Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

1 апреля 2023 г.

Содержание

1. Элементарная теория вероятностей

1.1. Основные понятия

***Определение* 1.1.** $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

***Определение* 1.2.** Событие $A \subset \Omega$

$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

Свойства. вероятности

1. $P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1,\ P(A) \in [0, 1]$
2. Если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B\setminus(A\cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, где $\overline{A} = \Omega \setminus A$
5. $P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i\neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j,\ i\neq k,\ j\neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_m)$ – формула включений-исключений.

   Доказательство. Индукция по m.

   База $m = 2$.

   Переход $m \to m + 1$:

   $B_j = A_j \cup A_{m+1}$

   $P(\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1}) =$

   $= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - \sum_{i\neq j}^{m} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k}^{m} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1\cup B_2 \cdots \cup B_m)}$, где $B_i := A_i \cap A_{m+1}$. □

6. $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$

   $P(A_1 \cup \dots \cup A_m) \le \sum_{j=1}^{m} P(A_j)$

***Определение* 1.3. Условная вероятность.**

$B \neq \varnothing,\ P(B) > 0.$

Знаем, что выполнилось событие B, хотим узнать вероятность наступления A.

$P(A|B) = \frac{\#(A\cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A\cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Свойства. 1. $P(A|A) = 1$, если $B \subset A$, то $P(A|B) = 1$

2. Если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

   В частности: $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$

Замечание. $P(A|B) + P(A|\overline{B})$ не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик, B – выпало четное число, A – выпало кратное трем.

$P(A|B) = \frac{1}{3},\ P(A|\overline{B}) = \frac{1}{3}$

Теорема 1.1. Формула полной вероятности.

Пусть $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j,\ P(B_j) > 0$.

Тогда $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

Доказательство. $\sum_{j=1}^m \underbrace{P(A|B_j)}_{=\frac{P(A\cap B_j)}{P(B_j)}} \cdot P(B_j) = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = P(A)$ □

Пример. Пусть есть 2 урны с шариками:

I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II, $P(\text{вынули белый}) =?$

A – вынули из II белый шар.

$B_0,\ B_1,\ B_2$, где B_j – переложили j белых шаров из I в II.

Тогда $P(A|B_0) = \frac{5}{12},\ P(A|B_1) = \frac{1}{2},\ P(A|B_2) = \frac{7}{12}$.

$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$

$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$

$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$

Подставляем в формулу:

$P(A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{28} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{28} = \frac{23}{48}$

Теорема 1.2. Формула Байеса.

Пусть $P(A) > 0,\ P(B) > 0$, тогда $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

Доказательство. Расписываем $P(A|B)$, получаем в правой части: $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$. □

Теорема 1.3. Байеса.

Пусть $P(A) > 0,\ P(B_j) > 0,\ \Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$, тогда

$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_m)P(B_m)}$

Пример. Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая $P(\text{орла}) = \frac{1}{3},\ P(\text{решка}) = \frac{2}{3}$). Взялу наугад монету, побросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

A – выпал орел, B – монета симметричная ($\overline{B}$ – монета кривая).

$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$

***Определение* 1.4. Независимые события**.

Рассуждения: A не зависит от B, если $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Def: $A,\ B$ независимые события, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

***Определение* 1.5.** События $A_1, A_2, \dots, A_m$ – независимы в совокупности, если

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ – для любых индексов i_j.

Замечание. Независимость в совокупности $\implies$ попарная независимость.

Наоборот неверно.

Пример. Есть два игральных кубика.

A – на первом кубике выпало четное число.

B – на втором выпало четное число.

C – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары (i, j), где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 36$.

$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{2}$.

$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$, остальные равенства тоже выполняются $\implies$ попарная независимость.

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \implies$ нет независимости в совокупности.

Упражнение. Д-ть, что $A_1, \dots A_m$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$, где $B_j = A_j$ или $\overline{A_j}$ (все 2^m равенств).

Замечание. Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть $p_1, \dots p_n :\ \sum_{i=1}^n p_i = 1,\ \forall i :\ p_i \geq 0$.

$P(A) = \sum_{j:\ \omega_j \in A} p_j$.

Теорема 1.4. Схема Бернулли.

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$P(\text{орел}) = p,\ 0 \leq p \leq 1$

$P(\text{решка}) = 1 - p$

Бросаем монету n раз, получаем последовательность исходов:

$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} :\ x_j = 0$ или 1.

$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ P(\{\omega\}) = p^{\#i:\ x_i=1} \cdot q^{\#i:\ x_i=0} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n-\sum x_i}$

Хотим узнать:

$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$P(i\text{-ое подбрасывание }) = P(\text{орел}) = p$ – независимые в совокупности по $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 1.5. Полиномиальная схема.

$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1$.

$P(x_i = k) = p_k$, где $x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$

$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\},\ \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$P(\{\omega\}) = p_1^{\#\{i: x_i = 1\}} \cdot \dots \cdot p_m^{\#\{i: x_i = m\}}$

$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

$$P(k_1 \text{ раз выпало } 1,\, k_2 \text{ раз выпало } 2,\, ...) = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}}_{=\frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

Теорема 1.6. Эрдёша-Мозера

Рассмотрим турнир на n команд. При каком наибольшем k можно всегда выбрать команды $A_1, A_2 \ldots A_k$, так, что A_i выиграла у A_j, если $i < j$? При $k \leqslant 1 + [2\log_2 n]$

Доказательство. Предположим, что $k \geqslant 2 + [2\log_2 n] > 1 + 2\log_2 n$. Хотим показать, что при таких k точно найдётся турнир, в котором нельзя выбрать k команд.

Рассмотрим случайный турнир(Всего встреч $\binom{n}{2}$, тогда $2^{\binom{n}{2}}$ разных турниров. Случайный - берём из этой кучи наугад).

$P(\text{А выиграла у В}) = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим $A_1, A_2, \ldots A_k$ команды.

1. $P(A_1, A_2 \ldots A_k \text{ подходят}) = (\frac{1}{2})^{\binom{k}{2}}$.
2. $P(A_1, A_2 \ldots A_k \text{ можно переименовать, так, что они подошли}) \leqslant \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$
3. $P(\text{какие-то } k \text{ команд подошли}) \leqslant \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$

Нужно понять, что если $k \geqslant 2 + [2\log_2 n]$, то $\binom{n}{k}\frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$.

Действительно, $\binom{n}{k}\frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{(2^{\frac{k-1}{2}})^k} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k$

Мы знаем, что $k > 1 + 2\log_2 n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2} > \log_2 n \implies 2^{\frac{k-1}{2}} > n$. И тогда $\left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k < 1$. Это значит, что вероятность, что никакие команды не подходят - положительная, значит есть турнир, в котором k команд выбрать нельзя. $\square$

1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли

***Определение* 1.6.** Схема Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$. S_n - число успехов при n испытаниях. $P(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

Что будет больше $P(S_{1000} = 220)$ при $p = \frac{1}{5}$ или $P(S_{2000}) = 360$ при $p = \frac{1}{6}$. Точные вычисления дают 0.008984 и 0.006625 соответственно.

Теорема 1.7. Пуассона

Схема Бернулли с n испытаниями и вероятностью успеха p_n - зависит от n. Если $np_n \to \lambda > 0$. Тогда $P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

Замечание. Если $np_n = \lambda$, то теорема верна при $k = o(\sqrt{n})$

Доказательство. $P(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!}(1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!}(1-p)^{n-k}$.

Осталось показать, что $(1-p)^{n-k} \sim e^{-\lambda}$. Прологарифмируем: $\ln(1-p)^{n-k} =$
$= (n-k)\ln(1-p) \sim -np \sim -\lambda$

Доказательство замечания:

Нам нужно показать, что $n(n-1)\dots(n-k+1) \sim n^k$, все остальные переходы будут верны. $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot (1-\frac{1}{n}) \cdot \dots \cdot (1-\frac{k-1}{n}) \underbrace{\geqslant}_{(*)} 1 - \frac{1}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \to 1$

$(*)$ Неравенство $(1-x_1)\dots(1-x_k) \geqslant 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k$ при $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ - индукция. □

Теорема 1.8. Прохорова

Если $\lambda = np$, то $\sum_{k=0}^{+\infty} |P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}| \leqslant \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda)$

Пример. Игра в рулетку: 36 чисел и ноль.

$p = \frac{1}{37}, n = 111, np = 3 = \lambda$.

$P(S_{111} = 3) = \binom{111}{3}(\frac{1}{37})^3(1-\frac{1}{37})^{111-3} = 0.227127$

Из Пуассона $\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 0.224$

Видим, что приближение хорошее.

P(ставка удачная хотя бы 4 раза) $= 1 - P(S_{111} = 0) - P(S_{111} = 1) - P(S_{111} = 2) - P(S_{111} = 3) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 0.352754$

А по формулам 0.352768

Теорема 1.9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Схема Бернулии с вероятностью успеха $p \in (0,1)$, $q = 1 - p$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, где k зависит от n, и n меняется. $|x| \leqslant T$ – при $n \to +\infty$ и любых k. Тогда:

$P(S_n = k) \sim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

Доказательство.

1. $k = np + x\sqrt{npq} \geqslant np - T\sqrt{npq} \to +\infty$
2. $n - k = nq - x\sqrt{npq} \geqslant nq - T\sqrt{npq} \to +\infty$

$P(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$

Напишем формулу Стирлинга ($n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$):
$\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k} \cdot (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi(n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{(\frac{k}{n})^k \cdot (\frac{n-k}{n})^{n-k} \cdot \sqrt{2\pi \frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})n}}$.

Заметим, что $\frac{k}{n} = p + \frac{x\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \to p$
и $\frac{n-k}{n} \to q$

Поэтому остаётся доказать, что $\frac{(\frac{k}{n})^k \cdot (\frac{n-k}{n})^{n-k}}{p^k q^{n-k}} \to e^{\frac{x^2}{2}}$. Прологарифмируем:

Получим: $k \ln\frac{k}{n} + (n-k)\ln\frac{n-k}{n} - k\ln p - (n-k)\ln q \to \frac{x^2}{2}$

Введём обозначения: $\alpha = \frac{k}{n} \to p, \beta = \frac{n-k}{n} \to q$. Тогда $k = n\alpha, n - k = n\beta$ и всё перепишется в виде:

$$n\alpha\ln\alpha + n\beta\ln\beta - n\alpha\ln p - n\beta\ln q = \underbrace{n\alpha\ln\frac{\alpha}{p} + n\beta\ln\frac{\beta}{q}}_{(*)} \to \frac{x^2}{2}$$

Мы знаем, что $\frac{\alpha}{p} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}$ и $\frac{\beta}{q} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}$ - из первых двух тождеств в доказательстве.

Напишем Тейлора:

$ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$\ln\frac{\alpha}{p} = \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2\frac{q}{np} + o(\frac{1}{n})$

$\ln\frac{\beta}{q} = \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}x^2\frac{p}{nq} + o(\frac{1}{n})$

Тогда $(*) = x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2q - \frac{1}{2}x^2q + o(\frac{1}{n}) - x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2p - \frac{1}{2}x^2p + o(\frac{1}{n}) = x^2(\frac{q}{2} + \frac{p}{2}) + o(1) = \frac{x^2}{2} + o(1)$ □

Замечание. Если $\varphi(n) = o(n^{\frac{2}{3}})$ и $|k - np| \leqslant \varphi(n)$, то теорема тоже верна

Пример. Всё та же рулетка. $n = 222, k = 111$. Пытаемся ставить на четное/нечётное(кроме 0). $p = \frac{18}{37}$

$P(S_{222} = 111) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{\frac{-x^2}{2}} \approx 0.049395\dots$

Если считать точно, то получим $0.0493228\dots$

Теорема 1.10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$0 < p < 1$. $P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b) \to_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

Стремление равномерно по $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.11. Берри-Эссеена

Обозначение: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|P(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x) - \Phi(x)\right| \leqslant \frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{2}$

Замечание. Константа лучше, чем $\frac{c}{\sqrt{n}}$ не бывает.

Замечание. $P(a < S_n \leqslant b) = P(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{npq}}) \to \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$

Отсюда получили, что лучше всего писать полуцелые a и b.

Замечание. Если p или q очень маленькие, то произведение np маленькое и оценка будет плохой. В таких случаях хорошо использовать Пуассона. Муавра-Лаплас же хорош, когда np большое.

Пример. $p = q = \frac{1}{2}$. Вопрос: $P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Но $P(S_{2n} < n) = P(S_{2n} > n)$.

Тогда $P(S_{2n} \leqslant n) = \frac{1 + P(S_{2n}=n)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Муавра-Лаплас нам говорит, что $P(S_{2n} \leqslant n) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}$

Но $P(S_{2n} \leqslant n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Пример. Задача о театре

Есть театр и 2 входа. У каждого входа расположен гардероб. В театре $n = 1600$ мест. Хотим сделать размер гардероба как можно меньше, но чтобы переполнения случались как можно реже (не чаще, чем раз в месяц).

Пусть c мест в итоге в гардеробе.

За успех считаем ситуацию, когда человек вошел в театр и пошел в ближайший к нему гардероб (т.е. в ближайшем гардеробе было место, и человек не пошел в дальний гардероб). Пусть S_n – кол-во успешных испытаний.

Так как в каждый гардероб мы допускаем c мест, то кол-во успехов $S_n \leq c$.

$p = q = \frac{1}{2}$. Нужно, чтобы $n - c \leqslant S_n \leqslant c$. И $P(n - c \leqslant S_n \leqslant c) > \frac{29}{30}$ – т.е. хотя бы в 29 днях из 30 ближайший к каждому входу гардероб не переполняется.

$P(n-c \leqslant S_n \leqslant c) = P\left(\frac{n-c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{4}}} \leqslant \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{4}}} \leqslant \frac{c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n\cdot\frac{1}{4}}}\right) =$

$P\left(\frac{800-c}{20} \leqslant \frac{S_n - 800}{20} \leqslant \frac{c-800}{20}\right) \to \Phi(\frac{800-c}{20}) - \Phi(\frac{c-800}{20}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{800-c}{20}}^{\frac{c-800}{20}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 2 \cdot \Phi_0(\frac{c-800}{20}) > \frac{29}{30}$

$\Phi_0(\frac{c-800}{20}) > \frac{29}{60} \implies c = 843.$

Пример. Случайное блуждание на прямой

Есть прямая, будем считать, что у нас блуждания исключительно по целым точкам.

В каждой точке подбрасываем монетку. С вероятностью p идём вперёд, q - идём назад.

$a_{n+1} = a_n + 1$ с вероятностью p

$a_{n+1} = a_n - 1$ с вероятностью q

$a_n \equiv n \mod 2$

Если представить, что шаг влево – это 0, а шаг в право – это 1, то сдвиг из точки a_n будет определяться как $2 \cdot x - 1$, где $x = 0,\ 1$ в зависимости от того, в какую сторону идем (т.е. $a_{n+1} = a_n + (2 \cdot x - 1)$).

Тогда пусть S_n – кол-во единичек, тогда $a_n = 2 \cdot S_n - n$.

Пусть мы всегда стартуем с $a_0 = 0$, тогда определим, чему равна вероятность попасть за n шагов в точку k ($a_n = k$):

$P(a_n = k) = P(S_n = \frac{n+k}{2}) = \begin{cases} 0, \text{ если } n \not\equiv k \mod 2 \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, \text{ иначе} \end{cases}$

Теорема 1.12. ван дер Вардена

Рассмотрим числа $1, 2 \ldots k$ и покрасим их в 2 цвета.

Тогда существует k_n, такое, что, если $k > k_n$, то при любой раскраске найдётся одноцветная n-членная арифметическая прогрессия.

Теорема 1.13. Эрдеша-Радо

$k_{n+1} \geqslant \sqrt{n \cdot 2^{n+1}}$

Доказательство. $A_1, A_2 \ldots A_m$ - все арифметические прогрессии длины $n+1$ из чисел $1, 2 \ldots k$.

С разностью $1 : k - n$ прогрессий.

С разностью $2 : k - 2n$ прогрессий.

$\ldots$

С разностью $[\frac{k}{n}] : k - [\frac{k}{n}] \cdot n$ прогрессий

Тогда $m = (k-n) + (k-2n) + \ldots + k - [\frac{k}{n}] \cdot n = k \cdot [\frac{k}{n}] - n \cdot \frac{[\frac{k}{n}] \cdot ([\frac{k}{n}]+1)}{2} = [\frac{k}{n}](k - \frac{1}{2}n([\frac{k}{n}]+1)) < \frac{k}{n}(k - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{k}{n}) = \frac{k^2}{2n}$ - это оценка сверху.

$P(A_i$ - одноцветная$) = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$ (2 - выбор цвета).

$P($какое-то A_i - одноцветно$) = \sum_{i=1}^m P(A_i$ - одноцветно$) = \frac{m}{2^n} < \frac{k^2}{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = (\frac{k}{\sqrt{2^{n+1} \cdot n}})^2 \leqslant 1$ (если так, то найдётся, на которой не выполнится) $\square$

2. Общая теория вероятностей

2.1. Колмогоровская модель теории вероятности

***Определение* 2.1.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство.

Ω - множество или пространство элементарных исходов.

$\mathcal{F}$ - σ-алгебра подмножеств Ω. Элементы $\mathcal{F}$ - случайный события.

P - мера на $\mathcal{F}$ с условием $P(\Omega) = 1$.

Замечание. Если Ω не более чем счётно, то можно взять $\mathcal{F} = 2^\Omega$

***Определение* 2.2.** Условная вероятность. A - событие, такое, что $P(A) > 0$. Тогда $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$, где $A, B \in \mathcal{F}$.

***Определение* 2.3.** Независимые события A и B. Если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

***Определение* 2.4.** Независимость в совокупности $A_1, A_2 \dots A_n$. $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ для всевозможных наборов индексов.

***Определение* 2.5.** Последовательность событий $A_1, A_2 \dots$ независимы - любой конечный набор событий независим в совокупности.

Лемма. Бореля-Кантелли

$A_1, A_2, \dots$ случайные события.

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, то вероятность, что случилось бесконечное число из них равна 0.
2. Если $A_1, A_2, \dots$ независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, тогда
   $P(\text{случилось бесконечное число из } A_n) = 1$.

Доказательство. $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ - это переформулировка события из условия в терминах множеств.

$\omega \in B \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \ \forall n \iff w \in A_k$ для бесконечного количества индексов k.

Док-во этого факта:

1. $\Leftarrow$: Лежит в каждом объединении, значит лежит в B.
2. $\Rightarrow$: ω лежит в пересечении. Пусть лежит в конечном - возьмём самый большой номер и получим противоречие.

Док-во теоремы:

1. Хотим доказать, что $P(B) = 0$
   $B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow P(B) \leqslant P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$ - это хвост сходящегося ряда, а он стремится к нулю.
2. Давайте смотреть на $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$ - независимые события.
   $P(\bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k) \overbrace{=}^{\text{независимость}} \prod_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) \to_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - P(A_k))$
   А ещё $P(\bigcap_{k=1}^{n} \bar{A}_k) \to P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k)$, так как множества вложены в друг друга и есть монотонность меры.

Значит $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = \prod_{k=n}^{\infty}(1 - P(A_k)) \overset{\text{логарифмируем}}{\iff} \ln P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) =$
$= \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \overset{\ln(1-t)\leqslant -t}{\leqslant} \sum_{k=n}^{\infty}(-P(A_k)) = -\infty$ - хвост расходящегося ряда.

А значит мы логарифмировали $0 \Rightarrow P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bar{B}) = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} P(B) = 1$

$(*)\,\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = B$

□

Теорема 2.1. Закон нуля и единицы

Если $A_1, A_2 \ldots$ независимы, то $P(B) = 0$ или $P(B) = 1$. При $B = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Пример. Испытания Бернулли, успех с вероятностью p,

P(ОРО встречается бесконечное число раз) = ?.

A_n = случилось ОРО на позициях $n, n+1, n+2$.

Тогда $A_1, A_4, A_7, \ldots$ независимы. $P(A_j) = pqp = p^2q > 0$.

Лемма Бореля-Кантелли говорит: бесконечное кол-во A_{3k+1} случится, если $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{3k+1}) = +\infty \implies P$(ОРО встречается бесконечное число раз) = 1.

2.2. Случайные величины

***Определение* 2.6.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вероятностное пространство.

$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ - случайная величина, если это измеримая функция.

***Определение* 2.7.** Распределение случайное величины

P_ξ - вероятностная мера на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$

A – борелевское мн-во, $P_\xi(A) = P(\omega \in \Omega \ : \ \xi(\omega) \in A)$

***Определение* 2.8.** Случаный величины ξ и η одинаково распределены, если $P_\xi = P_\eta$

Замечание. P_ξ однозначно определяются своими значениями на ячейках.

$P_\xi(a, b] = P_\xi(-\infty, b] - P_\xi(-\infty, a] = P(\xi \leqslant b) - P(\xi \leqslant a)$

***Определение* 2.9.** Функция распределения случайной величины

$F_\xi(x) = P(\xi \leqslant x)$

Свойства. 1. Функция распределения однозначно определяет распределение случайной величины.

Доказательство. Функция распределения однозначно задаёт значения на ячейках □

2. $0 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 1 \, \forall x \in \mathbb{R}$

3. $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$

   $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$

Доказательство. берём $x_n \to -\infty, A_n = \{\xi \leqslant x_n\}$ Тогда $A_{n+1} \subset A_n$. Тогда $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\varnothing) = 0$ □

4. F_ξ монотонно возрастает

5. Непрерывность справа: $\lim_{y \to x+} F_\xi(y) = F_\xi(x)$

   Доказательство. берём y_n убывающие и $y_n \to x$. Тогда $A_n = \{\xi \leqslant y_n\}$. $A_{n+1} \subset A_n$. А тогда $\lim P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\xi \leqslant x) = F_\xi(x)$. Но с другой стороны $\lim P(A_n) = \lim P(\xi \leqslant y_n) = \lim F_\xi(y_n)$ □

6. $\lim_{y \to x-} F_\xi(y) = P(\xi < x)$

   Доказательство. берём y_n возрастающие и $y_n \to x$. $B_n = \{\xi \leqslant y_n\}$ и $B_n \subset B_{n+1}$. $\lim P(B_n) = P(\bigcup B_n) = P(\xi < x)$. Но с другой стороны $\lim P(B_n) = \lim F_\xi(y_n)$ □

7. $F_{\xi+a}(x) = F_\xi(x - a)$

   Доказательство. $\{\xi + a \leqslant x\} = \{\xi \leqslant x - a\}$ □

8. $F_{c\xi} = F_\xi(\frac{x}{c})$

   Доказательство. $\{c\xi \leqslant x\} = \{\xi \leqslant \frac{x}{c}\}$ □

Замечание. Фукнция, обладающая свойствами 3, 4, 5 - это фукнция распределения некоторой случайной величины.

Доказательство. пусть g - такая функция. Тогда $\nu_g(a, b] = g(b) - g(a)$. $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ - измеримо по Лебегу, случайная величина $\xi(w) = w$. Тогда $F_\xi = g$ □

***Определение* 2.10.** Случайная величина имеет дискретное распределение, если её множество значений не более чем счётное.

Замечание.

1. $\xi \to \{y_1, y_2, \ldots\}$

   Если $x \neq y_k$, то $P(\xi = x) = 0$, т.е. $P_\xi(\{x\}) = 0$

2. $P_\xi(A) = \sum_{k: y_k \in A} P(\xi = y_k)$. Тут счётное число слагаемых, поэтому сумма корректно определена.

   Распределение однозначно определяется набором вероятностей $P(\xi = y_k)$

3. $F_\xi(x) = \sum_{k: y_k \leqslant x} P(\xi = y_k)$

***Определение* 2.11.** Случайная величина имеет непрерывное распределение, если $\forall x \in \mathbb{R} : P(\xi = x) = 0$

Замечание.

1. ξ – имеет непрерывное распределение $\iff$ F_ξ непрерывна во всех точках.

   $P(\xi < x) = \lim_{y \to x-} P(\xi \le y) = \lim_{y \to x-} F_\xi(y)$

   $0 = P(\xi = x) = P(\xi \le x) - P(\xi < x) = F_\xi(x) - \lim_{y \to x-} F_\xi(y) \Rightarrow F_\xi(x) = \lim_{y \to x-} F_\xi(y)$

2. Непрерывные распределения бывают не очень хорошими, например Канторова лестница.

***Определение* 2.12.** Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует $p_\xi(t) \geqslant 0$, измеримая, т.ч. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\, dt$ ($p_\xi(t)$ – плотность распределения).

Свойства.

1. $A \subset \mathbb{R}$ – борелевское, то $P_\xi(A) = \int_A p_\xi(t)\, dt$

Доказательство. слева мера и справа написаны меры. На лучах они совпадают по определению, значит совпадают на ячейках, а значит и совпадают везде □

$P_\xi(a, b] = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_a^b p_\xi(t)\,dt$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(t)\,dt = 1$

3. p_ξ определена однозначно с точностью до почти везде (из теории меры)

4. F_ξ почти везде диффиренцируема и $F'_\xi(x) = p_\xi(x)$

Доказательство. без доказательства □

Пример. Вероятностные распределения

1. Биномиальное распределение: $\xi \sim Binom(p, n), 0 < p < 1$
   $\xi : \Omega \to \{0, 1, \dots n\}$. $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2. Распределение Пуассона: $\xi \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$.
   $\xi : \Omega \to \{0, 1, \dots\}$. $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

3. Геометрическое распределение: $\xi \sim Geom(p), 0 < p < 1$.
   $\xi : \Omega \to \{1, 2, \dots\}$. $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$.

4. Дискретное равномерное распределение:
   $\xi : \Omega \to \{1, 2, \dots n\}$. $P(\xi = k) = \frac{1}{n}$

5. Непрерывно равномерное распределение: $\xi \sim U([a, b])$
   $\xi : \Omega \to [a, b]$. $p_\xi(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$

6. Нормальное распределение: $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
   $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. $p_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$
   Стандартное нормальное распределение: $\mathcal{N}(0, 1)$

7. Экспонециальное распределение: $\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$.
   $\xi : \Omega \to [0, +\infty]$. $p_\xi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, \text{ при } t \geqslant 0 \\ 0, \text{ в других точках} \end{cases}$

Замечание. 1. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

На самом деле это функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

2. Если $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то $\xi = \sigma\nu + a$. $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$
   $F_\xi(x) = P(\sigma\nu + a \leqslant x) = P(\nu \leqslant \frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$
   Замена $t = \frac{s-a}{\sigma}$. Тогда $dt = \frac{ds}{\sigma}$
   Тогда: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(s-a)^2}{2\sigma^2}}\,ds$

2.3. Совместное распределение

***Определение* 2.13.** Совместное (многомерное) распределение.

$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$P_{\bar{\xi}}(A) = P(\bar{\xi} \in A)$, где A - борелевское подмножество $\mathbb{R}^n$

Замечание. $P_{\bar{\xi}}$ однозначно определяет распределение P_{ξ_k}, но не наоборот

Пример. $\xi, \eta : \Omega \to \{0, 1\}$ с равными вероятностями.

Если это были независимые подбрасывания: $(\xi, \eta) : \Omega \to \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ с равными вероятностями.

Если $\xi = \eta$, то $(\xi, \eta) : \Omega \to \{(0,0), (1,1)\}$.

То есть получили 2 разных совместных распределения, при это координатное распределение только одно

***Определение* 2.14.** Случайные величины $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ независимы, если для любых борелевских подмножеств $A_1, A_2 \ldots A_n \subset \mathbb{R}$, события $\{\xi_1 \in A_1\}, \ldots, \{\xi_n \in A_n\}$ независимы

Замечание. $P(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n) = P(\xi_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \in A_n)$

Теорема 2.2. $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ независимы $\Longleftrightarrow P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \ldots \times P_{\xi_n}$

Доказательство.

1. $\Leftarrow P(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n) = P_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(A_1 \times \ldots \times A_n) = P_{\xi_1}(A_1) \cdot \ldots \cdot P_{\xi_n}(A_n)$
2. $\Rightarrow$. Достаточно проверить совпадение на ячейках, то есть, что $P(\bar{\xi} \in (a, b]) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot P_{\xi_n}(a_n, b_n]$. А это просто определение независимости.

$\square$

***Определение* 2.15.** Совместная (многомерная) функция распределения.

$\bar{\xi} = (\xi_1 \ldots \xi_n)$. $F_{\bar{\xi}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. и $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_n \leqslant x_n)$

Свойства.

1. $0 \leqslant F_{\bar{\xi}} \leqslant 1$
2. Монотонно возрастает по каждой координате
3. $\lim_{x_i \to -\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 0$

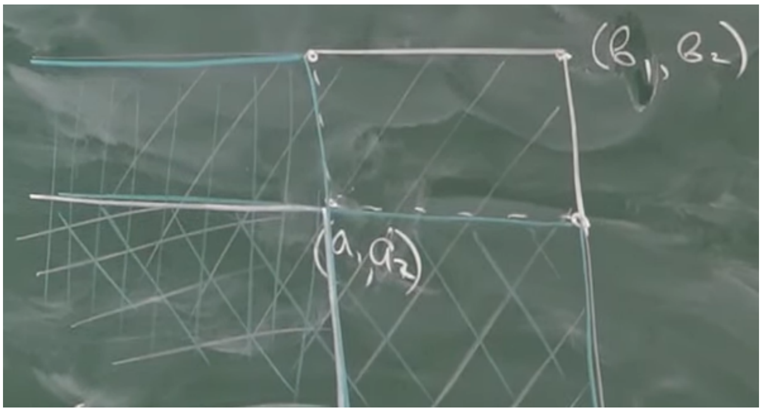
   $\lim_{x_1,\ldots,x_n \to +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 1$
4. $\lim_{x_i \to +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},..,\xi_n}(x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n)$

***Определение* 2.16.** Совместная плотность $p_{\bar{\xi}}(\bar{t})$ - неотрицательная измеримая функция, такая, что $F_{\bar{\xi}}(\bar{\xi}) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t})\, dt_n \ldots dt_1$

Теорема 2.3. $\xi_1 \ldots \xi_n$ независимы $\Longleftrightarrow F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Доказательство.

1. Докажем $\Rightarrow$. Независимость $\Rightarrow (*) P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \ldots \times P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\bar{\xi}}((-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]) = P_{\xi_1}(-\infty, x_1] \cdot \ldots \cdot P_{\xi_n}(-\infty, x_n]$
2. Хотим проверить совпадение на ячейках, чтобы доказать $(*)$ ещё и в другую сторону (приведем выкладки для $n = 2$, для больших n рассуждения не меняются).



$$P_{\bar{\xi}}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) = F_{\bar{\xi}}(b_1, b_2) + F_{\bar{\xi}}(a_1, a_2) - F_{\bar{\xi}}(a_1, b_2) - F_{\bar{\xi}}(a_2, b_1) =$$
$$= (F_{\xi_1}(b_1) - F_{\xi_1}(a_1)) \cdot (F_{\xi_2}(b_2) - F_{\xi_2}(a_2)) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot P_{\xi_2}(a_2, b_2]$$

□

Следствие. $\xi_1 \dots \xi_n$ - абсолютно непрерывные случайные величины. Тогда $\xi_1 \dots \xi_n$ независимы $\iff p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = p_{\xi_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot p_{\xi_n}(t_n)$

В частности, в случае независимости $\bar{\xi}$ абсолютно непрерывна.

Доказательство.

1. Докажем $\Rightarrow$.

   Независимость $\Rightarrow F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1)\,dt_1 \cdot \ldots \cdot \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_n}(t_n)\,dt_n = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n)\,dt_n \dots dt_1$.

   Запихали всё под один интеграл, то что под интегралом и есть совместная плотность.

2. Докажем $\Leftarrow$.

   Просто проинтегрируем равенство.

   $\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t})\,dt_n \dots dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n)\,dt_n \dots dt_1 = \underbrace{=}_{\text{по т. Тонелли можно выносить интегралы}} F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$

   т. Тонелли можно использовать, так как мы интегрируем неотрицательную функцию.

□

Замечание. Напоминание.

Свертка последовательностей: $\{a_n\}, \{b_n\}$ это $\{c_n\}$, такая что $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$.

Мотивировка: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (при наличии хоть каких-нибудь кругов сходимости у обоих рядов).

Замечание. **Свертки мер**

μ и ν - конечные меры на борелевских подмножествах $\mathbb{R}$.

$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x)\,d\nu(x)$ - это свертка мер, где $(A - x) := \{a - x \mid a \in A\}$.

Свойства. **Свойства свёртки**

1. $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(x)\,d\nu(y)$

   Доказательство. $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x)\,d\nu(x) \overset{\mu(A-x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x} d\mu(y)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x}(y) d\mu(y)\,d\nu(x)$ □

2. $\mu * \nu = \nu * \mu$

3. $\mu_1 * \ldots * \mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1 + \ldots + x_n)\, d\mu_1(x_1) \ldots\, d\mu_n(x_n)$

4. $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$

5. $(\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$

6. δ_x - мера с единичной нагрузкой в точке x. Тогда $\mu * \delta_0 = \mu$.

   Получили линейное пространство относительно $+$ и $*$

   Доказательство. $\mu * \delta_0(A) = \delta_0 * \mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(A - x)\, d\mu(x) \overset{\delta_0 = 1 \Leftrightarrow 0 \in A - x \Leftrightarrow x \in A}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\mu(x) = \mu A$ □

Теорема 2.4. Пусть μ и ν имеют плотности p_μ и p_ν

Тогда $\mu * \nu$ имеет плотность $p(t) = \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s)\, ds$

Доказательство. Возьмём функцию, определяемую этой формулой и проверим, что это плотность.

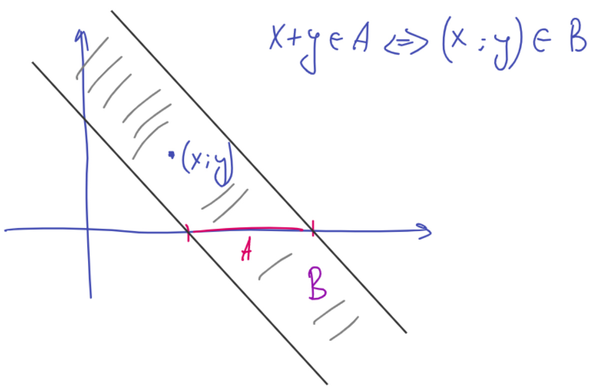
То есть проверим, что $\int_A p(x) dx = \mu * \nu(A)$.

$\int_A p(t)\, dt = \int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s)\, ds\, dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) p_\mu(t - s) p_\nu(s)\, ds\, dt = (*)$.

Положим $u = t - s$. Тогда $(*) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s) p_\mu(u) p_\nu(s)\, ds\, du = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s)\, d\nu(s)\, d\mu(u) = \mu * \nu(A)$ □

Теорема 2.5. Если ξ и η независимые случайный величины, то $P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

Доказательство. Нужно взять какое-то борелевское множество и понять как устроено там распределение суммы.



Пусть $B = \{(x, y) : x + y \in A\}$

$P_{\xi+\eta}(A) = P(\xi + \eta \in A) = P((\xi, \eta) \in B) = P_{\xi,\eta}(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_{\xi,\eta}(x, y) =$

$\underbrace{=}_{\text{т.к. } \xi \text{ и } \eta \text{ независимые}} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_\xi(x)\, dP_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) dP_\xi(x)\, dP_\eta(y) = P_\xi * P_\eta(A)$ □

Пример. 1. **Свертка с дисретным распределением**

$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}$.

$$\delta_{x_k}(A) = \begin{cases} 1, \ x \in A \\ 0, \ otherwise \end{cases} \tag{1}$$

Тогда $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A-x)\,d\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A-x_k)p_k$

2. $\xi_i \sim Poisson(\lambda_i)$. ξ_1 и ξ_2 независимы.

   $P_{\xi_1+\xi_2}(\{n\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{\xi_1}(\{n-k\}) \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^{n-k}e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k}{k!(n-k)!} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!}$

   $\xi_1 + \xi_2 \sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

2.4. Математическое ожидание и дисперсия

***Определение* 2.17.** $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ - случайная величина ($\xi \geq 0$, либо суммируемая функция). $\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi(\omega)\,dP(\omega)$ - математическое ожидание (среднее значение случайной величины).

Свойства.

1. $a, b \in \mathbb{R}: \ \mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$

2. Если $\xi \geqslant 0$, с вероятностью 1, то $\mathbb{E}\xi \geqslant 0$ (по сути написано, что если функция почти везде неотрицательна, то интеграл неотрицателен).

3. Если $\xi \geqslant \eta$ с вероятностью 1, то $\mathbb{E}\xi \geqslant \mathbb{E}\eta$

4. $\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x\,dP_\xi(x)$

5. Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - измерима относительно борелевской $\sigma-$алгебры.

   Тогда $\mathbb{E}f(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)dP_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$

   Доказательство: $f = \mathbb{1}_A$. Тогда $\mathbb{E}\mathbb{1}_A(\xi_1, \ldots \xi_n) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(\xi_1(w), \ldots, \xi_n(w))dP(\omega) = P(\omega \in \Omega : \bar{\xi} \in A) = P_{\bar{\xi}}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1, \ldots, x_n)dP_{\bar{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$.

   Тогда по линейности верно для простых.

   Теперь берём f_j неотрицательный простые, такие, что возрастают и $\to f$. И предельный переход по теореме Леви.

6. Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$

   Доказательство: $\mathbb{E}(\xi\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} xydP_{\xi,\eta}(x,y) =$

   $$\underbrace{=}_{\text{независимость сл. вел.}} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xydP_\xi(x)\,dP_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} y \int_{\mathbb{R}} xdP_\xi(x)\,dP_\eta(y) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$$

7. Если $\xi \geqslant 0$, то $\mathbb{E}\xi = \int_0^{+\infty} P(\xi \geqslant t)\,dt$ - из теории меры.

8. Если $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\mathbb{E}|\xi\eta| \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}}(\mathbb{E}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}$ - неравенство Гёльдера

9. Неравенство Ляпунова

   $0 < r < s$, тогда $(\mathbb{E}|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{1}{s}}$.

   Доказательство: $p = \frac{s}{r} > 1, \ \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{s-r}{s} < 1$.

   Тогда запишем Гельдера для ξ и $\eta = 1$:

   $\mathbb{E}|\xi|^r|1| \leq (\mathbb{E}(|\xi|^r)^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}1^q)^{\frac{1}{q}} = (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{r}{s}}$.

Замечание. $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$ без независимости неверно.

Возьмём $\xi = \pm 1$ с вероятностями $\frac{1}{2}$. Тогда $\mathbb{E}\xi = 0$.

Также пусть $\eta = \xi$. Тогда $\xi\eta = \mathbb{E}\xi^2 = 1 \neq (\mathbb{E}\xi)^2$

Теорема 2.6. Неравенство Маркова

Если $\xi \geqslant 0, p, t > 0$, то $P(\xi \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi^p}{t^p}$.

Доказательство. Неравенство Чебышёва из теории меры. □

Определение 2.18.

1. Моменты случайной величины. $\mathbb{E}(\xi^k)$ - k-ый момент.
2. Центральный момент. $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$ - k-ый центральный момент.
3. Абсолютный момент. $\mathbb{E}|\xi|^k$ - k-ый абсолютный момент.

Определение 2.19. Медиана случайной величины. m - медиана ξ, если $P(\xi \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ и $P(\xi \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$.

Замечание. Медиана не единственна.

Возьмём кубик. $\xi = 1, 2, \ldots, 6$ с вероятностью $\frac{1}{6}$. Тогда любое число $m \in [3, 4]$ подходит.

Чаще всего всё равно берут середину, чтобы была единственность.

Пример. Есть организация из 1000 человек. 1 начальник и 999 подчиненных.

Зарплата начальника 1.000.000$, а подчинённых 1000$.

$\mathbb{E} = \frac{999}{1000} \cdot 1000 + \frac{1}{1000} \cdot 1000000 = 1999$

$m = 1000$ - медиана лучше характеризует ситуацию в этом случае.

Определение 2.20. Дисперсия. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ - второй центральный момент.

Обозначение в англоязычной литературе: $Var\xi$

Свойства.

1. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

   Доказательство: Пусть $a = \mathbb{E}\xi$.

   Тогда $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - a)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - 2a\mathbb{E}\xi + a^2$
2. $\mathbb{D}\xi \geqslant 0$ и если $\mathbb{D}\xi = 0$, то $P(\xi = c) = 1$

   Доказательство: Если $\mathbb{D}\xi = 0$, то $\int_\Omega (\xi - a)^2\, dP = 0$, значит $(\xi - a)^2 = 0$ почти везде.
3. $\mathbb{D}(\xi + a) = \mathbb{D}\xi$

   Доказательство: $\mathbb{E}(\xi + a) = \mathbb{E}\xi + a$. А тогда $(\xi + a) - \mathbb{E}(\xi + a) = \xi - \mathbb{E}\xi$
4. $\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi$

   Доказательство: $\mathbb{D}(c\xi) = \mathbb{E}(c\xi)^2 - (\mathbb{E}(c\xi))^2$
5. Если ξ и η независимы, то $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

   Доказательство: $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}(\xi\eta) + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - (\mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$
6. Аналогично предыдущему, но для n случайных величин.

   Доказательство: индукция

7. $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leqslant \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

   Доказательство: $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leqslant (\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$ - написали Ляпунова.

8. **Неравенство Чебышёва**

   $P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}$, где $t > 0$

   Доказательство: $P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2}{t^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}$ - неравенство Маркова для $p = 2$.

***Определение* 2.21.** Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

Пример. 1. $\xi \sim U[0,1]$.

   Тогда $\mathbb{E}\xi = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

   $\mathbb{E}\xi^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$. А тогда $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{1}{12}$

2. $\xi \sim U[a,b]$.

   Если $\eta \sim U[0,1]$ и $\xi = (b-a)\eta + a \sim U[a,b]$. Тогда $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}((b-a)\eta + a) = \frac{a+b}{2}$

   $\mathbb{D}((b-a)\eta + a) = \mathbb{D}((b-a)\eta) = (b-a)^2\mathbb{D}\eta = \frac{(b-a)^2}{12}$

3. $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$

   $\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xe^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = 0$, так как функция нечётная.

   Значит $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}x}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$

4. $\xi \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$

   Если $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$, то $\xi = \sigma\eta + a \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$.

   $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sigma\eta + a) = \sigma\mathbb{E}\eta + a = a$

   $\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(\sigma\eta + a) = \sigma^2\mathbb{D}\eta = \sigma^2$

***Определение* 2.22.** Пусть $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$ и $\mathbb{E}\eta^2 < +\infty$.

Ковариация $cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))$

Свойства. 1. $cov(\xi,\xi) = \mathbb{D}\xi$

2. $cov(\xi,\eta) = cov(\eta,\xi)$

3. $cov(c\xi,\eta) = c \cdot cov(\xi,\eta)$

4. $cov(\xi_1 + \xi_2,\eta) = cov(\xi_1,\eta) + cov(\xi_2,\eta)$

5. $cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

   Доказательство. $\mathbb{E}\xi = a, \mathbb{E}\eta = b$

   $cov(\xi,\eta) = \mathbb{E}((\xi - a)(\eta - b)) = \mathbb{E}(\xi\eta) - a\mathbb{E}\eta - b\mathbb{E}\xi + ab$ □

6. Если ξ и η независимы, то $cov(\xi,\eta) = 0$

7. $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2cov(\xi,\eta)$

8. $\mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 + \ldots + \mathbb{E}\xi_n + 2\sum_{i<j} cov(\xi_i, \xi_j)$.

Пример. P(успех) $= p$. Делаем n подбрасываний. $\eta =$ количество переходов от орла к решке.

Пусть $\xi_i = 1$, если на i позиции орёл, на $i+1$ позиции решка, иначе $\xi_i = 0$.

$\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1}$. Тогда $\mathbb{E}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\xi_i = (n-1)pq$.

$\mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2\sum_{i<j} cov(\xi_i, \xi_j)$.

Если $i + 1 < j$, то ξ_i и ξ_j независимы, поэтому в сумме почти везде нули.

Значит $\mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2\sum_{i=1}^{n-1} cov(\xi_i, \xi_{i+1})$.

$\mathbb{D}\xi_i = \mathbb{E}\xi_i^2 - (\mathbb{E}\xi_i)^2 = pq - p^2q^2$.

$cov(\xi, \xi_{i+1}) = \mathbb{E}(\xi_i\xi_{i+1}) - \mathbb{E}\xi_i\mathbb{E}\xi_{i+1} = -p^2q^2$

Замечание. 1. $\{\xi : \mathbb{E}\xi^2 < +\infty\}$

$\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}(\xi\eta)$ - скалярное произведение.

$\mathbb{E}\xi$ - ортогональная проекция на константы.

2. $\langle \xi, \eta \rangle = cov(\xi, \eta)$ - тоже скалярное произведение.

Норма - это стандартное отклонение.

Теорема 2.7. Выбор двудольного подграфа

Есть граф G с n вершинами и m рёбрами. Хотим стереть некоторое количество рёбер(как можно меньше) так, чтобы остался двудольный подграф.

Тогда G содержит двудольный подграф с $\geqslant \frac{m}{2}$ рёбрами.

Доказательство. A - те вершины, на которых выпал орёл, B - на которых выпала решка.

Будем интересоваться матожиданием количества рёбер в такой ситуации. Пусть $xy \in E(G)$, сопоставим ребру следующую случайную величину:

$$\xi_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{если x, y из разных долей} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть $\eta = \sum_{xy \in E} \xi_{xy}$ - число рёбер, которое нужно оставить, при таком разбиении на доли.

$\mathbb{E}\eta = \sum_{xy \in E} \mathbb{E}\xi_{xy} = m \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0) = \frac{m}{2}$, а значит есть реализация с $\frac{m}{2}$ рёбрами (если бы все значения кол-ва ребер были меньше $\frac{m}{2}$, то и мат. ожидание было бы меньше $\frac{m}{2}$). $\square$

Определение 2.23. Коэффициент корреляции. $\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}\sqrt{\mathbb{D}\eta}} \in [-1, 1]$

Определение 2.24. Если $cov(\xi, \eta) = 0$, то это некоррелирующие случайные величины.

Теорема 2.8. $v_1, v_2 \ldots v_n \in \mathbb{R}^n$ - векторы единичной длины, тогда существует расстановка знаков $\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, такая, что $||\varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n|| \leqslant \sqrt{n}$.

Замечание. Эта оценка не улучшаема, если все вектора попарно ортогональны, тогда длина вектора $\sqrt{n}$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ - независимые случайные величины, такие, что:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Введем величину $\xi = ||\varepsilon_1 v_1 + \ldots + \varepsilon_n v_n||^2$.

Тогда $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\langle v, v \rangle = \mathbb{E}(\sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i\varepsilon_j \langle v_i, v_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_j \rangle = n$.

1. Если $i = j$, то $\mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j = \mathbb{E}\varepsilon_i^2 = 1$

2. Если $i \neq j$, то $\mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j \overset{\text{независимость}}{=} \mathbb{E}\varepsilon_i \cdot \mathbb{E}\varepsilon_j = 0$

□

Теорема 2.9. $v_1, v_2 \ldots v_n \in \mathbb{R}^n$, $||v_i|| \leqslant 1, p_i \in [0, 1]$ и $w = p_1v_1 + \ldots + p_nv_n$

Тогда существует $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}, \ldots \varepsilon_n \in \{0, 1\}$, такие, что $v = \varepsilon_1v_1 + \ldots + \varepsilon_nv_n$ и $||v - w|| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ - независимые случайные величины.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p_i \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - p_i \end{cases}$$

Интересуемся $\xi = ||v - w||^2$. Тогда $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sum_{i,j=1}^n (\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j) \langle v_i, v_j\rangle) = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i, v_j\rangle \mathbb{E}(\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j) \overset{\text{пояснение ниже}}{=} \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i\rangle (p_i - p_i^2) \leqslant \frac{n}{4}$.

1. Если $i = j$, то $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathbb{D}\varepsilon_i = p_i - p_i^2 \leqslant \frac{1}{4}$

2. Если $i \neq j$, то $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \overset{\text{независимы}}{=} 0$

□

Теорема 2.10. Харди-Рамануджана

Пусть $\nu(k)$ – число различных простых делителей в разложении k.

Хотим понять, чему будет равно это число, если мы наугад возьмем число из мн-ва $\{1, 2, \ldots, n\}$.

$P(|\nu(k) - \ln\ln n| \geqslant w(n)\sqrt{\ln\ln n}) \to_{n\to\infty} 0$, где $w(n) \to_{n\to\infty} +\infty$ и $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доказательство. Пусть $m = \sqrt[10]{n}$. $p \leqslant m$ - простое и

$$\xi_p(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ делится на } p \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\xi = \sum_{p\leqslant m} \xi_p$ - количество различных простых $\leqslant m$. Тогда $\nu(k) - 10 \leqslant \xi(k) \leqslant \nu(k)$.

Посчитаем матожидание ξ, тогда посчитаем мат. ожидание слагаемых:

$\mathbb{E}\xi_p = \frac{[\frac{n}{p}]}{n} \leqslant \frac{\frac{n}{p}}{n} = \frac{1}{p}$. С другой стороны, $\mathbb{E}\xi_p \geqslant \frac{\frac{n}{p}-1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

Знаем, что $\mathbb{E}\xi = \sum_{p\leqslant m} \mathbb{E}\xi_p$, тогда

$\sum_{p\leqslant m} \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \leqslant \sum_{p\leqslant m} \mathbb{E}\xi_p \leqslant \sum_{p\leqslant m} \frac{1}{p} = \ln\ln m + \mathcal{O}(1) = \ln\ln n + \mathcal{O}(1)$. Оценка в другую сторону аналогично, потому что $\frac{m}{n} \leqslant 1$.

Теперь считаем дисперсию для ξ_p:

$\mathbb{D}\xi_p = \mathbb{E}\xi_p^2 - (\mathbb{E}\xi_p)^2 = \mathbb{E}\xi_p - (\mathbb{E}\xi_p)^2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$

Теперь оценим ковариацию:

$$cov(\xi_p, \xi_q) = \underbrace{\mathbb{E}(\xi_p\xi_q)}_{\text{аргумент равен 1, когда } n \,\vdots\, pq} - \mathbb{E}\xi_p\mathbb{E}\xi_q = \frac{\left[\frac{n}{pq}\right]}{n} - \frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{n} \cdot \frac{\left[\frac{n}{q}\right]}{n} = (*).$$

Оценим $(*)$ с двух сторон:

1. $(*) \geq \frac{\frac{n}{pq}-1}{n} - \frac{\frac{n}{p}}{n} \cdot \frac{\frac{n}{q}}{n} = -\frac{1}{n}$

2. $(*) \le \frac{\frac{n}{pq}}{n} - \frac{\frac{n}{p}-1}{n} \cdot \frac{\frac{n}{q}-1}{n} \le (\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) \cdot \frac{1}{n}$

Теперь смотрим на сумму ковариаций (так как она фигурирует как слагаемое для $\mathbb{D}\xi$):

$$\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{p<q\le m} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{=\frac{1}{2n}\sum_{p\neq q,\ p,q\le m}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) \le \frac{1}{2n} 2m \sum_{p\le m} \frac{1}{p} = \mathcal{O}(1)} \qquad \ge \sum_{p<q\le m} cov(\xi_p, \xi_q) \ge -\frac{m^2}{n} = \mathcal{O}(1)$$

Теперь оцениваем дисперсию для ξ:

$$\mathbb{D}\xi = \sum_{p\le m} \mathbb{D}\xi_p + 2 \underbrace{\sum_{p<q\le m} cov(\xi_p, \xi_q)}_{=\mathcal{O}(1)} = \sum_{p\le m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \mathcal{O}(\tfrac{1}{n})\right) + \mathcal{O}(1) =$$

$= \sum_{p\le m} \frac{1}{p} + \mathcal{O}(1) = \ln\ln m + \mathcal{O}(1) = \ln\ln n + \mathcal{O}(1)$.

Теперь применим Чебышёва.

$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}$. В качестве t подставим $w(n)\sqrt{\ln\ln n}$.

Тогда $P(|\nu(k) - \ln\ln n| \underbrace{\geqslant}_{(**)} w(n)\sqrt{\ln\ln n}) < P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant w(n)\sqrt{\ln\ln n}) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{w^2(n)\ln\ln n} \to 0$.

$(**)$: такое нер-во можно писать, так как $|\nu(k) - \xi(k)| \le 10$ и $\mathbb{E}\xi = \ln\ln n\mathcal{O}(1)$.

□

Теорема 2.11. Эрдёша-Каца

$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k\le n : a \leqslant \frac{|\nu(k) - \ln\ln n|}{\sqrt{\ln\ln n}} \leqslant b\}}{n} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

2.5. Сходимость последовательностей случайных величин

Теорема 2.12. $\xi_1, \xi_2, \dots$ - независимые случайные величины, $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ - измерима, относительно борелевской σ-алгребры.

Тогда $f_1(\xi_1, \dots \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2})$ - независимые случаные величины.

Доказательство. $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. $f(\xi_1 \dots \xi_m)$ и $g(\eta_1 . \eta_n)$ независимые.

Возьмём $\tilde{A}$ и $\tilde{B} \in \mathbb{R}$ борелевские. Надо доказать, что $P(f(\xi_1 \dots \xi_m) \in \tilde{A}) \cdot P(g(\eta_1 \dots \eta_n) \in \tilde{B}) = P(f(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \tilde{A}, g(\eta_1 . \eta_n) \in \tilde{B})$.

$P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in f^{-1}(\tilde{A}) = A) \cdot P((\eta_1, \dots, \eta_m) \in f^{-1}(\tilde{B}) = B) = P(\dots)$

Поймём это для ячеек.

$A = (a, b]$, что такое $P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in (a, b]) = P(\xi_1 \in (a_1, b_1], \dots, \xi_m \in (a_m, b_m]) = P(\dots) \cdot \dots \cdot P(\dots)$.

Если A_j дизъюнктны $P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in A_j) \cdot P((\eta_1, \dots, \eta_m) \in B) = P(\dots)$. Просуммируем $P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in \bigsqcup A_j) \cdot P((\eta_1, \dots, \eta_m) \in B) = P(\dots)$ □

***Определение* 2.25.** $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. ξ_n сходится к ξ почти наверное, если $P(w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(w) = \xi(w)) = 1$
2. ξ_n сходится к ξ в среднем порядка $r > 0$, если $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^r) \to_{n\to\infty} 0$
3. ξ_n сходится к ξ по вероятности, если $\forall\varepsilon > 0$, $P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) \to_{n\to\infty} 0$

4. $\xi_n : \Omega_n \to \mathbb{R}$. ξ_n сходится к ξ по распределению, если $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ во всех точках непрерывности F_ξ

Связь между ними $1 \Rightarrow 3, 2 \Rightarrow 3$ (неравенство Маркова). При этом $3 \not\Rightarrow 1, 2 \not\Rightarrow 1$ TODO

$4 \not\Rightarrow 3$. Да и вообще они на разных вероятностных пространствах, так что постановка вопроса в целом неверная.

$3 \Rightarrow 4$. $\{\xi_n > x\} \supset \{\xi > x + \varepsilon\} \cap \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$. Также верно обратное: $\{\xi_n \leqslant x\} \subset \{\xi \leqslant x + \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}$.

Тогда $F_{\xi_n}(x) \leqslant F_\xi(x+\varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)$. $\overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leqslant F_\xi(x+\varepsilon) + \overline{\lim} P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = F_\xi(x+\varepsilon)$.

$\{\xi_n > x\} \subset \{\xi > x - \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}$ - запишем через вероятности. $1 - F_{\xi_n}(x) \leqslant 1 - F_\xi(x - \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon)$. То есть $\underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \geqslant F_\xi(x-\varepsilon) - \lim P(|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon) = F_\xi(x-\varepsilon)$.

То есть $F_\xi(x-\varepsilon) \leqslant \underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leqslant \overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leqslant F_\xi(x+\varepsilon)$ - верно для любого n. Устремим $\varepsilon \to 0$. Тогда $F_\xi(x) \leqslant \underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leqslant \overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leqslant F_\xi(x)$, но левая и правая штука равны.

Теорема 2.13. Закон больших чисел

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ - попарно некоррелируемые случайные величины и $\mathbb{D}\xi_n = o(n)$.

$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$.

Тогда $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} \underset{P}{\to} 0$. То есть вероятность того, что $P(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n}| \geqslant \varepsilon) \to 0$

Следствие. Если $\mathbb{D}\xi_n$ ограничены, то такой же вывод.

Доказательство. $P(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}S_n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{D}\xi_k}{\varepsilon^2 n^2} \to_{\text{Штольц}} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{D}\xi_n}{\varepsilon^2(2n-1)} = 0$. □

Следствие. **ЗБЧ в форме Чебышёва**

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимые, одинаково распределенённые случайные величины с конечной дисперсией. Пусть $a = \mathbb{E}_{\xi_1}$

Тогда $P(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geqslant \varepsilon) \to 0$ или же $\frac{S_n}{n} \underset{P}{\to} a$

Доказательство. Мат. ожидание всех случайных величин равно, они одинаково распределены. Поэтому $\mathbb{E}\frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = a$. Поэтому все условия предыдущей теоремы выполнены □

Следствие. **ЗБЧ для схем Бернулли**

Есть схема Бернулли с вероятностью успеха p.

Тогда $\frac{S_n}{n} \underset{P}{\to} p$

Теорема 2.14. Усиленный ЗБЧ

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимые случайные величины. $\mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)^4 \leqslant C$.

Тогда $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} \to 0$ почти наверное.

Доказательство. $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k))$. Задвинем все матожидания в ноль.

Тогда по условию $\mathbb{E}\xi_n^4 \leqslant C$ и надо доказать, что $\frac{S_n}{n} \to 0$ почти наверное.

Пусть $A_n = \{\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\}$. Нам нужно понять, что бесконечное количество A_n случаются с нулевой вероятностью.

Из леммы Бореля-Кантелли, если $\sum_{k=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty P(A_n) < +\infty$, то нужное нам условие выполнено.

Напишем неравенство Маркова: $P(A_n) \leqslant \frac{\mathbb{E}\frac{S_n^4}{n^4}}{\varepsilon^4} = \frac{\mathbb{E}S_n^4}{n^4\varepsilon^4}$. Достаточно доказать, что $\mathbb{E}S_n^4 = \mathcal{O}(n^2)$, тогда ряд сойдётся. Раскроем все скобки.

$\mathbb{E}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^4 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^4 + 4\sum_{i\neq j}\mathbb{E}\xi_i^3\xi_j + 6\sum_{i\neq j}\mathbb{E}\xi_i^2\xi_j^2 + 12\sum_{i\neq j\neq k}\mathbb{E}\xi_i^2\xi_j\xi_k + 24\sum_{\ldots}\mathbb{E}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_m$

1. $\mathbb{E}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_m = 0$
2. $\mathbb{E}\xi_i^2\xi_j\xi_k = 0$

Итого получаем $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^4 + 6\sum \mathbb{E}x_i^2\mathbb{E}\xi_j^2$ (*). По неравенству Ляпунова $\mathbb{E}\xi_i^2 \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\xi_i^4} \leqslant \sqrt{C}$.

Значит $(*) = nC + 6n(n-1)\sqrt{C}\sqrt{C} \leqslant 6Cn^2 = \mathcal{O}(n^2)$, значит ряд сходится и лемма Бореля-Кантелли выполняется. □

Следствие. **Усиленный ЗБЧ для схем Бернулли**

В схеме Бернулли с вероятностью успеха p : $\frac{S_n}{n} \to p$ почти наверное.

Доказательство. Нужно проверить, что $\mathbb{E}(\xi_i - p)^4$ - конечно, раскроем скобки, получим какие-то константы и ξ_i^p. □

Теорема 2.15. Усиленный ЗБС в форме Колмогорова

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ - независимо, одинаково распределённые случайные величины.

Тогда $\frac{S_n}{n} \to a \in \mathbb{R}$ почти наверное $\Leftrightarrow a = \mathbb{E}\xi_1$

Метод Монте-Карло

Φ - ограниченная фигура на плоскости. Хотим примерно узнать её площадь.

Берём случайную точку в прямоугольнике и выясняем, попала она в фигуру или нет.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{точка попала в } \Phi \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вероятность успеха $\frac{Area(\Phi)}{Area(\text{прямоугольника})}$. Тогда усиленный ЗБЧ говорит, что $\frac{S_n}{n} \to p$ почти наверное.

Теорема 2.16. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ последовательность случайных величин, $\xi_n \to_P a \in \mathbb{R}$. f ограниченная функция, непрерывная в точке a.

Тогда $\mathbb{E}f(\xi_n) \to f(a)$

Доказательство. $|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| = |\mathbb{E}(f(\xi_n) - f(a))| \leqslant \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| = \mathbb{E}|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a < \varepsilon\}} + \mathbb{E}|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geqslant \varepsilon\}} = (*)$.

Пусть f ограничена константой M.

$\mathbb{E}|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geqslant \varepsilon\}} \leqslant 2M\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geqslant \varepsilon\}}$

$|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a < \varepsilon\}} \leqslant \sup_{|x-a|<\varepsilon}|f(x) - f(a)|$

Тогда $(*) \leqslant \sup_{|x-a|<\varepsilon}|f(x) - f(a)| + 2MP(|\xi_n - a| \geqslant \varepsilon)$.

$\overline{\lim}|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| \leqslant \sup_{|x-a|<\varepsilon}|f(x) - f(a)| + 2M\overline{\lim}P(|\xi_n - a| \geqslant \varepsilon) \leqslant \sup_{|x-a|<\varepsilon}|f(x) - f(a)| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Тогда $0 \leqslant \underline{\lim} \leqslant \overline{\lim} \leqslant 0 \Rightarrow \lim|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| = 0$ □

Замечание. В условии теоремы $|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| \leqslant \sup_{|x-a|<\varepsilon}|f(x) - f(a)| + 2MP(|\xi_n - a| \geqslant \varepsilon)$

Теорема 2.17. Вейерштрасса

$f \in C[a,b]$, то существует последовательность многочленов P_n, такая, что $P_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$

Доказательство. Можно считать, что всё на $[0,1]$. Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $\frac{S_n}{n} \to p$. Подставим $\xi_n = \frac{S_n}{n}$ в замечание.

$|\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) - f(p)| \leqslant \sup_{|x-a|<\varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2MP(|\frac{S_n}{n} - p| \geqslant \varepsilon) = (*)$

Из неравенства Чебышёва $P(|\frac{S_n}{n} - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

И тогда $(*) \leqslant \sup_{|x-y|<\varepsilon} |f(x) - f(y)| + \frac{M}{2n\varepsilon^2}$. При $n = \frac{1}{\varepsilon^3}$ правое слагаемое оценивается ε', а первое слагаемое мало из равномерной непрерывности.

Значит $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{}n) - f(p) \rightrightarrows 0$. $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ - многочлен Бернштейна. □

***Определение* 2.26.** Многочлен Бернштейна $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$

Следствие.

1. $B_n(0) = f(0)$
2. $B_n(1) = f(1)$
3. $B_n'(0) = n(f(\frac{1}{n}) - f(0))$

   $B_n'(1) = n(f(1) - f(\frac{n-1}{n}))$

   Доказательство: $B_n'(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}(kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}) =$
   $= \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k - nx)$
4. $B_n'(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}(k-nx)$
5. $B_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha B_n(f,x) + \beta B_n(g,x)$

Кривые Безье

$\sum_{k=0}^n a_k\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}, a_k \in \mathbb{R}^2$. Получается отображение $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$.

1. $n = 1 : a(1-t) + bt$ - отрезок соединяющий точки a и b.
2. $n = 2 : a(1-t)^2 + 2bt(1-t) + ct^2$. Мы знаем, что $B'(0) = 2(b-a)$ и $B'(1) = 2(c-b)$. Это кривая из точки a в c, параметр b задаёт касательную в a и c.
3. $n = 3 : a(1-t)^3 + 3bt(1-t)^2 + 3ct^2(1-t) + dt^3$.

   Здесь $B(0) = a, B(1) = d, B'(0) = 3(b-a), B'(1) = 3(d-c)$. Кривая выходит из точки a с касательной $3(b-a)$, а заходит в точку d с касательной $3(d-c)$.

2.6. Производящие функции

***Определение* 2.27.** $\xi : \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$ - случайная величина.

$G_\xi(z) = \sum_{n=0}^\infty P(\xi = n)z^n$ - производящая фукнция

Свойства.

1. G_ξ однозначно определяет распределение
2. $G_\xi(1) = 1$ и G_ξ сходится в круге $|z| < 1$.
3. $G_\xi(x) = \mathbb{E}x^\xi$, где $x \in \mathbb{R}$

   Доказательство: $\mathbb{E}x^\xi = \sum_{n=0}^\infty x^n \cdot P(\xi = n) = G_\xi(x)$

4. $G'_\xi(1) = \mathbb{E}\xi$

   Доказательство: $G'_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi = n)nx^{n-1}$ - если подставить единицу - получим матожидание.

5. $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1)$

   Доказательство: $G''_\xi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} P(\xi = n)n(n-1)x^{n-2}$ - если подставить единицу - получим матожидание.

6. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2$

7. G_ξ возрастает и выпукла на $[0, 1]$

8. Если ξ и η независимы, то $G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z)$

   Доказательство: x^ξ и x^η независимы, а тогда $\mathbb{E}(x^\xi \cdot x^\eta) = \mathbb{E}x^\xi \cdot \mathbb{E}x^\eta$

Пример. 1. Равномерное распределение на $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.

   Тогда $G_\xi(z) = \frac{1}{n}(1 + z + z^2 + \ldots z^{n-1}) = \frac{1-z^n}{1-z} \cdot \frac{1}{n}$. Пусть хотим посчитать матожидание и диспресию, но единицу то подставить нельзя в свернутую формулу. Решается эта проблема так:

   Давайте скажем, что $z = 1 + y$. Тогда $G_\xi(1 + y) = \frac{(1+y)^n-1}{ny} = 1 + \binom{n}{2}\frac{y}{n} + \binom{n}{3}\frac{y^2}{n} \ldots$

   Тогда $G'_\xi(1) = \frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$, $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) = 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6n} + \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2}(\frac{2n-4}{3} + 1) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$. И тогда $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{6} = \frac{n^2-1}{12}$

2. **Задача Галилея**

   Есть 3 правильных кубика, бросили и посчитали сумму значений. Интересуемся вероятностью того, что в сумме выпало 10.

   P(в сумме 10) =?

   ξ_i - значение на i-том кубике. Тогда $G_{\xi_i}(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + \ldots + z^6) = \frac{z(1-z^6)}{1-z} \cdot \frac{1}{6}$. Кубика у нас три, поэтому нас интересует $G_{\xi_1+\xi_2+\xi_3} = G_{\xi_1} \cdot G_{\xi_2} \cdot G_{\xi_3} = \left(\frac{z(1-z^6)}{1-z} \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = (*)$

   $\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} z^n$. Тогда $(*) = \frac{1}{6^3}(z^3 - 3z^9 + 3z^15 - z^21) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} z^n$. Коэффициент при z^{10} будет такой $\frac{1}{6^3}(1 \cdot \binom{9}{7} - 3 \cdot \binom{3}{1}) = \frac{1}{6^3}(36 - 3^2) = \frac{1}{8}$

3. Метод характеристических функций

3.1. Характеристические функции случайных величин

***Определение* 3.1.** Комплекснозначная случайная величина $\xi = \operatorname{Re}\xi + i\operatorname{Im}\xi$, где $\operatorname{Re}\xi$ и $\operatorname{Im}\xi$ вещественнозначные случайные величины.

***Определение* 3.2.** $\xi : \Omega \to \mathbb{C}$

$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\operatorname{Re}\xi + i\mathbb{E}\operatorname{Im}\xi$

Свойства. 1. $\mathbb{E}(i\xi) = i\mathbb{E}\xi$

2. Комплексная линейность $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \xi, \eta : \Omega \to \mathbb{C}$

   Доказательство: $\mathbb{E}(\alpha\xi) = \mathbb{E}(a+ib)\xi = \mathbb{E}(a\xi) + \mathbb{E}(b\xi i) = (a+bi)\mathbb{E}\xi$

3. $\overline{\mathbb{E}\xi} = \mathbb{E}\overline{\xi}$

4. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$

   Доказательство: Возьмём $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, такой, что $\mathbb{E}(c\xi) = |\mathbb{E}\xi|$, то есть $c = \frac{\overline{\mathbb{E}\xi}}{|\mathbb{E}\xi|}$

   Тогда $|\mathbb{E}\xi| = \mathbb{E}(c\xi) = \mathbb{E}(\operatorname{Re}(c\xi)) \leqslant \mathbb{E}|\operatorname{Re}(c\xi)| \leqslant \mathbb{E}|c\xi| = \mathbb{E}|\xi|$

***Определение* 3.3.** Ковариация $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)\overline{(\eta - \mathbb{E}\eta)}$

***Определение* 3.4.** Дисперсия $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2$

$cov(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$

***Определение* 3.5.** $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Назовём характеристической функцией ξ:

$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$, где $t \in \mathbb{R}$

Свойства. 1. $\phi_\xi(0) = 1$ и $|\phi_\xi(t)| \leqslant 1$

   Доказательство: $|\phi_\xi(t)| \leqslant |\mathbb{E}e^{it\xi}| \leqslant \mathbb{E}|e^{it\xi}| = 1$

2. $\phi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt}\phi_\xi(at)$

   Доказательство: $\phi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{i(a\xi+b)t} = \mathbb{E}e^{ibt}e^{i\xi at} = e^{ibt}\mathbb{E}e^{i\xi(at)} = \phi_\xi(at)e^{ibt}$

3. Если ξ и η независимы, то $\phi_{\xi+\eta}(t) = \phi_\xi(t) \cdot \phi_\eta(t)$

   Доказательство: $e^{i\xi t}$ и $e^{i\eta t}$ независимы и пишем произведение матожиданий

4. $\overline{\phi_\xi(t)} = \phi_\xi(-t)$

   Доказательство: $\overline{\phi_\xi(t)} = \overline{\mathbb{E}e^{i\xi t}} = \mathbb{E}\overline{e^{i\xi t}} = \mathbb{E}e^{-i\xi t} = \phi_\xi(-t)$

5. ϕ_ξ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$

   Доказательство: TODO

Пример. $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Хотим посчитать характеристическую функцию.

Возьмём $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда $\xi = \sigma\eta + a$ - имеет нужное нам распределение.

$\phi_{\sigma\eta+a}(t) = e^{ita}\phi_\eta(\sigma t)$

Считаем для η: $\phi_\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\,dx = (*)\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\,dx = \int_{\operatorname{Im}=-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

$\int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 0$, потому что нет особых точек.

С другой стороны: $\int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \int_{-R-it}^{R-it} + \int_{R-it}^{R} + \int_{R}^{-R} + \int_{-R}^{-R-it} \to I - \sqrt{2\pi}$. Значит $I = \sqrt{2\pi}$ (тут было потеряно несколько переходов)

Тогда $(*) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi}$

Теорема 3.1. Пусть $\mathbb{E}|\xi|^n < +\infty$.

Тогда при $k \leqslant n$ верно, что $\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}((i\xi)^k e^{i\xi t})$. В частности, $\varphi^k(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$

Следствие. Если $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$, то $\mathbb{E}\xi = -i\varphi'(0)$ и $\mathbb{D}\xi = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2$

Доказательство. Индукция по k

База $k = 0$ - определение φ.

Переход $k \to k+1$. $\varphi^{(k+1)}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi^{(k)}(t+h) - \varphi^{(k)}(t)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{E}(i\xi)^k e^{i\xi(t+h)} - \mathbb{E}(i\xi)^k e^{i\xi(t)}}{h} = \lim_{h\to 0} \mathbb{E}((i\xi)^k e^{it\xi} \cdot \frac{e^{ih\xi}-1}{h}) = \mathbb{E}((i\xi)^k e^{it\xi} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{ih\xi}-1}{h})$, а предел - это $i\xi$.

Почему можно было запихать предел по матожидание?

$\lim \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx}-1}{h} = \int_R \lim_{h\to 0}((ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx}-1}{h})$ - нужна суммируемая мажоранта.

$\left|(ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx}-1}{h}\right| = |x|^k \left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right| = (*)$.

1. Если $|xh| \geqslant 1$, то $\left|\frac{e^{ihx}-1}{h} \leqslant \frac{2}{|h|} \leqslant 2|x|\right|$
2. Если $|xh| < 1$, то $e^{ihx} = 1 + \mathcal{O}(1 + ihx) \Rightarrow \left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right| = \left|\frac{\mathcal{O}(hx)}{h}\right| = \mathcal{O}(x)$. То есть $(*) = \mathcal{O}(|x|^{k+1})$, а ещё есть конечный момент, значит всё выполняется.

$\square$

Теорема 3.2. Если существует $\varphi''_\xi(0)$, то $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$

Замечание. Если существует $\varphi_\xi^{(2n)}$, то $\mathbb{E}\xi^{2n} < +\infty$

Доказательство. $\mathbb{E}\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 dP_\xi(x) = (*)$ - хотим доказать, что этот интеграл конечен.

Заметим, что $x = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(tx)}{t}$ и подставим вместо x. Тогда:

$(*) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dP_\xi(x) \leqslant \underline{\lim}_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} -\frac{e^{2itx} + e^{-2itx} - 2}{4t^2} dP_\xi(x) = (*)$ - лемма Фату и расписали синус.

$(*) = \underline{\lim}_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} -\frac{\varphi_\xi(2t) - \varphi_\xi(-2t) - 2}{4t^2} = (*)$. Причём $\varphi_\xi(u) = 1 + \varphi'_\xi(0) \cdot u + \frac{\varphi''_\xi(0)u^2}{2} + o(u^2)$.

Тогда $\varphi_\xi(2t) + \varphi_\xi(-2t) = 2 + \frac{\varphi''_\xi(0)(2t)^2}{2} + o(t^2)$, а тогда $(*) = \underline{\lim}_{t\to 0}(-\varphi''_\xi(0) + o(1))$ $\square$

Теорема 3.3. Формула обращения

Пусть $a < b$ и $P_\xi(\{a\}) = P_\xi(\{b\}) = 0$

Тогда $P(\xi \in [a, b]) = \lim_{T\to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{ibt}}{it} \varphi_\xi(t)\, dt$

То есть $v.p.\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{ibt}}{it} \varphi_\xi(t)\, dt$

Доказательство. $\xi = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\eta$, тогда $P(\xi \in [a, b]) \Leftrightarrow P(\eta \in [-1, 1])$, в частности $P_\eta(\{\pm 1\}) = 0$

$\varphi_\xi(t) = e^{i\frac{a+b}{2}t} \varphi_\eta(\frac{b-a}{2}t)$ - подставим в наш интеграл.

$\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_\xi(t)\, dt = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} e^{i\frac{a+b}{2}t} \varphi_\eta(\frac{b-a}{2}t)\, dt =$

$= \int_{-T}^{T} \frac{e^{-i\frac{a-b}{2}t} - e^{-i\frac{b-a}{2}t}}{it} \varphi_\eta(\frac{b-a}{2})\, dt = \int_{-\frac{b-a}{2}T}^{\frac{b-a}{2}T} \frac{e^{is} - e^{-is}}{is} \varphi_\eta(s)\, ds$, здесь замена $s = \frac{b-a}{t}$

Можно считать, что $a = -1$, а $b = 1$

$\int_{-T}^{T} \frac{e^{it}-e^{-it}}{it}\varphi_\xi(t)\,dt = \int_{-T}^{T}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it}-e^{-it}}{it} e^{itx} dP_\xi(x)\,dt = (*)$ - давайте переставим местами интегралы. Нужна суммируемость того, что под интегралом, а она есть, всё ограничено какой-то суммируемой константой.

$(*) = \int_{\mathbb{R}}\int_{-T}^{T} \frac{e^{it}-e^{-it}}{it} e^{itx}\,dt\,dP_\xi(x)$. Пусть $\Phi_T(x) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{it} e^{itx}\,dt$

$\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} \frac{e^{it}-e^{-it}}{it}\varphi_\xi(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \Phi_T(x) dP_\xi(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to+\infty}\Phi_T(x)\,dP_\xi(x)$ - хотим понять, почему можно внести предел под интеграл, но разберемся с этим позже.

$\lim_{T\to+\infty}\Phi_T(x) = \lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}\int_{-1}^{1} e^{iut}\,du\,e^{itx}\,dt = \lim_{T\to+\infty}\int_{-1}^{1}\int_{-T}^{T} e^{it(u+x)}\,dt\,du = (*)$.

Заметим, что $\left.\frac{e^{it(u+x)}}{i(u+x)}\right|_{t=-T}^{t=+T} = \frac{2\sin((u+x)T)}{u+x}$

Тогда $(*) = \lim_{T\to+\infty}\int_{-1}^{1} \frac{2\sin((u+x)T)}{u+x}\,du = (*)$. Сделаем замену $y = (u+x)T$, тогда $dy = T\cdot du$.

Тогда $(*) = \lim_{T\to+\infty}\int_{(-1+x)T}^{(1+x)T} \frac{2\sin y}{y}\,dy = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 1 \\ 0, & \text{при x < -1} \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{2\sin y}{y}\,dy = 2\pi, & \text{иначе} \end{cases}$

Получили $2\pi\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,dP_\xi(x) = 2\pi P_\xi([-1,1])$.

Вспомним, что мы не доказали по дороге один переход. Нужно понять, почему $\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,dy$ ограничен - интеграл по лучу сходится, значит первообразная в бесконечностях имеет предел, значит в середине тоже ограничена, потому что непрервность - обоснование примерно такое.

$\square$

Следствие. 1. Если $\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t)$, то $P_\xi = P_\eta$

Доказательство: Рассмотрим $A = \{a \in \mathbb{R} : a$ - точка непрервности функции распределения$\}$.

Тогда $\mathbb{R}\setminus A$ - не более чем счётное. Если $a < b$ и $a, b \in A$, то $P_\xi([a,b]) = P_\eta([a,b])$

Пусть $a \in \mathbb{R}, b \in A$. Рассмотрим $a_n \in A$, такие, что $a_n \to a$ и убывают.

$P_\xi((a,b]) = \lim_{n\to\infty} P_\xi([a_n,b_n]) = \lim P_\eta([a_n,b_n]) = P_\eta((a,b])$.

Пусть $a < b$ произвольные. Возьмём $b_n \in A$, такие, что $b_n \to b$ и убывают. Тогда $P_\xi((a,b]) = \lim_{n\to\infty} P_\xi(a,b_n] = \lim P_\eta(a,b_n] = P_\eta(a,b] \Rightarrow P_\xi = P_\eta$ на ячейках, а тогда по единственности продолжения везде совпадают.

2. Если $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\xi(t)|\,dt < +\infty$, то ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_\xi(t)\,dt$ - преобразование Фурье.

   Доказательство: Из суммируемости $\varphi_\xi(t) \Rightarrow P_\xi((a,b]) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_\xi(t)\,dt$.

   Проверим, что $P_\xi(a,b] = \int_a^b p_\xi(x)\,dx$.

   $\int_a^b p_\xi(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_\xi(t)\,dt\,dx = (*)$. Под внутренним интегралом суммируемая функция, значит можно переставлять местми интегралы.

   Тогда $(*) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_a^b e^{-itx}\,dx\varphi_\xi(t)\,dt$

Теорема 3.4. $\xi_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2)$, $c_k \in \mathbb{R}$ не все нулевые и ξ_k - независимы.

Тогда $\xi = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k\xi_k \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, где $a = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k a_k$ и $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2\sigma_k^2$

Доказательство. $\varphi_\xi(t) = \varphi_{a_0}(t)\varphi_{c_1\xi_1}(t)\ldots\varphi_{c_n\xi_n}(t) == e^{ita_0}(t)\varphi_{\xi_1}(c_1 t)\ldots\varphi_{\xi_n}(c_n t) = e^{ita_0}e^{ia_1c_1t}e^{-\frac{(c_1\sigma_1 t)^2}{2}}\ldots$ $e^{ita}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$

$\square$