МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
Национальный исследовательский университет

Институт информационных технологий, математики и механики
Кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

ОТЧЕТ ПО УЧЕБНОЙ ПРАКТИКЕ

«Кубический сплайн интерполяции»

Выполнил:
студент группы 381706-1
Денисов Владислав Львович

___________ Подпись

Проверил:
ст. преп. каф. ДУМЧА ИИТММ

___________________ Эгамов А.И

Нижний Новгород
2019.

Содержание

1. Введение

Лабораторная работа направлена на изучение вопроса интерполирования функции путем использования кубического сплайна.

Интерполяция, интерполирование (от лат. inter-polis – «разглаженный, подновлённый, обновлённый; преобразованный») – в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

В случае сплайн-интерполяции мы рассматриваем сплайн, который состоит из нескольких полиномов, а их количество равно количеству интервалов, внутри которых мы производим интерполяцию.

Каждый из этих полиномов – это полином третьей степени (строго говоря, степени не выше третьей, так как на каком-то из интервалов интерполирующая кривая может становиться квадратичной параболой или даже линейной функцией, но в общем случае это все-таки полином именно третьей степени).

Пусть на плоскости задано n точек (x_i, y_i), все x_i – различны, в порядке возрастания. Получим что все наши точки будут соединены некоей кривой $P = \{P_2, .., P_n\}$, где P_i – полином третьей степени, а именно

$$P_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad \text{где } i = \overline{2, n}$$

Заметим также, что P_i должен иметь непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке $[x_1;\ x_n]$, а в точках x_i должно выполняться равенство $P(x_i) = F(x_i)$, что означает интерполяцию функции F в точках x_i сплайном Р. Кроме того, в этой лабораторной работе сплайн будет иметь «естественные» граничные условия, т.е. производная на его концах равно нулю: $P_2''(x_1) = 0$ и $P_n''(x_n) = 0$.

2. Постановка задачи

В рамках лабораторной работы ставится задача реализации программного комплекса, который позволит выполнять интерполирование функции по заданным точкам, используя кубический сплайн.

Ограничимся тем, что будет дано ровно 8 точек, по которым требуется интерполировать функцию.

Программный комплекс должен обладать следующими возможностями:

- Получение входных данных в двух режимах: ручной ввод или автоматическая генерация,
- Нахождение коэффициентов кубического сплайна на каждом интервале,
- Сохранение полученных коэффициентов в файл,
- Вывод на экран расположения исходных точек на координатной плоскости, а также построение графика полученной функции.

Для работы с кубическим сплайном будет представлен отдельный класс. Нахождение коэффициентов на каждом из интервалов будет выполняется при помощи метода прогонки.

Программное решение будет выглядеть следующим образом:

1. Модуль Form – поддержка пользовательского интерфейса для работы с программой.
2. Модуль Splain – комплексное осуществление работы с кубическим сплайном.

3. Теоретическая часть

3.1 Метод прогонки

С помощью этого метода можно решать только специфические системы, имеющие не более трех неизвестных в каждой строке. То есть при системе $Ax = F$ матрица A является трехдиагональной и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & c_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & c_n \end{pmatrix}$$

Метод прогонки, основан на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$x_i = A_{i+1} * x_{i+1} + B_{i+1}, \qquad \text{где } i = \overline{1, n-1}$$

Используя это соотношение выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в i-ое уравнение:

$$(a_i A_i A_{i+1} + c_i A_{i+1} + b_i)x_{i+1} + a_i A_i B_{i+1} + a_i B_i + c_i B_{i+1} - F_i = 0,$$

где F_i – правая часть i-го уравнения. Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать:

$$a_i A_i A_{i+1} + c_i A_{i+1} + b_i = 0$$

$$a_i A_i B_{i+1} + a_i B_i + c_i B_{i+1} - F_i = 0$$

Отсюда следует:

$$A_{i+1} = \frac{-b_i}{a_i A_i + c_i}$$

$$B_{i+1} = \frac{F_i - a_i B_i}{a_i A_i + c_i}$$

Таким образом, из первого уравнения получим:

$$A_2 = \frac{-b_1}{c_1} \text{ и } B_2 = \frac{F_1}{c_1}$$

После вычисления прогоночных коэффициентов A и B сможем найти решение системы путем вычисления x_i в обратном порядке. Причем:

$$x_n = \frac{F_n - a_n B_n}{a_n A_n + c_n}$$

Блок-схема метода представлена ниже.

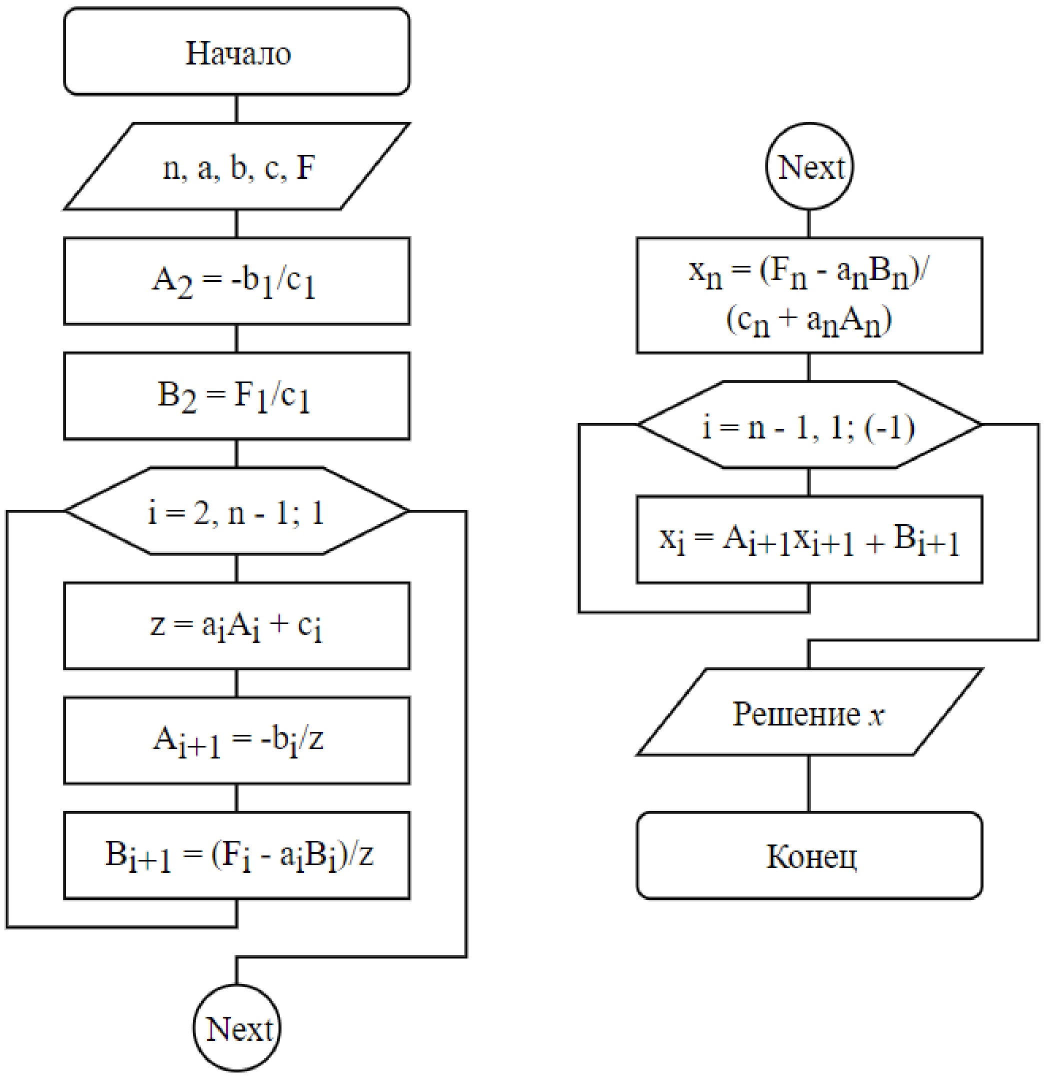

Рисунок 1 Блок-схема метода прогонки

3.2 Построение кубического сплайна

Для интерполирования функции с помощью использования кубического сплайна, потребуется вычислить его коэффициенты на каждом из интервалов. Для нахождения коэффициентов составим систему линейных уравнений, используя следующие выкладки.

Будем искать кубический полином на каждом интервале в виде:

$P_i = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$ где $i = \overline{2, n},$ $(*)$

Найдем производные для (*):

$$P_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2$$

$$P_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})$$

Получаем входные данные $(x_i\,, y_i,),$ где $i = \overline{1, n}$.

При этом $x_i - x_{i-1} = h_i$.

Имеем из условия $P(x_i) = F(x_i)$:

$$P_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i \tag{1}$$

$$P_i(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^2, \text{ где } i = \overline{2, n}. \tag{2}$$

Кроме того, потребуем непрерывность первых производных при $x = x_i$:

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}'(x_i), \qquad \text{где } i = \overline{2, n-1}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \tag{3}$$

А также вторых производных:

$$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i), \qquad \text{где } i = \overline{2, n-1}$$

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \tag{4}$$

Получаем $4\mathrm{n} - 6$ уравнений связи, а также $4\mathrm{n} - 4$ неизвестных. Недостающие 2 уравнения для решения системы получим из естественных граничных условий:

$$P_2{}''(x_1) = 0, \qquad c_2 = 0$$

$$P_n{}''(x_n) = 0, \qquad c_n + 3d_n h_n = 0$$

Введем для удобства записи фиктивную переменную $c_{n+1} = 0$.

Из уравнения (4) получаем:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

Подставляем в уравнение (2):

$$b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = y_i - a_i$$

Используем из (1) $y_{i-1} = a_i$ и получаем:

$$b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} h_i^3 = y_i - y_{i-1}$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{3}\right) h_i$$

Подставляем полученное b_i в уравнение (3), приводим подобные и получаем:

$$h_{i+1} c_{i+2} + 2(h_{i+1} + h_i) c_{i+1} + h_i c_i = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right), \text{ где } i = \overline{2, n-1} \tag{5}$$

С краевыми условиями $c_2 = 0$ и $c_{n+1} = 0$.

Получим из разностного уравнения (5) систему линейных уравнений $Ax = F$ где:

$$A = \begin{pmatrix} C_2 & B_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & C_3 & B_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & C_4 & B_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-2} & C_{n-2} & B_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n-1} & C_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} &A_i = h_i, &&\text{где } i = \overline{3, n-1} \\ &B_i = h_{i+1}, &&\text{где } i = \overline{2, n-2} \\ &C_i = 2(h_{i+1} + h_i), &&\text{где } i = \overline{2, n-1} \end{aligned}$$

Вектор x соответствует вектору $\{c_i\}$. Вектор F поэлементно равен правой части уравнения (5).

Решим эту систему методом прогонки и получим коэффициенты c_i. Затем найдем оставшиеся коэффициенты a_i, b_i и d_i.

Воспользуемся формулами:

$$a_i = h_i,$$

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - c_i h_i - \left(\frac{c_{i+1} - c_i}{3}\right) h_i,$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \qquad \text{где } i = \overline{2, n}$$

Ниже представлена блок-схема построения кубических сплайнов на нескольких интервалах.

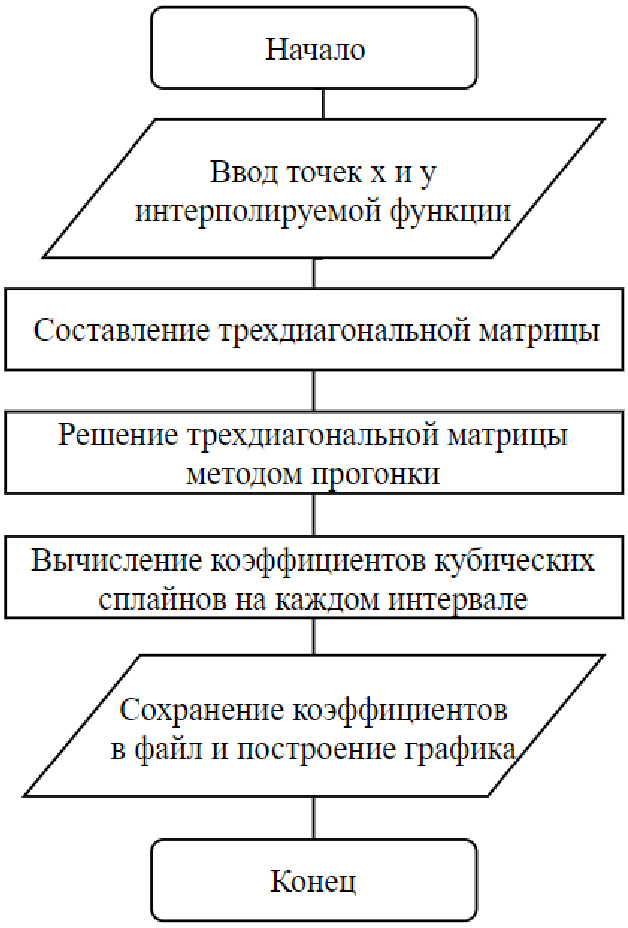

Рисунок 2 Блок-схема построения кубических сплайнов для интерполирования функции.

4. Пример работы программы

При запуске программы перед пользователем появляется интерфейс управления.

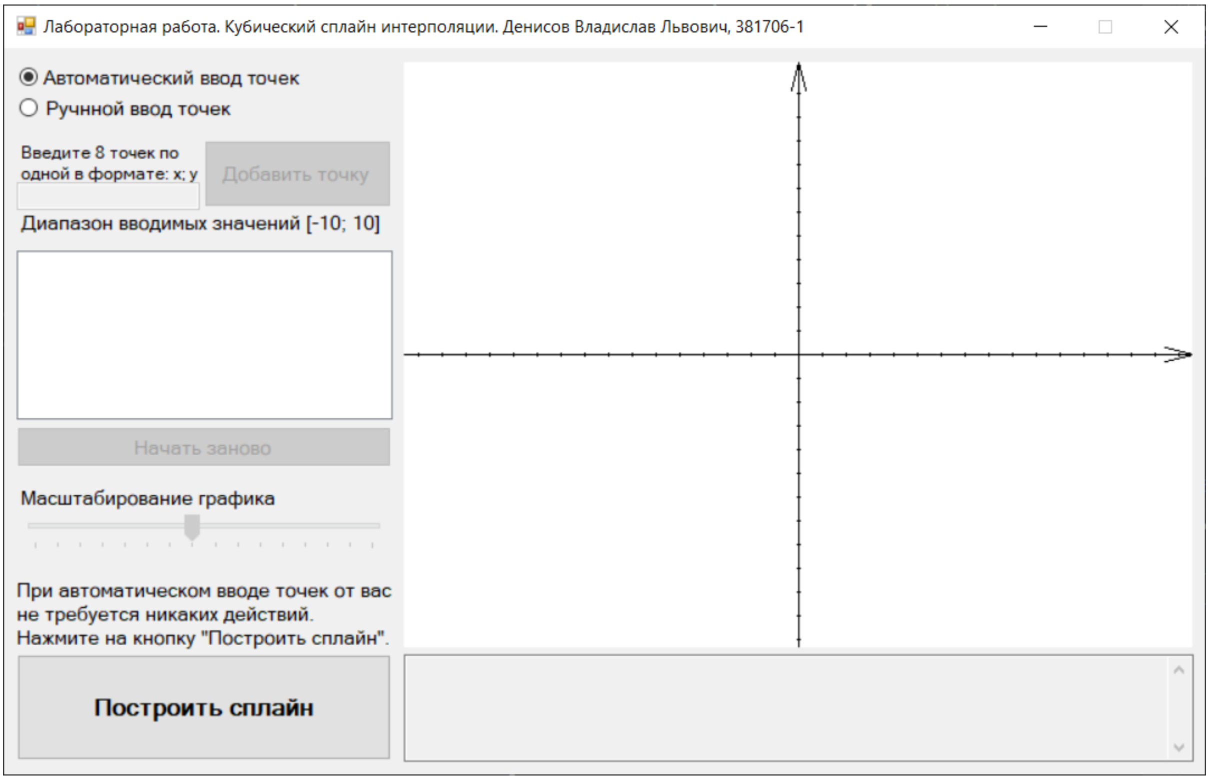

Рисунок 3 Первый запуск программы

При работе в автоматическом режиме после нажатия на кнопку «Построить сплайн» произойдет автоматическая генерация точек, вычисление коэффициентов кубического сплайна на каждом интервале, а также отображение графика функции на экран. Пример показан на Рисунке 4 (на следующей странице).

В случае использования ручного режима пользователю предлагается самостоятельно ввести необходимые точки, следуя подсказке, отображаемой рядом с полем ввода. Для подтверждения ввода очередной точки необходимо нажать на кнопку «Добавить точку» или нажать клавишу «Enter» на клавиатуре. В случае некорректного ввода отобразится сообщение об ошибке в специальном окне лога действий, расположенного под координатной плоскостью. Кроме того, можно прервать ручной ввод и начать его сначала нажатием на кнопку «Начать заново».

Дальнейшие действия по вычислению коэффициентов и отображению графика не отличаются от тех, что происходят в автоматическом режиме.

Заметим также, что почти все действия с программой отображаются в окне лога, упомянутого ранее, за исключением вывода коэффициентов сплайна: они сохраняются в файл, расположенный в той же директории, из которой запущена программа.

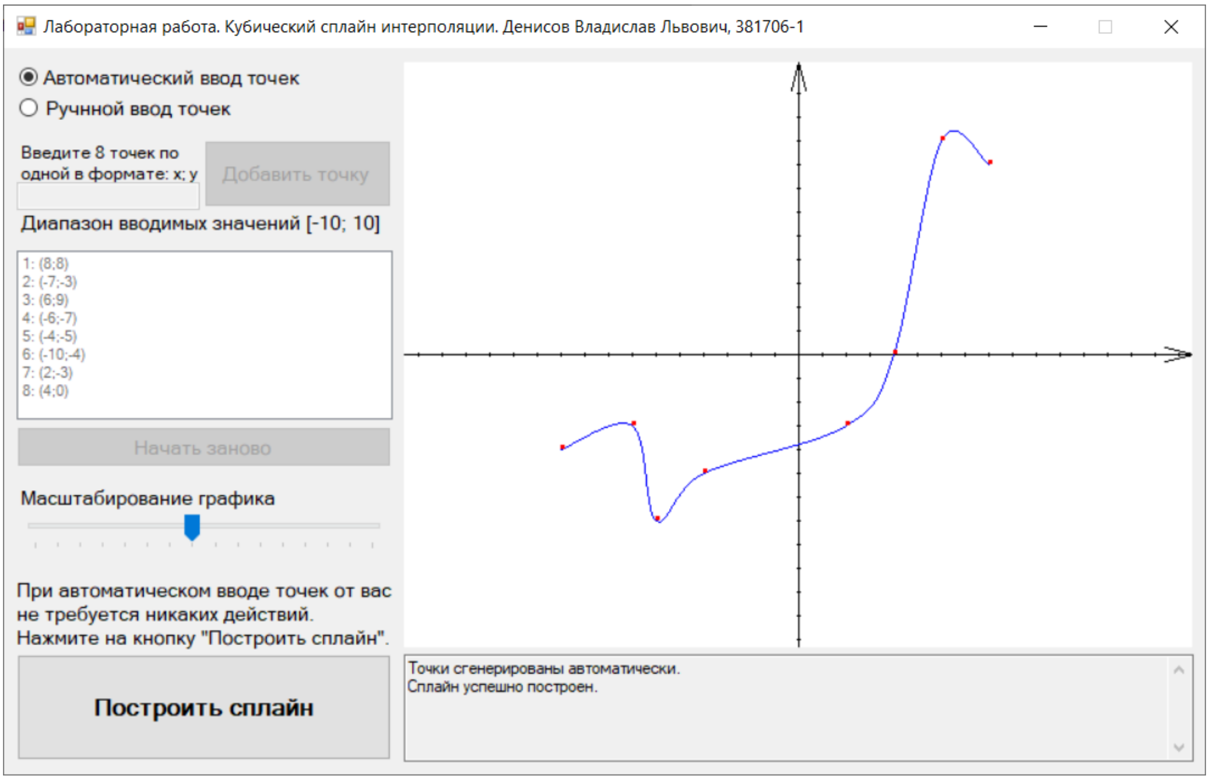

Рисунок 4 Автоматический режим работы программы

На Рисунке 5 также продемонстрировано масштабирование графика и сообщение о некорректном вводе точки в ручном режиме.

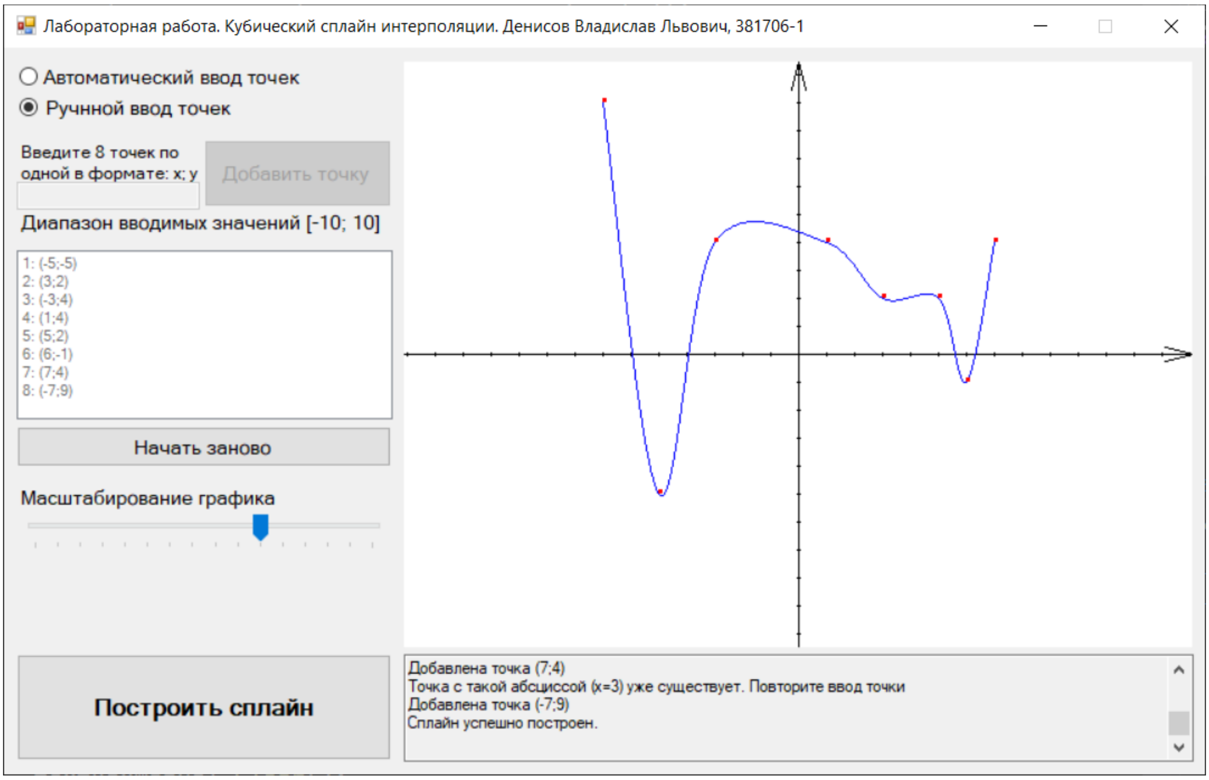

Рисунок 5 Ручной режим работы программы

5. Заключение

В результате лабораторной работы разработан программный комплекс, который позволяет интерполировать некоторую функцию, для которой известно 8 точек, путем использования кубических сплайнов. При этом точки можно задать вручную или сгенерировать автоматически.

Программа выполняет построение кубических сплайнов на каждом из интервалов. Для этого вычисляются коэффициенты каждого из этих сплайнов, а также происходит их сохранение в файл. При этом вычисление коэффициента C в сплайне производится с помощью метода прогонки для трехдиагональной матрицы. А вычисление остальных коэффициентов по расчетным формулам, представленным в теоретической части.

В результате работы программы на экране отображается график интерполируемой функции.

Цели, поставленные в лабораторной работе, успешно достигнуты.

6. Литература

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.
2. Костомаров, Д.П. Вводные лекции по численным методам: Учеб. пособие / А.П. Фаворский, Д.П. Костомаров .— М. : Логос, 2006 .— 130 с.