

# Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

31 марта 2023 г.

## Содержание

<b>1. Элементарная теория вероятностей</b>	<b>1</b>
1.1 Основные понятия . . . . .	2
1.2 Предельные теоремы для схем Бернулли . . . . .	5
<b>2. Общая теория вероятностей</b>	<b>9</b>
2.1 Колмогоровская модель теории вероятности . . . . .	10
2.2 Случайные величины . . . . .	11
2.3 Совместное распределение . . . . .	14
2.4 Математическое ожидание и дисперсия . . . . .	16
2.5 Сходимость последовательностей случайных величин . . . . .	21
2.6 Производящие функции . . . . .	24
<b>3. Метод характеристических функций</b>	<b>26</b>
3.1 Характеристические функции случайных величин . . . . .	27

# 1. Элементарная теория вероятностей

## 1.1. Основные понятия

**Определение 1.1.**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

**Определение 1.2.** Событие  $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

**Свойства.** вероятности

1.  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(A) \in [0, 1]$
2. Если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. 
$$\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B \setminus (A \cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ , где  $\bar{A} = \Omega \setminus A$
5.  $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \cdots \cap A_m)$  – формула включений-исключений.

**Доказательство.** Индукция по  $m$ .

База  $m = 2$ .

Переход  $m \rightarrow m + 1$ :

$$B_j = A_j \cup A_{m+1}$$

$$P(\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1})$$

$$A_{m+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - \sum_{i \neq j}^m P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^m P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_m)}, \text{ где } B_i := A_i \cap A_{m+1}.$$

$$A_{m+1}.$$

□

6.  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$   
 $P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \leq \sum_{j=1}^m P(A_j)$

**Определение 1.3.** Условная вероятность.

$$B \neq \emptyset, P(B) > 0.$$

Знаем, что произошло событие  $B$ , хотим узнать вероятность наступления  $A$ .

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Свойства.** 1.  $P(A|A) = 1$ , если  $B \subset A$ , то  $P(A|B) = 1$

2. Если  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , то  $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

$$\text{В частности: } P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

**Замечание.**  $P(A|B) + P(A|\bar{B})$  не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик,  $B$  – выпало четное число,  $A$  – выпало кратное трем.

$$P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

**Теорема 1.1. Формула полной вероятности.**

Пусть  $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ ,  $P(B_j) > 0$ .

Тогда  $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

**Доказательство.**  $\sum_{j=1}^m \underbrace{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}_{= \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}} = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = P(A)$  □

**Пример.** Пусть есть 2 урны с шариками:

I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II,  $P(\text{вынули белый}) = ?$

$A$  – вынули из II белый шар.

$B_0, B_1, B_2$ , где  $B_j$  – переложили  $j$  белых шаров из I в II.

Тогда  $P(A|B_0) = \frac{5}{12}$ ,  $P(A|B_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A|B_2) = \frac{7}{12}$ .

$$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

$$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

Подставляем в формулу:

$$P(A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{28} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{28} = \frac{23}{48}$$

**Теорема 1.2. Формула Байеса.**

Пусть  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ , тогда  $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

**Доказательство.** Расписываем  $P(A|B)$ , получаем в правой части:  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$ . □

**Теорема 1.3. Байеса.**

Пусть  $P(A) > 0$ ,  $P(B_j) > 0$ ,  $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ , тогда

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_m)P(B_m)}$$

**Пример.** Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая  $P(\text{орла}) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\text{решка}) = \frac{2}{3}$ ). Взяли наугад монету, подбросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

$A$  – выпал орел,  $B$  – монета симметричная ( $\bar{B}$  – монета кривая).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

**Определение 1.4. Независимые события.**

**Рассуждения:**  $A$  не зависит от  $B$ , если  $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

**Def:**  $A, B$  независимые события, если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Определение 1.5.** События  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – независимы в совокупности, если

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \text{ – для любых индексов } i_j.$$

**Замечание.** Независимость в совокупности  $\implies$  попарная независимость.

Наоборот неверно.

**Пример.** Есть два игральных кубика.

$A$  – на первом кубике выпало четное число.

$B$  – на втором выпало четное число.

$C$  – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары  $(i, j)$ , где  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\#\Omega = 36$ .

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C.$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$ , остальные равенства тоже выполняются  $\implies$  попарная независимость.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \implies \text{нет независимости в совокупности.}$$

**Упражнение.** Д-ть, что  $A_1, \dots, A_m$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$ , где  $B_j = A_j$  или  $\overline{A_j}$  (все  $2^m$  равенств).

**Замечание.** Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть  $p_1, \dots, p_n : \sum_{i=1}^n p_i = 1, \forall i : p_i \geq 0$ .

$$P(A) = \sum_{j: \omega_j \in A} p_j.$$

**Теорема 1.4. Схема Бернулли.**

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$$P(\text{орел}) = p, \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$P(\text{решка}) = 1 - p$$

Бросаем монету  $n$  раз, получаем последовательность исходов:

$$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : x_j = 0 \text{ или } 1.$$

$$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad P(\{\omega\}) = p^{\#i: x_i=1} \cdot q^{\#i: x_i=0} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n-\sum x_i}$$

Хотим узнать:

$$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(i\text{-ое подбрасывание}) = P(\text{орел}) = p \text{ – независимые в совокупности по } i = 1, 2, \dots, n.$$

**Теорема 1.5. Полиномиальная схема.**

$$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1.$$

$$P(x_i = k) = p_k, \text{ где } x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \quad \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$P(\{\omega\}) = p_1^{\#\{i: x_i=1\}} \cdot \dots \cdot p_m^{\#\{i: x_i=m\}}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

$$P(k_1 \text{ раз выпало } 1, k_2 \text{ раз выпало } 2, \dots) = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}}_{= \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$$

### Теорема 1.6. Эрдёша-Мозера

Рассмотрим турнир на  $n$  команд. При каком наибольшем  $k$  можно всегда выбрать команды  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , так, что  $A_i$  выиграла у  $A_j$ , если  $i < j$ ? При  $k \leq 1 + [2 \log_2 n]$

**Доказательство.** Предположим, что  $k \geq 2 + [2 \log_2 n] > 1 + 2 \log_2 n$ . Хотим показать, что при таких  $k$  точно найдётся турнир, в котором нельзя выбрать  $k$  команд.

Рассмотрим случайный турнир (Всего встреч  $\binom{n}{2}$ , тогда  $2^{\binom{n}{2}}$  разных турниров. Случайный - берём из этой кучи наугад).

$$P(A \text{ выиграла у } B) = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим  $A_1, A_2, \dots, A_k$  команды.

1.  $P(A_1, A_2, \dots, A_k \text{ подходят}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$
2.  $P(A_1, A_2, \dots, A_k \text{ можно переименовать, так, что они подошли}) \leq \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$
3.  $P(\text{какие-то } k \text{ команд подошли}) \leq \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$

Нужно понять, что если  $k \geq 2 + [2 \log_2 n]$ , то  $\binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$ .

$$\text{Действительно, } \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{(2^{\frac{k-1}{2}})^k} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k$$

Мы знаем, что  $k > 1 + 2 \log_2 n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2} > \log_2 n \Rightarrow 2^{\frac{k-1}{2}} > n$ . И тогда  $\left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k < 1$ . Это значит, что вероятность, что никакие команды не подходят - положительная, значит есть турнир, в котором  $k$  команд выбрать нельзя.  $\square$

## 1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли

**Определение 1.6.** Схема Бернулли с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ .  $S_n$  - число успехов при  $n$  испытаниях.  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Что будет больше  $P(S_{1000} = 220)$  при  $p = \frac{1}{5}$  или  $P(S_{2000}) = 360$  при  $p = \frac{1}{6}$ . Точные вычисления дают 0.008984 и 0.006625 соответственно.

### Теорема 1.7. Пуассона

Схема Бернулли с  $n$  испытаниями и вероятностью успеха  $p_n$  - зависит от  $n$ . Если  $np_n \rightarrow \lambda > 0$ . Тогда  $P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

**Замечание.** Если  $np_n = \lambda$ , то теорема верна при  $k = o(\sqrt{n})$

**Доказательство.**  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-p)^{n-k}$ .

Осталось показать, что  $(1-p)^{n-k} \sim e^{-\lambda}$ . Прологарифмируем:  $\ln(1-p)^{n-k} = (n-k) \ln(1-p) \sim -np \sim -\lambda$

Доказательство замечания:

Нам нужно показать, что  $n(n-1)\dots(n-k+1) \sim n^k$ , все остальные переходы будут верны.  

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \underbrace{\geq}_{(*)} 1 - \frac{1}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \rightarrow 1$$

(\*) Неравенство  $(1-x_1)\dots(1-x_k) \geq 1-x_1-x_2-\dots-x_k$  при  $0 \leq x_i \leq 1$  - индукция.  $\square$

### Теорема 1.8. Прохорова

Если  $\lambda = np$ , то  $\sum_{k=0}^{+\infty} |P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda)$

**Пример.** Игра в рулетку: 36 чисел и ноль.

$$p = \frac{1}{37}, n = 111, np = 3 = \lambda.$$

$$P(S_{111} = 3) = \binom{111}{3} \left(\frac{1}{37}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{111-3} = 0.227127$$

$$\text{Из Пуассона } \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.224$$

Видим, что приближение хорошее.

$$P(\text{ставка удачная хотя бы 4 раза}) = 1 - P(S_{111} = 0) - P(S_{111} = 1) - P(S_{111} = 2) - P(S_{111} = 3) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.352754$$

А по формулам 0.352768

### Теорема 1.9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Схема Бернулии с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ ,  $q = 1 - p$ ,  $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ , где  $k$  зависит от  $n$ , и  $n$  меняется.  $|x| \leq T$  - при  $n \rightarrow +\infty$  и любых  $k$ . Тогда:

$$P(S_n = k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

**Доказательство.**

$$1. k = np + x\sqrt{npq} \geq np - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$2. n - k = nq - x\sqrt{npq} \geq nq - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \text{ Напишем формулу Стирлинга:}$$

$$\text{Формула Стирлинга: } n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi n} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi(n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) n}}. \text{ Заметим, что } \frac{k}{n} = p + \frac{x\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \rightarrow p$$

и  $\frac{n-k}{n} \rightarrow q$

Поэтому остаётся доказать, что  $\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}}{p^k q^{n-k}} \rightarrow e^{\frac{x^2}{2}}$ . Прологарифмируем:

$$\text{Получим: } k \ln \frac{k}{n} + (n-k) \ln \frac{n-k}{n} - k \ln p - (n-k) \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

Введём обозначения:  $\alpha = \frac{k}{n} \rightarrow p, \beta = \frac{n-k}{n} \rightarrow q$ . Тогда  $k = n\alpha, n-k = n\beta$  и всё перепишется в виде:

$$n\alpha \ln \alpha + n\beta \ln \beta - n\alpha \ln p - n\beta \ln q = \underbrace{n\alpha \ln \frac{\alpha}{p} + n\beta \ln \frac{\beta}{q}}_{(*)} \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

Мы знаем, что  $\frac{\alpha}{p} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}$  и  $\frac{\beta}{q} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}$  - из первых двух тождеств в доказательстве.

Напишем Тейлора:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\ln \frac{\alpha}{p} = \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2\frac{q}{np} + o(\frac{1}{n})$$

$$\ln \frac{\beta}{q} = \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}x^2\frac{p}{nq} + o(\frac{1}{n})$$

$$\text{Тогда } (*) = x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2q - \frac{1}{2}x^2q + o(\frac{1}{n}) - x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2p - \frac{1}{2}x^2p + o(\frac{1}{n}) = x^2(\frac{q}{2} + \frac{p}{2}) + o(1) = \frac{x^2}{2} + o(1) \quad \square$$

**Замечание.** Если  $\varphi(n) = o(n^{\frac{2}{3}})$  и  $|k - np| \leq \varphi(n)$ , то теорема тоже верна

**Пример.** Всё та же рулетка.  $n = 222, k = 111$ . Пытаемся ставить на четное/нечётное(кроме 0).  
 $p = \frac{18}{37}$

$$P(S_{222} = 111) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0.049395 \dots$$

Если считать точно, то получим 0.0493228...

### Теорема 1.10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$$0 < p < 1. P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Стремление равномерно по  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Теорема 1.11. Берри-Эссеена

$$\text{Обозначение: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{2}$$

**Замечание.** Константа лучше, чем  $\frac{c}{\sqrt{n}}$  не бывает.

$$\text{Замечание. } P(a < S_n \leq b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Отсюда получили, что лучше всего писать полуцелые  $a$  и  $b$ .

**Замечание.** Если  $p$  или  $q$  очень маленькие, то произведение  $np$  маленькое и оценка будет плохой. В таких случаях хорошо использовать Пуассона. Муавра-Лаплас же хорош, когда  $np$  большое.

$$\text{Пример. } p = q = \frac{1}{2}. \text{ Вопрос: } P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

$$\text{Но } P(S_{2n} < n) = P(S_{2n} > n).$$

$$\text{Тогда } P(S_{2n} \leq n) = \frac{1 + P(S_{2n} = n)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$\text{Муавра-Лаплас нам говорит, что } P(S_{2n} \leq n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{Но } P(S_{2n} \leq n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

### Пример. Задача о театре

Есть театр и 2 входа. У каждого входа расположен гардероб. В театре  $n = 1600$  мест. Хотим сделать размер гардероба как можно меньше, но чтобы переполнения случались как можно реже (не чаще, чем раз в месяц).

Пусть  $s$  мест в итоге в гардеробе.

За успех считаем ситуацию, когда человек вошел в театр и пошел в ближайший к нему гардероб (т.е. в ближайшем гардеробе было место, и человек не пошел в дальний гардероб). Пусть  $S_n$  – кол-во успешных испытаний.

Так как в каждый гардероб мы допускаем  $s$  мест, то кол-во успехов  $S_n \leq s$ .

$p = q = \frac{1}{2}$ . Нужно, чтобы  $n - s \leq S_n \leq s$ . И  $P(n - s \leq S_n \leq s) > \frac{29}{30}$  – т.е. хотя бы в 29 днях из 30 ближайший к каждому входу гардероб не переполняется.



$$P(n - c \leq S_n \leq c) = P\left(\frac{n-c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right) \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{c - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} = P\left(\frac{800-c}{20}\right) \leq \frac{S_n - 800}{20} \leq \frac{c-800}{20} \rightarrow \Phi\left(\frac{800-c}{20}\right) - \Phi\left(\frac{c-800}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{800-c}{20}}^{\frac{c-800}{20}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt > \frac{29}{30}$$

$$\Phi_0\left(\frac{c-800}{20}\right) > \frac{29}{60}. \text{ Тогда } c = 843.$$

### Пример. Случайное блуждание на прямой

Есть прямая, будем считать, что у нас блуждания исключительно по целым точкам.

В каждой точке подбрасываем монетку. С вероятностью  $p$  идём вперёд,  $q$  - идём назад.

$$a_{n+1} = a_n + 1 \text{ с вероятностью } p$$

$$a_{n+1} = a_n - 1 \text{ с вероятностью } q$$

$$a_n \equiv n \pmod{2}$$

Это почти похоже на схему Бернулли:  $2S_n - n = a_n$

$$P(a_n = k) = P(S_n = \frac{n+k}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv k \pmod{2} \\ \binom{n+k}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

### Теорема 1.12. ван дер Вардена

Рассмотрим числа  $1, 2 \dots k$  и покрасим их в 2 цвета.

Тогда существует  $k_n$ , такое, что, если  $k > k_n$ , то при любой раскраске найдётся одноцветная  $n$ -членная арифметическая прогрессия.

### Теорема 1.13. Эрдеша-Радона

$$k_{n+1} \geq \sqrt{n \cdot 2^{n+1}}$$

**Доказательство.**  $A_1, A_2 \dots A_m$  - все арифметические прогрессии длины  $n+1$  из чисел  $1, 2 \dots k$ .

С разностью 1 :  $k - n$  прогрессий.

С разностью 2 :  $k - 2n$  прогрессий.

...

С разностью  $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$  :  $k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n$  прогрессий

Тогда  $m = (k - n) + (k - 2n) + \dots + k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n = k \cdot \lfloor \frac{k}{n} \rfloor - n \cdot \frac{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot (\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)}{2} = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor (k - \frac{1}{2}n(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)) < \frac{k}{n}(k - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{k}{n}) = \frac{k^2}{2n}$  - это оценка сверху.

$$P(A_i \text{ - одноцветная}) = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \text{ (2 - выбор цвета).}$$

$P(\text{какое-то } A_i \text{ - одноцветно}) = \sum_{i=1}^m P(A_i \text{ - одноцветно}) = \frac{m}{2^n} < \frac{k^2}{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = \left(\frac{k}{\sqrt{2^{n+1} \cdot n}}\right)^2 \leq 1$  (если так, то найдётся, на которой не выполнится)  $\square$

## 2. Общая теория вероятностей

## 2.1. Колмогоровская модель теории вероятности

**Определение 2.1.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство.

$\Omega$  - множество или пространство элементарных исходов.

$\mathcal{F}$  -  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ . Элементы  $\mathcal{F}$  - случайные события.

$P$  - мера на  $\mathcal{F}$  с условием  $P(\Omega) = 1$ .

**Замечание.** Если  $\Omega$  не более чем счётно, то можно взять  $\mathcal{F} = 2^\Omega$

**Определение 2.2.** Условная вероятность.  $A$  - событие, такое, что  $P(A) > 0$ . Тогда  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ , где  $A, B \in \mathcal{F}$ .

**Определение 2.3.** Независимые события  $A$  и  $B$ . Если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Определение 2.4.** Независимость в совокупности  $A_1, A_2 \dots A_n$ .  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$  для всевозможных наборов индексов.

**Определение 2.5.** Последовательность событий  $A_1, A_2 \dots$  независимы - любой конечный набор событий независим в совокупности.

**Лемма. Бореля-Кантелли**

$A_1, A_2, \dots$  случайные события.

1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , то вероятность, что случилось бесконечное число из них равна 0.
2. Если  $A_1, A_2, \dots$  независимы и  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ , тогда  $P(\text{случилось бесконечное число из } A_n) = 1$ .

**Доказательство.**  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$  - это переформулировка события из условия в терминах множеств

$\omega \in B \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \iff \omega \in A_k$  для бесконечного количества индексов  $k$ .

Док-во этого факта:

1.  $\Leftarrow$ : Лежит в каждом объединении, значит лежит в  $B$ .
2.  $\Rightarrow$ :  $\omega$  лежит в пересечении. Пусть лежит в конечном - возьмём самый большой номер и получим противоречие.

Док-во теоремы:

1. Хотим доказать, что  $P(B) = 0$   
 $B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow P(B) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$  - это хвост сходящегося ряда, а он стремится к нулю.
2. Давайте смотреть на  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$  - независимые события.

$$P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) \overset{\text{независимость}}{\underset{\sim}{=}} \prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - P(A_k))$$

А ещё  $P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) \rightarrow P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k)$ , так как множества вложены в друг друга и есть монотонность меры.

Значит  $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \xLeftrightarrow{\text{логарифмируем}} \ln P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) =$   
 $= \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \stackrel{\ln(1-t) \leq -t}{\leq} \sum_{k=n}^{\infty} (-P(A_k)) = -\infty$  - хвост расходящегося ряда.

А значит мы логарифмировали  $0 \Rightarrow P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bar{B}) = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} P(B) = 1$

$$(*) \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = B$$

□

### Теорема 2.1. Закон нуля и единицы

Если  $A_1, A_2, \dots$  независимы, то  $P(B) = 0$  или  $P(B) = 1$ .

**Пример.** Испытания Бернулли, успех с вероятностью  $p$ ,

$P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = ?$ .

$A_n$  = случилось ОРО на позициях  $n, n+1, n+2$ .

Тогда  $A_1, A_4, A_7, \dots$  независимы.  $P(A_j) = pqr = p^2q > 0$ .

Лемма Бореля-Кантелли говорит: бесконечное кол-во  $A_{3k+1}$  случится, если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{3k+1}) = +\infty \Rightarrow P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = 1$ .

## 2.2. Случайные величины

**Определение 2.6.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство.

$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - случайная величина, если это измеримая функция.

**Определение 2.7.** Распределение случайной величины

$P_{\xi}$  - вероятностная мера на борелевских подмножествах  $\mathbb{R}$

$A$  - борелевское мн-во,  $P_{\xi}(A) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A)$

**Определение 2.8.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  одинаково распределены, если  $P_{\xi} = P_{\eta}$

**Замечание.**  $P_{\xi}$  однозначно определяются своими значениями на ячейках.

$$P_{\xi}(a, b] = P_{\xi}(-\infty, b] - P_{\xi}(-\infty, a] = P(\xi \leq b) - P(\xi \leq a)$$

**Определение 2.9.** Функция распределения случайной величины

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x)$$

**Свойства.** 1. Функция распределения однозначно определяет распределение случайной величины.

**Доказательство.** Функция распределения однозначно задаёт значения на ячейках □

$$2. 0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$$

**Доказательство.** берём  $x_n \rightarrow -\infty, A_n = \{\xi \leq x_n\}$  Тогда  $A_{n+1} \subset A_n$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0$  □

4.  $F_\xi$  монотонно возрастает

5. Непрерывность справа:  $\lim_{y \rightarrow x+} F_\xi(y) = F_\xi(x)$

**Доказательство.** берём  $y_n$  убывающие и  $y_n \rightarrow x$ . Тогда  $A_n = \{\xi \leq y_n\}$ .  $A_{n+1} \subset A_n$ . А тогда  $\lim P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\xi \leq x) = F_\xi(x)$ . Но с другой стороны  $\lim P(A_n) = \lim P(\xi \leq y_n) = \lim F_\xi(y_n)$   $\square$

6.  $\lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y) = P(\xi < x)$

**Доказательство.** берём  $y_n$  возрастающие и  $y_n \rightarrow x$ .  $B_n = \{\xi \leq y_n\}$  и  $B_n \subset B_{n+1}$ .  $\lim P(B_n) = P(\bigcup B_n) = P(\xi < x)$ . Но с другой стороны  $\lim P(B_n) = \lim F_\xi(y_n)$   $\square$

7.  $F_{\xi+a}(x) = F_\xi(x-a)$

**Доказательство.**  $\{\xi + a \leq x\} = \{\xi \leq x - a\}$   $\square$

8.  $F_{c\xi} = F_\xi(\frac{x}{c})$

**Доказательство.**  $\{c\xi \leq x\} = \{\xi \leq \frac{x}{c}\}$   $\square$

**Замечание.** Функция, обладающая свойствами 3, 4, 5 - это функция распределения некоторой случайной величины.

**Доказательство.** пусть  $g$  - такая функция. Тогда  $\nu_g(a, b] = g(b) - g(a)$ .  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}$  - измеримо по Лебегу, случайная величина  $\xi(w) = w$ . Тогда  $F_\xi = g$   $\square$

**Определение 2.10.** Случайная величина имеет дискретное распределение, если её множество значений не более чем счётное.

**Замечание.** 1.  $\xi \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$

Если  $x \neq y_k$ , то  $P(\xi = x) = 0$ , т.е.  $P_\xi(\{x\}) = 0$

2.  $P_\xi(A) = \sum_{k: y_k \in A} P(\xi = y_k)$ . Тут счётное число слагаемых, поэтому сумма корректно определена.

Распределение однозначно определяется набором вероятностей  $P(\xi = y_k)$

3.  $F_\xi(x) = \sum_{k: y_k \leq x} P(\xi = y_k)$

**Определение 2.11.** Случайная величина имеет непрерывное распределение, если  $P(\xi = x) = 0$

**Замечание.** 1. Это значит, что функция распределения непрерывна.

2. Непрерывные распределения бывают не очень хорошими, например Канторова лестница.

**Определение 2.12.** Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует  $p_\xi(t) \geq 0$ , измеримая, т.ч.  $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$  ( $p_\xi(t)$  - плотность распределения).

**Свойства.** 1.  $A \subset \mathbb{R}$  - борелевское, то  $P_\xi(A) = \int_A p_\xi(t) dt$

**Доказательство.** слева мера и справа написаны меры. На лучах они совпадают по определению, значит совпадают на ячейках, а значит и совпадают везде  $\square$

$$P_\xi(a, b] = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b p_\xi(t) dt$$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(t) dt = 1$
3.  $p_{\xi}$  определена однозначно с точностью до почти везде (из теории меры)
4.  $F_{\xi}$  почти везде дифференцируема и  $F'_{\xi}(x) = p_{\xi}(x)$

**Доказательство.** без доказательства □

### Пример. Вероятностные распределения

1. Биномиальное распределение:  $\xi \sim Binom(p, n), 0 < p < 1$   
 $\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}. P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
2. Распределение Пуассона:  $\xi \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$ .  
 $\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}. P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
3. Геометрическое распределение:  $\xi \sim Geom(p), 0 < p < 1$ .  
 $\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}. P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$ .
4. Дискретные равномерные распределения:  $\xi \sim U(\dots)$   
 $\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}. P(\xi = k) = \frac{1}{n}$
5. Непрерывно равномерное распределение:  $\xi \sim U([a, b])$   
 $\xi : \Omega \rightarrow [a, b]. p_{\xi}(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbf{1}_{[a,b]}(t)$
6. Нормальное распределение:  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$   
 $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. p_{\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$   
 Стандартное нормальное распределение:  $\mathcal{N}(0, 1)$
7. Экспоненциальное распределение:  $\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$ .  
 $\xi : \Omega \rightarrow [0, +\infty]. p_{\xi}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{в других точках} \end{cases}$

**Замечание.** 1.  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

На самом деле это функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

2. Если  $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\xi = \sigma\nu + a. \xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$F_{\xi}(x) = P(\sigma\nu + a \leq x) = P(\nu \leq \frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Замена  $t = \frac{s-a}{\sigma}$ . Тогда  $dt = \frac{ds}{\sigma}$

$$\text{Тогда: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(s-a)^2}{2\sigma^2}} ds$$

## 2.3. Совместное распределение

**Определение 2.13.** Совместное(многомерное) распределение.

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P_{\bar{\xi}}(A) = P(\bar{\xi} \in A), \text{ где } A - \text{борелевское подмножество } \mathbb{R}^n$$

**Замечание.**  $P_{\bar{\xi}}$  однозначно определяет распределение  $P_{\xi_k}$ , но не наоборот

**Пример.**  $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  с равными вероятностями.

Если это были независимые подбрасывания:  $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  с равными вероятностями.

Если  $\xi = \eta$ , то  $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (1, 1)\}$ .

То есть получили 2 разных совместных распределения, при это координатное распределение только одно

**Определение 2.14.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  независимы, если для любых борелевских подмножеств  $A_1, A_2 \dots A_n \subset \mathbb{R}$ , события  $\{\xi_1 \in A_1\}, \dots, \{\xi_n \in A_n\}$  независимы

**Замечание.**  $P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P(\xi_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in A_n)$

**Теорема 2.2.**  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  независимы  $\iff P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n}$

**Доказательство.** 1.  $\Leftarrow P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P_{\xi_1, \dots, \xi_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{\xi_1}(A_1) \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}(A_n)$

2.  $\Rightarrow$ . Достаточно проверить совпадение на ячейках, то есть, что  $P(\bar{\xi} \in (a, b]) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}(a_n, b_n]$ . А это просто определение независимости.

□

**Определение 2.15.** Совместная (многомерная) функция распределения.

$$\bar{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_n). F_{\bar{\xi}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \text{ и } F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

**Свойства.** 1.  $0 \leq F_{\bar{\xi}} \leq 1$

2. Монотонно возрастает по каждой координате

$$3. \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 0$$

$$\lim_{x_1, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 1$$

$$4. \lim_{x_i \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots}$$

**Определение 2.16.** Совместная плотность  $p_{\bar{\xi}}(\bar{t})$  - неотрицательная измеримая функция, такая, что  $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) dt_n \dots dt_1$

**Теорема 2.3.**  $\xi_1 \dots \xi_n$  независимы  $\iff F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$

**Доказательство.** 1. Докажем  $\Rightarrow$ . Независимость  $\Rightarrow (*) P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\bar{\xi}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P_{\xi_1}((-\infty, x_1]) \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}((-\infty, x_n])$

2. Хотим проверить совпадение на ячейках, чтобы доказать  $(*)$  ещё и в другую сторону.



$$\begin{aligned} P_{\bar{\xi}}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) &= F_{\bar{\xi}}(b_1, b_2) + F_{\bar{\xi}}(a_1, a_2) - F_{\bar{\xi}}(a_1, b_2) - F_{\bar{\xi}}(a_2, b_1) = \\ &= (F_{\xi_1}(b_1) - F_{\xi_1}(a_1)) \cdot (F_{\xi_2}(b_2) - F_{\xi_2}(a_2)) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot P_{\xi_2}(a_2, b_2] \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $\xi_1 \dots \xi_n$  - абсолютно непрерывные случайные величины. Тогда  $\xi_1 \dots \xi_n$  независимы  $\iff p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = p_{\xi_1}(t_1) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(t_n)$

В частности, в случае независимости  $\bar{\xi}$  абсолютно непрерывна.

**Доказательство.** 1. Докажем  $\Rightarrow$ .

$$\text{Независимость} \Rightarrow F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1) dt_1 \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_n}(t_n) dt_n = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n) dt_n \dots dt_1.$$

Запишали всё под один интеграл, то что под интегралом и есть совместная плотность.

2. Докажем  $\Leftarrow$ .

Просто проинтегрируем равенство.

$$\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) dt_n \dots dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n) dt_n \dots dt_1 = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

по т. Тонелли можно выносить интегралы

□

**Замечание.** Напоминание.

Свертка последовательностей:  $\{a_n\}, \{b_n\}$  это  $\{c_n\}$ , такая что  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ .

Мотивировка:  $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  (при наличии хоть каких-нибудь кругов сходимости у обоих рядов).

**Замечание.** Свертки мер

$\mu$  и  $\nu$  - конечные меры на борелевских подмножествах  $\mathbb{R}$ .

$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x)$  - это свертка мер, где  $(A - x) := \{a - x \mid a \in A\}$ .

**Свойства.** Свойства свёртки

$$1. \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(x) d\nu(y)$$

$$\text{Доказательство. } \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) \stackrel{\mu(A-x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x} d\mu(y)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x}(y) d\mu(y) d\nu(x) \quad \square$$

$$2. \mu * \nu = \nu * \mu$$



$$3. \mu_1 * \dots * \mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1 + \dots + x_n) d\mu_1(x_1) \dots d\mu_n(x_n)$$

$$4. (\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$$

$$5. (\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$$

$$6. \delta_x - \text{мера с единичной нагрузкой в точке } x. \text{ Тогда } \mu * \delta_0 = \mu.$$

Получили линейное пространство относительно  $+$  и  $*$

$$\text{Доказательство. } \mu * \delta_0(A) = \delta_0 * \mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(A - x) d\mu(x) \stackrel{\delta_0=1 \Leftrightarrow 0 \in A-x \Leftrightarrow x \in A}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\mu(x) = \mu A \quad \square$$

**Теорема 2.4.** Пусть  $\mu$  и  $\nu$  имеют плотности  $p_\mu$  и  $p_\nu$

$$\text{Тогда } \mu * \nu \text{ имеет плотность } p(t) = \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t-s)p_\nu(s) ds$$

**Доказательство.** Возьмём функцию, определяемую этой формулой и проверим, что подходит.

$$\int_A p(t) dt = \int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t-s)p_\nu(s) ds dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t)p_\mu(t-s)p_\nu(s) ds dt = (*).$$

$$\text{Положим } u = t-s. \text{ Тогда } (*) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u+s)p_\mu(u)p_\nu(s) ds du = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u+s) d\nu(s) d\mu(u) = \mu * \nu(A) \quad \square$$

**Теорема 2.5.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимые случайные величины, то  $P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

**Доказательство.** Нужно взять какое-то борелевское множество и понять как устроено там распределение суммы.

$$\text{Пусть } B = \{(x, y) : x + y \in A\}$$

$$P_{\xi+\eta}(A) = P(\xi + \eta \in A) = P((\xi, \eta) \in B) = P_{\xi, \eta}(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_\xi(x) dP_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x+y) dP_\xi(x) dP_\eta(y) = P_\xi * P_\eta(A) \quad \square$$

**Пример.** 1. **Свертка с дискретным распределением**

$$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}. \text{ Тогда } \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A-x) d\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A-x_k) p_k$$

$$2. \xi_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i). \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ независимы.}$$

$$P_{\xi_1+\xi_2}(\{n\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{\xi_1}(\{n-k\}) \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^{n-k} e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^{n-k} \lambda_2^k}{k!(n-k)!} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{n!}$$

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

## 2.4. Математическое ожидание и дисперсия

**Определение 2.17.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - случайная величина ( $\xi \geq 0$ , либо суммируемая функция).  $\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi(\omega) dP(\omega)$  - математическое ожидание (среднее значение случайной величины).

**Свойства.** 1.  $a, b \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$

$$2. \text{ Если } \xi \geq 0, \text{ с вероятностью } 1, \text{ то } \mathbb{E}\xi \geq 0 \text{ (по сути написано, что если функция почти везде неотрицательна, то интеграл неотрицателен).}$$

$$3. \text{ Если } \xi \geq \eta \text{ с вероятностью } 1, \text{ то } \mathbb{E}\xi \geq \mathbb{E}\eta$$

$$4. \mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_\xi(x)$$

5. Если  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - измерима относительно борелевской  $\sigma$ -алгебры.

$$\text{Тогда } \mathbb{E}f(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dP_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$$

*Доказательство:*  $f = 1_A$ . Тогда  $\mathbb{E}1_A(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\Omega} 1_A(\xi_1(w), \dots, \xi_n(w)) dP(w) = P(\omega \in \Omega : \bar{\xi} \in A) = P_{\bar{\xi}}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A(x_1, \dots, x_n) dP_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n)$ .

Тогда по линейности верно для простых.

Теперь берём  $f_j$  неотрицательные простые, такие, что возрастают и  $\rightarrow f$ . И предельный переход по теореме Леви.

6. Если  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то  $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$

$$\text{Доказательство: } \mathbb{E}(\xi\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{\xi, \eta}(x, y) =$$

$$\stackrel{\text{независимость сл. вел.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}} y \int_{\mathbb{R}} x dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$$

7. Если  $\xi \geq 0$ , то  $\mathbb{E}\xi = \int_0^{+\infty} P(\xi \geq t) dt$  - из теории меры.

8. Если  $p, q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то  $\mathbb{E}|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}$  - неравенство Гёльдера

9. Неравенство Ляпунова

$$0 < r < s, \text{ тогда } (\mathbb{E}|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{1}{s}}.$$

$$\text{Доказательство: } p = \frac{s}{r} > 1, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{s-r}{s} < 1.$$

Тогда запишем Гельдера для  $\xi$  и  $\eta = 1$ :

$$\mathbb{E}|\xi|^r |1| \leq (\mathbb{E}(|\xi|^r)^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}1^q)^{\frac{1}{q}} = (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{r}{s}}.$$

**Замечание.**  $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$  без независимости неверно.

Возьмём  $\xi = \pm 1$  с вероятностями  $\frac{1}{2}$ . Тогда  $\mathbb{E}\xi = 0$ .

Также пусть  $\eta = \xi$ . Тогда  $\xi\eta = \xi^2 = 1 \neq (\mathbb{E}\xi)^2$

### Теорема 2.6. Неравенство Маркова

Если  $\xi \geq 0, p, t > 0$ , то  $P(\xi \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}\xi^p}{t^p}$ .

**Доказательство.** Неравенство Чебышёва из теории меры. □

**Определение 2.18.** 1. Моменты случайной величины.  $\mathbb{E}(\xi^k)$  -  $k$ -ый момент.

2. Центральный момент.  $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$  -  $k$ -ый центральный момент.

3. Абсолютный момент.  $\mathbb{E}|\xi|^k$  -  $k$ -ый абсолютный момент.

**Определение 2.19.** Медиана случайной величины.  $m$  - медиана  $\xi$ , если  $P(\xi \geq m) \geq \frac{1}{2}$  и  $P(\xi \leq m) \geq \frac{1}{2}$ .

**Замечание.** Медиана не единственна.

Возьмём кубик.  $\xi = 1, 2, \dots, 6$  с вероятностью  $\frac{1}{6}$ . Тогда любое число  $m \in [3, 4]$  подходит.

Чаще всего всё равно берут середину, чтобы была единственность.

**Пример.** Есть организация из 1000 человек. 1 начальник и 999 подчиненных.

Зарплата начальника 1.000.000\$, а подчинённых 1000\$.

$$\mathbb{E} = \frac{999}{1000} \cdot 1000 + \frac{1}{1000} \cdot 1000000 = 1999$$

$m = 1000$  - медиана лучше характеризует ситуацию в этом случае.

**Определение 2.20.** Дисперсия.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$  - второй центральный момент.

Обозначение в англоязычной литературе:  $Var\xi$

**Свойства.** 1.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

*Доказательство:* Пусть  $a = \mathbb{E}\xi$ .

Тогда  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - a)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - 2a\mathbb{E}\xi + a^2$

2.  $\mathbb{D}\xi \geq 0$  и если  $\mathbb{D}\xi = 0$ , то  $P(\xi = c) = 1$

*Доказательство:* Если  $\mathbb{D}\xi = 0$ , то  $\int_{\Omega} (\xi - a)^2 dP = 0$ , значит  $(\xi - a)^2 = 0$  почти везде.

3.  $\mathbb{D}(\xi + a) = \mathbb{D}\xi$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}(\xi + a) = \mathbb{E}\xi + a$ . А тогда  $(\xi + a) - \mathbb{E}(\xi + a) = \xi - \mathbb{E}\xi$

4.  $\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi$

*Доказательство:*  $\mathbb{D}(c\xi) = \mathbb{E}(c\xi)^2 - (\mathbb{E}(c\xi))^2$

5. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

*Доказательство:*  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}(\xi\eta) + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - (\mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

6. Аналогично предыдущему, но для  $n$  случайных величин.

*Доказательство:* индукция

7.  $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq (\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$  - написали Ляпунова.

**8. Неравенство Чебышёва**

$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}$ , где  $t > 0$

*Доказательство:*  $P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2}{t^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}$  - неравенство Маркова для  $p = 2$ .

**Определение 2.21.** Стандартное отклонение  $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

**Пример.** 1.  $\xi \sim U[0, 1]$ .

Тогда  $\mathbb{E}\xi = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ .

$\mathbb{E}\xi^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ . А тогда  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{1}{12}$

2.  $\xi \sim U[a, b]$ .

Если  $\eta \sim U[0, 1]$  и  $\xi = (b - a)\eta + a \sim U[a, b]$ . Тогда  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}((b - a)\eta + a) = \frac{a+b}{2}$

$\mathbb{D}((b - a)\eta + a) = \mathbb{D}((b - a)\eta) = (b - a)^2\mathbb{D}\eta = \frac{(b-a)^2}{12}$

3.  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ , так как функция нечётная.

Значит  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$

4.  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Если  $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\xi = \sigma\eta + a \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ .

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sigma\eta + a) = \sigma\mathbb{E}\eta + a = a$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(\sigma\eta + a) = \sigma^2\mathbb{D}\eta = \sigma^2$$

**Определение 2.22.** Пусть  $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$  и  $\mathbb{E}\eta^2 < +\infty$ .

Ковариация  $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))$

**Свойства.** 1.  $\text{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$

2.  $\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\eta, \xi)$

3.  $\text{cov}(c\xi, \eta) = c \cdot \text{cov}(\xi, \eta)$

4.  $\text{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \text{cov}(\xi_1, \eta) + \text{cov}(\xi_2, \eta)$

5.  $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

**Доказательство.**  $\mathbb{E}\xi = a, \mathbb{E}\eta = b$

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - a)(\eta - b)) = \mathbb{E}(\xi\eta) - a\mathbb{E}\eta - b\mathbb{E}\xi + ab$$

□

6. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$

7.  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$

8.  $\mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 + \dots + \mathbb{D}\xi_n + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$ .

**Пример.**  $P(\text{успех}) = p$ . Делаем  $n$  подбрасываний.  $\eta$  = количество переходов от орла к решке.

Пусть  $\xi_i = 1$ , если на  $i$  позиции орёл, на  $i + 1$  позиции решка, иначе  $\xi_i = 0$ .

$$\eta = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}. \text{ Тогда } \mathbb{E}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\xi_i = (n-1)pq.$$

$$\mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Если  $i + 1 < j$ , то  $\xi_i$  и  $\xi_j$  независимы, поэтому в сумме почти везде нули.

$$\text{Значит } \mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{cov}(\xi_i, \xi_{i+1}).$$

$$\mathbb{D}\xi_i = \mathbb{E}\xi_i^2 - (\mathbb{E}\xi_i)^2 = pq - p^2q^2.$$

$$\text{cov}(\xi, \xi_{i+1}) = \mathbb{E}(\xi_i\xi_{i+1}) - \mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_{i+1} = -p^2q^2$$

**Замечание.** 1.  $\{\xi : \mathbb{E}\xi^2 < +\infty\}$

$\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}(\xi\eta)$  - скалярное произведение.

$\mathbb{E}\xi$  - ортогональная проекция на константы.

2.  $\langle \xi, \eta \rangle = \text{cov}(\xi, \eta)$  - тоже скалярное произведение.

Норма - это стандартное отклонение.

**Теорема 2.7. Выбор двудольного подграфа**

Есть граф  $G$  с  $n$  вершинами и  $m$  рёбрами. Хотим стереть некоторое количество рёбер (как можно меньше) так, чтобы остался двудольный подграф.

Тогда  $G$  содержит двудольный подграф с  $\geq \frac{m}{2}$  рёбрами.

**Доказательство.**  $A$  - те вершины, на которых выпал орёл,  $B$  - на которых выпала решка.

Будем интересоваться матожиданием количества рёбер в такой ситуации. Пусть  $xy \in E(G)$ , сопоставим ребру следующую случайную величину:

$$\xi_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{если } x, y \text{ из разных долей} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть  $\xi = \sum_{xy \in E} \xi_{xy}$  - число рёбер, которое нужно оставить, при таком разбиении на доли.

$\mathbb{E}\xi = \sum_{xy \in E} \mathbb{E}\xi_{xy} = m \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0) = \frac{m}{2}$ , а значит есть реализация с  $\frac{m}{2}$  рёбрами.  $\square$

**Определение 2.23.** Коэффициент корреляции.  $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}} \in [-1, 1]$

**Определение 2.24.** Если  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , то это некоррелирующие случайные величины.

**Теорема 2.8.**  $v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$  - единичные векторы, тогда существует расстановка знаков  $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ , такие, что  $\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$ .

**Замечание.** Эта оценка не улучшаема, если все вектора попарно ортогональны, тогда длина вектора  $\sqrt{n}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  - независимые случайные величины, такие, что:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\xi = \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\|^2$ . И тогда  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\langle v, v \rangle = \mathbb{E}(\sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle v_i, v_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \mathbb{E}\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle = n$ .

1. Если  $i = j$ , то  $\mathbb{E}\varepsilon_i \varepsilon_j = \mathbb{E}\varepsilon_i^2 = 1$

2. Если  $i \neq j$ , то  $\mathbb{E}\varepsilon_i \varepsilon_j \stackrel{\text{независимость}}{=} \mathbb{E}\varepsilon_i \cdot \mathbb{E}\varepsilon_j = 0$

$\square$

**Теорема 2.9.**  $v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|v_i\| \leq 1, p_i \in [0, 1]$  и  $w = p_1 v_1 + \dots + p_n v_n$

Тогда существует  $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$ , такие, что  $v = \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n$  и  $\|v - w\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  - независимые случайные величины.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p_i \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - p_i \end{cases}$$

Интересуемся  $\xi = \|v - w\|^2$ . Тогда  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sum_{i,j=1}^n (\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j) \langle v_i, v_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \mathbb{E}(\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j) \stackrel{\text{пояснение ниже}}{=} \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle (p_i - p_i^2) \leq \frac{n}{4}$ .

1. Если  $i = j$ , то  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathbb{D}\varepsilon_i = p_i - p_i^2 \leq \frac{1}{4}$

2. Если  $i \neq j$ , то  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \stackrel{\text{независимы}}{=} 0$

$\square$

**Пример.**  $\Omega = \{1, 2 \dots n\}$ , пусть  $\nu(k)$  - число различных простых в разложении  $k$ .

**Теорема 2.10. Харди-Рамануджана**

Если  $w(n) \rightarrow +\infty$ , то  $P(k : |\nu(k) - \ln \ln n| \geq w(n) \sqrt{\ln \ln n}) \rightarrow 0$

**Доказательство.** Пусть  $m = \sqrt[10]{n}$ .  $p \leq m$  - простое и

$$\xi_p = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ делится на } p \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\xi = \sum_{p \leq m} \xi_p$  - количество различных простых  $\leq m$ . Тогда  $\nu(k) - 10 \leq \xi(k) \leq \nu(k)$ . Посчитаем матожидание  $\xi$ .

$$\mathbb{E}\xi_p = \frac{[\frac{n}{p}]}{n} \leq \frac{\frac{n}{p}}{n} = \frac{1}{p}. \text{ С другой стороны, } \mathbb{E}\xi_p \geq \frac{\frac{n}{p}-1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Значит  $\mathbb{E}\xi = \sum_{p \leq m} \mathbb{E}\xi_p \cdot \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \leq \sum_{p \leq m} \mathbb{E}\xi_p \leq \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} = \ln \ln m + \mathcal{O}(1) = \ln \ln n + \mathcal{O}(1)$ .  
Оценка в другую сторону аналогично, потому что  $\frac{m}{n} \leq 1$ .

Теперь считаем дисперсию.

$$\mathbb{D}\xi_p = \mathbb{E}\xi_p^2 - (\mathbb{E}\xi_p)^2 = \mathbb{E}\xi_p - (\mathbb{E}\xi_p)^2 \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n}. \text{ С другой стороны } \mathbb{E}\xi_p^2 - (\mathbb{E}\xi_p)^2 \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p^2}.$$

$$\sum_{p \leq m} \mathbb{D}\xi_p \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n}) = \ln \ln n + \mathcal{O}(1).$$

$\text{cov}(\xi_p, \xi_q) = \mathbb{E}\xi_p \xi_q = \mathbb{E}(\xi_p \xi_q) - \mathbb{E}\xi_p \mathbb{E}\xi_q$ . Здесь  $\frac{1}{pq} - \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}\xi_p \xi_q \leq \frac{1}{pq}$ . Тогда  $\text{cov}(\xi_p, \xi_q) \leq \frac{1}{pq} - (\frac{1}{p} - \frac{1}{n})(\frac{1}{q} - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$ . Также оцениваем в другую сторону.

$$-\frac{m^2}{n} = \mathcal{O}(1) \leq \sum_{p \neq q} \text{cov}(\xi_p, \xi_q) \leq \frac{1}{n}(\sum_{p \neq q} (\frac{1}{p} + \frac{1}{q})) = \frac{2m}{n} \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} = \mathcal{O}(1).$$

$\mathbb{D}\xi = \ln \ln n + \mathcal{O}(1)$ . Теперь применим Чебышёва.

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}. \text{ В качестве } t \text{ подставим } w(n)\sqrt{\ln \ln n}.$$

$$\text{Тогда } P(|\nu - \ln \ln n| \geq w(n)\sqrt{\ln \ln n}) < P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq w(n)\sqrt{\ln \ln n}) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{w^2(n) \ln \ln n} \rightarrow 0.$$

□

**Замечание.**

**Теорема 2.11. Эрдёша-Каца**

$$P(k \in \Omega : a \leq \frac{|\nu(k) - \ln \ln n|}{\sqrt{\ln \ln n}} \leq b) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

## 2.5. Сходимость последовательностей случайных величин

**Теорема 2.12.**  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые случайные величины,  $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$  - измерима, относительно борелевской  $\sigma$ -алгебры.

Тогда  $f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2})$  - независимые случайные величины.

**Доказательство.**  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f(\xi_1 \dots \xi_m)$  и  $g(\eta_1 \dots \eta_n)$  независимые.

Возьмём  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B} \in \mathbb{R}$  борелевские. Надо доказать, что  $P(f(\xi_1 \dots \xi_m) \in \tilde{A}) \cdot P(g(\eta_1 \dots \eta_n) \in \tilde{B}) = P(f(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \tilde{A}, g(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \tilde{B})$ .

$$P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in f^{-1}(\tilde{A}) = A) \cdot P((\eta_1, \dots, \eta_n) \in f^{-1}(\tilde{B}) = B) = P(\dots)$$

Поймём это для ячеек.

$$A = (a, b], \text{ что такое } P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in (a, b]) = P(\xi_1 \in (a_1, b_1], \dots, \xi_m \in (a_m, b_m]) = P(\dots) \cdot \dots \cdot P(\dots).$$

Если  $A_j$  дизъюнкты  $P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in A_j) \cdot P((\eta_1, \dots, \eta_n) \in B) = P(\dots)$ . Просуммируем  $P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in \bigsqcup A_j) \cdot P((\eta_1, \dots, \eta_n) \in B) = P(\dots)$  □

**Определение 2.25.**  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $\xi_n$  сходится к  $\xi$  почти наверное, если  $P(w \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(w) = \xi(w)) = 1$

2.  $\xi_n$  сходится к  $\xi$  в среднем порядка  $r > 0$ , если  $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^r) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$
3.  $\xi_n$  сходится к  $\xi$  по вероятности, если  $\forall \varepsilon > 0, P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$
4.  $\xi_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\xi_n$  сходится к  $\xi$  по распределению, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\xi}(x)$  во всех точках непрерывности  $F_{\xi}$

Связь между ними  $1 \Rightarrow 3, 2 \Rightarrow 3$  (неравенство Маркова). При этом  $3 \not\Rightarrow 1, 2 \not\Rightarrow 1$  **TODO**

$4 \not\Rightarrow 3$ . Да и вообще они на разных вероятностных пространствах, так что постановка вопроса в целом неверная.

$3 \Rightarrow 4$ .  $\{\xi_n > x\} \supset \{\xi > x + \varepsilon\} \cap \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$ . Также верно обратное:  $\{\xi_n \leq x\} \subset \{\xi \leq x + \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}$ .

Тогда  $F_{\xi_n}(x) \leq F_{\xi}(x + \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)$ .  $\lim F_{\xi_n}(x) \leq F_{\xi}(x + \varepsilon) + \lim P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = F_{\xi}(x + \varepsilon)$ .

$\{\xi_n > x\} \subset \{\xi > x - \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}$  - запишем через вероятности.  $1 - F_{\xi_n}(x) \leq 1 - F_{\xi}(x - \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon)$ . То есть  $\lim F_{\xi_n}(x) \geq F_{\xi}(x - \varepsilon) - \lim P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = F_{\xi}(x - \varepsilon)$ .

То есть  $F_{\xi}(x - \varepsilon) \leq \lim F_{\xi_n}(x) \leq \lim F_{\xi_n}(x) \leq F_{\xi}(x + \varepsilon)$  - верно для любого  $n$ . Устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда  $F_{\xi}(x) \leq \lim F_{\xi_n}(x) \leq \lim F_{\xi_n}(x) \leq F_{\xi}(x)$ , но левая и правая штука равны.

### Теорема 2.13. Закон больших чисел

$\xi_1, \xi_2, \dots$  - попарно некоррелируемые случайные величины и  $\mathbb{D}\xi_n = o(n)$ .

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Тогда  $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$ . То есть вероятность того, что  $P(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

**Следствие.** Если  $\mathbb{D}\xi_n$  ограничены, то такой же вывод.

**Доказательство.**  $P(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}S_n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{D}\xi_k}{\varepsilon^2 n^2} \rightarrow_{\text{ШТОЛЬЦ}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D}\xi_n}{\varepsilon^2 (2n-1)} = 0.$   $\square$

### Следствие. ЗБЧ в форме Чебышёва

$\xi_1, \xi_2, \dots$  независимые, одинаково распределённые случайные величины с конечной дисперсией. Пусть  $a = \mathbb{E}\xi_1$

Тогда  $P(|\frac{S_n}{n} - a| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$  или же  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$

**Доказательство.** Мат. ожидание всех случайных величин равно, они одинаково распределены. Поэтому  $\mathbb{E}\frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = a$ . Поэтому все условия предыдущей теоремы выполнены  $\square$

### Следствие. ЗБЧ для схем Бернулли

Есть схема Бернулли с вероятностью успеха  $p$ .

Тогда  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$

### Теорема 2.14. Усиленный ЗБЧ

$\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые случайные величины.  $\mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)^4 \leq C$ .

Тогда  $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$  почти наверное.

**Доказательство.**  $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k))$ . Задвинем все матожидания в ноль.

Тогда по условию  $\mathbb{E}\xi_n^4 \leq C$  и надо доказать, что  $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$  почти наверное.

Пусть  $A_n = \{|\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon\}$ . Нам нужно понять, что бесконечное количество  $A_n$  случаются с нулевой вероятностью.

Из леммы Бореля-Кантелли, если  $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , то нужное нам условие выполнено.

Напишем неравенство Маркова:  $P(A_n) \leq \frac{\mathbb{E}S_n^4}{\varepsilon^4} = \frac{\mathbb{E}S_n^4}{n^4\varepsilon^4}$ . Достаточно доказать, что  $\mathbb{E}S_n^4 = \mathcal{O}(n^2)$ , тогда ряд сойдётся. Раскроем все скобки.

$$\mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n)^4 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^4 + 4 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}\xi_i^3 \xi_j + 6 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j^2 + 12 \sum_{i \neq j \neq k} \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j \xi_k + 24 \sum \dots \mathbb{E}\xi_i \xi_j \xi_k \xi_m$$

$$1. \mathbb{E}\xi_i \xi_j \xi_k \xi_m = 0$$

$$2. \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j \xi_k = 0$$

Итого получаем  $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^4 + 6 \sum \mathbb{E}\xi_i^2 \mathbb{E}\xi_j^2$  (\*). По неравенству Ляпунова  $\mathbb{E}\xi_i^2 \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi_i^4} \leq \sqrt{C}$ .

Значит (\*) =  $nC + 6n(n-1)\sqrt{C}\sqrt{C} \leq 6Cn^2 = \mathcal{O}(n^2)$ , значит ряд сходится и лемма Бореля-Кантелли выполняется.  $\square$

### Следствие. Усиленный ЗБЧ для схем Бернулли

В схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p : \frac{S_n}{n} \rightarrow p$  почти наверное.

**Доказательство.** Нужно проверить, что  $\mathbb{E}(\xi_i - p)^4$  - конечно, раскроем скобки, получим какие-то константы и  $\xi_i^p$ .  $\square$

### Теорема 2.15. Усиленный ЗБС в форме Колмогорова

$\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимо, одинаково распределённые случайные величины.

Тогда  $\frac{S_n}{n} \rightarrow a \in \mathbb{R}$  почти наверное  $\Leftrightarrow a = \mathbb{E}\xi_1$

### Метод Монте-Карло

$\Phi$  - ограниченная фигура на плоскости. Хотим примерно узнать её площадь.

Берём случайную точку в прямоугольнике и выясняем, попала она в фигуру или нет.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{точка попала в } \Phi \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вероятность успеха  $\frac{Area(\Phi)}{Area(\text{прямоугольника})}$ . Тогда усиленный ЗБЧ говорит, что  $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$  почти наверное.

**Теорема 2.16.**  $\xi_1, \xi_2, \dots$  последовательность случайных величин,  $\xi_n \rightarrow_P a \in \mathbb{R}$ .  $f$  ограниченная функция, непрерывная в точке  $a$ .

Тогда  $\mathbb{E}f(\xi_n) \rightarrow f(a)$

**Доказательство.**  $|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| = |\mathbb{E}(f(\xi_n) - f(a))| \leq \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| = \mathbb{E}|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a < \varepsilon\}} + \mathbb{E}|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geq \varepsilon\}} = (*)$ .

Пусть  $f$  ограничена константой  $M$ .

$$\mathbb{E}|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geq \varepsilon\}} \leq 2M\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geq \varepsilon\}}$$

$$|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a < \varepsilon\}} \leq \sup_{|x-a|<\varepsilon} |f(x) - f(a)|$$

$$\text{Тогда } (*) \leq \sup_{|x-a|<\varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2MP(|\xi_n - a| \geq \varepsilon).$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| \leq \sup_{|x-a|<\varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2M\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(|\xi_n - a| \geq \varepsilon) \leq \sup_{|x-a|<\varepsilon} |f(x) - f(a)| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Тогда  $0 \leq \underline{\lim} \leq \overline{\lim} \leq 0 \Rightarrow \lim |\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| = 0$   $\square$



**Замечание.** В условии теоремы  $|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| \leq \sup_{|x-a|<\varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2MP(|\xi_n - a| \geq \varepsilon)$

### Теорема 2.17. Вейерштрасса

$f \in C[a, b]$ , то существует последовательность многочленов  $P_n$ , такая, что  $P_n \Rightarrow f$  на  $[a, b]$

**Доказательство.** Можно считать, что всё на  $[0, 1]$ . Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха  $p$ . Тогда  $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$ . Подставим  $\xi_n = \frac{S_n}{n}$  в замечание.

$$|\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) - f(p)| \leq \sup_{|x-p|<\varepsilon} |f(x) - f(p)| + 2MP(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) = (*)$$

Из неравенства Чебышёва  $P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$ .

И тогда  $(*) \leq \sup_{|x-p|<\varepsilon} |f(x) - f(p)| + \frac{M}{2n\varepsilon^2}$ . При  $n = \frac{1}{\varepsilon^3}$  правое слагаемое оценивается  $\varepsilon'$ , а первое слагаемое мало из равномерной непрерывности.

Значит  $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) - f(p) \Rightarrow 0$ .  $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  - многочлен Бернштейна.  $\square$

**Определение 2.26.** Многочлен Бернштейна  $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

**Следствие.** 1.  $B_n(0) = f(0)$

$$2. B_n(1) = f(1)$$

$$3. B'_n(0) = n(f(\frac{1}{n}) - f(0))$$

$$B'_n(1) = n(f(1) - f(\frac{n-1}{n}))$$

$$\text{Доказательство: } B'_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} (kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}) = \\ = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k-nx)$$

$$4. B'_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k-nx)$$

$$5. B_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha B_n(f, x) + \beta B_n(g, x)$$

### Кривые Безье

$\sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ ,  $a_k \in \mathbb{R}^2$ . Получается отображение  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

1.  $n = 1$  :  $a(1-t) + bt$  - отрезок соединяющий точки  $a$  и  $b$ .

2.  $n = 2$  :  $a(1-t)^2 + 2bt(1-t) + ct^2$ . Мы знаем, что  $B'(0) = 2(b-a)$  и  $B'(1) = 2(c-b)$ . Это кривая из точки  $a$  в  $c$ , параметр  $b$  задаёт касательную в  $a$  и  $c$ .

3.  $n = 3$  :  $a(1-t)^3 + 3bt(1-t)^2 + 3ct^2(1-t) + dt^3$ .

Здесь  $B(0) = a, B(1) = d, B'(0) = 3(b-a), B'(1) = 3(d-c)$ . Кривая выходит из точки  $a$  с касательной  $3(b-a)$ , а заходит в точку  $d$  с касательной  $3(d-c)$ .

## 2.6. Производящие функции

**Определение 2.27.**  $\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$  - случайная величина.

$G_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n) z^n$  - производящая функция

**Свойства.** 1.  $G_\xi$  однозначно определяет распределение

2.  $G_\xi(1) = 1$  и  $G_\xi$  сходится в круге  $|z| < 1$ .

3.  $G_\xi(x) = \mathbb{E}x^\xi$ , где  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Доказательство: } \mathbb{E}x^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot P(\xi = n) = G_\xi(x)$$

4.  $G'_\xi(1) = \mathbb{E}\xi$

*Доказательство:*  $G'_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi = n)nx^{n-1}$  - если подставить единицу - получим матожидание.

5.  $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1)$

*Доказательство:*  $G''_\xi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} P(\xi = n)n(n-1)x^{n-2}$  - если подставить единицу - получим матожидание.

6.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2$

7.  $G_\xi$  возрастает и выпукла на  $[0, 1]$

8. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z)$

*Доказательство:*  $x^\xi$  и  $x^\eta$  независимы, а тогда  $\mathbb{E}(x^\xi \cdot x^\eta) = \mathbb{E}x^\xi \cdot \mathbb{E}x^\eta$

**Пример.** 1. Равномерное распределение на  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Тогда  $G_\xi(z) = \frac{1}{n}(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = \frac{1-z^n}{1-z} \cdot \frac{1}{n}$ . Пусть хотим посчитать матожидание и дисперсию, но единицу то подставить нельзя в свернутую формулу. Решается эта проблема так:

Давайте скажем, что  $z = 1 + y$ . Тогда  $G_\xi(1 + y) = \frac{(1+y)^n - 1}{ny} = 1 + \binom{n}{2}\frac{y}{n} + \binom{n}{3}\frac{y^2}{n} \dots$

Тогда  $G'_\xi(1) = \frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$ ,  $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) = 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6n} + \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2}\left(\frac{2n-4}{3} + 1\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$ .

И тогда  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{6} = \frac{n^2-1}{12}$

## 2. Задача Галилея

Есть 3 правильных кубика, бросили и посчитали сумму значений. Интересуемся вероятностью того, что в сумме выпало 10.

$P(\text{в сумме } 10) = ?$

$\xi_i$  - значение на  $i$ -том кубике. Тогда  $G_{\xi_i}(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + \dots + z^6) = \frac{z(1-z^6)}{1-z} \cdot \frac{1}{6}$ . Кубика у нас три, поэтому нас интересует  $G_{\xi_1+\xi_2+\xi_3} = G_{\xi_1} \cdot G_{\xi_2} \cdot G_{\xi_3} = \left(\frac{z(1-z^6)}{1-z} \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = (*)$

$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} z^n$ . Тогда  $(*) = \frac{1}{6^3}(z^3 - 3z^9 + 3z^{15} - z^{21}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} z^n$ . Коэффициент при  $z^{10}$  будет такой  $\frac{1}{6^3}(1 \cdot \binom{9}{7} - 3 \cdot \binom{3}{1}) = \frac{1}{6^3}(36 - 3^2) = \frac{1}{8}$

### 3. Метод характеристических функций

### 3.1. Характеристические функции случайных величин

**Определение 3.1.** Комплекснозначная случайная величина  $\xi = \operatorname{Re} \xi + i \operatorname{Im} \xi$ , где  $\operatorname{Re} \xi$  и  $\operatorname{Im} \xi$  вещественнозначные случайные величины.

**Определение 3.2.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathbb{E} \xi = \mathbb{E} \operatorname{Re} \xi + i \mathbb{E} \operatorname{Im} \xi$$

**Свойства.** 1.  $\mathbb{E}(i\xi) = i\mathbb{E}\xi$

2. Комплексная линейность  $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}(\alpha\xi) = \mathbb{E}(a + ib)\xi = \mathbb{E}(a\xi) + \mathbb{E}(b\xi i) = (a + bi)\mathbb{E}\xi$

3.  $\overline{\mathbb{E}\xi} = \mathbb{E}\bar{\xi}$

4.  $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$

*Доказательство:* Возьмём  $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$ , такой, что  $\mathbb{E}(c\xi) = |\mathbb{E}\xi|$ , то есть  $c = \frac{\overline{\mathbb{E}\xi}}{|\mathbb{E}\xi|}$

Тогда  $|\mathbb{E}\xi| = \mathbb{E}(c\xi) = \mathbb{E}(\operatorname{Re}(c\xi)) \leq \mathbb{E}|\operatorname{Re}(c\xi)| \leq \mathbb{E}|c\xi| = \mathbb{E}|\xi|$

**Определение 3.3.** Ковариация  $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$

**Определение 3.4.** Дисперсия  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2$

$$\operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$$

**Определение 3.5.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Назовём характеристической функцией  $\xi$ :

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}, \text{ где } t \in \mathbb{R}$$

**Свойства.** 1.  $\phi_\xi(0) = 1$  и  $|\phi_\xi(t)| \leq 1$

*Доказательство:*  $|\phi_\xi(t)| \leq |\mathbb{E}e^{it\xi}| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}| = 1$

2.  $\phi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt}\phi_\xi(at)$

*Доказательство:*  $\phi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{i(a\xi+b)t} = \mathbb{E}e^{ibt}e^{i\xi at} = e^{ibt}\mathbb{E}e^{i\xi(at)} = \phi_\xi(at)e^{ibt}$

3. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\phi_{\xi+\eta}(t) = \phi_\xi(t) \cdot \phi_\eta(t)$

*Доказательство:*  $e^{i\xi t}$  и  $e^{i\eta t}$  независимы и пишем произведение матожиданий

4.  $\overline{\phi_\xi(t)} = \phi_\xi(-t)$

*Доказательство:*  $\overline{\phi_\xi(t)} = \overline{\mathbb{E}e^{i\xi t}} = \mathbb{E}\overline{e^{i\xi t}} = \mathbb{E}e^{-i\xi t} = \phi_\xi(-t)$

5.  $\phi_\xi$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$

*Доказательство:* TODO

**Пример.**  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ . Хотим посчитать характеристическую функцию.

Возьмём  $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Тогда  $\xi = \sigma\eta + a$  - имеет нужное нам распределение.

$$\phi_{\sigma\eta+a}(t) = e^{ita}\phi_\eta(\sigma t)$$

$$\text{Считаем для } \eta: \phi_\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = (*) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = \int_{\operatorname{Im}=-it} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$\int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0, \text{ потому что нет особых точек.}$$

С другой стороны:  $\int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{-R-it}^{R-it} + \int_{R-it}^R + \int_R^{-R} + \int_{-R}^{-R-it} \rightarrow I - \sqrt{2\pi}$ . Значит  $I = \sqrt{2\pi}$  (тут было потеряно несколько переходов)

Тогда  $(*) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}$

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathbb{E}|\xi|^n < +\infty$ .

Тогда при  $k \leq n$  верно, что  $\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}((i\xi)^k e^{i\xi t})$ . В частности,  $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$

**Следствие.** Если  $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$ , то  $\mathbb{E}\xi = -i\varphi'(0)$  и  $\mathbb{D}\xi = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2$

**Доказательство.** Индукция по  $k$

База  $k = 0$  - определение  $\varphi$ .

Переход  $k \rightarrow k+1$ .  $\varphi^{(k+1)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(k)}(t+h) - \varphi^{(k)}(t)}{h} =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(i\xi)^k e^{i\xi(t+h)} - \mathbb{E}(i\xi)^k e^{i\xi t}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}((i\xi)^k e^{i\xi t} \cdot \frac{e^{i\xi h} - 1}{h}) = \mathbb{E}((i\xi)^k e^{i\xi t} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{i\xi h} - 1}{h})$ , а предел - это  $i\xi$ .

Почему можно было записать предел по матожиданию?

$\lim \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h} = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} ((ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h})$  - нужна суммируемая мажоранта.

$$\left| (ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = |x|^k \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = (*).$$

$$1. \text{ Если } |xh| \geq 1, \text{ то } \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| \leq \frac{2}{|h|} \leq 2|x|$$

$$2. \text{ Если } |xh| < 1, \text{ то } e^{ihx} = 1 + \mathcal{O}(1 + ihx) \Rightarrow \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = \left| \frac{\mathcal{O}(hx)}{h} \right| = \mathcal{O}(x). \text{ То есть } (*) = \mathcal{O}(|x|^{k+1}), \text{ а ещё есть конечный момент, значит всё выполняется.}$$

□

**Теорема 3.2.** Если существует  $\varphi''_{\xi}(0)$ , то  $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$

**Замечание.** Если существует  $\varphi_{\xi}^{(2n)}$ , то  $\mathbb{E}\xi^{2n} < +\infty$

**Доказательство.**  $\mathbb{E}\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 dP_{\xi}(x) = (*)$  - хотим доказать, что этот интеграл конечен.

Заметим, что  $x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(tx)}{t}$  и подставим вместо  $x$ . Тогда:

$(*) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dP_{\xi}(x) \leq \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} -\frac{e^{2itx} + e^{-2itx} - 2}{4t^2} dP_{\xi}(x) = (*)$  - лемма Фату и расписали синус.

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} -\frac{\varphi_{\xi}(2t) - \varphi_{\xi}(-2t) - 2}{4t^2} = (*). \text{ Причём } \varphi_{\xi}(u) = 1 + \varphi'_{\xi}(0) \cdot u + \frac{\varphi''_{\xi}(0)u^2}{2} + o(u^2).$$

$$\text{Тогда } \varphi_{\xi}(2t) + \varphi_{\xi}(-2t) = 2 + \frac{\varphi''_{\xi}(0)(2t)^2}{2} + o(t^2), \text{ а тогда } (*) = \lim_{t \rightarrow 0} (-\varphi''_{\xi}(0) + o(1))$$

□

**Теорема 3.3. Формула обращения**

Пусть  $a < b$  и  $P_{\xi}(\{a\}) = P_{\xi}(\{b\}) = 0$

Тогда  $P(\xi \in [a, b]) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi}(t) dt$

То есть  $v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi}(t) dt$

**Доказательство.**  $\xi = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\eta$ , тогда  $P(\xi \in [a, b]) \Leftrightarrow P(\eta \in [-1, 1])$ , в частности  $P_{\eta}(\{\pm 1\}) = 0$

$\varphi_{\xi}(t) = e^{i\frac{a+b}{2}t} \varphi_{\eta}(\frac{b-a}{2}t)$  - подставим в наш интеграл.

$$\int_{-T}^T \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi}(t) dt = \int_{-T}^T \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} e^{i\frac{a+b}{2}t} \varphi_{\eta}(\frac{b-a}{2}t) dt =$$

$$= \int_{-T}^T \frac{e^{-i\frac{a-b}{2}t} - e^{-i\frac{b-a}{2}t}}{it} \varphi_{\eta}(\frac{b-a}{2}t) dt = \int_{-\frac{b-a}{2}T}^{\frac{b-a}{2}T} \frac{e^{is} - e^{-is}}{is} \varphi_{\eta}(s) ds, \text{ здесь замена } s = \frac{b-a}{2}t$$

Можно считать, что  $a = -1$ , а  $b = 1$

$\int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \varphi_\xi(t) dt = \int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} e^{itx} dP_\xi(x) dt = (*)$  - давайте переставим местами интегралы. Нужна суммируемость того, что под интегралом, а она есть, всё ограничено какой-то суммируемой константой.

$$(*) = \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} e^{itx} dt dP_\xi(x). \text{ Пусть } \Phi_T(x) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} e^{itx} dt$$

$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \varphi_\xi(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi_T(x) dP_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_T(x) dP_\xi(x)$  - хотим понять, почему можно внести предел под интеграл, но разберемся с этим позже.

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_T(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T \int_{-1}^1 e^{iut} du e^{itx} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \int_{-T}^T e^{it(u+x)} dt du = (*).$$

$$\text{Заметим, что } \frac{e^{it(u+x)}}{i(u+x)} \Big|_{t=-T}^{t=+T} = \frac{2 \sin((u+x)T)}{u+x}$$

$$\text{Тогда } (*) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{2 \sin((u+x)T)}{u+x} du = (*). \text{ Сделаем замену } y = (u+x)T, \text{ тогда } dy = T \cdot du.$$

$$\text{Тогда } (*) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{(-1+x)T}^{(1+x)T} \frac{2 \sin y}{y} dy = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 1 \\ 0, & \text{при } x < -1 \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin y}{y} dy = 2\pi, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\text{Получили } 2\pi \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) dP_\xi(x) = 2\pi P_\xi([-1,1]).$$

Вспомним, что мы не доказали по дороге один переход. Нужно понять, почему  $\int_a^b \frac{\sin y}{y} dy$  ограничен - интеграл по лучу сходится, значит первообразная в бесконечностях имеет предел, значит в середине тоже ограничена, потому что непрерывность - обоснование примерно такое.

□

**Следствие.** 1. Если  $\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t)$ , то  $P_\xi = P_\eta$

*Доказательство:* Рассмотрим  $A = \{a \in \mathbb{R} : a - \text{точка непрерывности функции распределения}\}$ .

Тогда  $\mathbb{R} \setminus A$  - не более чем счётное. Если  $a < b$  и  $a, b \in A$ , то  $P_\xi([a, b]) = P_\eta([a, b])$

Пусть  $a \in \mathbb{R}, b \in A$ . Рассмотрим  $a_n \in A$ , такие, что  $a_n \rightarrow a$  и убывают.

$$P_\xi((a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\xi([a_n, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\eta([a_n, b]) = P_\eta((a, b]).$$

Пусть  $a < b$  произвольные. Возьмём  $b_n \in A$ , такие, что  $b_n \rightarrow b$  и убывают. Тогда  $P_\xi((a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\xi(a, b_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\eta(a, b_n] = P_\eta(a, b] \Rightarrow P_\xi = P_\eta$  на ячейках, а тогда по единственности продолжения везде совпадают.

2. Если  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\xi(t)| dt < +\infty$ , то  $\xi$  имеет плотность распределения  $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt$  - преобразование Фурье.

$$\text{Доказательство: Из суммируемости } \varphi_\xi(t) \Rightarrow P_\xi((a, b]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_\xi(t) dt.$$

$$\text{Проверим, что } P_\xi(a, b] = \int_a^b p_\xi(x) dx.$$

$$\int_a^b p_\xi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt dx = (*). \text{ Под внутренним интегралом суммируемая функция, значит можно переставлять местами интегралы.}$$

$$\text{Тогда } (*) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_a^b e^{-itx} dx \varphi_\xi(t) dt$$

**Теорема 3.4.**  $\xi_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2)$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$  не все нулевые и  $\xi_k$  - независимы.

$$\text{Тогда } \xi = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k \xi_k \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), \text{ где } a = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k a_k \text{ и } \sigma^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2$$

**Доказательство.**  $\varphi_\xi(t) = \varphi_{a_0}(t) \varphi_{c_1 \xi_1}(t) \dots \varphi_{c_n \xi_n}(t) = e^{ita_0}(t) \varphi_{\xi_1}(c_1 t) \dots \varphi_{\xi_n}(c_n t) = e^{ita_0} e^{ia_1 c_1 t} e^{-\frac{(c_1 \sigma_1 t)^2}{2}} \dots e^{ita} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

□