

Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

3 февраля 2023 г.

Содержание

1. Элементарная теория вероятностей	1
1.1 Основные понятия	2
1.2 Предельные теоремы для схем Бернулли	5
2. Общая теория вероятностей	9
2.1 Колмогоровская модель теории вероятности	10

1. Элементарная теория вероятностей

1.1. Основные понятия

Определение 1.1. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

Определение 1.2. Событие $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Свойства. вероятности

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A) \in [0, 1]$
2. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3.
$$\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B \setminus (A \cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, где $\bar{A} = \Omega \setminus A$
5. $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \cdots \cap A_m)$ – формула включений-исключений.

Доказательство. Индукция по m .

База $m = 2$.

Переход $m \rightarrow m + 1$:

$$B_j = A_j \cup A_{m+1}$$

$$P(\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1})$$

$$A_{m+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - \sum_{i \neq j}^m P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^m P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_m)}, \text{ где } B_i :=$$

$$A_i \cap A_{m+1}. \quad \square$$

6. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \leq \sum_{j=1}^m P(A_j)$$

Определение 1.3. Условная вероятность.

$$B \neq \emptyset, P(B) > 0.$$

Знаем, что произошло событие B , хотим узнать вероятность наступления A .

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Свойства. 1. $P(A|A) = 1$, если $B \subset A$, то $P(A|B) = 1$

2. Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

$$\text{В частности: } P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

Замечание. $P(A|B) + P(A|\bar{B})$ не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик, B – выпало четное число, A – выпало кратное трем.

$$P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

Теорема 1.1. Формула полной вероятности.

Пусть $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$, $P(B_j) > 0$.

Тогда $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

Доказательство. $\sum_{j=1}^m \underbrace{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}_{= \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}} = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = P(A)$ □

Пример. I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II, $P(\text{вынули белый}) = ?$

A – вынули из II белый шар.

B_0, B_1, B_2 , где B_j – переложили j белых шаров из I в II.

Тогда $P(A|B_0) = \frac{5}{12}$, $P(A|B_1) = \frac{1}{2}$, $P(A|B_2) = \frac{7}{12}$.

$$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

$$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

Подставляем в формулу:

$$P(A) = \frac{331}{336}$$

Теорема 1.2. Формула Байеса.

Пусть $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, тогда $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

Доказательство. Расписываем $P(A|B)$, получаем в правой части: $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$. □

Теорема 1.3. Байеса.

Пусть $P(A) > 0$, $P(B_j) > 0$, $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$, тогда

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_m)P(B_m)}$$

Пример. Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая $P(\text{орла}) = \frac{1}{3}$, $P(\text{решка}) = \frac{2}{3}$). Взяли наугад монету, подбросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

A – выпал орел, B – монета симметричная (\bar{B} – монета кривая).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

Определение 1.4. Независимые события.

Рассуждения: A не зависит от B , если $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Опр. A, B независимые события, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Определение 1.5. События A_1, A_2, \dots, A_m – независимы в совокупности, если

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ – для любых индексов i_j .

Замечание. Независимость в совокупности \implies попарная независимость.

Наоборот неверно.

Пример. Есть два игральных кубика.

A – на первом кубике выпало четное число.

B – на втором выпало четное число.

C – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары (i, j) , где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 36$.

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C.$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$, остальные равенства тоже выполняются \implies попарная независимость.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \implies \text{нет независимости в совокупности.}$$

Упражнение. Д-ть, что A_1, \dots, A_m независимы в совокупности $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$, где $B_j = A_j$ или $\overline{A_j}$ (все 2^m равенств).

Замечание. Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть $p_1, \dots, p_n : \sum_{i=1}^n p_i = 1, \forall i : p_i \geq 0$.

$$P(A) = \sum_{j: \omega_j \in A} p_j.$$

Теорема 1.4. Схема Бернулли.

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$$P(\text{орел}) = p, 0 \leq p \leq 1$$

$$P(\text{решка}) = 1 - p$$

Бросаем монету n раз, получаем последовательность исходов:

$$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : x_j = 0 \text{ или } 1.$$

$$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n), P(\{\omega\}) = p^{\#\{i: x_i=1\}} \cdot q^{\#\{i: x_i=0\}} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n-\sum x_i}$$

Хотим узнать:

$$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$P(i\text{-ое подбрасывание} = \text{орел})$ – независимые в совокупности по $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 1.5. Полиномиальная схема.

$$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1.$$

$$P(x_i = k) = p_k, \text{ где } x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$P(\{\omega\}) = p_1^{\#\{i: x_i=1\}} \cdot \dots \cdot p_m^{\#\{i: x_i=m\}}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

$$P(k \text{ раз выпало } 1, k_2 \text{ раз выпало } 2, \dots) = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$$

Теорема 1.6. Эрдёша-Мозера

Рассмотрим турнир на n команд. При каком наибольшем k можно всегда выбрать команды

$A_1, A_2 \dots A_k$, так, что A_i выиграла у A_j , если $i < j$? При $k \leq 1 + [2 \log_2 n]$

Доказательство. Рассмотрим случайный турнир (Всего $\binom{n}{2}$, тогда Всего $2^{\binom{n}{2}}$ разных турниров. Случайный - берём из этой кучи наугад).

$P(A \text{ выиграла у } B) = \frac{1}{2}$. Рассмотрим $A_1, A_2, \dots A_k$ команды.

$P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ подходят}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$.

$P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ можно переименовать, так, что они подошли}) \leq \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$

$P(\text{какие-то } k \text{ команд подошли}) \leq \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$

Нужно понять, что если $k \geq [2 + 2 \log_2 n]$, то $\binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$. $\binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{(2^{\frac{k-1}{2}})^k} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k$

Надо понять, что $2^{\frac{k-1}{2}} \geq n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2} \geq \log_2 n$ □

1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли

Определение 1.6. Схема Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$. S_n - число успехов при n испытаниях. $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Что будет больше $P(S_{1000} = 220)$ при $p = \frac{1}{5}$ или $P(S_{2000} = 360)$ при $p = \frac{1}{6}$. Точные вычисления дают 0.008984 и 0.006625 соответственно.

Теорема 1.7. Пуассона

Схема Бернулли с n испытаниями и вероятностью успеха p_n - зависит от n . Если $np_n \rightarrow \lambda > 0$. Тогда $P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Замечание. Если $np_n = \lambda$, то теорема верна при $k = o(\sqrt{n})$

Доказательство. $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-p)^n$. Прологарифмируем: $\ln(1-p)^n = n \ln(1-p) \sim -np_n \sim -\lambda$

Доказательство замечания:

$\ln(1-p_n)^k = k \ln(1-p_n) \sim -kp_n \rightarrow 0$

Осталось понять, что $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \rightarrow 1$ при $k = o(\sqrt{n})$.

$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \rightarrow 1$

Неравенство $(1-x_1)\dots(1-x_k) \geq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k$ при $0 \leq x_i \leq 1$ - индукция. □

Теорема 1.8. Прохорова

Если $\lambda = np$, то $\sum_{i=0}^{+\infty} |P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda)$

Пример. Игра в рулетку: 36 чисел и ноль.

$p = \frac{1}{37}, n = 111, np = 3\lambda$.

$P(S_{111} = 3) = \binom{111}{3} \left(\frac{1}{37}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{111-3} = 0.227127$

Из Пуассона $\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.224$

Видим, что приближение хорошее.

$P(\text{выигрыш}) = 1 - P(S_{111} = 0) - P(S_{111} = 1) - P(S_{111} = 2) - P(S_{111} = 3) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.352754$

А по формулам 0.352768

Теорема 1.9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Схема Бернулии с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$. $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

$$P(S_n = k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Если $|x| \leq T$, то есть равномерность.

Доказательство. $k = np + x\sqrt{npq} \geq np - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$

$$n - k = nq - -x\sqrt{npq} \geq nq - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Напишем формулу Стирлинга:

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi (n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) n}}$$

$$\frac{k}{n} \rightarrow p, \frac{n-k}{n} \rightarrow q$$

$$\text{Поэтому остаётся доказать, что } \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$k \ln \frac{k}{n} + (n-k) \ln \frac{n-k}{n} - k \ln p - (n-k) \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

$$\alpha = \frac{k}{n} \rightarrow p, \beta = \frac{n-k}{n} \rightarrow q$$

$$n\alpha \ln \alpha + n\beta \ln \beta - n\alpha \ln p - n\beta \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2} = n\alpha \ln \frac{\alpha}{p} + n\beta \ln \frac{\beta}{q}$$

Напишем Тейлора:

$$\frac{\alpha}{p} = 1 + x \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\beta}{q} = 1 - x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\ln \frac{\alpha}{p} = \ln(1 + x \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{n}}) = x \sqrt{\frac{q}{p}} - \frac{1}{2} x^2 \frac{q}{p} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\ln \frac{\beta}{q} = \ln(1 - x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}}) = -x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} x^2 \frac{p}{q} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Сумма равна: } x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2 q - \frac{1}{2} x^2 q + o\left(\frac{1}{n}\right) - x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2 p - \frac{1}{2} x^2 p + o\left(\frac{1}{n}\right) = x^2 \left(\frac{q}{2} + \frac{p}{2}\right) + o(1) = \frac{x^2}{2} + o(1)$$

Извините, это было очень больно... □

Замечание. Если $\varphi(n) = o(n^{\frac{2}{3}})$ и $|k - np| \leq \varphi(n)$, то теорема тоже верна

Пример. Всё та же рулетка. $n = 222, k = 111$. Пытаемся ставить на на четное/нечётное(кроме 0). $p = \frac{18}{37}$

$$P(S_{222} = 111) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0.049395 \dots$$

Если считать точно, то получим 0.0493228...

Теорема 1.10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$$0 < p < 1. P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Равномерно по a и b

Теорема 1.11. Берри-Эссеена

$$\text{Обозначение: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$|P(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x) - \Phi(x)| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{2}$$

Замечание. Константа лучше, чем $\frac{c}{\sqrt{n}}$ не бывает.

Пример. $p = q = \frac{1}{2}$. Вопрос: $P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Но $P(S_{2n} < n) = P(S_{2n} > n)$.

Тогда $P(S_{2n} \leq n) = \frac{1+P(S_{2n}=n)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Муавра-Лаплас нам говорит, что $P(S_{2n} \leq n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$

Но $P(S_{2n} \leq n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Замечание. $P(a < S_n \leq b) = P(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{S_n-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{npq}}) \rightarrow \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}})$

Отсюда получили, что лучше всего писать полуцелые a и b .

Пример. Задача о театре

Есть театр и 2 входа. У каждого входа расположен гардероб. В театре $n = 1600$ мест. Хотим сделать размер гардероба как можно меньше, но чтобы переполнения случались как можно реже.

Пусть c мест в итоге в гардеробе.

$p = q = \frac{1}{2}$. Нужно, чтобы $n - c \leq S_n \leq c$.

$P(n - c \leq S_n \leq c) = P(\frac{n-c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}) = P(\frac{800-c}{20} \leq \frac{S_n-800}{20} \leq \frac{c-800}{20}) \rightarrow \Phi(\frac{800-c}{20}) -$

$\Phi(\frac{c-800}{20}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{800-c}{20}}^{\frac{c-800}{20}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt > \frac{29}{30}$

$\Phi_0(\frac{c-800}{20}) > \frac{29}{60}$. Тогда $c = 843$.

Пример. Случайное блуждание на прямой

Есть прямая, будем считать, что у нас блуждания исключительно по целым точкам.

В каждой точке подбрасываем монетку. С вероятностью p идём вперёд, q - идём назад.

$a_{n+1} = a_n + 1$ с вероятностью p

$a_{n+1} = a_n - 1$ с вероятностью q

$a_n \equiv n \pmod{2}$

Это почти похоже на схему Бернулли: $2S_n - n = a_n$

$P(a_n = k) = P(S_n = \frac{n+k}{2}) = 0$, если $n \not\equiv k \pmod{2}$

$P(a_n = k) = P(S_n = \frac{n+k}{2}) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}$, если $n \equiv k \pmod{2}$, иначе

Теорема 1.12. ван дер Вардена

Рассмотрим числа $1, 2 \dots k$ и покрасим их в 2 цвета.

Тогда существует k_n , такое, что, если $k > k_n$, то при любой раскраске найдётся одноцветная n -членная арифметическая прогрессия.

Теорема 1.13. Эрдеша-Радó

$k_{n+1} \geq \sqrt{n \cdot 2^{n+1}}$

Доказательство. $A_1, A_2 \dots A_m$ - все арифметические прогрессии длины $n+1$ из чисел $1, 2 \dots k$.

С разностью 1 $k-n$ прогрессий.

С разностью 2 $k-2n$ прогрессий.

...

С разностью $k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n$ прогрессий с разностью $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$

Тогда $m = (k - n) + (k - 2n) + \dots = k \cdot \lfloor \frac{k}{n} \rfloor - n \cdot \frac{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot (\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)}{2} = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor (k - \frac{1}{2}n(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)) < \frac{k}{n} (k - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{k}{n}) = \frac{k^2}{2n}$
 - это оценка сверху.

$P(A_i \text{ - одноцветная}) = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$ (2 - выбор цвета).

$P(\text{какое-то } A_i \text{ - одноцветно}) = \sum_{i=1}^m P(A_i \text{ - одноцветно}) = \frac{m}{2^n} < \frac{k^2}{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = (\frac{k}{\sqrt{2^{n+1} \cdot n}})^2 \leq 1$ (если так, то найдётся, на которой не выполнится) \square

2. Общая теория вероятностей

2.1. Колмогоровская модель теории вероятности

Определение 2.1. (Ω, \mathcal{F}, P) - вероятностное пространство.

Ω - множество или пространство элементарных исходов.

\mathcal{F} - σ -алгебра подмножеств Ω . Элементы \mathcal{F} - случайные события.

P - мера на \mathcal{F} с условием $P(\Omega) = 1$.

Замечание. Если Ω не более чем счётно, то можно взять $\mathcal{F} = 2^\Omega$

Определение 2.2. Условная вероятность. A - событие, такое, что $P(A) > 0$. Тогда $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Определение 2.3. Независимые события A и B . Если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Определение 2.4. Независимость в совокупности $A_1, A_2 \dots A_n$. $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ для всевозможных наборов индексов.

Определение 2.5. Последовательность событий $A_1, A_2 \dots$ независимы - любой конечный набор событий независим в совокупности.

Лемма. Бореля-Кантелли

A_1, A_2, \dots случайные события.

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, то вероятность, что случилось бесконечное число из них равна 0.
2. Если A_1, A_2, \dots независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, тогда $P(\text{случилось бесконечное число из } A_n) = 1$

Доказательство. $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

$\omega \in B \iff \omega \in \text{бесконечное количество } A_i$.

1. \Leftarrow . Лежит в каждом объединении, значит лежит в B .
2. $\Rightarrow \omega$ лежит в пересечении. Пусть лежит в конечном - возьмём самый большой номер и получим противоречие.

1. $P(B) = 0$ - хотим доказать.

$B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow P(B) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$, а это хвост сходящегося ряда, а он стремится к нулю.

2. Давайте смотреть на $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$ - независимые события (следует из упражнения с прошлой лекции).

$$P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) = \prod P(\bar{A}_k) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \prod P(\bar{A}_k)$$

Но всё вложено по убыванию, по монотонности меры получаем $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k) = \prod P(\bar{A}_k) = \prod (1 - P(A_k))$

Прологарифмируем это равенство.

$\ln(P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k)) = \sum \ln(1 - P(A_k)) \leq - \sum P(A_k) = -\infty$ - сумма хвоста расходящегося ряда.

А значит мы логарифмировали 0. $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 1$.

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n. B_1 \supset B_2 \dots$$

$$P(B) = \lim P(B_n) = 1$$

**Теорема 2.1. Закон нуля и единицы**

Если $A_1, A_2 \dots$ независимы, то $P(B) = 0$ или $P(B) = 1$.

Пример. Испытания Бернулли, успех с вероятностью p . $P()$

$A_n = \text{случилось}$ на позициях $n, n+1, n+2$.

Тогда A_1, A_4, A_7 независимы. $P(A_j) = pqr$