии постоянного смещения нулевого уровня

Если имеется постоянная систематическая погрешность в виде смещения нулевого уровня ( $U_0$  на рисунке 2), то амплитуда положительной части выходного сигнала увеличится на  $U_0$  и станет равной  $U_1 = U_{\text{ист}}^+ + U_0$ , а амплитуда отрицательной части уменьшится на  $U_0$  и станет равной  $U_2 = U_{\text{ист}}^- - U_0$  (рисунок 2).

При обработке выходных сигналов тензомостов в качестве измеренного сигнала берут полусумму амплитуд положительной и отрицательной частей выходного сигнала

$$U_{\text{изм}} = \frac{U_1 + U_2}{2} = \frac{U_{\text{ист}}^+ + U_0 + U_{\text{ист}}^- - U_0}{2} = \frac{2 \cdot U_{\text{ист}}}{2} = U_{\text{ист}}. \quad (4)$$

Таким образом, как следует из (4) при обработке выходного сигнала тензомоста произошла компенсация постоянной систематической погрешности

*Случайная погрешность* измерения – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины.

Случайная погрешность не может быть исключена из результата измерения, но может быть уменьшена путем статистической обработки совокупности наблюдений.

Случайная погрешность является случайной величиной с нулевым математическим ожиданием  $M[x]=0$  и дисперсией  $D$ , характеризующей разброс случайной величины  $x$  вокруг математического ожидания. Для оценки случайной погрешности используют также ее среднеквадратическое отклонение  $\sigma = \sqrt{D}$ .

Случайную погрешность, которая существенно превышает ожидаемую, называют промахом или аномальной погрешностью.

Характерным признаком промаха является большая величина и малая вероятность появления.

Причинами промахов могут быть кратковременные сбои в работе аппаратуры, действие на сигнал помех в канале передачи и т.п.

На практике промахом считают значение погрешности, превышающее ее среднеквадратичное значение в 3 раза и более. Если погрешность имеет нормальный закон распределения, то вероятность появления промахов составляет  $p \leq 0.0027$ .

### **39. Классификация погрешностей по зависимости от значения измеряемой величины.**

По зависимости от связи со значением измеряемой величины погрешности делятся на аддитивные и мультипликативные.

*Аддитивная погрешность* (абсолютная) не зависит от значения измеряемой величины.

Относительная аддитивная погрешность обратно пропорциональна значению измеряемой величины.

Аддитивную погрешность еще называют погрешностью нуля.

*Мультипликативная погрешность* пропорциональна измеряемой величине.

Относительная мультипликативная погрешность не зависит от значения измеряемой величины.

Мультипликативную погрешность называют погрешностью чувствительности.

Пример: коэффициент усиления  $K$  операционного усилителя отличается от номинального  $K_H$  из-за того, что вместо расчетных значений резисторов в прямой цепи и в цепи обратной связи необходимо брать значения из стандартного ряда. Абсолютная погрешность коэффициента усиления

$$\Delta K = K - K_H.$$

Выходной сигнал в этом случае равен

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вх}} K = U_{\text{вх}} (K_H + \Delta K) = U_{\text{вх}} K_H + U_{\text{вх}} \Delta K.$$

Слагаемое  $U_{\text{вх}} \Delta K$  является абсолютной мультипликативной погрешностью, которая увеличивается пропорционально входному измеряемому сигналу.

При использовании измерительных систем на практике должны быть известны их метрологические характеристики (погрешность, функция преобразования, цена деления шкалы и т.п.)

Погрешность является важнейшей метрологической характеристикой. Для оценивания погрешностей измерений осуществляют их нормирование. Нормирование погрешности заключается в установлении *предела допускаемой погрешности*, под которым понимается наибольшая (без учета знака) погрешность средства измерения, при которой оно может быть допущено к применению.

Пределы допускаемых погрешностей могут выражаться в форме абсолютных, относительных и приведенных погрешностей.

#### **40. Суммарная среднеквадратичная погрешность.**

##### *Суммарная среднеквадратичная погрешность*

Каждый компонент ИС, входящий в состав измерительного канала, имеет свою погрешность преобразования измерительных сигналов. Как правило, погрешности разных компонентов независимы друг от друга. В этом случае для нахождения суммарной среднеквадратичной погрешности измерительного канала воспользуемся известными положениями теории вероятностей и математической статистики.

Дисперсия суммы нескольких независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Обозначим через  $x_i$  случайную погрешность  $i$ -го компонента измерительного канала. Тогда суммарную дисперсию определим как

$$D_{\Sigma} = \sum_i D_i = \sum_i \sigma_i^2. \quad (5)$$

Суммарная среднеквадратическая погрешность определяется выражением

$$\sigma_{\Sigma} = \sqrt{D_{\Sigma}} = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}. \quad (6)$$

За  $\sigma_{\Sigma}$  принимается положительное значение корня.

Относительное среднеквадратичное значение суммарной погрешности в соответствии с (2) определится как отношение  $\sigma_{\Sigma}$  к истинному значению измеряемой величины  $A_{\text{ИСТ}}$

$$\delta_{\Sigma} = \frac{\sigma_{\Sigma}}{A_{\text{ИСТ}}} = \sqrt{\sum_i \delta_i^2}, \quad \delta_i^2 \quad (7)$$

где  $\delta_i$  определяется выражением (2).

Приведенное среднеквадратичное значение суммарной погрешности  $\gamma_{\Sigma}$  определится как отношение  $\sigma_{\Sigma}$  к нормирующему значению  $x_{\text{НМ}}$ . В измерительных системах наиболее часто за нормирующее значение принимают диапазон измерения  $L$ . Таким образом,

$$\gamma_{\Sigma} = \frac{\sigma_{\Sigma}}{L} = \sqrt{\sum_i \gamma_i^2}, \quad (8)$$

где  $\gamma_i = \frac{\sigma_i}{L}$ .

Выражение (8) можно использовать для определения требований к погрешностям отдельных компонентов измерительного канала по заданной суммарной погрешности измерительного канала (обратная задача).



Для примера рассмотрим суммарную среднеквадратичную погрешность, образуемую погрешностями двух компонентов: датчика и аналого-цифрового преобразователя (АЦП):

$$\gamma_{\Sigma} = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad (9)$$

где  $\gamma_1$  – приведенная среднеквадратичную погрешность датчика,  $\gamma_2$  – приведенная среднеквадратичная погрешность АЦП.

Выясним, при каких условиях одной из составляющих суммарной погрешности можно пренебречь. Рассмотрим случай, когда погрешности разных компонентов не равны между собой. Пусть  $\gamma_2 < \gamma_1$ .

Выразим из (9)  $\gamma_{\Sigma}$  через отношение  $\gamma_2$  к  $\gamma_1$ .

$$\gamma_{\Sigma} = \gamma_1 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Сомножитель при  $\gamma_1$  представляет собой бином Ньютона. Ограничимся первыми двумя членами этого бинома, так как остальные имеют второй порядок малости и ими можно пренебречь. В этом случае получим из (10)

$$\gamma_{\Sigma} \approx \gamma_1 \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что вклад меньшей составляющей в результирующую погрешность составляет в относительных единицах  $\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2$ .

Примем увеличение суммарной погрешности за счет добавления к большей составляющей  $\gamma_1$  меньшей составляющей  $\gamma_2$  пренебрежимо малым при условии, что суммарная погрешность увеличится не более чем на 0.1. Тогда можно записать следующее выражение для оценки значения  $\gamma_2$ , которым можно пренебречь:

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 \leq 0.1. \quad (12)$$

Решая (12) относительно  $\gamma_2$ , получим

$$\gamma_2 \leq 0.447 \gamma_1. \quad (13)$$

Таким образом, при принятых допущениях из выражения (13) можно сделать вывод о том, что если одна из составляющих суммарной погрешности измерительного канала меньше другой составляющей более чем в два раза, то меньшей составляющей можно пренебречь.

Для практики проектирования ИИС это имеет существенное значение. Если, например, погрешности применяемых датчиков составляют погрешность не более 0.9%. Стремление снизить эту погрешность кроме затрат ничего не даст, так как в

целом суммарная погрешность измерительного канала будет определяться погрешностью датчика.

#### **41. Влияние частных среднеквадратичных погрешностей на суммарную среднеквадратичную погрешность.**

##### *Суммарная систематическая погрешность*

Как и при случайных погрешностях для определения суммарной систематической погрешности используются относительные погрешности, приведенные к диапазону измерения и относящиеся к одному сечению измерительного канала, чаще всего к выходу.

Суммирование систематических погрешностей производится алгебраически с учетом их знаков. Знание суммарной систематической погрешности позволяет вносить поправки в результат измерения. Однако, определение систематических погрешностей на практике затруднено, т.к. неизвестно истинное значение измеряемого параметра.

Математическое ожидание результатов ряда измерений представляет собой сумму истинного значения измеряемой величины и математического ожидания погрешности

$$M[A] = A_{ист} + M[\Delta].$$

Поскольку математическое ожидание случайной составляющей погрешности равно нулю, то математическое ожидание погрешности есть систематическая погрешность

$$\Delta_{сист} = M[\Delta] = M[A] - A_{ист}. \quad (14)$$

На практике вместо истинного значения измеряемой величины  $A_{ист}$ , которое определить невозможно (см. постулат №2), используют оценку этой величины  $\tilde{A}$ , полученную в результате обработки  $n$  независимых измерений величины  $A$ .

Обозначим результаты наблюдения значений измеряемой величины в каждом опыте как

$$X_1, X_2, \dots, X_n. \quad (15)$$

Эти значения можно рассматривать как  $n$  реализаций случайной величины  $X$ , то есть как  $n$  независимых случайных величин, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и случайная величина  $X$ .

Любая оценка, вычисленная на основе исходных данных (15), должна представлять собой функцию случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ :

$$\tilde{A} = \tilde{A}(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (16)$$

Таким образом, оценка  $\tilde{A}$  сама является случайной величиной. Закон распределения  $\tilde{A}$  зависит, во-первых, от закона распределения величины  $X$ , во-вторых, от числа опытов  $n$ .

Оценка  $\tilde{A}$  должна удовлетворять ряду требований, чтобы быть адекватной оценкой истинного значения  $A_{ИСТ}$  измеряемой величины. Требования эти следующие: оценка должна быть *состоятельной*, *несмещенной* и *эффективной*.

Оценка  $\tilde{A}$  является *состоятельной*, если при увеличении числа опытов  $n$  она приближается (говорят, сходится по вероятности) к  $A_{ИСТ}$ .

Оценка  $\tilde{A}$  является *несмещенной*, если математическое ожидание оценки равно истинному значению параметра, т.е. выполняется условие

$$M[\tilde{A}] = A_{ИСТ}. \quad (17)$$

При выполнении условия (17) не делается систематическая ошибка в сторону завышения или занижения результата.

Оценка  $\tilde{A}$  является *эффективной*, если выбранная несмещенная оценка имеет, по сравнению с другими оценками, наименьшую дисперсию

$$D[\tilde{A}] = \min. \quad (18)$$

### Примеры оценок

Представим измеряемый параметр как случайную величину  $X$  с математическим ожиданием  $m$  и дисперсией  $D$ , причем оба эти параметра неизвестны. После проведения  $n$  опытов получены результаты  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Требуется найти оценки параметров  $m$  и  $D$ .

#### Оценка математического ожидания

Наилучшей оценкой  $\tilde{m}$  для математического ожидания  $m$  является выборочное среднее  $m^*$ , т.е. среднее арифметическое наблюдаемых значений  $X_i$  случайной величины  $X$ :

$$\tilde{m} = m^* = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}. \quad (19)$$

Эта оценка удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям. По закону больших чисел при увеличении  $n$  величина  $\tilde{m}$  сходится по вероятности к  $m$ . Поэтому также оценка  $\tilde{m}$  является несмещенной, т.к. среднее значение  $n$  величин, каждая из которых равна  $m$ , тоже равно  $m$ .

Дисперсия оценки  $\tilde{m}$  равна

$$D[\tilde{m}] = \frac{\tilde{D}}{n}. \quad (20)$$

#### Оценка дисперсии

Несмещенной состоятельной оценкой дисперсии является

$$\tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m})^2}{n-1}. \quad (21)$$

При больших  $n$  используют следующую оценку дисперсии

$$D^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m})^2}{n}. \quad (22)$$

Оценка (22) является состоятельной, но смещенной. При  $n \rightarrow \infty$  различие между оценками (21) и (22) становится несущественным.

Рассмотренные выше характеристики погрешностей и оценок выражались одним числом, т.е. являлись точечными. При малом числе наблюдений точечные оценки измеряемых параметров могут привести к серьезным ошибкам в результатах последующих обработок.

#### 42. Доверительный интервал и доверительная вероятность.

Доверительный интервал и доверительная вероятность

Чтобы оценить точность и надежность оценки  $\tilde{A}$  измеряемого параметра используют так называемые доверительные интервалы и доверительные вероятности.

Пусть для параметра  $A_{\text{ист}}$  получена оценка  $\tilde{A}$  (рисунок 3). Погрешность получения оценки  $\tilde{A}$  равна  $\pm\Delta$ . Истинное значение параметра  $A_{\text{ист}}$  находится где-то внутри интервала

$$I_\beta = (\tilde{A} - \Delta; \tilde{A} + \Delta). \quad (23)$$

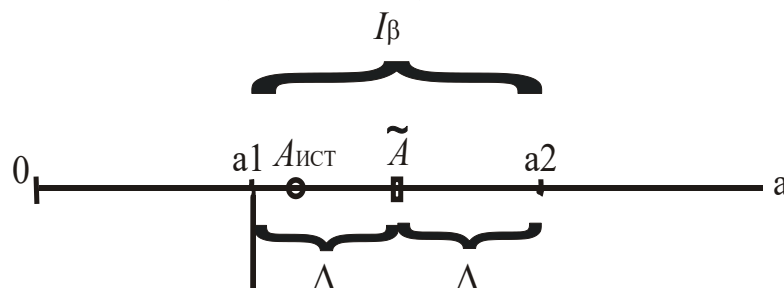


Рисунок 3 — Доверительный интервал

Вероятность  $\beta$  попадания  $A_{\text{ист}}$  в этот интервал запишем в виде

$$P(\tilde{A} - \Delta < A_{\text{ист}} < \tilde{A} + \Delta) = \beta. \quad (24)$$

Значение вероятности  $\beta$  выбирают достаточно большим (например, 0.9, 0.95, 0.98, ...), чтобы событие с вероятностью  $\beta$  можно было считать достоверным.

Положение интервала  $I_\beta$  на оси значений параметра случайно. Его центр определяется значением оценки  $\tilde{A}$ . Значение  $\beta$  определяет вероятность того, что случайный интервал  $I_\beta$  накроет точку  $A_{\text{ист}}$  (рисунок 3).

Вероятность  $\beta$  называют *доверительной вероятностью*, а интервал  $I_\beta$  — *доверительным интервалом*. Границы  $a1 = \tilde{A} - \Delta$  и  $a2 = \tilde{A} + \Delta$  интервала  $I_\beta$  называют доверительными границами.

Вероятность того, что истинное значение  $A_{ИСТ}$  может оказаться за пределами границ интервала  $I_\beta$  обозначим через  $\alpha$ . Поскольку события нахождения  $A_{ИСТ}$  внутри интервала  $I_\beta$  и вне его несовместны, то, очевидно

$$\alpha = 1 - \beta. \quad (25)$$

Понятие доверительного интервала применительно к обработке результатов опытов трактуют еще следующим образом: доверительный интервал — это интервал значений параметра  $A$ , *совместимых* с опытными данными и *не противоречащих* им.

#### 43. Определение границ доверительного интервала.

*Определение границ доверительного интервала*

В качестве примера рассмотрим определение границ доверительного интервала для математического ожидания параметра  $A$ . Пусть проведено  $n$  независимых опытов, в каждом из которых получены оценки  $X_i$  параметра  $A$ ,  $i=1,2,\dots, n$ . Математическое ожидание  $m$  и дисперсия  $D$  случайной величины  $X$  неизвестны, поэтому используют оценки этих величин  $\tilde{m}$  и  $\tilde{D}$  (см. (19) и (20)):

$$\tilde{m} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad \tilde{D} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \tilde{m})^2}{n - 1}.$$

Найдем такое значение  $\Delta_\beta$ , при котором выполнялось бы условие:

$$P(|\tilde{m} - m| < \Delta_\beta) = \beta. \quad (26)$$

Пусть случайная величина  $X$  имеет нормальный закон распределения. Функция распределения в этом случае имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx. \quad (27)$$

где  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение случайной величины  $X$  от математического ожидания.

Имеются таблицы для *нормальной функции распределения*

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \text{---} \quad (28)$$

где  $t = \frac{x - m}{\sigma}$ .

Вероятность попадания случайной величины  $X$  на интервал  $\tilde{m} \pm \Delta_\beta$  определяется как

$$P(|\tilde{m} - m| < \Delta_\beta) = \Phi^*\left(\frac{\Delta_\beta}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{-\Delta_\beta}{\sigma}\right). \quad (29)$$

Используя свойство нечетности *нормальной функции распределения*  $\Phi^*(-x) = 1 - \Phi^*(x)$ , преобразуем выражение (29) к виду

$$P(|\tilde{m} - m| < \Delta_\beta) = 2 \cdot \Phi^*\left(\frac{\Delta_\beta}{\sigma_{\tilde{m}}}\right) - 1, \quad (30)$$

где  $\sigma_m = \sqrt{D[\tilde{m}]} = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}}$  - *среднеквадратическое отклонение оценки математического ожидания* (см. выражение (20)).

Из (26) и (30) получим

$$2 \cdot \Phi^*\left(\frac{\Delta_\beta}{\sigma_{\tilde{m}}}\right) - 1 = \beta. \quad (31)$$

Решив (31) относительно  $\Delta_\beta$ , получим

$$\Delta_\beta = \sigma_{\tilde{m}} \arg \Phi^*\left(\frac{1+\beta}{2}\right). \quad (32)$$

Задавшись значением доверительной вероятности  $\beta$ , по таблицам для *нормальной функции распределения* найдем значение  $\arg \Phi^*(\beta)$ . Например, при  $\beta=0.9$   $\arg \Phi^*(\beta)=1.643$ ; при  $\beta=0.95$   $\arg \Phi^*(\beta)=1.96$ ; при  $\beta=0.99$   $\arg \Phi^*(\beta)=2.576$ . Используя эти значения и оценки  $\tilde{m}$  и  $\tilde{D}$ , полученные из результатов опытов, из (32) определим  $\Delta_\beta$  и затем границы доверительного интервала:

$$a1 = \tilde{m} - \Delta_\beta \text{ и } a2 = \tilde{m} + \Delta_\beta.$$

#### 44. Неопределенность измерения. Понятие неопределенности измерения.

Неопределенность измерения

В 1993 г. был выпущен документ ИСО/МЭК «Руководство по выражению неопределенности измерений (GUM)», в котором было введено понятие «неопределенность измерений», и во всем мире начали указывать не характеристики погрешности, а другие характеристики: «суммарная стандартная неопределенность» и «расширенная неопределенность».

В развитие концепции «Неопределенность измерений» международная организация по стандартизации (ИСО) и международная электротехническая комиссия (МЭК) разработали ряд международных стандартов, которые в 2011 году были приняты в качестве государственных стандартов России:

ГОСТ Р 54500.3-2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения;

ГОСТ Р 54500.1-2011/Руководство ИСО\МЭК: 98-1:2009. Неопределенность измерения. Часть 1. Введение в руководство по неопределенности измерения.

Концепция неопределенности измерения не вытесняет концепцию анализа погрешности измерения, а расширяет возможности получения количественной оценки различных процессов и явлений. Стандарты могут быть использованы в самых разнообразных сферах деятельности человека (наука, промышленность, различные испытательные лаборатории и т.п.).

Стандарты призваны обеспечить основы для международного сопоставления результатов измерений.

### *Понятие неопределенности измерения*

В настоящее время во всем мире общепризнано, что после того, как найдены оценки всех ожидаемых составляющих погрешности и в результат измерения внесены соответствующие поправки, все равно остается некоторая неопределенность в отношении полученного результата, т.е. сомнение в том, насколько точно он соответствует значению измеряемой величины.

Слово «неопределенность» означает сомнение, и таким образом, в широком смысле «неопределенность измерения» означает сомнение в достоверности измерения.

Стандартом ГОСТ Р 54500.3-2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008. Неопределенность измерения. Часть 3 принято следующее формальное определение термина «неопределенность измерения»:

Неопределенность измерения: Параметр, относящийся к результату измерения и характеризующий разброс значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине.

Параметром может быть, например, стандартное отклонение (или величина пропорциональная ему), половина ширины интервала, которому соответствует заданный уровень доверия.

Предполагается, что результат измерения является лучшей оценкой измеряемой величины, а все составляющие неопределенности, включая обусловленные систематическими эффектами, вносят вклад в разброс значений измеряемой величины.

### Термины, вводимые стандартом

**Стандартная неопределенность** – неопределенность результата измерения, выраженная в виде стандартного отклонения.

**Оценивание (неопределенности) типа А** – метод оценивания неопределенности путем статистического анализа ряда наблюдений.

**Оценивание (неопределенности) типа В** – метод оценивания неопределенности, отличный от статистического анализа ряда наблюдений.

**Суммарная стандартная неопределенность** – стандартная неопределенность результата измерения, полученного из значений ряда других величин, равная положительному квадратному корню взвешенной суммы

дисперсий или ковариаций этих величин, весовые коэффициенты при которых определяются зависимостью изменения результата измерения от изменений этих величин.

**Расширенная неопределенность** – величина, определяющая интервал вокруг результата измерения, который, как ожидается, содержит в себе большую часть распределения значений, что с достаточным основанием могут быть приписаны измеряемой величине.

Долю распределения, охватываемую интервалом, можно рассматривать как вероятность охвата или уровень доверия для данного интервала.

**Коэффициент охвата** – коэффициент, на который умножают суммарную стандартную неопределенность для получения расширенной неопределенности. Коэффициент охвата обычно принимается равным 2 или 3.

#### **45. Источники неопределенности.**

##### *Источники неопределенности*

На неопределенность результата измерений влияют:

- неполное определение измеряемой величины;
- несовершенная реализация определения измеряемой величины;
- нерепрезентативность выборки (измерения проводят на образце, не представляющем измеряемую величину);
- неточное знание условий окружающей среды на результат измерения или неточное измерение величин, характеризующих эти условия;
- субъективная систематическая погрешность (вносимая оператором при снятии показаний аналоговых приборов);
- конечная разрешающая способность или порог чувствительности прибора;
- неточные значения, приписанные эталонам и стандартным образцам;
- неточные знания физических констант и других параметров, полученных из сторонних источников и используемых при обработке данных;
- аппроксимация и предположения, используемые в методе и методике измерений (измерительной процедуре);
- изменчивость в повторных наблюдениях при, казалось бы, неизменных условиях измерений.

Эти источники неопределенности необязательно являются независимыми.

##### *Математическая модель измерений*

Если все величины, от которых зависит результат измерения, обладают вариативностью, то их неопределенности могут быть получены посредством статистических процедур. Однако на практике такой подход редко может быть реализован вследствие ограничений на временные и иные ресурсы. Поэтому неопределенность результата измерения обычно оценивают, используя



математическую модель измерения и закон трансформирования неопределенностей. Поэтому стандартом сделано допущение, что измерение можно моделировать математически с точностью, достаточной для обеспечения требуемой точности измерения.

Так как математическая модель может быть неполной, для оценивания неопределенности на основе данных наблюдений следует обеспечить диапазоны вариативности влияющих величин, соответствующие тем, что имеют место в практических условиях измерений.

Для получения достоверных оценок неопределенности рекомендуется, по возможности, использовать эмпирические математические модели, основанные на долговременных измерениях количественных величин, а также эталоны сравнения и контрольные карты, позволяющие судить, находится ли измерение под статистическим контролем. Если данные наблюдения, включая результаты статистически независимых измерений одной и той же измеряемой величины, свидетельствуют о неполноте модели, то модель должна быть пересмотрена.

Использование хорошо спланированного эксперимента позволяет существенно повысить достоверность оценок неопределенности, поэтому планирование эксперимента является важной частью в технике проведения измерений.

Чтобы оценить правильность работы измерительной системы, часто сравнивают выборочное стандартное отклонение полученных с ее помощью результатов измерений с оценкой стандартного отклонения, полученной суммированием составляющих неопределенности от различных источников. В этом случае необходимо учитывать составляющие неопределенности только тех источников, которые обуславливают вариативность измеряемой величины в ходе эксперимента.

Значительную неизвестную погрешность в результат измерения могут вносить ошибки при регистрации или анализе данных. Такие ошибки не имеют отношения к неопределенности измерения. Они могут быть выявлены повторной проверкой данных и анализом всех действий при измерении.

#### **46. Моделирование измерения.**

##### *Моделирование измерения*

Во многих случаях измеряемую величину  $Y$  не измеряют непосредственно, а определяют через  $N$  других величин  $X_1, X_2, \dots, X_N$  посредством функциональной зависимости

$$Y=f(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (33)$$

Входные величины  $X_1, X_2, \dots, X_N$  также можно рассматривать как измеряемые величины, и они тоже могут зависеть от других величин.

Входные величины  $X_1, X_2, \dots, X_N$  делят на две группы:

- величины, значения и неопределенности которых определяют непосредственно в текущем измерении. Эти значения и неопределенности можно получить, например, в результате однократного наблюдения или повторных наблюдений;

- величины, значения и неопределенности которых получены их сторонних источников. К ним относятся величины, связанные с аттестованными эталонами, стандартными образцами веществ и материалов, а также величины, значения которых указаны в справочниках.

Оценку  $y$  измеряемой величины  $Y$  получают из (33), подставляя в нее входные оценки  $x_1, x_2, \dots, x_N$  для  $N$  входных величин  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . Таким образом, выходная оценка  $y$ , являющаяся результатом измерения, имеет вид

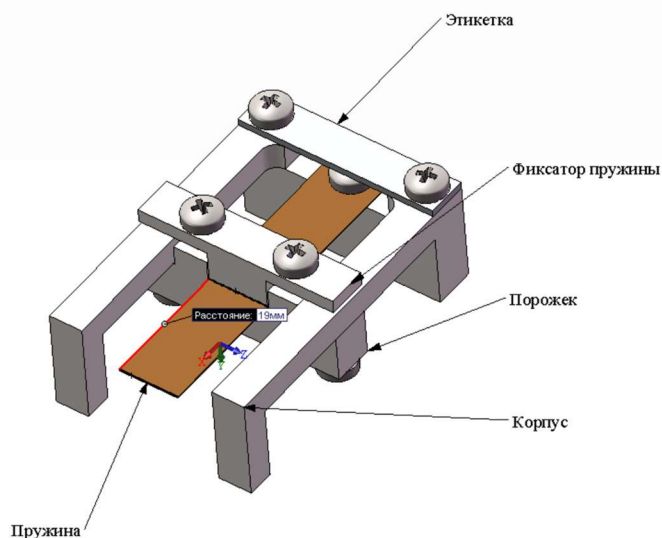
$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (34)$$

Рассмотрим в качестве примера такой величины жесткость плоской пружины, которая используется в качестве меры внутриглазного давления при проверке тонометров типа ТВГД-01.

При проведении проверки соответствия меры внутриглазного давления заявленному номинальному значению с установленными допустимыми отклонениями от этого значения осуществляют измерение периода  $T$  свободных колебаний ненагруженной плоской пружины данной меры. Измеренное значение периода используют для расчета реальной жесткости плоской пружины данной меры с помощью выражения

$$K = 4\pi^2 \frac{\frac{33}{140} l \cdot b \cdot h \cdot \rho}{T^2} \text{ Н/м}, \quad (35)$$

где  $l, b, h$  – соответственно длина ширина и толщина плоской пружины,  $\rho$  – удельный вес материала



Так как геометрические размеры плоской пружины имеют определенные технологические разбросы относительно номинальных, и измерение периода свободных колебаний сопровождается погрешностью измерения, то рассчитанные по выражению (35) жесткости плоских пружин каждой меры будут отличаться от номинальных значений.

Относительную неопределенность  $\delta_K$  определения расчетного значения жесткости плоской пружины из выражения (35) можно определить как

$$\delta_K = \sqrt{\delta_K^2(l) + \delta_K^2(b) + \delta_K^2(h) + \delta_K^2(\rho) + \delta_K^2(T)} \quad . \quad (36)$$

Составляющие неопределенности в выражении (36) определяются через частные производные от выражения (35):

$$\delta(p) = \frac{\partial K}{\partial p} \Delta p \cdot \frac{1}{K}, \text{ где } p - \text{один из влияющих параметров.}$$

$$\delta_K(l) = \frac{\partial K}{\partial l} \cdot \Delta l \cdot \frac{1}{K} = \frac{\Delta l}{l} = \delta_l,$$

$$\delta_K(b) = \frac{\partial K}{\partial b} \cdot \Delta b \cdot \frac{1}{K} = \frac{\Delta b}{b} = \delta_b,$$

$$\delta_K(h) = \frac{\partial K}{\partial h} \cdot \Delta h \cdot \frac{1}{K} = \frac{\Delta h}{h} = \delta_h,$$

$$\delta_K(\rho) = \frac{\partial K}{\partial \rho} \cdot \Delta \rho \cdot \frac{1}{K} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \delta_\rho,$$

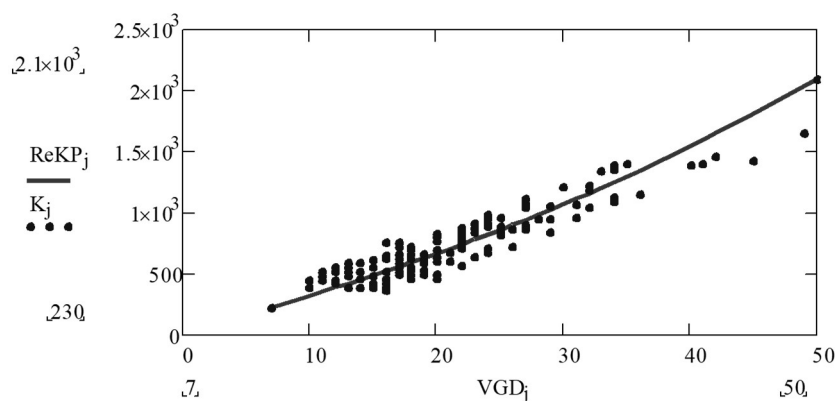
$$\delta_K(T) = \frac{\partial K}{\partial T} \cdot \Delta T \cdot \frac{1}{K} = 2 \frac{\Delta T}{T} = 2\delta_T.$$

Таким образом, расчетное значение жесткости плоской пружины меры внутриглазного давления может находиться в диапазоне значений от  $K_{\text{НОМ}}(1-\delta_K)$  до  $K_{\text{НОМ}}(1+\delta_K)$ .

Полученная оценка неопределенности (36) не является наилучшей, т.к. математическая модель,

$$P(K) = a \cdot \ln(K - b) + c,$$

связывающая внутриглазное давление  $P$  и жесткость глаза  $K$ , получена в результате обработки экспериментальных данных ограниченного объема.



#### 47. Описание процедуры оценивания и выражения неопределенности.

Описание процедуры оценивания и выражения неопределенности

1. Выразить математически зависимость между измеряемой величиной  $Y$  и входными величинами  $X_i$ , от которых она зависит (см. выражение (33)).  $Y=f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Функция  $f$  должна содержать каждую величину, включая все поправки и поправочные множители, которая может внести значительную составляющую в неопределенность результата измерения.

2. Определить  $x_i$  оцененное значение входной величины  $X_i$ , на основе статистического анализа рядов наблюдений или другими средствами.

К иным средствам относятся средства получения значений величин, связанные с аттестованными эталонами, стандартными образцами веществ и материалов, а также величины, значения которых указаны в справочниках.

3. Оценить стандартную неопределенность  $u(x_i)$  каждой входной величины  $x_i$ . Для входной оценки, полученной из статистического анализа рядов наблюдений стандартная неопределенность оценивается как

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где  $s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  - дисперсия входной величины  $x_i$ .

4. Если значения каких либо входных величин коррелированы, определяют их ковариацию.

Пусть  $x_i$  и  $x_j$  являются оценками входных величин  $X_i$  и  $X_j$ . Для каждой величины  $X_i$  и  $X_j$  проведено  $n$  наблюдений. Тогда оценка ковариации величин  $X_i$  и  $X_j$  рассчитывается по формуле

$$s(x_i, x_j) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (x_{ik} - \bar{x}_i) \cdot (x_{jk} - \bar{x}_j),$$

где  $\bar{x}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_{ik}$ ,  $\bar{x}_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_{jk}$ .

5. Рассчитать результат измерения, т.е. оценку  $y$  измеряемой величины  $Y$  из функциональной зависимости  $f$ , используя для входных величин  $X_i$  оценки  $x_i$ .

Если функциональная зависимость  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  линейна, то оценку  $y$  величины  $Y$  можно получить по формуле

$$y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N), \quad (37)$$

где  $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_{i,k}$  - среднее арифметическое отдельных наблюдений  $X_{i,k}$ .

Если функциональная зависимость  $y=f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  нелинейна, оценку  $y$  величины  $Y$  следует получить по формуле

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \cdot \sum f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}), \quad (38)$$

когда каждое определение имеет одну и ту же неопределенность и каждое основано на полном наборе наблюдаемых значений  $N$  входных величин  $X_i$ , полученных в одно и тот же время.

#### **48. Суммарная стандартная неопределенность.**

6. Определить суммарную стандартную неопределенность  $u_c(y)$  результата измерения  $y$  из стандартных неопределенностей и ковариации, связанных с входными величинами.

Сначала определяют доли суммарной дисперсии (частные дисперсии) измеряемой величины, обусловленные влиянием неопределенности каждой  $i$ -й входной величины

$$u_c^2(y|x_i) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i). \quad (39)$$

Затем определяют суммарную дисперсию как сумму частных дисперсий

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N u_c^2(y|x_i) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i). \quad (40)$$

Частные производные  $\partial f / \partial x_i$  называют коэффициентами чувствительности  $c_i$ , которые показывают, как изменяется выходная оценка  $y$  с изменением входных оценок  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Суммарная стандартная неопределенность вычисляется как положительный квадратный корень из суммарной дисперсии. С учетом сделанных выше обозначений получим

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (c_i \cdot u(x_i))^2}. \quad (41)$$

#### 49. Расширенная неопределенность.

**Расширенная неопределенность** – величина, определяющая интервал вокруг результата измерения, который, как ожидается, содержит в себе большую часть распределения значений, что с достаточным основанием могут быть приписаны измеряемой величине.

7. Если требуется, дать расширенную неопределенность  $U$  с целью определения интервала от  $y-U$  до  $y+U$ , в пределах которого может находиться большая часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать измеряемой величине  $Y$ .  $U=ku_c(y)$ , где  $k$  – коэффициент охвата.

Коэффициент охвата, характеризующий интервал вокруг результата измерения, который предположительно охватывает большую заданную долю  $p$  распределения значений, обоснованно приписываемых измеряемой величине  $Y$ , обозначим  $k_p$ .

Чтобы получить значение коэффициента охвата  $k_p$ , образующего интервал с заданным уровнем доверия  $p$ , необходимо знать закон распределения результата измерения и суммарную стандартную неопределенность.

Так для случайной величины  $z$ , имеющей нормальный закон распределения с математическим ожиданием  $\mu_z$  и стандартным отклонением  $\sigma$ , легко рассчитать значение коэффициента охвата  $k_p$ , который образует интервал  $\mu_z \pm k_p \sigma$ , включающий долю  $p$  этого распределения и, следовательно, имеющий вероятность охвата и уровень доверия  $p$ . Для нормального закона распределения имеются соответствующие таблицы. В качестве примера приведены некоторые данные из такой таблицы

Уровень доверия $p$ , %	68.27	90	95	95.45	99	99.73
Коэффициент охвата $k_p$	1	1.645	1.96	2	2.576	3

Если случайная величина  $z$ , имеет равномерный закон распределения с математическим ожиданием  $\mu_z$  и стандартным отклонением  $\sigma = a/\sqrt{3}$ , где  $a$  – полуширина распределения, то связь  $p$  и  $k_p$  будет следующая:

Уровень доверия $p$ , %	57.74	95	99	100
Коэффициент охвата $k_p$	1	1.65	1.71	$k_p \geq \sqrt{3} \approx 1.73$

На практике значения параметров распределения неизвестны, а известны значения статистик:  $y$  – оценки случайной величины  $Y$ , суммарной дисперсии  $u_c^2(y)$  – оценки дисперсии  $\sigma^2$ .

Если  $z$  – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием  $\mu_z$  и стандартным отклонением  $\sigma$ ,  $\bar{z}$  – среднее арифметическое  $n$  независимых наблюдений  $z_k$  величины  $z$ , а  $s(\bar{z})$  – выборочное стандартное отклонение от  $\bar{z}$ , то случайная величина

$$t = \frac{\bar{z} - \mu_z}{s(\bar{z})} \quad (42)$$

описывается  $t$ -распределением (распределением Стьюдента) с  $\nu=n-1$  степенями свободы.

Обозначим через  $p$  вероятность попадания случайной величины  $t$  в интервал от  $-t_p(\nu)$  до  $+t_p(\nu)$ , где  $t_p(\nu)$  – значение величины  $t$ , зависит от числа степеней свободы  $\nu$  и определяет долю  $p$  распределения Стьюдента, которая попадает в интервал от  $-t_p(\nu)$  до  $+t_p(\nu)$ .

Для этого случая расширенная неопределенность

$$U_p = k_p \cdot u_c(y) = t_p(\nu) \cdot u_c(y). \quad (43)$$

Примеры значений  $t_p(\nu)$   $t$ -распределения с разными степенями свободы для разных вероятностей  $p$  приведены в следующей таблице

Число степеней свободы $\nu$	Доля $p$ , %					
	68.27	90	95	95.45	99	99.73
5	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
10	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
15	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
20	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
$\infty$	1.000	1.645	1.960	2.000	2.576	3.000

8 Зафиксировать результат измерения  $y$  вместе с его стандартной неопределенностью  $u_c(y)$ , или расширенной неопределенностью  $U$ .

Если мерой неопределенности является суммарная стандартная неопределенность  $u_c(y)$ , то предпочтительно использовать следующие формы записи:

$Y=y$  единица измерения;  $u_c=\underline{xx}$  та же единица измерения;

$Y=y(u_c=xx)$  единица измерения, где число в скобках – суммарная стандартная неопределенность в тех же единицах измерения.