

# Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

24 февраля 2023 г.

## Содержание

<b>1. Теория меры</b>	<b>1</b>
1.1 Система множеств . . . . .	2
1.2 Объем и мера . . . . .	6
1.3 Продолжение мер . . . . .	9
1.4 Мера Лебега . . . . .	13
<b>2. Интеграл Лебега</b>	<b>19</b>
2.1 Измеримые функции . . . . .	20
2.2 Последовательности измеримых функций . . . . .	23
2.3 Определение интеграла . . . . .	26
2.4 Суммируемые функции . . . . .	29
2.5 Предельный переход под знаком интеграла . . . . .	34
2.6 Произведение мер . . . . .	36
2.7 Замена переменной . . . . .	42
<b>3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы</b>	<b>46</b>
3.1 Собственные интегралы с параметрами . . . . .	47
3.2 Несобственные интегралы с параметрами . . . . .	49
3.3 В- и Г-функции Эйлера . . . . .	54
3.4 Криволинейные интегралы . . . . .	57
3.5 Точные и замкнутые формы . . . . .	64
<b>4. ТФКП</b>	<b>70</b>
4.1 Голоморфные функции . . . . .	71
4.2 Теоремы единственности . . . . .	78
4.3 Аналитическое продолжение . . . . .	81
4.4 Ряды Лорана . . . . .	84
4.5 Вычеты . . . . .	90

# 1. Теория меры

## 1.1. Система множеств

Полезные обозначения:  $A \sqcup B$  - объединение  $A$  и  $B$ , такие что  $A \cap B = \emptyset$

**Определение 1.1.** Набор мн-в дизъюнктивный, если мн-ва попарно не пересекаются:  $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

**Определение 1.2.**  $E$  – мн-во; если  $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$  – разбиение мн-ва  $E$ .

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

**Определение 1.3.**  $\mathcal{A}$  – система подмн-в  $X$ :  $A \subset 2^X$

1.  $(\delta_0)$ : если  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2.  $(\sigma_0)$ : если  $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3.  $(\delta)$ : если  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4.  $(\sigma)$ : если  $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

**Определение 1.4.**  $\mathcal{A}$  – симметрическая система мн-в, если  $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$ .

**Утверждение 1.1.** Если  $\mathcal{A}$  – симм., то  $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$  и  $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$ .

**Доказательство.**  $A_\alpha \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$  □

**Определение 1.5.**  $\mathcal{A}$  – алгебра мн-в, если  $\mathcal{A}$  – симметр.,  $\emptyset \in \mathcal{A}$  и  $\forall A, B \in \mathcal{A}: A \cup B \in \mathcal{A}$  (по утв. 1.1  $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ ; смотри [опр. алгебры](#)).

**Свойства.** алгебры мн-в:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Если  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , то  $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если  $A, B \in \mathcal{A}$ , то  $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

**Определение 1.6.**  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра мн-в, если  $\mathcal{A}$  – симм.,  $\emptyset \in \mathcal{A}$  и свойство  $(\sigma)$  выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множеств; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем  $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$ ).

**Замечание.**  $\sigma$ -алгебра  $\implies$  алгебра.

**Пример.** 1.  $2^X$  –  $\sigma$ -алгебра.

2.  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{A}$  – всевозможные [огр. подмн-ва](#).  $\mathbb{R}^2$  и их дополнения. ( $\mathcal{A}$  – алгебра, но не  $\sigma$ -алгебра).

**Rem:** [огр. множество](#) – в метрич. пр-ве это множество ограниченного диаметра ( $d(x, y) := ||x - y||$ ), т.е.  $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$  – ограничен.

3.  $\mathcal{A}$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра) подмн-в  $X$  и  $Y \subset X$ .  $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$  – индуцированная алгебра ( $\sigma$ -алгебра).

4. Пусть  $\mathcal{A}_\alpha$  – алгебры ( $\sigma$ -алгебры), тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$  – алгебра ( $\sigma$ -алгебра).
5.  $A, B \subset X$  ниже перечислено, что есть в алгебре, содержащей  $A, B$ :  
 $\emptyset, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A).$

**Теорема 1.2.** Пусть  $\epsilon$  – семейство подмн-в в  $X$ , тогда существует наименьшая по включению  $\sigma$ -алгебра (алгебра)  $\mathcal{A}$ , такая что  $\epsilon \subset \mathcal{A}$ .

**Доказательство.**  $\mathcal{A}_\alpha$  – всевозможные  $\sigma$ -алгебры  $\supset \epsilon$ . Такие есть, так как  $2^X$  подходит.

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon$ . Теперь проверим, что  $\mathcal{A}$  – наим. по вкл.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I$ .

**Определение 1.7.** 1. Такая  $\sigma$ -алгебра – борелевская оболочка  $\epsilon = (\mathcal{B}(\epsilon))$ .

2.  $X = \mathbb{R}^n$ ; такая  $\sigma$ -алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская  $\sigma$ -алгебра  $(\mathcal{B}^n)$ .

**Замечание.**  $\underbrace{\mathcal{B}^n}_{\text{континуальное}} \neq \underbrace{2^{\mathbb{R}^n}}_{\text{больше континуального}}$

□

**Определение 1.8.**  $R$  – кольцо, если  $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$ .

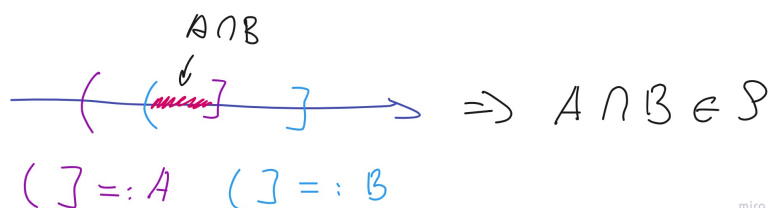
**Замечание.** Кольцо +  $(X \in R) \implies$  алгебра.

**Определение 1.9.**  $P$  – полукольцо, если

1.  $\emptyset \in P$
2.  $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$
3.  $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in P$ , такие что  $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$ .

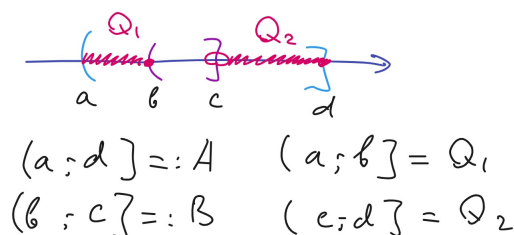
**Пример.**  $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$  – полукольцо.

Свойство 2:



miro

Свойство 3:



miro

**Лемма.**  $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left( \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)}_{B_n}.$

**Доказательство.**  $\supset$ : Дизъюнктивность  $B_n \subset A_n$  и при  $m > n$   $B_m \cap A_n = \emptyset \implies B_n \cap B_m = \emptyset$ .

$\subset$ : Пусть  $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$ . Возьмем наим.  $m$ , такой что  $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$ .  $\square$

**Теорема 1.3.**  $P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ . Тогда

1.  $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ , где  $Q_j \in \mathcal{P}$  – полукольцо.

2.  $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$ , где  $Q_{kj} \in \mathcal{P}$  и  $Q_{kj} \subset P_k$ .

**Доказательство.** 1. индукция по  $n$ . База – опр. полукольца. Переход  $(n \rightarrow n+1)$ :

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left( \underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}} \right)$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left( \underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}} \right)$$

$\square$

**Замечание.** В (2) можно писать  $n = \infty$ .

**Определение 1.10.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмн-ва  $X$ .

$\mathcal{Q}$  – полукольцо подмн-ва  $Y$ .

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$  – декартово произведение полуколец.

**Теорема 1.4.** Декартово произведение полуколец – полукольцо.

**Доказательство.**

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

$\square$

**Замечание.** Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении:  $2^X \times 2^Y$  – полукольцо.

**Определение 1.11.** Замкнутый параллелепипед  $a, b \in \mathbb{R}^m$ .

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$$

Открытый параллелепипед:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$$

Ячейка:

$$(a, b] = [a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$$

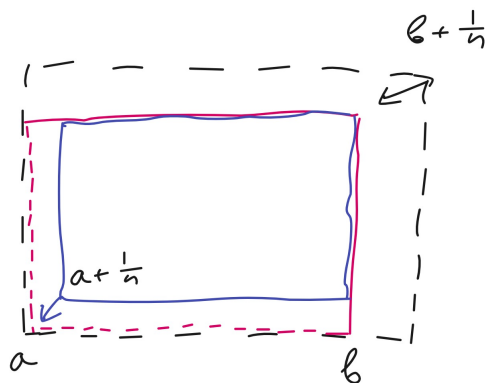
**Теорема 1.5.** Непустая ячейка – пересечение убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

**Доказательство.**  $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$$P_n \supset P_{n+1} \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$$

$$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$$

$$Q_n \subset Q_{n+1} \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$$



□

**Обозначения:**  $\mathcal{P}^m$  – сем-во ячеек из  $\mathbb{R}^m$ .

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$  – сем-во ячеек из  $\mathbb{R}^m$  с рациональными координатами вершин.

**Теорема 1.6.**  $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$  – полукольца.

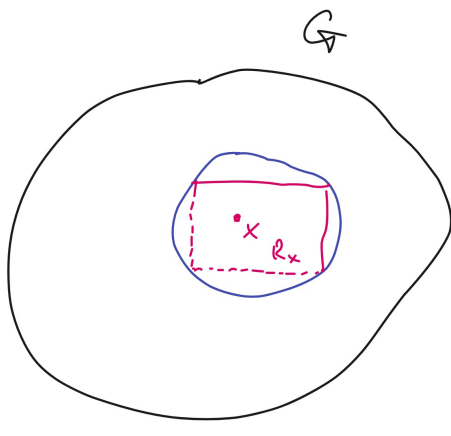
**Доказательство.**  $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m = \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^{m-1} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^1$$

□

**Теорема 1.7.**  $G \neq \emptyset$  – открытое множество в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объединение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в  $G$  (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

**Доказательство.**  $R_x$  – ячейка,  $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G, x \in R_x$ , получаем, что  $G = \bigcup_{x \in G} R_x$ .



Выкинем повторы:  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$

□

**Следствие.**  $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) = \mathcal{B}^m$ .

**Доказательство.** 1.  $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$

$$(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$$

$$G - \text{открытое} \implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \supset \mathcal{B}^m$$

□

## 1.2. Объем и мера

**Определение 1.12.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо.  $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ .  $\mu$  – объем, если

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{ Если } P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P} \text{ и } \bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu(\bigsqcup_{k=1}^n P_k) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

**Определение 1.13.**  $\mu$  – мера, если

$$1. \mu(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{ Если } P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P} \text{ и } \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}, \text{ то } \mu\left(\underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k}_{\text{счетная аддитивность}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$$

**Упражнение.**  $\mu$  – мера. Если  $\mu \not\equiv +\infty$ , то условия  $\mu\emptyset = 0$  выполнено автоматически.

**Пример.** 1.  $\mathcal{P}^1$ ,  $\mu(a, b] := b - a$  – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – нестрого монотонная

$$(a) \mu_g(a, b] := g(b) - g(a) \text{ (упр. доказать, что объем)}.$$

3.  $\mathcal{P}^m$  (m-мерные ячейки),  $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$ ,  $a := (a_1, \dots, a_m)$ ,  $b := (b_1, \dots, b_m)$  – классический объем.

$$4. \mathcal{P} = 2^X, \quad x_0 \in X, \quad a \geq 0$$

$$\mu A := \begin{cases} a, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

$\mu$  – мера.

5.  $\mathcal{P}$  – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

$\mu$  – объем, но не мера.

**Теорема 1.8.**  $\mu$  – объем на полукольце  $\mathcal{P}$

$$1. \text{ Монотонность: } \mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$$

$$2. (a) \text{ Усиленная монотонность: } P_1, P_2, \dots, P_n, P \in \mathcal{P}. \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$$

(b) Пункт (a), но  $n = \infty$

3. Полуаддитивность:  $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$  и  $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$ , тогда  $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

**Доказательство.** 1. Очев тип.

$$2. (a) P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

$$(b) \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$$

$$3. P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P} \text{ (}\mathcal{P} \text{ - полукольцо)}, \quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\leq \mu P'_k \leq \mu P_k \text{ (свойство 2(a))}} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

**Замечание.** 1. Если  $\mathcal{P}$  – кольцо и  $A, B$  ( $B \subset A$ )  $\in \mathcal{P}$ , то  $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$$

$$\text{Если } \mu B \neq +\infty, \text{ то } \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$$

**Теорема 1.9.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо подмн-в  $X$ ,  $\mu$  – объем на  $\mathcal{P}$

$\mathcal{Q}$  – полукольцо подмн-в  $Y$ ,  $\nu$  – объем на  $\mathcal{Q}$

$$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q, \text{ где } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$$

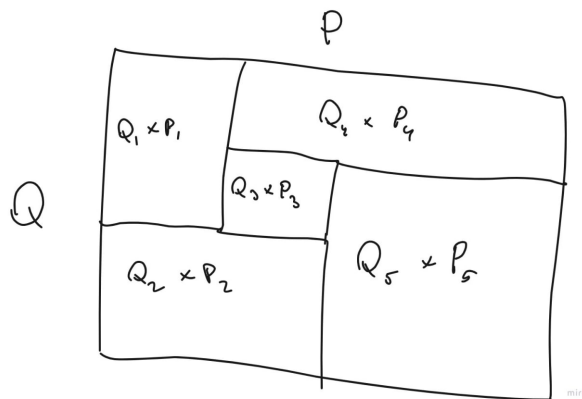
Тогда  $\lambda$  – объем на  $P \times Q$ .

**Следствие.** Классический объем на ячейках – действительно объем.

**Доказательство.** Простой случай.  $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$ , тогда:

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j, \text{ докажем, что } \underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$$

Общий случай.



$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

$$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$$

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$$

□



**Пример.** 1. Классический объем на ячейках  $\lambda_m$  – мера

2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда  $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$  – мера.

(Rem:  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$  – непрерывность слева).

3. Считающаяся мера:  $\mu A := \#A$  – кол-во элементов.

4.  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  – не более чем счетное множество,  $w_1, w_2, \dots \geq 0$ ,  $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \rightarrow \mu$  – мера.

**Доказательство.** 4.  $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

$$1. \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (*)$$

$$2. \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (***)$$

1.  $\mu A = \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**) \geq \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (*)$  – т.к.  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\forall i, j : i \neq j)$ , то каждое слагаемое  $w_k$  не более 1 раза попадет в  $(*)$  и  $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (***) \geq \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**) = \mu A$  – нер-во верно, так как мы можем к каждому  $w_k$  из  $(**)$  найти этот же  $w_k$  в  $(***)$ .

Итого имеем равенство:

$$(**) = (***) : \sum_{k: t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n, \text{ чтд.}$$

(От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

□

**Теорема 1.10.** (О счетной аддитивности меры).

$\mu$  – объем на полукольце  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu$ -мера  $\Leftrightarrow$  если  $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P, P_n \in \mathcal{P}$ , то  $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$  (счетная полуаддитивность).

**Доказательство.** " $\Leftarrow$ ": Пусть  $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$ , тогда надо д-ть, что  $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$ : для " $\leq$ " – счетная полуаддитивность, для " $\geq$ " – усиленная монот. объема.

$$\begin{aligned} \text{"}\Rightarrow\text{"}: P'_n &:= P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_{nk}, \text{ где } Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n} - \text{усиленная монот. объема. } \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n. \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Если  $\mu$  – мера на  $\sigma$ -алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

**Доказательство.**  $\mu A_n = 0 \implies \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$ .

□

**Теорема 1.11.** (О непрерывности меры снизу).

$\mu$  – объем на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ . Тогда  $\mu$  – мера  $\Leftrightarrow$  если  $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$ , то  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$  – непр. меры снизу.

**Доказательство.** " $\Rightarrow$ ":  $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ ,  $A_0 = \emptyset$ .

$B_n$  – дизъюнкты:  $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ .

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu\left[\bigsqcup B_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu B_k = \lim \mu A_n.$$

" $\Leftarrow$ ": Пусть  $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$ , надо д-ть, что  $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$ .

$$A_n := \bigsqcup_{k=1}^n C_k, \quad A_n \subset A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}_{=\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n)} = \lim \mu A_n = \lim \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n C_k\right) = \lim \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n \quad \square$$

**Теорема 1.12.** (О непрерывности меры сверху).

$\mu$  – объем на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$  и  $\mu X < +\infty$ .

Тогда равносильны:

1.  $\mu$  – мера
2. если  $A_n \supset A_{n+1}$ , то  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mu A_n$
3. если  $A_n \supset A_{n+1}$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , то  $\lim \mu A_n = 0$ .

**Доказательство.** (1)  $\Rightarrow$  (2):  $A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$ .  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

$$\Rightarrow \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)}_{\mu(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3)  $\Rightarrow$  (1):  $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$ , надо д-ть, что  $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$ .

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k$ ,  $A_n \supset A_{n+1}$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ , тогда  $\lim \mu A_n = 0$ .

$$C = \bigsqcup_{k=1}^n C_k \sqcup A_n \Rightarrow \mu C = \sum_{k=1}^n \mu C_k + \mu A_n. \quad \square$$

**Следствие.** Если  $\mu$  – мера,  $A_n \supset A_{n+1}$  и существует  $m$ , такое что  $\mu A_m < +\infty$ , тогда  $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ .

**Доказательство.** Просто берем  $X := A_m$  и пользуемся теоремой о непрерывности меры сверху.  $\square$

**Упражнение.** Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

### 1.3. Продолжение мер

**Определение 1.14.**  $\nu : 2^X \rightarrow [0; +\infty]$  – субмера, если

1.  $\nu \emptyset = 0$
2. монотонность: если  $A \subset B$ ,  $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , то  $\nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

**Замечание.** 1. счетная полуаддитивность  $\Rightarrow$  конечная.

2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности)  $A \subset B$ ,  $n = 1$ .

**Определение 1.15.**  $\mu$  – полная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , если  $A \subset B \in \mathcal{A}$  и  $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$ .

**Замечание.** это означает, что  $\mu A = 0$ .

**Определение 1.16.**  $\nu$  – субмера, назовем  $E \subset X$   $\nu$ -измеримым, если  $\forall A \subset X \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

**Замечание.** Достаточен знак " $\geq$ " (следует из счетной полуаддитивности).

**Теорема 1.13. Каратеодори.**

Пусть  $\nu$  – субмера. Тогда все  $\nu$ -измеримые мн-ва образуют  $\sigma$ -алгебру и сужение  $\nu$  на эту  $\sigma$ -алгебру – это полная мера.

**Доказательство.** Обозначим через  $\mathcal{A}$   $\nu$ -измеримые мн-ва.

1. Если  $E = \emptyset$ , то  $E \in \mathcal{A}$ .

$$\forall A \subset X, \underbrace{\nu A}_{?} \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$$

$A \cap E \subset E, \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$ , тогда доказали вопросик сверху.

2.  $\mathcal{A}$  – симметричное семейство мн-в.

$$E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$$

$$A \cap E = A \setminus (X \setminus E)$$

$$A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$$

3. Если  $E$  и  $F \in \mathcal{A}$ , то  $E \cup F \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) &= \underbrace{\nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \setminus F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} \geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \\ &\nu(A \setminus (E \cup F)) \end{aligned}$$

4.  $\mathcal{A}$  – алгебра.

5.  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , где  $E_n \in \mathcal{A} \implies E \in \mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned} \nu A = \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^n E_k) &\geq \underbrace{\nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies \\ \implies \nu A &\geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E). \end{aligned}$$

6. Если  $E_n \in \mathcal{A}$  и  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $E \in \mathcal{A}$ .

7.  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра.

8.  $\nu$  – мера на  $\mathcal{A}$ .

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \nu E = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n.$$

Докажем, что  $\nu E \geq \sum_{k=1}^n \nu E_k$  (т. к.  $\leq$  уже есть из определения субмеры). Знаем, что  $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \nu E_k$

□

**Определение 1.17.**  $\mu$  – мера на полукольце  $\mathcal{P}$ ,  $A \subset X$ .

$$\mu^* A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \wedge A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$$

если покрытия нет, то  $+\infty$ .

– внешняя мера, порожд.  $\mu$ .

**Замечание.** 1. Можно считать, что  $P_k$  – дизъюнкты

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

2. Если  $\mu$  задана на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , то  $\mu^* A = \inf \{ \mu B : B \in \mathcal{A} \wedge A \subset B \}$

**Теорема 1.14.** Пусть  $\mu$  – мера на полукольце  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\mu^*$  – субмера, совпадающая с мерой  $\mu$  на полукольце  $\mathcal{P}$ .

**Доказательство.** 1.  $A \in \mathcal{P}$ , хотим доказать, что  $\mu A = \mu^* A$ .

” $\geq$ ”: очевидно, так как множество покрывает само себя.  $\mu^* A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A \}$

$$\text{”}\leq\text{”}: A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad \underbrace{\implies}_{\text{счетная полуаддитивность}} \quad \mu A_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \implies \mu A \leq \inf = \mu^* A$$

2.  $\mu^*$  – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \underbrace{\implies}_{?} \quad \mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \epsilon$$

$\mu^* A_n = \inf \dots$ , берем покрытие  $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$  т.ч.  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \epsilon$  и  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$  – устремляем  $\epsilon$  к нулю.

□

**Определение 1.18.** Стандартное продолжение меры – конструкция, полученная следующими действиями:

1. Берем меру  $\mu_0$  на полукольце  $\mathcal{P}$ .
2. Берем  $\mu_0^*$  – внешняя мера.
3. Сужаем полученную внешнюю меру на множество всех  $\mu_0^*$ -измеримых множеств.

Получилась полная мера  $\mu$  на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$  и  $\mu P = \mu_0 P$  для  $P \in \mathcal{P}$ .

Множества, содержащиеся в  $\mathcal{A}$ , назовем  $\mu$ -измеримыми.

**Теорема 1.15.** Это действительно продолжение, то есть  $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ .

**Доказательство.** Надо доказать, что  $E \in \mathcal{P} \wedge A \subset X$ ,  $\mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$ .

Рассмотрим случаи:

1.  $A \in \mathcal{P}$ .

$$\mu_0^* A = \mu_0 A, \quad \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$$

$$A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k, \quad Q_k \in \mathcal{P}$$

$$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k \implies \mu_0^* A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2.  $A \notin \mathcal{P}$ .

Если  $\mu_0^* A = +\infty$ , то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

Считаем, что  $\mu_0^* A < +\infty$ . Возьмем  $P_k \in \mathcal{P}$ , такое что  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$ .

Знаем, что  $\mu_0^* P_k \geq \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

$$\begin{aligned} \mu_0^* A + \epsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k &\geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E)) \geq \mu_0^*(A \cap E)} \\ &\geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0^* A \end{aligned}$$

□

**Замечание.** 1. Дальше меру и ее продолжение обозначаем как  $\mu$ .

Если  $A$  –  $\mu$ -измеримое множество, то  $\mu A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P} \}$

2. Стандартное продолжение, примененное к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

**Упражнение.** Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же внешнюю меру, что и  $\mu$ .

3. Можно ли распространить меру на более широкую  $\sigma$ -алгебру.

4.

**Определение 1.19.**  $\nu$  –  $\sigma$ -конечная мера на полукольце  $\mathcal{P}$ , если  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P_n \in \mathcal{P} \wedge \mu P_n < +\infty$ .

Можно ли по-другому продолжить на  $\sigma$ -алгебру  $\mu$ -измерим. мн-в?

Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на  $\mu$ -измеримых множествах.

Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная мера, то обязательно.

**Теорема 1.16.**  $\mu$  – стандартное продолжение меры с полукольца  $\mathcal{P}$ ,  $\mu^*$  – соответствующая внешняя мера,  $A \subset X$ ,  $\mu^* A < +\infty$ . Тогда  $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$ , такие что  $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$ ,  $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ ,  $C \supset A \wedge \mu^* A = \mu C$ .

**Доказательство.**  $\mu^* A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P} \}$ , берем покрытие с суммой  $< \mu^* A + \frac{1}{n}$ .

$$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \quad C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A.$$

$$\mu^* A \leq (\mu^* C = \mu C) \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$$

□

**Следствие.**  $\mu$  – стандартное продолжение с полукольца  $\mathcal{P}$ .  $A$  –  $\mu$ -измеримое мн-во и  $\mu A < +\infty$ . Тогда  $A = B \sqcup e$ , где  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$  и  $\mu e = 0$ .

**Доказательство.** Берем  $C \in \underbrace{\mathcal{B}(\mathcal{P})}_{\text{получаем автоматически}}$  из теоремы.  $A \subset C$ , и  $\mu A = \mu C$ .

$e_1 := C \setminus A$ ,  $\mu e_1 = 0$ , теперь подставляем  $e_1$  в теорему:

$$\text{найдется } e_2 : e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \wedge e_2 \supset e_1 \wedge \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A.$$

$$C \setminus e_2 \subset B \subset C, \quad \mu C = \mu C - \mu e_2 \leq \mu B \leq \mu C \implies \mu B = \mu A. \quad e = A \setminus B \implies \mu e = 0$$

□

**Теорема 1.17.** (Единственность продолжения).

$\mu$  – стандартное продолжение с полукольца  $\mathcal{P}$  на  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{A}$ .

$\nu$  – другая мера на  $\mathcal{A}$ , совпадающая с  $\mu$  на  $\mathcal{P}$ . Если  $\mu$  –  $\sigma$ -конечная, то  $\mu = \nu$ .

**Доказательство.** Если  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ,  $P_n \in \mathcal{P}$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \geq \nu A$  (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$$\mu A = \inf \{ \sum \mu P_n \} \geq \nu A.$$

Возьмем  $P \in \mathcal{P}$ ,  $A \in \mathcal{A}$ :  $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если  $\mu P < +\infty$ , то равенство вместо неравенства.

$$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$$

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k, \text{ т.ч. } \mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A \quad \square$$

## 1.4. Мера Лебега

**Теорема 1.18.** Классический объем  $\lambda_m$  на полукольце ячеек  $\mathcal{P}^m$  – мера.

**Доказательство.** Так как  $\lambda_m$  – объем, то нам необходимо проверить счетную полуаддитивность, то есть следующую стрелочку:

$$(a; b] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a^{(n)}; b^{(n)}) \underbrace{\implies}_{?} \lambda(a; b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a^{(n)}; b^{(n)}).$$

Берем  $\epsilon > 0$ .

Затем возьмем:

1.  $[a, b'] \subset [a, b]$  и  $\lambda_m[a, b] < \lambda_m[a, b'] + \epsilon$ .
2.  $(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \supset [a^{(n)}, b^{(n)})$  и  $\lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) < \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{\epsilon}{2^n}$ .

Тогда получаем, что  $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})}_{\text{открытое мн-во}} \implies$  существует конечное подпокрытие, то есть  $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})$ .

Далее можно написать ячейки и вложенность сохранится:

$$[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N [\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}).$$

Теперь давайте запишем конечную полуаддитивность для объема:

$$\lambda_m[a, b'] \underbrace{\leq}_{\text{кон. полуаддитивность}} \sum_{n=1}^N \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{\epsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \epsilon.$$

Теперь поймем, что у нас есть нер-во в другую сторону и мы можем зажать  $\lambda_m[a, b']$  с двух сторон:

$$\lambda_m[a, b] - \epsilon < \lambda_m[a, b'] < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \epsilon.$$

Переносим  $\epsilon$  в другую сторону и устремляем к 0:

$$\lambda_m[a, b] < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + 2\epsilon$$

$$\lambda_m[a, b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) - \text{получили, что хотели.} \quad \square$$

**Определение 1.20.** Мера Лебега в  $\mathbb{R}^m$  (обозначение  $\lambda_m$ ) – стандартное продолжение классического объема с  $\mathcal{P}^m$ .

$\sigma$ -алгебра, на которую все продолжилось, лебегевская  $\sigma$ -алгебра ( $\mathcal{L}^m$ ).

**Замечание.**  $\lambda_m A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : P_k - \text{ячейки и } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$ .

Можно вместо  $P_k \in \mathcal{P}^m$  писать  $P_k \in \mathcal{P}_Q^m$ .

**Свойства.** Свойства меры Лебега:

1. Открытое мн-во измеримо и мера непустого открытого  $> 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  - открытое,  $x \in G$ ,  $B$  – шар, накрывающий  $x$  и  $B \subset G$ , вписываем ячейку в шар.  $\square$

2. Замкнутое мн-во измеримо и мера одноточечного мн-ва  $= 0$ .

**Доказательство.** Берем точку и ячейку, которая ее накрывает (стороны по  $\epsilon$ ), тогда  $\lambda_m E_\epsilon = \epsilon^m \implies \inf = 0$ .  $\square$

3. Мера ограниченного мн-ва конечна.

**Доказательство.** Есть множество, его можно положить в шар, а шар в кубик.  $\square$

4. Всякое измеримое мн-во – объединение мн-в конечной меры.

**Доказательство.** Берем все  $\mathbb{R}^m$  и нарежем его на ячейки по целочисленной сетке, тогда  $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_k}_{\text{ячейки по сетке } \mathbb{Z}}$ , тогда  $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(P_k \cap E)}_{\text{ограничено и измеримо}}$ .  $\square$

5. Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$ , такое что  $\forall \epsilon > 0 : \exists A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$ .

$A_\epsilon \subset E \subset B_\epsilon$  и  $\lambda_m(B_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon$ , тогда  $E \in \mathcal{L}^m$

**Доказательство.**  $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$  и  $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$ .

$A \subset E \subset B$ ,  $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$ .

$\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$ .

$E \setminus A \subset B \setminus A \implies E \setminus A \in \mathcal{L}^m \implies E = E \setminus A \sqcup A \in \mathcal{L}^m$ .  $\square$

6. Пусть  $E \subset \mathbb{R}^m$ , такое что  $\forall \epsilon > 0 : \exists B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$ , такое что  $\lambda_m B_\epsilon < \epsilon$  и  $E \subset B_\epsilon$ .

Тогда  $E \in \mathcal{L}^m$  и  $\lambda_m E = 0$ .

**Доказательство.**  $A_\epsilon := \emptyset \xRightarrow{\text{свойство (5)}} E$  – измеримое.

$\lambda E \leq \lambda B_\epsilon < \epsilon \implies \lambda E = 0$ .  $\square$

7. Счетное объединение мн-в нулевой меры – мн-во нулевой меры.

8. Счетное мн-во имеет меру 0.

9. Мн-во нулевой меры не имеет внутренних точек.

**Доказательство.** Пусть  $x \in \text{Int} E \implies \underbrace{B_r(x)}_{\text{непустое и открытое}} \subset E \implies 0 < \lambda B_r(x) \leq \lambda E$ .  $\square$

10. Если  $\lambda e = 0$ , то существуют кубические ячейки  $Q_j$ , такие что  $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset e$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}^m} \wedge \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset e\}$ , нарезаем  $P_j$  на кубические ячейки.  $\square$

11. Если  $m \geq 2$ , то гиперплоскость  $H_k(c) := \{x \in \mathbb{R}^m : x_k = c\}$  имеет нулевую меру.

**Доказательство.**  $E_n := H_k(c) \cap (-n, n]^m$ ,  $H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Достаточно доказать, что  $\lambda E_n = 0$ .  $E_n \subset Y := (-n, n] \times \dots \times (-n, n] \times (c - \epsilon, c] \times (-n, n] \times \dots$

$\lambda E_n \leq \lambda Y = (2n)^{m-1} \cdot \epsilon$ , так как  $n$  фиксированное, а  $\epsilon$  – произвольное  $\implies \lambda E_n = 0$ .  $\square$

Любое мн-во, содержащееся в не более чем счетном объединении таких гиперплоскостей, имеет нулевую меру.

12.  $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b)$  – по предыдущему свойству.

**Замечание.** Свойства (5) и (6) – справедливы для любой полной меры.

**Замечание.** 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если  $m \geq 2$ , то пример это гиперплоскость  $H_1(c)$  подходит.

Если  $m = 1$ , то подходит [Канторово множество](#).

$$\lambda K = \underbrace{\lambda[0, 1] - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda I_k}_{1 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{27} \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0}$$

$K$  – несчетно,  $K = \{x \in [0, 1] : \text{в троичной записи нет цифр } 1\}$ , а у таких чисел есть биекция между  $[0, 1]$ , просто троичную переводим в двоичную, где просто все двойки заменяем на единички.

2. Существует неизмеримые мн-ва. Более того, любое мн-во положительной меры содержит неизмеримые подмножества.

**Теорема 1.19.** (Регулярность меры Лебега).

Если  $E$  – измеримое, то найдется  $G$  – открытое, такое что оно покрывает  $E$  и мера зазора  $< \epsilon$ , то есть  $E \subset G \wedge \lambda(G \setminus E) < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $\lambda E = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \text{ – ячейка и } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$ .

(1): Пусть  $\lambda E < +\infty$ . Возьмем покрытие, для которого  $\sum \lambda P_j < \lambda E + \epsilon$ .

$(a_j, b_j] \subset (a_j, b'_j)$ , хотим  $\lambda(a_j, b'_j) < \lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}$ .

Тогда  $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b'_j)$  – открытое и  $E \subset G$ .

$\lambda G \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j] < \lambda E + 2\epsilon \implies \lambda(G \setminus E) < 2\epsilon$

(2): Пусть  $\lambda E = +\infty$ .  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , такие что  $\lambda E_n < +\infty$ .

Возьмем  $G_n$  – открытое  $\supset E_n$ , такое что  $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$ .



$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  – открытое  $G \supset E$ .

$$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \implies \lambda(G \setminus E) \leq \sum \lambda(G_n \setminus E_n) < \underbrace{\sum \frac{\epsilon}{2^n}}_{=\epsilon}. \quad \square$$

**Следствие.** 1. Если  $E$  – измеримо, то найдется  $F \subset E$  – замкнутое, такое что  $\lambda(E \setminus F) < \epsilon$ .

**Доказательство.**  $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$ , такое что  $\lambda(\underbrace{G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E)}_{=E \setminus (\mathbb{R}^m \setminus G)=E \setminus F}) < \epsilon$ , где  $F := \mathbb{R}^m \setminus G$  – замкнутое и  $F \subset E$ .  $\square$

2. Если  $E$  – измеримо, то

$$\lambda E = \inf\{\lambda G : G \text{ – открытое и } G \supset E\}.$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda F : F \text{ – замкнуто и } F \subset E\}$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda K : K \text{ – компакт и } K \subset E\}$$

**Доказательство.**  $\lambda(G \setminus E) < \epsilon \implies \lambda E \leq \lambda G < \lambda E + \epsilon$

$$\lambda(E \setminus F) < \epsilon \implies \lambda E \geq \lambda F > \lambda E - \epsilon$$

Возьмем  $F$  – замкнутое из второго вывода и  $K_n := [-n, n]^m \cap F$  – компакт.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$  и  $K_n \subset K_{n+1} \implies \lambda F = \lim \lambda K_n$

Если  $\lambda F = +\infty$ , то есть  $K_n$  со сколь угодно большой мерой.

Если  $\lambda F < +\infty$ , то есть  $K_n$ , такие что  $\lambda F < \lambda K_n + \epsilon$   $\square$

3. Если  $E$  – измеримо, то существует последовательность компактов  $K_n$ , такая что компакты  $K_n \subset K_{n+1}$  и  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$ , где  $\lambda e = 0$ .

**Доказательство.** (1) Пусть  $\lambda E < +\infty$ . Возьмем  $\tilde{K}_n \subset E \wedge \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n}$

$$K_n := \bigcup_{j=1}^n \tilde{K}_j \subset E, \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n} \leq \lambda K_n + \frac{1}{n}.$$

$$e := E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \lambda e = \lambda E - \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) < \lambda E - \lambda K_n < \frac{1}{n} \implies \lambda e = 0.$$

(2) Пусть  $\lambda E = +\infty$ . Берем  $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j : \lambda E_j < +\infty$ .

$$E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_{jn}}_{\text{компакт}} \cup e_j (\lambda e_j = 0) \implies E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{jn} \cup e, \text{ где } e = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \wedge \lambda e = 0.$$

Нам не хватает вложенности, давайте просто пообъединяем их и получим новые компакты (вроде так, поправьте, если нет).  $\square$

**Упражнение.**  $E$  – измеримое. Д-ть, что  $\exists G_n$  – открытое  $\supset E$ ,  $G_n \supset G_{n+1}$ , т.ч.  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$ , где  $\lambda e = 0$ .

**Теорема 1.20.** При сдвиге мн-ва на вектор  $\vec{v}$  измеримость сохраняется и мера не изменяется.

**Доказательство.**  $\mu E := \lambda(E + \vec{v})$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  заданы на ячейках и на них совпадают  $\implies \mu = \lambda$  по единственности продолжения.  $\square$

**Теорема 1.21.**  $\mu$ -мера на  $\mathcal{L}^m$ , т.ч.

1.  $\mu$  – инвариантна относительно сдвигов.

2.  $\mu$  конечна на ячейках =  $\mu$  конечна на огр. измер. мн-вах.

Тогда  $\exists k \in [0; +\infty)$ , т.ч.  $\mu = k \cdot \lambda$  (т.е.  $\mu E = k\lambda E \forall E \in \mathcal{L}^m$ )

**Доказательство.**  $Q := (0, 1]^m$ ,  $k := \mu Q$ ,  $k \in [0, +\infty)$

Рассмотрим случаи:

1.  $k = 1$ . Надо доказать, что  $\mu = \lambda$ , достаточно доказать, что  $\mu = \lambda$  на  $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies$  достаточно доказать на  $(0, \frac{1}{n}]^m$ .  
 $Q$  можно сложить из  $n^m$  сдвигов  $(0, \frac{1}{n}]^m$ .  
 $\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{1}{n^m} \mu Q = \frac{1}{n^m} \lambda Q = \lambda(0, \frac{1}{n}]^m$ .
2.  $k > 0$ .  $\nu E := \frac{1}{k} \mu E$ . Тогда  $\nu Q = \lambda Q \implies \nu = \lambda$ .
3.  $k = 0$ . Покажем, что  $\mu \equiv 0$ .  
 $\mu Q = 0$ ,  $\mathbb{R}^m$  – счетное объединение сдвигов  $Q \implies \mu \mathbb{R}^m = 0$ .

□

**Теорема 1.22.**  $G \subset \mathbb{R}^m$  – открытое,  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывно дифференцируема. Тогда

1. Если  $e \subset G$ , т.ч.  $\lambda e = 0$ , то  $\Phi(e)$  – мн-во нулевой меры.
2. Если  $E$  – измеримое, то  $\Phi(E)$  – измеримое.

**Замечание.** Для  $\Phi$  – непрер. или даже дифф. это неверно.

**Доказательство.** Пункт (1):

Случаи:

1.  $e \subset P \subset CLP \subset G$ ,  $P$  – ячейка  $\implies \|\Phi'\|$  непрерывно на  $G \supset Cl P$  – компакт  $\implies \|\Phi'\| \leq M$  на  $Cl P$  (норма ограничена на замыкании  $P$ ).  
 $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \|\Phi'(c)\| \cdot \|x - y\|$ , где  $x, y \in P$ ;  $c \in P \implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M\|x - y\|$   
 Существуют кубические ячейки, такие что  $Q_j$ , т.ч.  $e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$   
 Рассмотрим  $\Phi(Q_j)$   
 Пусть  $a_j$  – сторона кубика  $Q_j$ .  $x, y \in Q_j \implies \|x - y\| < \sqrt{m} \cdot a_j$  (расстояние между точками меньше, чем главная диагональ, так как у нас ячейка)  $\implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M\sqrt{m}a_j$ .  
 Зафиксируем  $x$  и меняем  $y \implies \Phi(Q_j)$  содержится в шаре с центром в  $\Phi(x)$  и радиусом  $M\sqrt{m}a_j \implies \Phi(Q_j)$  содержатся в ячейке  $R_j$  со стороной  $2M\sqrt{m}a_j$ .  
 $\Phi(Q_j) \subset R_j \implies \Phi(e) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$   
 $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda R_j = \sum_{j=1}^{\infty} (2M\sqrt{m})^m a_j^m = (2M\sqrt{m})^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < (2M\sqrt{m})^m \cdot \epsilon \implies \Phi(e)$  измеримо и  $\lambda(\Phi(e)) = 0$ .
2.  $e$  – произвольное  $\subset G$ ,  $\lambda e = 0$ . Представим  $G$  как  $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$ , где  $P_j$  – ячейка  $Cl P_j \subset G$ .  
 $e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (e \cap P_j) \implies \Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j)$  – мн-ва нулевой меры  $\implies \lambda(\Phi(e)) = 0$ .

Пункт (2):

$E$  – измеримое  $\implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$ ,  $\lambda e = 0$ ,  $K_n$  – компакт  $\implies \Phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n) \cup \Phi(e)$ .  
 $\lambda(\Phi(e)) = 0$  и  $\Phi(K_n)$  – компакт  $\implies$  измеримое. □

**Теорема 1.23.**  $\lambda$  – инвариантна относительно движения.

**Доказательство.** Движение – это сдвиг и поворот.

Про сдвиг уже знаем, что  $\lambda$  не меняется. Проверим поворот:

пусть  $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  (считаем, что крутим относительно нуля, так как можно в ноль сдвинуть).

$\mu E := \lambda \underbrace{(UE)}_{\text{измеримое, так как } U - \text{линейное отображение}}, \mu, \lambda - \text{заданы на } \mathcal{L}^m.$

$\mu$  – инварианта относительно сдвига.  $\mu(E + \vec{v}) = \lambda(U(E + \vec{v})) = \lambda(UE + U\vec{v}) = \lambda(UE) = \mu E$ .  $\mu$  конечна на ограниченных измеримых мн-вах. Тогда  $\mu = k\lambda$ .

Хотим показать, что  $k = 1$ . Но на единичном шаре  $B$ ,  $\lambda B = \mu B \implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$ .  $\square$

**Теорема 1.24.** (Об изменении меры Лебега при линейном отображении).

$T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  – линейное,  $E$  – измеримое. Тогда  $\lambda(TE) = |\det T| \cdot \lambda E$

**Доказательство.**  $\mu E := \lambda \underbrace{(TE)}_{\text{измеримое, так как } T - \text{лин. отображ.}}, \mu \text{ инвариантно относительно сдвига и}$

конечно на огр. мн-вах.  $\implies \mu k \cdot \lambda$ , где  $k = \lambda(T[0, 1]^m) = |\det T|$

$\square$

**Пример.** неизмеримое мн-во в  $\mathbb{R}$ .

$x \sim y$  если  $(x - y) \in \mathbb{Q}$  – отношение эквивалентности.

Разобьем  $\mathbb{R}$  на классы эквивалентности и в каждом классе выберем своего представителя, сдвинем их всех в ячейку  $(0, 1]$ .

$A$  – получившееся мн-во. Докажем, что  $A$  не может быть измеримым.

От противного. Если  $\lambda A = 0$ , то  $(0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r) = \mathbb{R}$ . Но тогда  $\lambda A = 0 \implies \lambda(A + r) = 0 \implies \lambda \mathbb{R} = 0$  – противоречие.

Если  $\lambda A > 0$ .  $\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} (A + r) \subset (0, 2] \implies \sum_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} \lambda(A + r) \leq 2 \implies$  противоречие (так как сумма, на самом деле, должна быть бесконечна и никак не меньше 2).

То есть мы построили пример неизмеримого множества.

## 2. Интеграл Лебега

## 2.1. Измеримые функции

**Определение 2.1.**  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , лебеговы мн-ва функции  $f$ :

$$E\{f \leq a\} := \{x \in E : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

$$E\{f < a\} := \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$$

$$E\{f \geq a\} := \{x \in E : f(x) \geq a\}$$

$$E\{f > a\} := \{x \in E : f(x) > a\}$$

**Теорема 2.1.**  $E$  – измеримое,  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , тогда равносильны:

1.  $E\{f \leq a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
2.  $E\{f < a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
3.  $E\{f \geq a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$
4.  $E\{f > a\}$  измеримы  $\forall a \in \mathbb{R}$

**Доказательство.** 1.  $(1) \Leftrightarrow (4) : E\{f > a\} = E \setminus E\{f \leq a\}$

$$2. (2) \Leftrightarrow (3) : E\{f < a\} = E \setminus E\{f \geq a\}$$

$$3. (1) \Rightarrow (2) : E\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \leq a - \frac{1}{n}\}$$

$$4. (3) \Rightarrow (4) : E\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \geq a + \frac{1}{n}\}$$

□

**Определение 2.2.**  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая  $\forall a \in \mathbb{R}$  все ее лебеговы мн-ва измер.

**Замечание.**  $E$  – должно быть измеримое и достаточно измеримости любого множества одного типа.

**Пример.** 1.  $f = \text{const}$ , лебеговы множества:  $\emptyset, X$ .

$$2. E \subset X \text{ – измеримое, } f = 1_E(x) = 1, \text{ если } x \in E, \text{ иначе } 0.$$

Лебеговы множества:  $\emptyset, X, E, X \setminus E$ .

$$3. \mathcal{L}^m \text{ – лебеговская } \sigma\text{-алгебра на } \mathbb{R}^m$$

$$f \in C(\mathbb{R}^m) \text{ – измеримая.}$$

$$\underbrace{f^{-1}((-\infty, a))}_{\text{измеримое}} \text{ – открытое} \implies \text{измеримое.}$$

**Свойства.** 1.  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая  $\implies E$  – измеримое.

$$2. \text{ Если } f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ измеримая и } E_0 \subset E \implies g := f|_{E_0} \text{ – измеримое.}$$

$$\text{Доказательство. } E_0\{g \leq c\} = E\{\underbrace{f \leq c}_{\text{измеримое}}\} \cap \underbrace{E_0}_{\text{измеримое}}.$$

□

$$3. \text{ Если } f \text{ – измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое мн-во.}$$

$$\text{Доказательство. } E\{a \leq f \leq b\} = E\{\underbrace{a \leq f}_{\text{измеримое}}\} \cap E\{\underbrace{f \leq b}_{\text{измеримое}}\}.$$

□

4. Если  $f$  – измеримая, то прообраз любого открытого мн-ва – измеримое.

**Доказательство.**  $U \subset \mathbb{R}$  – открытое мн-во  $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \implies f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{измеримое}})$ .  $\square$

5. Если  $f$  – измеримая, то  $|f|$  и  $-f$  – измеримы.

**Доказательство.**  $E\{-f \leq c\} = E\{f \geq -c\}$ ,  $E\{|f| \leq c\} = E\{-c \leq f \leq c\}$ .  $\square$

6. Если  $f, g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  измеримы, то  $\max\{f, g\}$  и  $\min\{f, g\}$  – измеримы.

В частности,  $f_+ = \max\{f, 0\}$  и  $f_- = \max\{-f, 0\}$  – измеримы.

**Доказательство.**  $E\{\max\{f, g\} \leq c\} = E\{f \leq c\} \cap E\{g \leq c\}$   $\square$

7. Если  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $f|_{E_n}$  – измерима  $\forall n \implies f$  – измеримая.  
 $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ .

**Доказательство.**  $E\{f \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\{f \leq c\}$ .  $\square$

8. Если  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  измерима, то найдется  $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая, такая что  $f = g|_E$

**Доказательство.**  $g(x) := 0$ , если  $x \notin E$ ,  $f(x)$ , иначе.  $\square$

**Теорема 2.2.** Пусть  $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – последовательность измеримых функций. Тогда:

1.  $\sup f_n$ ,  $\inf f_n$  – измеримые.
2.  $\underline{\lim} f_n$  и  $\overline{\lim} f_n$  – измеримые.
3. Если существуют  $\lim f_n$ , то он измеримый.

**Доказательство.** 1.  $E\{\sup f_n \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{f_n \leq c\}$

2.  $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$  и  $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$

3. Если существует  $\lim f_n$ , то  $\lim f_n = \underline{\lim} f_n$ .  $\square$

**Теорема 2.3.** Пусть  $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow H \subset \mathbb{R}$  – измеримые,  $\phi \in C(H)$ , тогда  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := \phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$  – измеримая.

**Доказательство.**  $E\{g < c\} = g^{-1}(-\infty, c) = \vec{f}^{-1}(U) = \vec{f}^{-1}(G)$

$U := \phi^{-1}(-\infty, c)$  – открытое в  $H \implies \exists G$  – открытое в  $\mathbb{R}^m$ , т.ч.  $U = H \cap G$   
 $\implies G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$

Достаточно понять для ячейки  $(\alpha, \beta]$ , что  $\vec{f}^{-1}(\alpha, \beta]$  – измерима,  $\bigcup_{k=1}^n E\{\alpha_k < f_k \leq \beta_k\}$   $\square$

**Следствие.** Если в теореме  $\phi$  – поточечный предел непрерывных, то  $g$  – измерима.

**Доказательство.**  $\phi = \lim \phi_n$ ,  $\phi_n \vec{f}$  – измер. и поточечно стремится к  $\phi_0 \vec{f}$  □

Арифметические операции в  $\mathbb{R}$ :

1. Если  $x \in \mathbb{R}$ , то  $x + (+\infty) = +\infty$ ,  $x + (-\infty) = -\infty$  и т.д.
2.  $(+\infty) + (-\infty) = 0$ ,  $(+\infty) - (+\infty) = 0$ ,  $(-\infty) - (-\infty) = 0$
3. Если  $0 \neq x \in \bar{\mathbb{R}}$ , то  $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ , где знак  $\pm$ :  $\pm : \pm = +$ ,  $\pm : \mp = -$
4.  $0 \cdot \pm\infty = 0$  и  $\frac{x}{\pm\infty} = 0$ ,  $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}$ , т.е.  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$ .
5. Делить на 0 не умеем.

**Теорема 2.4.** 1. Произведение и сумма измеримых функций – измеримая.

2. Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримая и  $\phi \in C(\mathbb{R})$ , то  $\phi \circ f$  – измеримая.
3. Если  $f \geq 0$  – измеримая, то  $f^p$  ( $p > 0$ ) – измеримая,  $(+\infty)^p = +\infty$
4. Если  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – измеримая,  $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$ , то  $\frac{1}{f}$  – измерима на  $\tilde{E}$ .

**Доказательство.** 1.  $f + g$ . Для каждой функции рассмотрим три множества:

$$\begin{aligned} &E\{f \neq \pm\infty\}, E\{f = +\infty\}, E\{f = -\infty\} \\ &E\{g \neq \pm\infty\}, \underbrace{E\{g = +\infty\}, E\{g = -\infty\}}_{=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\{g \geq n\}} \end{aligned}$$

Для конечного случая  $(E\{f \neq \pm\infty\} \cap E\{g \neq \pm\infty\})$  можем сослаться на предыдущую теорему, взяв в качестве непрерывной  $\phi(f, g) = f + g$ .

На остальных случаях тоже рассматриваем  $f + g$ : измеримость будет, т.к.  $f + g = \text{const.}$

2. Частный случай предыдущей теоремы.

3.  $E\{f^p \leq c\} = E\{f \leq c^{\frac{1}{p}}\}$
4.  $f|_{\tilde{E}}$  – измерима и  $\neq 0$

$$\tilde{E} \left\{ \frac{1}{f} \leq c \right\} = \begin{cases} \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cup \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c > 0 \\ \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c = 0 \\ \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cap \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c < 0 \end{cases} \quad (3)$$

□

**Следствие.** 1. Произведение конечного числа измер. – измер.

2. Натуральная степень измер. функции – измер.
3. Линейная комбинация измер. функций – измер.

**Теорема 2.5.**  $E \subset \mathbb{R}^m$  – измеримое,  $f \in C(E)$ . Тогда  $f$  – измер. относительно меры Лебега.

**Доказательство.**  $U := f^{-1}(-\infty, c)$  – открытое мн-во в  $E \implies \exists G \subset \mathbb{R}^m$  – открытое, т.ч.  $U = \underbrace{G}_{\text{измер.}} \cap \underbrace{E}_{\text{измер.}}$  ( $E$  измеримо по условию, а  $G$  измеримо в  $\sigma$ -алгебре) □

**Определение 2.3.** Измеримая функция – простая, если она принимает лишь конечное число значений.

Допустимое разбиение  $X$  – разбиение  $X$  на конечное число измеримых множеств, таких что на каждом множестве простая функция константна.

**Следствие.** 1. Если  $X$  разбито на конечное число измер. мн-в и  $f$  постоянна (то есть сужение на каждом кусочке  $X$  это какая-то константа) на каждом из них, то  $f$  – простая.

2. Если  $f$  и  $g$  – простые функции, то у них существует общее допустимое разбиение.

**Доказательство.**  $X = \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^m A_k}_{\text{допуст. для } f} = \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^n B_j}_{\text{допуст. для } g} \implies X = \bigsqcup_{k=1}^m \bigsqcup_{j=1}^n (A_k \cap B_j)$  – допустимое для  $f$  и  $g$ . □

3. Сумма и произведение простых функций – простая функция.

4. Линейная комбинация простых функций – простая функция.

5.  $\max$  и  $\min$  конечного числа простых функций – простая функция.

**Теорема 2.6.** (О приближении измеримых функций простыми)

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  – неотрицательная измеримая функция, тогда  $\exists$  последовательность простых функций  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , такие что  $\phi_i \leq \phi_{i+1} : \forall i$  в каждой точке и  $\lim \phi_n = f$ . Более того, если  $f$  – ограничена сверху, то можно выбрать  $\phi_n$  так, что  $\phi_n \rightrightarrows f$  на  $X$ .

**Доказательство.**  $\Delta_k^{(n)} := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$  при  $k = 0, \dots, (n^2 - 1)$  и  $\Delta_{n^2}^{(n)} := [n, +\infty]$ .

$[0, +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k$ ,  $A_k^{(n)} := f^{-1}(\Delta_k^{(n)})$  – измер. мн-во.

$\phi_n$  на  $A_k$  равно  $\frac{k}{n} \implies 0 \leq \phi_n(x) \leq f(x) \forall x$  и  $f(x) \leq \phi_n(x) + \frac{1}{n}$  при  $x \notin A_{n^2}$ .

$\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ :

1. если  $f(x) = +\infty$ , то  $x \in A_{n^2}^{(n)} \forall n \implies \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$

2. если  $f(x) \neq +\infty$ , то  $x \notin A_{n^2}^{(n)}$  при больших  $n \implies f(x) - \frac{1}{n} \leq \phi_n(x) \leq f(x)$

Для добавления монотонности берем не каждое  $n$ , а только степени двойки, тогда нам нужно взять  $\psi_n = \max\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  (тут должна быть картинка)

Равномерность: если  $f$  ограничена, начиная с некоторого момента  $A_{n^2}$  пусто  $\implies$  все  $x \notin A_{n^2} \implies \forall x \in E \ f(x) - \frac{1}{n} < \phi_n(x) \leq f(x) \implies |\phi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \implies$  есть равномерная сходимость. □

## 2.2. Последовательности измеримых функций

Напоминание.  $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

Поточечная сходимость:  $f_n \rightarrow f, \forall x \in E : f_n(x) \rightarrow f(x)$

Равномерная сходимость:  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E, \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

**Определение 2.4.**  $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримые.

$f_n$  сходится к  $f$  **почти везде**, если  $\exists e \subset E, \mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$



**Замечание.** Обозначение:  $\mathcal{L}(E, \mu) = \{f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} - \text{измеримые}, \mu E\{f = \pm\infty\} = 0\}$

Пусть  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ ,  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

$\exists e \subset E, \mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$

**Определение 2.5.**  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ ,  $f_n$  сходится по мере  $\mu$  к  $f$ , если  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\mu E\{|f_n - f| > \varepsilon\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $f_n \Rightarrow_\mu f$

**Замечание.** Зависимость: равномерная  $\implies$  (поточечная  $\implies$  почти везде)  $|$  (сходимость по мере).

Равномерная  $\implies$  поточечная – знаем.

Поточечная  $\implies$  почти везде – у нас уже есть сходимость во всех точках, поэтому для “почти везде” ничего не надо выкидывать.

Равномерная  $\implies$  сходимость по мере – начиная с некоторого момента  $E\{|f_n - f| > \varepsilon\}$  будет пустым множеством по определению равномерной сходимости.

**Утверждение 2.7.** 1. Если  $f_n$  сходится к  $f$  п.в. (почти везде) и  $f_n$  сходится к  $g$  п.в., то  $f = g$  (за исключением мн-ва нулевой меры)

2. Если  $f_n \Rightarrow_\mu f$  и  $f_n \Rightarrow_\mu g$ , то  $f = g$  за исключением мн-ва нулевой меры.

**Доказательство.** 1. Берем  $e \subset E, \mu e = 0$  и  $\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in E \setminus e$

$\tilde{e} \subset E, \mu \tilde{e} = 0$  и  $\lim f_n(x) = g(x), \forall x \in E \setminus \tilde{e}$

Тогда на  $E \setminus (e \cup \tilde{e})$   $\lim f_n(x) = g(x)$  и  $\lim f_n(x) = f(x) \implies f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus (e \cup \tilde{e})$

2.  $\mu E\{f \neq g\} \underset{?}{=} 0, E\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\{|f - g| > \frac{1}{k}\}.$

Достаточно доказать, что  $\mu E\{|f - g| \geq \epsilon\} = 0$ .

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{\mu=0 \text{ ?}} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

Знаем, что  $\mu E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \rightarrow 0$

$\bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$  вложены по убыванию

$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \dots = \lim_N \left( \mu \bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \right) \leq \lim_N (\mu E\{|f_N - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) = 0$

□

**Теорема 2.8. Лебега.**

$f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$

Пусть  $\mu E < +\infty$  и  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

Тогда  $f_n$  сходится к  $f$  по мере  $\mu$ .

**Доказательство.** Найдется  $e \subset E, \mu e = 0$ , т.ч.  $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

Выкинем  $e$  и будем говорить про поточечную сходимость.

Надо доказать, что  $A_n := E\{|f_n - f| > \epsilon\}, \mu A_n \rightarrow 0$ .

1. Частный случай  $(f_n \searrow 0)$ :  $A_n = E\{f_n > \epsilon\} \supset A_{n+1}$ .

$$\lim \mu A_n = \mu \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mu \emptyset = 0.$$

Пусть  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies 0 \leftarrow f_n(x) > \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \implies$  таких  $x$  не существует.

2. Общий случай:  $g_n(x) := \sup_{k \geq n} \{|f_k(x) - f(x)|\}$ .  $g_n(x) \searrow$ , т.к. множество уменьшается.

$$\lim g_n(x) = \lim_n \sup_{k \geq n} \{\dots\} = \overline{\lim_n |f_n(x) - f(x)|} = \lim |f_n - f| = 0$$

$$\implies \underbrace{\mu E\{g_n > \epsilon\}}_{\rightarrow 0} \geq \mu E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

$$E\{g_n > \epsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

□

**Замечание.** 1. Условие  $\mu E < +\infty$  существенно.

$$E = \mathbb{R}, \mu = \lambda, f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)} \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f \equiv 0$$

$$\lambda E\{f_n > \epsilon\} = +\infty \not\rightarrow 0.$$

2. Обратное неверно. Более того, может быть сходимость по мере и расходимость во всех точках вообще:  $E = [0, 1)$ ,  $\mu = \lambda$

$$\mathbb{1}_{[0,1)} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{3})} \mathbb{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})} \mathbb{1}_{[\frac{2}{3}, 1)} - \text{ни для какого аргумента нет предела: } [0, \frac{1}{n}) [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \dots [\frac{n-1}{n}, 1)$$

**Теорема 2.9. Рисса.**

$f, f_n \in \mathcal{L}(E, \mu)$ . Если  $f_n \Rightarrow_{\mu} f$ , то существует подпоследовательность  $f_{n_k}$ , т.ч.  $f_{n_k}$  сходится к  $f$  почти везде.

**Доказательство.**  $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Выберем  $n_k$  так, что  $n_k > n_{k-1}$ , и  $\underbrace{\mu E\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}}_{=: A_k} < \frac{1}{2^k}$

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \mu B_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \implies \underbrace{\mu B_n}_{\mu B_n \rightarrow 0} = 0, \text{ проверим, что если } x \notin B, \text{ то } f_{n_k}(x) \rightarrow f(x), \text{ где } B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$x \notin B \implies \exists m, \text{ т.ч. } x \notin B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$$

$$\implies x \notin A_k \forall k \geq m \implies \forall k \geq m \underbrace{|f_{n_k}(x) - f(x)|}_{\rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0} \leq \frac{1}{k}$$

□

**Следствие.** Если  $f_n \leq g$  и  $f_n \Rightarrow_{\mu} f$ , то  $f \leq g$  за исключением мн-ва нулевой меры.

**Доказательство.** Выберем  $f_{n_k}$  сходится к  $f$  почти везде. Пусть  $e$  – исключ. мн-во  $\mu e = 0$ .

$$\lim_{\substack{f_{n_k} \\ \leq g(x)}} = f(x) : \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq g(x) \text{ при } x \in E \setminus e$$

□

**Теорема 2.10. Фреше.**

Если  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  измерима относительно  $\lambda_m$  (мера Лебега), то  $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$ , т.ч.  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде.

**Теорема 2.11. Егорова.**

Пусть  $\mu E < +\infty$ ,  $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ . Если  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде, то найдется  $e \subset E$ ,  $\mu e < \epsilon$ , т.ч.  $f_n \Rightarrow f$  на  $E \setminus e$ .

**Теорема 2.12. Лузина.**

$E \subset \mathbb{R}^m$  – измеримо,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  – измерима (относительно  $\lambda_m$  – мера Лебега). Тогда найдется  $e \subset E$ ,  $\mu e < \epsilon$ , т.ч.  $f|_{E \setminus e}$  – непрерывна.

Фреше + Егоров  $\Rightarrow$  Лузин:

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  – измеримое  $\xLeftrightarrow[\text{Фреше}]{\text{Егоров}} \exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$ ,  $f_n$  сходится к  $f$  почти везде  $\xLeftrightarrow[\text{Егоров}]{\text{Фреше}} \exists e : \lambda_m e < \epsilon$ , т.ч.  $f_n \xRightarrow[\mathbb{R}^m \setminus e]{} f$ , равномерный предел непрерывной функции – непрерывная функция.

**2.3. Определение интеграла**

**Лемма.** Пусть  $f \geq 0$  простая функция  $A_1, \dots, A_n$  и  $B_1, \dots, B_m$  – допустимые разбиения.

$a_1, \dots, a_n$  и  $b_1, \dots, b_m$  значения  $f$  на соответственных мн-вах.

Тогда  $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j)$ .

**Доказательство.**  $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = (1)$

$\sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_j \mu(E \cap B_j \cap A_k) = (2)$

$(1) \underset{?}{=} (2).$

$a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = b_j \mu(E \cap A_k \cap B_j)$

если  $A_k \cap B_j \neq \emptyset$ , то  $a_k = b_j$ , если  $A_k \cap B_j = \emptyset$ , то  $\mu(\dots) = 0$ .

Условие  $f \geq 0$  важно, т.к. в ином случае могли бы получиться  $\infty$  разных знаков и равенство зависело бы от порядка сложения.  $\square$

**Определение 2.6.**  $f \geq 0$  простая,  $\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k)$ , где  $A_1, \dots, A_n$  – допустимые разбиения ( $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$ ),  $a_1, \dots, a_n$  – соответст. значения.

**Свойства.** 1.  $\int_E c d\mu = c \mu E$ ,  $c \geq 0$

2. Если  $f, g$  – простые и  $0 \leq f \leq g$ , то  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

3. Если  $f, g \geq 0$  – простые, то  $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

4. Если  $c \geq 0$  и  $f \geq 0$  – простая, то  $\int_E c f d\mu = c \cdot \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$  – общее допустимое разбиение,  $a_k, b_k$  – значения на  $A_k$ .

3.  $\int_E (f + g) d\mu = \sum (a_k + b_k) \mu(E \cap A_k) = \sum a_k \mu(A_k \cap E) + \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

2.  $\int_E f d\mu = \sum a_k \mu(A_k \cap E) \leq \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E g d\mu$   $\square$

**Определение 2.7.** Интеграл от неотриц. измеримой ф-ции  $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $f \geq 0$ .

$\int_E f d\mu := \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая и } 0 \leq \phi \leq f \}$

**Определение 2.8.** Интеграл от измеримой функции

$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$  (если тут  $+\infty - (+\infty)$ , то интеграл не определен)

**Замечание.** Новое определение на простых функциях совпадает со старым.

**Доказательство.**  $f \geq 0$  – простая  $\implies$

(1):  $\phi = f$  подходит (новое  $\geq$  старое, т.к. берем супремум).

(2):  $\phi \leq f \implies \int_E \phi d\mu \leq \int_E f d\mu$  (sup  $\leq$  старое, т.к. задали  $\phi : 0 \leq \phi \leq f$ ).

(3): В определении для произвольных измеримых:  $\int_E (f)_- d\mu = 0$  □

**Свойства.** 1. Если  $0 \leq f \leq g \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

2. Если  $\mu E = 0 \implies \int_E f d\mu = 0$

3.  $f$  – измеримая  $\implies \int_E f d\mu = \int_X \mathbb{1}_E f d\mu$

**Доказательство.** Проверим для  $f_{\pm}$ :

$\int_E f_+ d\mu = \sup\{\int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq f_+\} = \sup\{\int_X \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq \mathbb{1}_E f_+\} = \int_X \mathbb{1}_E f_+ d\mu$  (в одном случае сужаем  $\phi$  на множество  $E$ , в другом – дополняем нулями на  $X \setminus E$ ) □

4. Если  $f \geq 0$  – измеримая,  $A \subset B$ , то  $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$ .

**Доказательство.**  $\int_A f d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu \leq \int_X \mathbb{1}_B f d\mu = \int_B f d\mu$ . □  
т.к.  $\mathbb{1}_A f \leq \mathbb{1}_B f$

**Упражнение.** Доказать, что  $\int_{[1;+\infty)} \frac{\sin x}{x} d\lambda_1$  не определен.

**Теорема 2.13. Беппо Леви.**

Пусть  $f_n \geq 0$  – измеримые функции,  $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , последовательность поточечно возрастающая  $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$   $f(x) := \lim f_n(x)$  – поточечный предел.

Тогда  $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$ .

**Доказательство.** (1):  $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(2):  $f_n \leq f_{n+1} \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu$

(1) и (2)  $\implies \exists L := \lim \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

Осталось проверить, что  $L \geq \int_E f d\mu$  (можно считать, что  $L < +\infty$  т.е. конечна, иначе утверждение очевидно).

$\int_E f d\mu = \sup\{\int_E \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ – простая}\}$

Достаточно доказать, что  $L \geq \int_E \phi d\mu$  для  $\phi$  – простая и  $0 \leq \phi \leq f$ .

Возьмем  $0 < \theta < 1$  и докажем, что  $L \geq \int_E \theta \phi d\mu$ :

$E_n := E\{f_n \geq \theta \phi\}, f_n \nearrow \implies E_n \subset E_{n+1}$ . Покажем, что  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Пусть  $x \in E$ :

1. если  $\phi(x) = 0$ , то  $\forall n : x \in E_n$

2. если  $\phi(x) > 0$ , то  $\lim f_n(x) = f(x) \geq \phi(x) > \theta \phi(x) \xRightarrow{\text{при больших } n} f_n(x) > \theta \phi(x) \xRightarrow{\text{при больших } n} x \in E_n$

Посмотрим на  $\underbrace{\int_E f_n d\mu}_{(*)} \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \underbrace{\int_{E_n} \theta \phi d\mu}_{(**)}$ .

Переходим к пределу  $n \rightarrow \infty$  :  $\underbrace{L}_{\text{получили из (*)}} \geq \underbrace{\int_E \theta \phi d\mu}_{\text{это нужно понять для (**)}}$

Осталось понять, что  $\underbrace{\int_{E_n} \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(E_n \cap A_k)} \rightarrow \underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \mu(E \cap A_k)}$ .

Поймем, что  $\mu(E_n \cap A_k) \rightarrow \mu(E \cap A_k)$  – непрерывность меры снизу,  $E_n \cap A_k \subset E_{n+1} \cap A_k$  и  $\bigcup_{k=1}^\infty (E_n \cap A_k) = E \cap A_k$ .  $\square$

**Свойства.** Продолжаем писать свойства:

5.  $f, g \geq 0$  – измеримые  $\implies \int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$  – аддитивность.

6.  $f \geq 0, \alpha \geq 0 \implies \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$  – однородность.

7.  $\alpha, \beta \geq 0, f, g \geq 0$  – измеримые, тогда  $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

**Доказательство.** 5.  $f \geq 0$  измеримая  $\implies \exists 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$  – простые, причем  $\phi_n \rightarrow f$  поточечно.

$g \geq 0$  измеримая  $\implies \exists 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots$  – причем  $\psi_n \rightarrow g$  поточечно.

$\implies 0 \leq \phi_1 + \psi_1 \leq \dots$  простые и  $\phi_n + \psi_n \rightarrow f + g$ .

$$\underbrace{\int_E (\phi_n + \psi_n) d\mu}_{\rightarrow \int_E (f+g) d\mu} = \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{\substack{\rightarrow \int_E f d\mu \\ \text{по Леви}}} + \underbrace{\int_E \psi_n d\mu}_{\rightarrow \int_E g d\mu}$$

$\square$

**Свойства.** Продолжаем свойства.

8. Аддитивность по мн-ву. Если  $A \cap B = \emptyset$ ,  $f \geq 0$  измеримая, то  $\underbrace{\int_{A \cup B} f d\mu}_{(*)} = \underbrace{\int_A f d\mu}_{(**)} + \underbrace{\int_B f d\mu}_{(***)}$

**Доказательство.**  $(*) = \int_X \mathbf{1}_{A \cup B} f d\mu$

$(**) = \int_X \mathbf{1}_A f d\mu$

$(***) = \int_X \mathbf{1}_B f d\mu$

$\mathbf{1}_{A \cup B} f = \mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_B f$

$\square$

9. Если  $\mu E > 0$  и  $f > 0$  измерим., то  $\int_E f d\mu > 0$ .

**Доказательство.**  $E_n := E\{f \geq \frac{1}{n}\}$ ,  $E_n \subset E_{n+1}$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$

$\implies \lim \mu E_n = \mu E > 0 \implies \mu E_n > 0$  для больших  $n$

$\implies \int_E f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu E_n > 0$ .

$\square$

**Пример.**  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  – не более чем счетное,  $w_1, w_2, \dots \geq 0$ .

$\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k$  – мера.

$\int_E f d\mu = \sum_{k: t_k \in E} w_k = (*)$ .

Пусть  $f = \mathbf{1}_A$ , тогда  $\int_E f d\mu = \int_E \mathbf{1}_A d\mu = \mu(E \cap A) = \sum_{k: t_k \in E \cap A} w_k = \sum_{k: t_k \in E} \mathbf{1}(t_k) w_k = (*)$ .

$\implies$  равенство есть и на простых функциях

Пусть  $f \geq 0$  измерим.  $\phi_n = f \cdot \mathbf{1}_{\{t_1, t_2, \dots, t_n\}}$ ,  $0 \leq \phi_1 \leq \dots \leq f$ .

$$\lim_{\substack{\rightarrow \\ \sum_{k < n: t_k \in E} f(t_k)w_k = \sum_{k: t_k \in E} f(t_k)w_k}} \int_E \phi_n d\mu = \int_E \underbrace{\lim_{\leq f} \phi_n}_{\leq f} d\mu \leq \int_E f d\mu$$

Проверим, что  $\underbrace{\int_E f d\mu}_{\sup\{\dots\}} \leq \sum_{f(t_k)w_k}$ . Берем  $0 \leq \underbrace{\phi}_{\text{простая}} \leq f$  и проверяем, что  $\underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k: t_k \in E} \phi(t_k)w_k} \leq$

$$\sum_{k: t_k \in E} f(t_k)w_k$$

**Замечание.**  $T = \mathbb{N}$ ,  $w_n \equiv 1$ .

$$\mu A = \#\{A \cap \mathbb{N}\}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

**Определение 2.9.**  $P(x)$  – св-во, зависящее от точки.  $P(x)$  выполняется **почти везде**, если на  $E$  (для **почти всех** точек из  $E$ ), если  $\exists e \subset E$ ,  $\mu e = 0$  и  $P(x)$  выполнено  $\forall x \in E \setminus e$ .

**Замечание.**  $P_1, P_2, \dots$  последовательность св-в, каждое из которых верно почти везде на  $E$ , то они все вместе верны почти везде на  $E$ .

**Теорема 2.14.** (Неравенство Чебышева).

$$f \geq 0 \text{ измер.}, t, p > 0. \text{ Тогда } \mu E\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t^p} \cdot \int_E f^p d\mu.$$

**Доказательство.**  $\int_E f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} t^p d\mu = t^p \cdot \mu E\{f \geq t\}$ . □

**Свойства.** Свойства интеграла, связанные с понятием ”почти везде”.

1. Если  $\int_E |f| d\mu < +\infty$ , то  $f$  почти везде конечна.
2. Если  $\int_E |f| d\mu = 0$ , то  $f = 0$  почти везде.
3. Если  $A \subset B$  и  $\mu(B \setminus A) = 0$ , то  $\int_A f d\mu$  и  $\int_B f d\mu$  либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.
4. Если  $f = g$  почти везде на  $E$ , тогда  $\int_E f$  и  $\int_E g$  либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.

**Доказательство.** 1.  $E\{|f| = +\infty\} \subset E\{|f| \geq t\}$

$$\mu E\{|f| = +\infty\} \leq \mu E\{|f| \geq t\} \leq \frac{\int_E |f| d\mu}{t} \underbrace{\rightarrow}_{t \rightarrow +\infty} 0$$

2. Если  $\mu E\{f > 0\} > 0$ , то  $\int_E f d\mu = \int_{E\{f > 0\}} f d\mu > 0$  (св-во. 9 из уже доказанных выше).

$$3. \int_B f_{\pm} d\mu = \int_{B \setminus A} f_{\pm} d\mu + \int_A f_{\pm} d\mu = \int_A f_{\pm} d\mu$$

$$4. A := E\{f = g\}, \mu(E \setminus A) = 0 \quad \int_E f d\mu = \int_A f d\mu = \int_A g d\mu = \int_E g d\mu$$

□

## 2.4. Суммируемые функции

**Определение 2.10.**  $f$  – суммируема на мн-ве  $E$ , если  $f$  измерима и  $\int_E f_{\pm} d\mu < +\infty$ .

**Замечание.** В этом случае  $\int_E f d\mu$  конечен.

**Свойства.** 1.  $f$  – суммируема на  $E \Leftrightarrow \int_E |f| d\mu < +\infty$  и  $f$  – измерима.

В этом случае  $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

**Доказательство.**  $0 \leq f_{\pm} \leq |f| = f_+ + f_-$

" $\Rightarrow$ ":  $\int_E |f| d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu < +\infty$

" $\Leftarrow$ ":  $\int_E f_{\pm} d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$

Нер-во:  $-\int_E |f| d\mu = -\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \leq \underbrace{\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu}_{\int_E f d\mu} \leq \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu = \int_E |f| d\mu$

□

2.  $f$  суммируема на  $E \Rightarrow f$  почти везде конечна на  $E$ .

3. Если  $A \subset B$  и  $f$  суммируема на  $B$ , то  $f$  суммируема на  $A$ .

**Доказательство.**  $\int_A |f| d\mu \leq \int_B |f| d\mu < +\infty$

□

4. Ограниченная функция суммируема на мн-ве конечной меры.

**Доказательство.**  $|f| \leq M \Rightarrow \int_E |f| d\mu \leq \int_E M d\mu = M \cdot \mu E < +\infty$

□

5. Если  $f$  и  $g$  суммируемы и  $f \leq g$ , то  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

**Доказательство.**  $f_+ - f_- = f \leq g = g_+ - g_- \Rightarrow 0 \leq f_+ + g_- \leq f_- + g_+ \Rightarrow \int_E f_+ d\mu + \int_E g_- d\mu \leq \int_E f_- d\mu + \int_E g_+ d\mu$  – переносим слагаемые в нужные стороны и чтд.

□

6.  $f$  и  $g$  – суммируемы  $\Rightarrow f + g$  суммируема и  $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

**Доказательство.**  $|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow f + g$  суммируема.

$h := f + g, h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$

$\Rightarrow h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_- \geq 0$

$\Rightarrow \int_E h_+ d\mu + \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu + \int_E h_- d\mu$  – далее просто переносим нужные слагаемые через равно.

□

7.  $f$  – суммируема,  $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f$  суммируема и  $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \Rightarrow |\alpha f|$  – суммируема.

Если  $\alpha > 0$ , то  $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+$  и  $(\alpha f)_- = \alpha \cdot f_-$  и  $\int_E (\alpha f)_{\pm} d\mu = \alpha \cdot \int_E f_{\pm} d\mu$

Если  $\alpha = -1$ , то  $(-f)_+ = f_-$  и  $(-f)_- = f_+ \Rightarrow \int_E (-f) d\mu = \int_E f_- - \int_E f_+ = -\int_E f d\mu$

□

8. Линейность.

Если  $f, g$  – суммируемы,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , то  $\alpha f + \beta g$  – суммируема и  $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$ .

9. Пусть  $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ . Тогда  $f$  – суммируема на  $E \Leftrightarrow f$  – суммируема на  $E_k : \forall k = 1, \dots, n$ . А если  $f$  суммируема на  $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ , то  $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$

**Доказательство.**  $\mathbb{1}_{E_k}|f| \leq \mathbb{1}_E|f| \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}|f| \implies \int_{E_k}|f|d\mu \leq \sum_{k=1}^n \int_{E_k}|f|d\mu.$

Если  $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$ , то  $\mathbb{1}_E = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} \implies \mathbb{1}_E f_{\pm} = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} f_{\pm} \implies \int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_{\pm} d\mu$   $\square$

10. Интегрирование по сумме мер. Пусть  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – меры, заданные на одной  $\sigma$ -алгебре,  $\mu := \mu_1 + \mu_2$ .

Если  $f \geq 0$  измерима, то  $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2 (*)$ .

$f$  – суммируема относительно  $\mu \Leftrightarrow f$  – суммируема относительно  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и в этом случае есть равенство  $(*)$ .

**Доказательство.**  $(*)$  для  $f \geq 0$ :

$(*)$  есть для простых  $\phi \geq 0$ ,  $\int_E \phi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\mu(E \cap A_k)}_{\mu_1(E \cap A_k) + \mu_2(E \cap A_k)} = \int_E \phi d\mu_1 + \int_E \phi d\mu_2.$

$f \geq 0$  – измеримая  $\implies$  возьмем  $0 \leq \phi \leq \dots \leq \phi_n$  – простые,  $\phi_n \rightarrow f$ .

$\int_E \phi_n d\mu = \int_E \phi_n d\mu_1 + \int_E \phi_n d\mu_2$  по т. Леви получаем (предельный переход)  $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$   $\square$

**Определение 2.11.** Интеграл от комплекснозначной функции  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ .

$Re(f)$  и  $Im(f)$  – измеримые функции.

$$\int_E f d\mu := \int_E Re(f) d\mu + i \cdot \int_E Im(f) d\mu$$

**Замечание.** Все св-ва, связанные с равенствами, сохраняются:

**Доказательство.**  $Re(if) = -Im(f)$ ,  $Im(if) = Re(f)$

$$\int_E if d\mu = i \int_E f d\mu$$

**Замечание.**  $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

**Доказательство.**  $|\int_E f d\mu| = e^{i\alpha} \cdot \int_E f d\mu = \int_E e^{i\alpha} f d\mu =$

$$= \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu + i \cdot \underbrace{\int_E Im(e^{i\alpha} f) d\mu}_{=0, \text{ т.к. слева от равенства вещ. число}} = \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu \leq \int_E |Re(e^{i\alpha} f)| d\mu \leq \int_E |e^{i\alpha}| d\mu =$$

$$\int_E |f| d\mu.$$

$$|Re(f)|, |Im(f)| \leq |f|$$

$$|f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$$

**Теорема 2.15.** (О счетной аддитивности интеграла).

Пусть  $f \geq 0$  – измеримая и  $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ .

Тогда  $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$

**Доказательство.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu = \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f d\mu = \lim \int_E \left( \underbrace{\mathbb{1}_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f}_{:=g_n} d\mu \right) =$

$$\lim \int_E g_n d\mu \underbrace{=}_{\text{т. Леви}} \int_E f d\mu$$

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots, \lim g_n = f, g_n(x) = f(x) \text{ если } x \in \bigsqcup_{k=1}^n E_k.$$



**Следствие.** 1. Если  $f \geq 0$  – измеримая, то  $\nu E := \int_E f d\mu$  – мера, заданная на той же  $\sigma$ -алгебре, что и  $\mu$ .

2. Если  $f \geq 0$  и  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ ,  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$

3. Если  $f$  – суммируема и  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ ,  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ , то  $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$

4. Если  $f$  – суммируема на  $E$ ,  $\epsilon > 0$ , то  $\exists A \subset E : \mu A < +\infty \wedge \int_{E \setminus A} |f| d\mu < \epsilon$

**Доказательство.** 1.  $\nu \emptyset = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$  + счетная аддитивность из теоремы:  $\int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$  все конечно, поэтому можно вычитать.

2.  $\nu A := \int_A f d\mu$  – мера  $\implies \nu A$  непрерывна снизу.

$$\underbrace{\int_E f d\mu}_{\nu E} = \underbrace{\lim \int_{E_n} f d\mu}_{\lim \nu E_n}$$

3.  $\nu_{\pm} A := \int_A f_{\pm} d\mu$ ,  $\nu_{\pm} A$  – конечные меры  $\implies \nu_{\pm}$  – непрерывна сверху.

$$\implies \int_E f_{\pm} d\mu = \nu_{\pm} E = \lim \nu_{\pm} E_n = \lim \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$$

4.  $E_n := E\{|f| \leq \frac{1}{n}\} \implies E_n \supset E_{n+1}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\} \implies \lim \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{E\{f=0\}} |f| d\mu = 0 \implies \exists n : \epsilon > \int_{E_n} |f| d\mu \geq \left| \int_{E_n} f d\mu \right|$$

$$A := E \setminus E_n = E\{|f| > \frac{1}{n}\}$$

$$\underbrace{\mu A}_{\text{Чебышев}} \leq \frac{\int_E |f| d\mu}{\frac{1}{n}} < +\infty$$

□

**Теорема 2.16.** (Абсолютная непрерывность интеграла).

$f$  – суммируема на  $E$ , тогда  $\forall \epsilon : \exists \delta > 0$ , т.ч.  $\forall e$  – измер.  $\mu e < \delta \implies \left| \int_e f d\mu \right| < \epsilon$

**Доказательство.**  $\int_E |f| d\mu < +\infty \implies \exists \underbrace{\phi}_{\leq f}$  – неотрицательная простая, т.ч.

$$\int_E |f| d\mu < \int_E \phi d\mu + \epsilon.$$

Пусть  $C$  – наибольшее значение  $\phi$ . Возьмем  $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ .

Если  $\mu e < \delta$ , то  $\int_e |f| d\mu < \underbrace{\int_e \phi d\mu + \epsilon}_{\leq \int_e C d\mu + \epsilon \leq \epsilon + \epsilon}$  – это следует из того, что  $|f| - \phi \geq 0$ ,

$$\int_e (|f| - \phi) d\mu \leq \int_E (|f| - \phi) d\mu < \epsilon.$$

□

**Следствие.** Если  $f$  суммируема на  $E$  и  $\mu A_n \rightarrow 0$ ,  $A_n \subset E$ , то  $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Берем  $\epsilon > 0$  и  $\delta > 0$  для него из теоремы, тогда если  $\mu A_n < \delta$ , то  $\left| \int_{A_n} f d\mu \right| < \epsilon$

□

**Определение 2.12.** Пусть  $\mu$  и  $\nu$  меры на одной  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ . Если существует измеримая функция  $w \geq 0$ , т.ч.  $\forall A \in \mathcal{A}$ ,  $\nu A = \int_A w d\mu$ .

Тогда  $w$  плотность меры  $\nu$  относительно меры  $\mu$ .

**Замечание.** Если  $w$  существует, то  $\nu$  обладает свойством: если  $\mu e = 0$ , то  $\nu e = 0$ .

**Теорема 2.17.** Пусть  $f, g$  – суммируемые функции. Если  $\forall A$  – измерим.  $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ , то  $f = g$  почти везде.

**Доказательство.**  $h := f - g$ ,  $E_+ := E\{f \geq g\}$ ,  $E_- := E\{f < g\}$

$$\int_E |h| d\mu = \underbrace{\int_{E_+} h d\mu}_{=0} - \underbrace{\int_{E_-} h d\mu}_{=0} = 0 \implies h = 0 \text{ почти везде.} \quad \square$$

**Теорема 2.18.** (Единственность плотности).

Если  $\nu$  –  $\sigma$ -конечная мера (на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{A}$ ) и  $w$  – плотность  $\nu$  относительно  $\mu$ , то  $w$  – единственна с точностью до **почти везде**.

**Доказательство.** Так как наша мера –  $\sigma$ -конечна, то все пространство представляется как  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ , т.ч.  $\nu X_n < +\infty \implies$  т.к.  $w$  – плотность  $\nu|_{X_n}$  относительно  $\mu|_{X_n} \implies w$  – суммируема на  $X_n$ .

Пусть  $w_1, w_2$  – плотности  $\nu$  относительно  $\mu$  на сужении одного кусочка, тогда по определению плотности верно, что  $\forall A \in \mathcal{A} : \nu A = \int_A w_1 d\mu = \int_A w_2 d\mu \implies w_1 = w_2$  почти везде.  
по пред. теореме

Ну если две плотности на каждом из кусочков отличаются на множество нулевой меры, тогда и на объединении кусочков тоже будут отличаться на множество нулевой меры, тогда плотность единственна почти везде и на всей  $\sigma$ -алгебре.  $\square$

**Определение 2.13.**  $\nu, \mu$  – меры, заданные на одной  $\sigma$ -алгебре.  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно  $\mu$ , если  $\forall e$  – измер., т.ч.  $\mu e = 0 \implies \nu e = 0$ .

Обозначение  $\nu \prec \mu$  или  $\nu \ll \mu$ .

**Теорема 2.19.** (Радона-Никодима).

Пусть меры  $\mu$  и  $\nu$  заданы на одной  $\sigma$ -алгебре. Тогда  $\nu \prec \mu \Leftrightarrow$  существует плотность меры  $\nu$  относительно  $\mu$ .

**Теорема 2.20.**  $w$  – плотность  $\nu$  относительно  $\mu$ . Тогда

1. Если  $f \geq 0$ , то  $\int_E f d\nu = \int_E f w d\mu : (*)$
2.  $f w$  – суммируема, относительно  $\mu \Leftrightarrow f$  – суммируема относительно  $\nu$ , и в этом случае есть формула  $(*)$

**Доказательство.** 1. Пусть  $f = \mathbb{1}_A$ , тогда  $\int_E f d\nu = \nu(A \cap E) = \int_{A \cap E} w d\mu = \int_E \mathbb{1}_A w d\mu$ . По линейности  $(*)$  верна для неотрицательных простых.

Пусть  $f \geq 0$  – измер. Тогда найдутся простые  $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$  ( $0 \leq w\phi_1 \leq w\phi_2 \leq \dots$ ) и  $\phi_n \rightarrow f$  поточечно.

$$\underbrace{\int_E \phi_n d\nu}_{\rightarrow \int_E f d\nu} = \underbrace{\int_E \phi_n w d\mu}_{\rightarrow \int_E f w d\mu} \text{ – по т. Леви.}$$

2.  $\int_E |f| d\nu = \int_E |f| w d\mu \implies f$  – суммируема относительно  $\nu \Leftrightarrow f w$  суммируема относительно  $\mu$

$$\int_E f_{\pm} d\nu = \int_E f_{\pm} w d\mu \text{ и вычитаем.}$$

$\square$

**Свойства.** Неравенство Гельдера.

Пусть  $p, q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Тогда  $\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = A \cdot B$

**Доказательство.** Пусть  $f, g \geq 0$  (просто чтобы не писать модули),  $A^p := \int_E f^p d\mu$ ,  $B^q := \int_E g^q d\mu$ .

Случай  $A = 0$ .  $\implies f^p = 0$  почти везде  $\implies f = 0$  почти везде  $\implies fg = 0$  почти везде  $\implies \int_E fg d\mu = 0$ .

Можно считать, что  $A, B > 0$ .

Случай  $A = +\infty$ . Очевидно.

Можно считать  $0 < A, B < +\infty$ .

$$u := \frac{f}{A}, \quad v := \frac{g}{B}$$

$\int_E u^p d\mu = 1 = \int_E v^q d\mu$ ,  $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$  верно (Упражнение, ну конечно. Фиксируем одну из переменных как параметр и исследуем нер-во по второй переменной).

$$\text{Интегрируем полученное нер-во: } \frac{1}{AB} \int_E fg d\mu = \int_E uv d\mu \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int_E u^p d\mu}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int_E v^q d\mu}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \square$$

**Свойства.** Неравенство Минковского.

$$p \geq 1, \text{ тогда } \left( \int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Доказательство.** Можно считать, что  $f, g \geq 0$ , также можно считать, что  $\int_E f^p d\mu$  и  $\int_E g^p d\mu < +\infty$ .

Проверим, что  $\int_E (f + g)^p d\mu < +\infty$ :

$$f + g \leq 2 \max\{f, g\} \implies (f + g)^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p (f^p + g^p)$$

$$\underbrace{\int_E (f + g)^p d\mu}_{=: C^p} \leq 2^p \left( \int_E f^p d\mu + \int_E g^p d\mu \right) < +\infty - \text{показали, что левая часть конечна.}$$

Можем считать, что  $0 < C < +\infty$ :

$$C^p = \int_E (f + g)^p d\mu = \int_E (f + g)(f + g)^{p-1} d\mu = \int_E f(f + g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f + g)^{p-1} d\mu$$

Пусть  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ ,  $(p-1)q = p$ , тогда:

$$\int_E f \cdot (f + g)^{p-1} d\mu \leq \underbrace{\left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_E ((f + g)^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{нер-во Гельдера}} = \left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{(C^p)^{\frac{1}{q}}}_{=: C^{p-1}} \leq \left( \int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} C^{p-1} +$$

$$\left( \int_E g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{p-1} - \text{сокращаем на } C^{p-1}. \quad \square$$

## 2.5. Предельный переход под знаком интеграла

**Теорема 2.21. Леви.**

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \text{ и } f = \lim f_n, \text{ тогда } \lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

**Следствие.** Пусть  $u_n \geq 0$ . Тогда  $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n d\mu$

**Доказательство.**  $s_n := \sum_{k=1}^n u_k$ ,  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$  и  $s_n \rightarrow s := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

$$\int_E s d\mu = \lim \int_E s_n d\mu = \lim \int_E \sum_{k=1}^n u_k d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_E u_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k d\mu \quad \square$$

**Следствие.** Если  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится при почти всех  $x \in E$ .

**Доказательство.**  $+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu \implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  — суммируемо.

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  почти везде конечна  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  абс. сходится при почти всех  $x \in E \implies$  сходится при почти всех  $x \in E$ .  $\square$

**Лемма. Фату.**

Если  $f_n \geq 0$ , то  $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$ .

**Доказательство.**  $\underline{\lim} f_n = \liminf \underbrace{\{f_n, f_{n+1}, \dots\}}_{=: g_n}$

$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$  и  $g_n \rightarrow \underline{\lim} f_n$

$$\underbrace{\implies}_{\text{теорема Леви}} \quad \lim_{\int_E g_n d\mu} = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu$$

$$= \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$$

$$g_n \leq f_n \implies \int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \implies \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$$

□

**Замечание.** Равенства может и не быть:

$$\mu = \lambda, \quad E = \mathbb{R}, \quad f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$$

$$\int_E f_n d\mu = +\infty, \text{ но } f_n \rightarrow 0$$

$$\text{Из этих двух условий следует, что } \int_E \underline{\lim} f_n d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$$

**Следствие.** (Усиленный вариант теоремы Леви).

Пусть  $0 \leq f_n \leq f$  и  $f = \lim f_n$ . Тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

**Доказательство.**  $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \implies \int_E f d\mu = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \overline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

$$\implies \underline{\lim} = \overline{\lim} = \int_E f d\mu \implies \lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

□

**Теорема 2.22.** Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть  $f = \lim f_n$  и  $|f_n| \leq \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$  – суммируема на  $E$ .

Тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ , более того  $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

**Доказательство.**  $g_n := 2F - |f_n - f| \leq 2F$  и  $g_n \rightarrow 2F$ .

$$g_n \geq 2F - |f_n| - |f| \geq 0.$$

Тогда предел  $\lim \int_E g_n d\mu = 2 \int_E F d\mu$

$$\int_E g_n d\mu = \int_E 2F d\mu - \int_E |f_n - f| d\mu$$

$$\text{Из двух строчек выше делаем вывод, что } \underbrace{\int_E |f_n - f| d\mu}_{\geq |\int_E (f_n - f) d\mu| = |\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu|} \rightarrow 0$$

□

**Замечание.** 1. Без суммир. мажоранты неверно:

$$f_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow f = \begin{cases} +\infty, & \text{в точке } 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = 0, \quad \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1, \quad F := \sup f_n, \quad F(x) = n \text{ при } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

2. Поточечную сходимость можно заменить на сходимость почти везде, можно заменить и на сходимость по мере.

**Теорема 2.23.** Пусть  $f \in C[a, b]$ . Тогда  $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$ .

**Доказательство.**  $a = x_0$

$$b = x_n$$

$$S_* := \sum_{k=1}^n \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$S^* := \sum_{k=1}^n \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Если мелкость дробления  $\rightarrow 0$ , то  $S_*, S^* \rightarrow \int_a^b f$ .

$$g_*(x) := \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$g^*(x) := \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$\int_{[a,b]} g_* d\lambda = S_*, \quad \int_{[a,b]} g^* d\lambda = S^*$$

$g_* \leq f \leq g^*$  почти везде.

$$\underbrace{S_*}_{\rightarrow \int_a^b f} = \int_{[a,b]} g_* d\lambda \leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_{[a,b]} g^* d\lambda = \underbrace{S^*}_{\rightarrow \int_a^b f} \implies \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f \quad \square$$

**Замечание.** На самом деле это верно для любой функции, интегрируемой по Риману на  $[a, b]$ .

**Теорема 2.24.** (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда  $f$  – интегрируема по Риману  $\Leftrightarrow$  множество точек разрыва  $f$  имеет нулевую меру Лебега.

**Пример.** Возьмем  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = \mathbf{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$ .

$f = 0$  почти везде  $\implies \int_{[0,1]} f d\lambda = 0$ , но точки разрыва – весь отрезок  $[0, 1]$ .

## 2.6. Произведение мер

**Определение 2.14.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с  $\sigma$ -конечными мерами.

$$\mathcal{P} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mu A < +\infty \wedge \nu B < +\infty\}$$

$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B < +\infty$ ,  $A \times B$  – измеримый прямоугольник.

**Теорема 2.25.**  $\mathcal{P}$  – полукольцо, а  $m_0$  –  $\sigma$ -конечная мера на нем.

**Доказательство.**  $\{A \in \mathcal{A} : \mu A < +\infty\}$  и  $\{B \in \mathcal{B} : \nu B < +\infty\}$  – полукольца (проверяем определение полукольца для обоих множеств).

$\mathcal{P}$  – декартово произведение полуколец, то есть тоже полукольцо (эта по теореме, которая была выше).

Проверяем, что  $m_0$  – мера. Пусть  $A \times B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$ .

$$\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) = \mathbf{1}_{A \times B}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \times \mathbf{1}_{B_k}(y)$$

$$\int_Y \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \mathbf{1}_{B_k}(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

$$\int_X \mathbf{1}_A(x) \nu B d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \cdot \nu B_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_0(A_k \times B_k)$$

$\sigma$ -конечность  $m_0$ :  $X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X_j$ ,  $Y = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Y_j$ ,  $\mu X_j < +\infty$ ,  $\nu Y_j < +\infty$

$$X \times Y = \bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} X_j \times Y_k$$

$$m_0(X_j \times Y_k) < +\infty. \quad \square$$

**Определение 2.15.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  и  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с  $\sigma$ -конечными мерами. Произведения мер  $\mu$  и  $\nu$  – стандартное продолжение меры  $m_0$ .

Обозначение:  $\mu \times \nu$ ,  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  –  $\sigma$ -алгебра, на которую продолжили.  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

**Свойства.** 1. Декартово произведение измеримых множеств – измеримо.

2. Если  $\mu e = 0$ , то  $(\mu \times \nu)(e \times Y) = 0$ .

**Доказательство.** 1.  $A \in \mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $\mu A_n < +\infty$

$$B \in \mathcal{B} \implies B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad \nu B_n < +\infty$$

$$A \times B = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \underbrace{A_k \times B_k}_{\in \mathcal{P}} - \text{измер.}$$

$$2. Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \quad \nu Y_k < +\infty$$

$$e \times Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} e \times Y_k, \quad (\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \mu e \cdot \nu Y_k = 0$$

□

**Замечание.** Обозначения:  $C \subset X \times Y$ ,  $x \in X$ .

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\} - \text{сечения мн-ва } C.$$

$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

**Следствие.** 1.  $(\bigcup_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcup_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$

$$2. (\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcap_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$$

**Определение 2.16.** Пусть функция  $f$  задана на мн-ве  $E$ , за исключением некоторого мн-ва  $e$ ,  $\mu e = 0$ . Если  $f$  измерима на  $E \setminus e$ , то  $f$  измерима на  $E$  в **широком смысле**.

**Определение 2.17.** Система множеств – **монотонный класс**, если

$$1. E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$$

$$2. E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$$

**Теорема 2.26.** Если монотонный класс содержит алгебру  $\mathcal{A}$ , то он содержит и  $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ .

**Доказательство.** Докажем, что минимальный монотонный класс  $\mathcal{M}$ , содержащий  $\mathcal{A}$  –  $\sigma$ -алгебра.

Рассмотрим  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}\}$  – монотонный класс, содержащий  $\mathcal{A}$ .

$$\text{Если } B \in \mathcal{A}, \text{ то } B \cap A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \text{ и } A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \implies \mathcal{M}_A \supset \mathcal{A}$$

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, E_n \in \mathcal{M}_A \implies E_n \cap A \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap A = \bigcup (E_n \cap A) \in \mathcal{M}$$

$$\text{Следовательно } \mathcal{M}_A = \mathcal{M} \implies \forall B \in \mathcal{M}, A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \setminus B \in \mathcal{M}$$

$\implies \mathcal{M}$  – симметричная структура.

Рассмотрим  $B \in \mathcal{M}$ :  $\mathcal{N}_B := \{C \in \mathcal{M} : B \cap C \in \mathcal{M}\}$  – монотонный класс, содержащий  $\mathcal{A}$  (проверка по аналогии с предыдущим случаем).

$$\implies \mathcal{N}_B = \mathcal{M} \implies \forall C \in \mathcal{M}, B \cap C \in \mathcal{M} \implies \mathcal{M} - \text{алгебра.}$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}, E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$$\implies \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{=A} \in \mathcal{M}, \text{ так как } \mathcal{M} - \text{монотонный класс.}$$

□

**Теорема 2.27. Принцип Кавальери.**

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $m = \mu \times \nu$ . Тогда

1.  $C_x \in \mathcal{B}$  при почти всех  $x \in X$ .
2.  $\phi(x) := \nu C_x$  измеримая в широком смысле.
3.  $mC = \int_X \nu C_x d\mu(x)$

**Доказательство.** Меры конечны и  $C \in \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{борелевская оболочка (см. определение 1.7)}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

$\mathcal{E}$  – система мн-в, в  $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , такая что, если  $E \in \mathcal{E}$ , то  $E_x \in \mathcal{B} \forall x \in X$  и  $\phi(x) = \nu E_x$  – измеримая функция.

**Шаг 1.**  $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

**а.**  $\mathcal{E}$  – измеримая система.

$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}$ ,  $\nu(Y \setminus E_x) = \nu Y - \phi(x)$  – измеримая.

**б.**  $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$  из  $\mathcal{E} \implies \bigcup E_n \in \mathcal{E}$ .

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(E_n)_x}_{\in \mathcal{B}}$$

$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x) = \lim \nu(E_n)_x$  – измеримая функция.

**в.**  $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$  из  $\mathcal{E} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$  (можно переходить к дополнениям).

**г.** (б) + (в)  $\implies \mathcal{E}$  – монотонный класс.

**д.**  $\mathcal{E} \supset$  измеримый прямоугольник  $E = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \implies E_x = \begin{cases} \mathcal{B}, & \text{если } x \in \mathcal{A} \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$ ,

$$\nu E_x = \begin{cases} 0 \\ \nu \mathcal{B} \end{cases} \text{ – измеримая функция.}$$

**е.** Если  $E$  и  $\tilde{E} \in \mathcal{E}$ , то  $E \sqcup \tilde{E} \in \mathcal{E}$ .

$$(E \sqcup \tilde{E})_x = \underbrace{E_x}_{\in \mathcal{B}} \sqcup \underbrace{\tilde{E}_x}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

$\nu((E \sqcup \tilde{E})_x) = \nu E_x + \nu \tilde{E}_x$  – сумма измеримых функций.

**ж.**  $\mathcal{E}$  содержит дизъюнктивное объединение всевозможных изм. прямоугольников  $\implies \mathcal{E}$  содержит кольцо  $\implies \mathcal{E}$  содержит алгебру  $\implies \mathcal{E} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

по т. о монотонном классе

Мы сейчас проверили, что если  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , то первые два пункта теоремы выполнены. Давайте для этой же упрощенной ситуации проверять 3-ий пункт.

**Шаг 2.** Формула (3) для  $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

Рассмотрим  $\int_X \nu E_x d\mu(x) =: \tilde{m}E$  – хотим сказать, что это мера на  $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ .

Пусть  $E_n$  – дизъюнкты  $\implies \tilde{m}(\bigcup E_n) = \int_X \nu(\bigcup (E_n)_x) d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}E_n$ .

$m = \tilde{m}$  на измеримых прямоугольниках  $\implies$  они совпадают. Получили, что хотели.

**Шаг 3.**  $mC = 0$ ,  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies$  найдется  $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , т.ч.  $C \subset \tilde{C}$  и  $m\tilde{C} = 0$ .

$0 = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) \implies \nu \tilde{C}_x = 0$  при почти всех  $x \in X$ .

$C_x \subset \tilde{C}_x \implies C_x \in \mathcal{B}$  при почти всех  $x \in X$  и  $\nu C_x = 0$  при почти всех  $x \in X$ .

$$mC = 0 = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

**Шаг 4.**  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies C = \tilde{C} \sqcup e$ ,  $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ ,  $me = 0$ .

$$C_x = \underbrace{\tilde{C}_x}_{\text{изм. } \forall x \in X} \sqcup \underbrace{e_x}_{\text{изм. при почти всех } x}, \quad \nu C_x = \nu \tilde{C}_x + \nu e_x = \nu \tilde{C}_x.$$

$$mC = m\tilde{C} + me = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

**Шаг 5.**  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ,  $Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ ,  $\mu X_n < +\infty$ .

$$X \times Y = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} X_n \times Y_k$$

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ,  $C_{nk} = C \cap X_n \times Y_k \implies C_{nk}$  удовлетворяет теореме.

$$C_x = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} (C_{nk})_x$$

$$mC = \sum_{n,k=1}^{\infty} mC_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} \int_X \nu (C_{nk})_x d\mu(x) = \int \sum \cdots = \int_X \nu C_x d\mu. \quad \square$$

**Замечание.** 1. Нужна лишь полнота  $\nu$ .

2. Измеримость всех  $C_x$  не гарантирует измеримость  $C$ .

**Доказательство.**  $\mathbb{R}^2$ ,  $E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримое,  $E \times [0, 1]$   $\square$

3. Среди  $C_x$  могут попадаться неизмеримые.

**Доказательство.**  $\mathbb{R}^2$ ,  $E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримые,  $\{0\} \times E$   $\square$

4. Хочется интегрировать не по  $X$ , а по проекции, то есть  $P := \{x \in X : C_x \neq \emptyset\}$ . Но  $P$  может быть неизмеримо.

**Доказательство.**  $E \subset \mathbb{R}$  – неизмеримое, решение проблемы, это взять  $\tilde{P} := \{x \in X : \nu C_x > 0\}$  – измеримое.  $\square$

**Определение 2.18.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пр-во с  $\sigma$ -конечной мерой.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f \geq 0, \quad E \in \mathcal{A}, \quad m = \mu \times \underbrace{\lambda_1}_{\text{одномерная мера Лебега}}.$$

График функции над мн-вом  $E$ :

$$\Gamma_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

Подграфик функции над мн-вом  $E$ :

$$\mathcal{P}_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

**Лемма.** (Лемма 1).

Если  $f$  – измеримая, то  $m\Gamma_f = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mu X < +\infty$ . Возьмем  $\epsilon > 0$  и  $A_n := X\{\epsilon \cdot n \leq f < \epsilon \cdot (n+1)\}$

$$\Gamma_f \subset \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) =: A.$$

$$mA = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) = \epsilon \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu A_n = \epsilon \cdot \mu X - \text{сколь угодно маленькое.}$$

Пусть  $\mu$  –  $\sigma$ -конечна.  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ,  $\mu X_n < +\infty$ ,

$$\Gamma_f = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_f(X_n) - \text{нулевой меры.} \quad \square$$

**Лемма.** (Лемма 2).

$f \geq 0$  – измерима в широком смысле  $\implies \mathcal{P}_f$  – измеримое мн-во.

**Доказательство.** 1. Пусть  $f$  – простая  $\implies f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k} \implies \mathcal{P}_f = \bigsqcup_{k=1}^n A_k \times [0, a_k]$  – измеримое.



2. Пусть  $f$  – измеримая  $\implies 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \rightarrow f$  – простые  $\phi_i$ ,  $\mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f$ .

$$\mathcal{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f.$$

Берем  $x \in X$ .

Если

(а)  $f(x) = +\infty$ , то  $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$ , над точкой  $x$ ,  $[0, \phi_n(x)]$  их объединение будет луч.

(б)  $f(x) < +\infty$ , то  $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $\bigcup [0, \phi_n(x)] \supset [0, f(x)]$

□

**Теорема 2.28.** (О мере подграфика).

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с  $\sigma$ -конечной мерой,  $f \geq 0$ ,  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $m = \mu \times \lambda_1$ .

Тогда  $f$  – измеримая в широком смысле  $\Leftrightarrow \mathcal{P}_f$  – измер. и в этом случае  $\int_X f d\mu = m\mathcal{P}_f$ .

**Доказательство.** " $\Rightarrow$ ": Лемма 2.

" $\Leftarrow$ ": принцип Кавальери для  $\mathcal{P}_f$ :

$$(\mathcal{P}_f)_x = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{при } f(x) = +\infty \\ [0, f(x)), & \text{при } f(x) < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi(x) := \lambda_1(\mathcal{P}_f)_x = \underbrace{f(x)}_{\text{измеримая в широком смысле}}$$

$$m\mathcal{P}_f = \int_X \underbrace{\lambda((\mathcal{P}_f)_x)}_{=f(x)} d\mu(x) \text{ – получили, что хотели.}$$

□

**Теорема 2.29.** Тонелли.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , измеримая,  $m = \mu \times \nu$ .

Тогда:

1.  $f_x(y) := f(x, y)$  – измерима, относительно  $\nu$  в широком смысле при почти всех  $x \in X$ .

2.  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  – измерима относительно  $\mu$ .

$$3. \int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

**Доказательство.** 1. Пусть  $f = \mathbb{1}_C$  (характеристическая функция мн-ва  $C$ ), тогда  $f_x(y) = \mathbb{1}_{C_x}(y)$ .

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y \mathbb{1}_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu C_x$$

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_{X \times Y} \mathbb{1}_C dm = mC = \int_X \nu C_x d\mu(x) = \int_X \phi d\mu.$$

2. Пусть  $f \geq 0$  – простая, тогда  $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$

3. Пусть  $f \geq 0$  – измеримая, тогда берем последовательность простых функций  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ ,  $\lim f_n = f$ .

$(f_n)_x(y)$  – измерим. при почти всех  $x$ .

$(f_n)_x \nearrow f_x$  – измерим. при почти всех  $x$ .

$$\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y) \text{ – измерим. и } 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$$

$$\lim \phi_n(x) = \int_Y \lim f_n(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) = \phi(x) - \text{измерим.}$$

$$\int_{X \times Y} f dm \underset{\text{т. Леви}}{\underbrace{=} } \int_{X \times Y} f_n dm = \int_X \phi_n d\mu \rightarrow \int_X \phi d\mu.$$

□

**Теорема 2.30. Фубини.**

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$ , суммируема,  $m = \mu \times \nu$ .

Тогда:

1.  $f_x(y) := f(x, y)$  – суммируема, относительно  $\nu$  в широком смысле при почти всех  $x \in X$ .
2.  $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  – суммируема относительно  $\mu$ .
3.  $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

**Доказательство.**  $(*) : \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty$  – следует из суммируемости  $f$ .

$$(*) \underset{\text{т. Тонелли}}{\underbrace{=} } = \int_X \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{:=\alpha(x)} d\mu(x)$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{\Rightarrow f_x - \text{суммируема при почти всех } x \in X} - \text{конечна при почти всех } x \in X.$$

$$\int_X |\phi| d\mu = \int_X \left| \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \int_X \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty$$

$\Rightarrow \phi$  – суммируема.

$$\int_{X \times Y} f_{\pm} dm = \int_X \left( \int_Y f_{\pm}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ и вычтем } f = f_+ - f_-.$$

□

**Следствие.** Если  $f \geq 0$  и измеримая или  $f$  – суммируемая, то

$$(**): \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

**Следствие.**  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  – пространства с полными  $\sigma$ -конечными мерами.

$f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – суммируема по  $\mu$ ,  $g: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – суммируема по  $\nu$ .

Тогда  $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$  суммируема по  $m = \mu \times \nu$  и  $\int_{X \times Y} h dm = \int_X f d\mu \cdot \int_Y g d\nu$ .

$$\text{Доказательство. } \int_{X \times Y} |h| dm \underset{\text{т. Тонелли}}{\underbrace{=} } = \int_X \left( \int_Y |f(x)| |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) =$$

$$= \int_X |f(x)| \cdot \int_Y |g(y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y |g| d\nu \cdot \int_X |f| d\mu < +\infty \Rightarrow h - \text{суммируема.}$$

По Фубини пишем все без модулей.

□

**Замечание.** 1. Суммируемости  $f_x(y) = f(x, y)$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$ ,  $\phi(x) = \int_X f_x d\nu$ ,  $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$  не хватает для суммируемости  $f$  по мере  $m$ .

2. Без суммируемости  $f$  по  $m$  равенства **(\*\*)** может не быть.

$$\text{Пример. } \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, g(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Первообразные:

$$1. \int f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$2. \int g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Подставляем:

$$1. \int_{[-1,1]} f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{-2}{y^2+1}$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x, y) dx dy = -2 \int_{[-1,1]} \frac{dy}{y^2+1} = -2 \cdot \arctan(y) \Big|_{-1}^1 = -\pi$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x, y) dy dx = \pi - \text{не совпали из-за отсутствия суммируемости.}$$

$$2. \int_{[-1,1]} g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

**Теорема 2.31.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пространство с  $\sigma$ -конечной мерой,  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  – измерим.

$$\int_X |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t\} dt \quad (\text{в скобках записана функция распределения}).$$

**Доказательство.**  $m = \mu \times \lambda_1$ .

$$\int_X |f| d\mu = m\mathcal{P}_{|f|} = \int_{[0,+\infty]} \left( \int_X \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{P}_{|f|}}(x, t)}_{=1 \Leftrightarrow |f(x)| \geq t} d\mu(x) \right) d\lambda_1(t) = \int_{[0,+\infty]} \mu X\{|f| \geq t\} d\lambda_1(t).$$

□

**Следствие.** 1. В условии теоремы  $\int_X |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| > t\} dt$

**Доказательство.**  $g(t) := \mu X\{|f| \geq t\}$  – монотонно возраст., не более чем счетное число точек разрыва.

$$\mu X\{|f| > t\} = \lim \mu X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \frac{1}{n}) = \lim_{s \rightarrow t+} g(s) = g(t) \text{ при почти всех } t.$$

$$X\{|f| > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\}$$

□

$$2. \int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \mu X\{|f| \geq t\} dt \text{ при } p > 0.$$

$$\text{Доказательство. } \int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f|^p \geq t\} dt = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t^{\frac{1}{p}}\} dt = \int_0^{+\infty} g(t^{\frac{1}{p}}) dt = \int_0^{+\infty} p s^{p-1} g(s) ds$$

$$\text{Где } t = s^p, s = t^{\frac{1}{p}}, dt = p s^{p-1} ds.$$

□

## 2.7. Замена переменной

**Определение 2.19.**  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  – открытые.

$$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}.$$

$\Phi$  – диффеоморфизм, если

1.  $\Phi$  – биекция.

2.  $\Phi$  – непр. дифф.

3.  $\Phi^{-1}$  – непр. дифф.

$$\text{Замечание. } Id = \Phi^{-1} \circ \Phi \implies x = (\Phi(x)^{-1})' \cdot (\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \implies 1 = \det(\Phi^{-1})'(\Phi(x)) \cdot \det(\Phi'(x)).$$

**Замечание.** Обозначение.

$$J_{\Phi} := \det \Phi'$$

якобиан = определитель матрицы Якоби.

**Теорема 2.32.** (о замене переменной).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  диффеоморфизм.  $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  откр.,  $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \geq 0$  измеримая. Тогда

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |J_{\Phi}(x)| d\lambda_m.$$

Такая же формула есть и для суммируемых функций  $f$ .

Частные случаи:

1. Сдвиг:  $\Phi(x) = x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}^m$ .

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x + a) d\lambda_m(x)$$

2.  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  обратимое линейное отображение.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(Lx) |\det L| d\lambda_m(x)$$

3. Гомотетия:  $Lx = c \cdot x$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ .

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = c^m \cdot \int_{\mathbb{R}^m} f(c \cdot x) d\lambda_m(x).$$

**Лемма.** (о расщеплении).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  – диффеоморфизм,  $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  – открытые,  $a \in \Omega$ ,  $1 \leq k \leq m - 1$ .

Тогда существует  $U_a$  и  $\Phi_2 : U_a \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi_1 : \Phi_2(U_a) \rightarrow \mathbb{R}^m$ , т.ч.  $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$ .

$\Phi_1$  – оставляет на месте  $k$  координат, а  $\Phi_2$  – оставляет на месте  $m - k$  координат.

**Доказательство.**  $x, u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y, v \in \mathbb{R}^{m-k}$ ,  $\Phi(x, y) = \left( \underbrace{\phi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, \underbrace{\psi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}} \right)$ .

$$\Phi_1(x, y) = (x, \underbrace{f(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}})$$

$$\Phi_2(x, y) = (\underbrace{g(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, y)$$

$$\Phi_1(\Phi_2(x, y)) = (*)$$

$$(*) = \Phi_1(g(x, y), y) = (g(x, y), f(g(x, y), y))$$

$$(*) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) \implies g(x, y) := \phi(x, y)$$

$$\implies f(u, v) = \psi(\Phi_2^{-1}(u, v))$$

$$f(\phi_2(x, y)) = f(\phi(x, y), y) = \psi(x, y)$$

Нужна локальная обратимость  $\Phi_2$ , а для этого нужна обратимость  $\Phi'_2(a)$ , то есть  $\det(\Phi'_2(a)) \neq 0$ .

$$\Phi_2(x, y) = (\phi(x, y), y), \quad \Phi'_2(x, y) = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \det(\Phi'_2) = \det(\Phi'_x).$$

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{pmatrix}$$

блок  $k \times k$ , ненулевой минор найдется. □

**Следствие.**  $\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  – диффеоморфизм,  $a \in \Omega$ ,  $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  – открытые.

Тогда существует  $U_a$ , т.ч.  $\Phi|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \dots \circ \Phi_m$ , где  $\Phi_j$  – диффеоморфизм, оставляющие на месте все координаты, кроме одной (но их перенумерующие).

**Доказательство.** Индукция + предыдущая лемма. □

**Теорема 2.33. Линделефа.**

$A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $A$  – покрыто открытыми мн-вами.

Тогда из него можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

**Доказательство.**  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} \left( \underbrace{G_\alpha}_{\text{открытое}} \right)$ .

Берем  $a \in A$ , рисуем картинку, которую кто-нибудь *обязательно* добавит.

Пусть  $U_a$  – шарик с рациональным центром и рациональным радиусом.  $a \in U_a$  и  $U_a$  содержатся в каком-то элементе покрытия. Очевидно, что  $a \in U_a \subset G_{\alpha_i}$ , тогда выкинем все лишние  $G_\alpha$ , а остальных останется не более чем счетное кол-во (так как  $U_a$  с рациональным центром и радиусом, а таких счетное кол-во), при этом они покрывают  $A$ .  $\square$

**Теорема 2.34.** (об изменении меры множества при диффеоморфизме).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$  – диффеоморфизм,  $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$  – открытые,  $A \subset \Omega$  – измеримое.

Тогда  $\lambda_m \Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m$ .

**Замечание.** Если теорема верна для конкретного  $\Phi$  и произвольного  $A$ , то для того же  $\Phi$  верна формула замена переменной.

Формула замены переменной:

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f \circ \Phi |J_\Phi| d\lambda_m.$$

**Доказательство.** Замечания.

$$f = \mathbb{1}_{\Phi(A)}, \quad A \subset \Omega.$$

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\Phi(A)} d\lambda_m = \lambda_m(\Phi(A)) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A |J_\Phi| d\lambda_m.$$

$$\mathbb{1}_{\Phi(A)}(\Phi(x)) = \mathbb{1}_A(x).$$

Нужно проверить для простых, а дальше для измеримых, в общем, все раскручивается (так говорил Храбров...).  $\square$

**Доказательство.** Теоремы.

Шаг 1. Пусть  $\Omega \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ . Если т. верна для каждого  $G_\alpha$ , то она верна и для  $\Omega$ .

Выбираем нбчс подпокрытие  $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ .

$$\lambda_m \Phi(A \cap G_k) = \int_{A \cap G_k} |J_\Phi| d\lambda_m \text{ и просуммируем } A \cap \left( G_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j \right).$$

Шаг 2. Если т. верна для диффеоморфизмов  $\Phi$  и  $\Psi$ , то она верна и для  $\Psi \circ \Phi$ .

$$\lambda_m \Psi(\Phi(A)) = \int_{\Phi(A)} |J_\Psi| d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \underbrace{\mathbb{1}_{\Phi(A)} \cdot |J_\Psi|}_{=: f} d\lambda_m =$$

$$= \int_{\Omega} \underbrace{\mathbb{1}_{\Phi(A)} \circ \Phi}_{=: \mathbb{1}_A} \cdot |J_\Psi \circ \Phi| \cdot |J_\Phi| d\lambda_m =$$

$$= \int_A |J_\Psi(\Phi(x))| |J_\Phi(x)| d\lambda_m(x).$$

$$\det(\Psi'(\Phi(x))) \cdot \det(\Phi'(x)) = \det(\Psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)) = \det(\Psi \circ \Phi)' = J_{\Psi \circ \Phi}.$$

Шаг 3.  $m = 1$ .  $\Phi(x)$  – строго монот. и непр. дифф.

$$\nu A := \lambda_1(\Phi(A)) \text{ – мера.}$$

$\mu A := \int_A |\phi'| d\lambda_1$  – мера.

Хотим проверить, что  $\nu = \mu$ , тогда проверим, что они совпадают на ячейках  $(a, b]$  (а по единственности продолжения получим, что нужно).

$$\lambda(\phi(a, b]) = \int_{(a, b]} |\phi'| d\lambda.$$

Эти значения стремятся к тем, что выше, соответственно.  $\lambda(\phi[a + \frac{1}{n}, b]) = \int_{[a + \frac{1}{n}, b]} |\phi'| d\lambda$

Эти равны тем, что выше, соответственно.  $\phi(b) - \phi(a + \frac{1}{n}) = \int_{a + \frac{1}{n}}^b \phi' d\lambda$ , если  $\phi$  – возрастает,  $\phi[a + \frac{1}{n}, b] = [\phi(a + \frac{1}{n}), \phi(b)]$

Шаг 4.  $\Phi$  оставляет на месте  $m - 1$  коорд.  $x = (\underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^{m-1}}, \underbrace{t}_{\in \mathbb{R}})$ .

$$\Phi(y, t) = (y, \phi(y, t)).$$

$$\lambda_m \Phi(A) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (\lambda_1 \Phi(A))_y d\lambda_{m-1}(y) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \lambda_1(\phi(y, A_y)) d\lambda_{m-1}(y) \stackrel{(*)}{=}$$

$$\underbrace{t \in (\Phi(A))_y}_{t' \in A_y} \Leftrightarrow (y, t) \in \Phi(A) \Leftrightarrow \exists (y', t') \in A, \text{ т.ч. } (y, t) = \Phi(y', t') = (y', \phi(y', t')) \Leftrightarrow \exists t' : \underbrace{(y, t') \in A}_{t = \phi(y, t')} \text{ и } \underbrace{(y, t) = (y, \phi(y, t'))}_{t = \phi(y, t')} \Leftrightarrow t \in \phi(y, A_y).$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left( \int_{A_y} |\phi'(y, t)| d\lambda_1(t) d\lambda_{m-1}(y) \right) = \int_A |J_\Phi| \lambda_m.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \phi'_y & \phi'_t \end{pmatrix}$$

Дальше были какие-то умные слова. Я не успел записать...

□

**Пример.** Полярная замена.  $\mathbb{R}^2$ .

$$(r, \phi) \rightarrow (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

$$r \in (0, +\infty)$$

$$\phi \in (0, 2\pi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2 = \int_{[0, 2\pi] \times [0, +\infty)} (f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot r) dr d\phi.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\det = r$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx, \quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Полярная замена:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\phi dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi \cdot (-e^{-t})|_0^{+\infty} = \pi.$$

$$t = r^2, \quad df = 2r dr$$

### 3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы

### 3.1. Собственные интегралы с параметрами

**Утверждение 3.1.**  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  – пр-во с мерой,  $T$  – метрическое пр-во,  $f : X \times T \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}, \forall t \in T, E_t \in \mathcal{A}, f(\cdot, t)$  – измеримая.

$$F(t) := \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x).$$

1.  $t_0$  – предельная точка.

$$\forall x \underbrace{f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0}} \dots \underbrace{\implies}_{?} F(t) \underbrace{\xrightarrow{t \rightarrow t_0}}$$

2.  $f(x, t)$  непрер. в точке  $t_0, \forall x \implies F$  непрер. в  $t_0$ .

3.  $f(x, t)$  дифф. по  $t, \forall x \implies F$  дифф., какая формула для производной?

4. Если  $\nu$  – мера на  $T, \int_T F(t) d\nu(t) = \int_T \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x) d\nu(t) = \int_T \int_X \mathbf{1}_{E_t}(x) \cdot f(x, t) d\mu(x) d\nu(t)$

**Теорема 3.2.**  $t_0$  – предельная точка  $T, f(\cdot, t)$  – суммируема  $\forall t \in T, g(x) := \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$ .

**Локальное условие Лебега:**

Пусть найдется окр-ть  $U_{t_0}$  и суммир. ф-я  $\Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}},$  т.ч.  $|f(x, t)| \leq \Phi(x) \forall t \in U_{t_0}.$

Тогда  $\lim_{t \rightarrow t_0} \left( \int_X f(x, t) d\mu(x) \right) = \int_X g(x) d\mu(x).$

**Доказательство.** Проверяем по Гейне. Берем  $t_n \rightarrow t_0, f_n(x) := f(x, t_n), \Phi(x) \geq |f(x, t_n)| = |f_n(x)|$  при больших  $n$ .

$$\underbrace{\implies}_{\text{т. Лебега}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{=g(x)} d\mu(x) \quad \square$$

**Определение 3.1.**  $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}, t_0$  – предельная точка  $T, f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} g(x),$  если

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall t \in T : \rho_T(t, t_0) < \delta, \forall x \in X : |f(x, t) - g(x)| < \epsilon.$$

**Замечание.**  $f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} g(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x, t) - g(x)| \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0$

**Следствие.** Если  $\mu X < +\infty, f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} g(x),$  то  $\int_X f(x, t) d\mu(x) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \int_X g d\mu$  и  $g$  – суммируемая ф-я.

**Доказательство.** При  $t$  близких к  $t_0: |f(x, t) - g(x)| \leq 1 \implies$  берем  $t_1,$  для которого верно  $|f(x, t_1) - g(x)| \leq 1 \implies |g(x)| \leq 1 + |f(x, t_1)|$  – суммируема  $\implies$  при  $t$  близких к  $t_0 : |f(x, t)| \leq 1 + |g(x)|$  – суммир.  $\square$

**Замечание.** Условие  $\mu X < +\infty$  существенно.

$$X = [0, +\infty), \mu = \lambda_1, f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, n]}(x) \xrightarrow{} 0,$$

$$\int_{[0, +\infty)} f_n d\lambda_1 = 1.$$

**Следствие.**  $f(x, t)$  непрер. в точке  $t_0, \forall x \in X$  и существует суммир.  $\Phi(x),$  т.ч.  $|f(x, t)| \leq \Phi(x)$  при  $t$  близких к  $t_0, \forall x \in X.$

Тогда  $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$  непрер. в точке  $t_0.$



**Доказательство.**  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$  и подставляем в теорему. □

**Лемма.** Декартово произведение компактов – компакт.

$(X, \rho), (Y, d)$  – метрические про-ва.  $A \subset X, B \subset Y$  – компакты.

Тогда  $A \times B$  – компакт в  $(X \times Y, r), r((x, y), (x', y')) = \rho(x, x') + d(y, y')$

**Доказательство.** Проверяем секвенциальную компактность.

$x_n \in A, y_n \in B, (x_n, y_n)$

хотим выбрать сх-ся подпол. Выбираем  $x_{n_k}$ , т.ч. она сходится, а затем из  $y_{n_k}$  подпол  $y_{n_{k_j}}$ , которая сх-ся.

Тогда  $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$  сх-ся покоординатно  $\implies$  сх-ся по метрике  $r$ . □

**Теорема 3.3.**  $\mu X < +\infty, X$  и  $T$  – компакты,  $f \in C(X \times T)$ . Тогда  $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(T)$ .

**Доказательство.**  $f$  – непр-на на компакте  $\implies$  ограничена  $\implies |f(x, t)| \leq M$  – суммир. мажоранта. □

**Следствие.** Если  $\mu X < +\infty, X$  – компакт,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  открытое,  $f \in C(X \times \Omega)$ .

Тогда  $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(\Omega)$ .

**Доказательство.** Берем  $a \in \Omega$ . Хотим проверить непрер. в точке  $a$ .

Возьмем  $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$  – компакт  $\implies f \in C(X \times \overline{B}_r(a))$

$\implies F \in C(\overline{B}_r(a)) \implies F$  непрер. в точке  $a$ . □

**Теорема 3.4.**  $T \subset \mathbb{R}$  промежуток,  $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}, f'_t(x, t)$  существ.  $\forall x \in X, \forall t \in T$  и  $f'_t(x, t)$  удовлетворяет **локальным условиям Лебега** в точке  $t_0$ .

Тогда  $F$  – дифф. в точке  $t_0$  и  $F'(t_0) = \int_X f'_t(x, t_0) d\mu(x)$ .

**Доказательство.**  $\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \int_X \underbrace{\frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h}}_{=:g(x, h)} d\mu(x)$ .

Нужно локальное условие Лебега для  $g(x, h)$ .

$f(x, t_0+h) - f(x, t_0) = h \cdot f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$

$g(x, h) = f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$

Знаем, что  $\exists U_{t_0}$ , т.ч.  $|f'_t(x, t)| \leq \Phi(x)$  – суммир.  $\forall x, \forall t \in U_{t_0}$ .

Рассмотрим  $\|h\| < \epsilon$ , т.ч.  $t_0 + h \in U_{t_0}$

$\implies t_0 + \theta_h \cdot h \in U_{t_0} \implies |f'_t(x, t_0 + \theta_h h)| = |g(x, h)| \leq \Phi(x) \implies$  можно переходить к пределу под знаком интеграла, а предел  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x, h) = f'_t(x, t_0)$ . □

**Следствие.**  $T \subset \mathbb{R}$  – отрезок,  $X$  – компакт,  $\mu X < +\infty, f, f'_t \in C(X \times T)$ .

Тогда  $F \in C^1(T)$  и  $F'(t) = \int_X f'_t(x, t) d\mu(x)$ .

**Доказательство.**  $f'_t$  – непр. на компакте  $\implies$  ограничена  $\implies |f'_t(x, t)| \leq M$  – сумм. мажоранта. □

**Теорема 3.5. Формула Лейбница.**

$f : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_t \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, f'_t \in C([a, b] \times [c, d])$ ,  $\phi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  непр. дифф.

$$F(t) := \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx.$$

Тогда  $F$  – дифф. и  $F'(t) = \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x, t) dx + f(\psi(t), t) \cdot \psi'(t) - f(\phi(t), t) \cdot \phi'(t)$ .

**Доказательство.**  $\Phi(\alpha, \beta, t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx$ .

$$\frac{d\Phi}{d\beta} = f(\beta, t) - \text{непр. по условию}$$

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = -f(\alpha, t) - \text{непр.}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} f'_t(x, t) dx - \text{непр.}$$

Так как все частные производные непр., то  $\Phi$  – дифф.

$$F(t) = \Phi(\phi(t), \psi(t), t) \implies F'(t) = \frac{d\Phi}{d\alpha} \phi'(t) + \frac{d\Phi}{d\beta} \psi'(t) + \frac{d\Phi}{dt}.$$

□

**Пример.**  $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(tx) dx$

Так как есть локальное условие Лебега (на самом деле  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx < +\infty$ ):

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(tx) \cdot x dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \sin(tx) \cdot d(e^{-x^2}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \sin(tx) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} t \cos tx e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

$$F'(t) = -\frac{1}{2} t F(t).$$

$$\underbrace{\frac{F'}{F}}_{= (\ln F)'} = -\frac{t}{2} \implies \ln F = -\frac{t^2}{4} + C_0 \implies F(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

$$F(t) e^{\frac{t^2}{4}} = C.$$

Более строго:

$$\left( F(t) e^{\frac{t^2}{4}} \right)' = F' e^{\frac{t^2}{4}} + F \cdot \frac{t}{2} e^{\frac{t^2}{4}} = e^{\frac{t^2}{4}} \cdot \underbrace{\left( F' + \frac{t}{2} \cdot F \right)}_{=0} = 0.$$

Хотим узнать константу:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

**3.2. Несобственные интегралы с параметрами**

$$F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx : \forall t \in T \text{ интеграл сх-ся.}$$

**Определение 3.2.**  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  – равномерно сх-ся, если  $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : \left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \epsilon$

**Замечание.**  $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx$ .

$$\int_a^{+\infty} \dots - \text{равном сх-ся} \Leftrightarrow F_b \underset{b \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} F \text{ равном. по } t \in T.$$

**Доказательство.**  $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F(t)|}_{= - \int_b^{+\infty} f(x, t) dx} < \epsilon$

□

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx, t > 0$

$$\int_b^{+\infty} e^{-tx} dx = -\frac{e^{-tx}}{t} \Big|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{e^{-bt}}{t}.$$

1.  $t \geq t_0 > 0$  :

$$\frac{e^{-bt}}{t} \leq \frac{e^{-bt_0}}{t_0} < \epsilon$$

2.  $t > 0$  :

$$\frac{e^{-bt}}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{>} +\infty \implies \text{нет равномерной сх-ти.}$$

**Теорема 3.6. Критерий Коши.**

$$\int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ равн. сх-ся} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

**Доказательство.**  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  равн. сх-ся  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow F_b \rightrightarrows F \text{ (где } F_b(t) = \int_a^b f(x, t) dx, F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F_c(t)|}_{\int_b^c f(x, t) dx} < \epsilon. \quad \square$$

**Следствие.**  $f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная.

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ сх-ся } \forall t \in (c, d) \text{ и расх-ся при } t = c \text{ или } t = d.$$

Тогда сходимость неравномерная.

**Доказательство.** Пусть  $\int_a^{+\infty}$  сх-ся равномерно  $\implies$  :

по Критерию Коши и тому, что  $f$  непр. на  $[b, b'] \times [c, d]$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \forall t \in (c, d) : \underbrace{\left| \int_b^{b'} f(x, t) dx \right|}_{\rightarrow \int_b^{b'} f(x, c) dx, \text{ при } t \rightarrow c} < \epsilon \implies$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \left| \int_b^{b'} f(x, c) dx \right| \leq \epsilon \quad \underbrace{\implies}_{\text{критерий Коши}} \int_a^{+\infty} f(x, c) dx \text{ сх-ся} \implies \text{противо-}$$

речие. □

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx, t > 0$  сх-ся неравномерно, так как при  $t = 0$  расходится.

**Теорема 3.7. Признак Вейерштрасса.**

$$f, g : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } |f(x, t)| \leq g(x, t) : \forall x \geq a, \forall t \in T.$$

$$\text{Если } \int_a^{+\infty} g(x, t) dx \text{ равном. сх-ся, то } \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ равн. сх-ся.}$$

**Доказательство.** Пишем критерий Коши для  $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B : \underbrace{\int_b^c g(x, t) dx}_{< \epsilon} \geq \int_b^c |f(x, t)| dx \geq \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| \quad \square$$

**Следствие.** Если  $|f(x, t)| \leq g(x) \forall x \geq a, \forall t \in T$  и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сх-ся, то  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  сх-ся равномерно.

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+1} dx$  равн. сх-ся при  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\left| \frac{\cos(xt)}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ и } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} < +\infty.$$

**Теорема 3.8. Признак Дирихле.**

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx.$$

Пусть

1.  $\exists M : \forall b > a, \forall t \in T : \left| \int_a^b f(x, t)dx \right| \leq M$
2.  $g$  монотонна по  $x : \forall t \in T$ .
3.  $g \underset{x \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0$

Тогда  $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$  равномерно сх-ся.

**Доказательство.** Для дифф. ф-й  $g$ :

$$F(y, t) = \int_a^y f(x, t)dx.$$

$$(1) \Rightarrow |F(y, t)| \leq M : \forall y, \forall t.$$

$$\int_a^y f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F(x, t)g(x, t)|_{x=a}^{x=y}}_{=F(y, t)g(y, t)} - \int_a^y F(x, t)g'_x(x, t)dx$$

$$|F(y, t)g(y, t)| \leq M|g(y, t)| \underset{y \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0$$

$$\int_a^{+\infty} F(x, t)g'_x(x, t)dx - \text{равном. сх-ся.}$$

$$|F(x, t)g'_x(x, t)| \leq M|g'_x(x, t)|.$$

Надо доказать, что  $\int_a^{+\infty} |g'_x(x, t)|dx$  равн. сх-ся.

$$\int_a^y |g'_x(x, t)|dx = \left| \int_a^y g'_x(x, t)dx \right| = |g(x, t)|_{x=a}^{x=y} = \underbrace{|g(y, t) - g(a, t)|}_{\Rightarrow 0 \text{ по усл.}} \Rightarrow |g(a, t)|.$$

□

**Теорема 3.9. Признак Абеля.**

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx. \text{ Пусть}$$

1.  $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$  равн. сх-ся.
2.  $g$  монотонна по  $x : \forall t \in T$ .
3.  $|g(x, t)| \leq M, \forall x \geq a, \forall t \in T$

Тогда  $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$  равном. сх-ся.

**Доказательство.** Для дифф. ф-й  $g$ :

$$F_b(y, t) = \int_b^y f(x, t)dx$$

$$\int_b^c f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F_b(x, t)g(x, t)|_{x=b}^{x=c}}_{=F_b(c, t)g(c, t)} - \int_b^c F_b(x, t)g'_x(x, t)dx$$

Применим крит. Коши для  $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ :

$$\exists B : \forall y, b > B \forall t \in T : |F_b(y, t)| < \epsilon, \text{ смотрим на } b > B \Rightarrow |F_b(x, t)| < \epsilon.$$

$$|F_b(c, t)g(c, t)| < \epsilon \cdot M.$$

$$\begin{aligned} \left| \int_b^c F_b(x, t) g'_x(x, t) dx \right| &\leq \int_b^c \underbrace{|F_b(x, t)|}_{< \epsilon} |g'_x(x, t)| dx < \epsilon \cdot \int_b^c g'_x(x, t) dx = \epsilon \left| \int_b^c g'_x(x, t) dx \right| = \\ &= \epsilon |g(x, t)|_{x=b}^{x=c} \leq \epsilon \cdot 2M. \end{aligned}$$

Получается, что оценили  $\int_b^c f(x, t) g(x, t) dx < 3\epsilon M$ , то есть проверили критерий Коши для исходного интеграла.  $\square$

**Пример.**  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^t} dx$ ,  $t > 0$ .

1.  $t \geq t_0 > 0$ . Дирихле:  $f(x, t) = \sin(x)$ ,  $g(x, t) = \frac{1}{x^t}$  – вторая монотонно убывает.

$$\left| \int_1^b \sin(x) dx \right| \leq 2.$$

$$g(x, t) \Rightarrow 0: |g(x, t)| = \frac{1}{x^t} \leq \frac{1}{x^{t_0}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Есть равн. сх-ть.

2.  $t > 0$ . Нет равн. сх-ти, так как расх-ся при  $t = 0$ .

**Теорема 3.10.**  $f : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t_0$  – предельная точка  $T$ .

Если

- $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  равномерно сх-ся (по  $t \in T$ ).
- $f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \phi(x)$  равномер. по  $x$  на любом конечном отрезке.

Тогда  $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^{+\infty} f(x, t) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx$  и второй интеграл сх-ся.

**Доказательство.** (1)  $\xRightarrow[\text{кр. Коши для } f]{} \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T: \underbrace{\left| \int_b^c f(x, t) dx \right|}_{\rightarrow \left| \int_b^c \phi(x) dx \right| \text{ при } t \rightarrow t_0} < \epsilon.$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^{+\infty} \phi(x) dx \right| \leq \underbrace{\left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right|}_{< \epsilon} + \underbrace{\left| \int_b^{+\infty} \phi(x) dx \right|}_{< \epsilon} + \left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right|.$$

$$(1) \Rightarrow \exists B_1 \forall b > B_1 \text{ и } \forall t \in T: \left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

$$\int_a^{+\infty} \phi(x) dx - \text{сх-ся} \Rightarrow \exists B_2 \forall b > B_2: \left| \int_b^{+\infty} \phi(x) dx \right| < \epsilon.$$

Фиксируем  $b \geq \max\{B_1, B_2\}$ .

$$\left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right| \leq (b - a) \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} \{|f(x, t) - \phi(x)|\}}_{\rightarrow 0} < \epsilon \text{ при } t \text{ близких к } t_0. \quad \square$$

**Замечание.** Равн. сх-ть интеграла существенна:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{при } 0 \leq x \leq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \int_0^t \frac{1}{t} dx = 1 \not\rightarrow 0.$$

**Теорема 3.11.**  $f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$ ,  $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  равном. сх-ся.

Тогда  $F \in C[c, d]$ .

**Доказательство.**  $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} F(t)$ .

Достаточно понять, что  $F_b \in C[c, d]$ , а это знаем. □

**Замечание.** Без равном. сх-ти неверно.

$$f(x, t) = te^{-t^2x}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$F(t) := \int_0^{+\infty} te^{-t^2x} dx - \text{сх-ся.}$$

$$F(0) = 0$$

$$F(t) = \frac{1}{t} \text{ при } t \neq 0 \text{ нег непрер.}$$

**Теорема 3.12.** (Интегральный аналог теоремы Абеля для степенных рядов).

Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится и  $f \in C[a, +\infty)$ . Тогда  $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x) e^{-tx} dx \in C[0, +\infty)$

**Доказательство.** Признак Абеля.

$g(x, t) = e^{-tx}$ : монотонно убывает при фиксированном  $t$ .

$|g(x, t)| \leq 1$ : равномерно ограничена. □

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$  - сх-ся  $\implies F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$  непрер. при  $t \geq 0$ .

**Теорема 3.13.**  $f'_t, f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$

1.  $\Phi(t) := \int_a^{+\infty} f'_t(x, t) dx$  равномерно сх-ся.

2.  $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$  сх-ся при  $t = t_0$ .

Тогда  $F$  равномерно сх-ся,  $F \in C^1[c, d]$  и  $F' = \Phi$ .

**Доказательство.**  $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \implies F'_b(t) = \int_a^b f'_t(x, t) dx \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \Phi(t)$ .

$$F_b(t) = \left( \underbrace{\int_{t_0}^t F'_b(u) du}_{\implies \int_{t_0}^t \Phi(u) du} \right) + \underbrace{F_b(t_0)}_{\rightarrow F(t_0)} \implies \underbrace{F_b(t)}_{\rightarrow F(t)} \implies \int_{t_0}^t \Phi(u) du + F(t_0)$$

$$\implies \text{равномерная сх-ть и } F(t) = F(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t \Phi(u) du}_{\text{непр. ф-я}} \implies F \in C^1[c, d] \text{ и } F'(t) = \Phi(t). \quad \square$$

**Пример.**  $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx$ . Знаем, что  $F \in C[0, +\infty)$

$$\Phi(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{-tx} \cdot (-x) dx = \underbrace{- \int_0^{+\infty} \sin(x) \cdot e^{-tx} dx}_{= -\frac{1}{1+t^2} \text{ два раза инт. по частям}}$$

$$\implies F'(t) = \Phi(t) \implies F(t) = C - \arctan(t).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx \underset{\text{по предыдущим теоремам...}}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx = 0.$$

$$\left| e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq e^{-x} \cdot \frac{|\sin(x)|}{x} \leq e^{-x} - \text{суммируемая мажоранта.}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C - \arctan(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \implies C[0, +\infty) \ni F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) \in C[0, +\infty) \text{ при } t > 0$$

$$\implies F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) \text{ при } t \geq 0 \implies F(0) = \frac{\pi}{2}, \text{ то есть } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

### 3.3. В- и Г-функции Эйлера

**Определение 3.3.**  $\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ ,  $p > 0$  – гамма-функция.

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0 \text{ – бета-функция.}$$

**Свойства.** Г-фнкции.

1. Интеграл сходится в нуле эквивалентно тому, что  $\frac{1}{x^{1-p}}$  сх-ся в  $+\infty$

**Доказательство.**  $x^{p-1} \leq e^{\frac{x}{2}}$  при больших  $x$ ,  $x^{p-1} \cdot e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}} \implies$  сх-ся. □

2.  $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ .

**Доказательство.**  $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^p d(e^{-x}) =$   
 $= -x^p e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$ . □

3.  $\Gamma(n+1) = n!$

**Доказательство.**  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

Далее индукция. □

4.  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

**Доказательство.**  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2y dy = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$ , где  $y^2 = x$ ,  $dx = 2y dy$ . □

5.  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$ .

**Доказательство.**  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) = \dots = (n - \frac{1}{2}) \cdot (n - \frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$  – получилось ровно то, что хотели. □

6.  $\Gamma$  бесконечно дифф. ф-я и  $\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln(x))^n e^{-x} dx$

**Доказательство.** Надо обосновать дифф. под знаком интеграла. Для этого надо потребовать равномерную сх-ть полученного интеграла.

$$0 < a \leq p \leq b < +\infty$$

- (a)  $0 \leq x \leq 1$ :

$$x^{a-1} |\ln(x)|^n e^{-x}$$

- (b)  $1 \leq x$ :

$$x^{b-1} |\ln(x)|^n e^{-x} \leq x^{n+b} e^{-x}$$

□

7.  $\Gamma$  – строго выпуклая.

**Доказательство.**  $\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln(x))^2 e^{-x} dx > 0$  □

**Свойства.**  $B$ -функции.

1. Интеграл сх-ся

(а) В нуле  $\Leftrightarrow \frac{1}{x^{1-p}} - \text{сх-ся}$ .

(б) В единице  $\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^{1-q}} - \text{сх-ся}$ .

2.  $B(p, q) = B(q, p)$ .

**Доказательство.**  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = -\int_1^0 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy = B(q, p)$ , где  $y = 1-x$ ,  $dy = -dx$ . □

3.  $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$ .

**Доказательство.**  $B(p, q) = \int_0^1 y_{p-1}(1-y)^{q-1} dy = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx$ , где  $y = \frac{x}{1+x}$ ,  $y = 1 - \frac{1}{1+x}$ ,  $dy = \frac{dx}{(1+x)^2}$ . □

**Теорема 3.14.**  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ .

**Доказательство.**  $\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dx dy =$   
 $= \int_0^{+\infty} \int_0^u x^{p-1} (u-x)^{q-1} e^{-u} dx du \quad \underbrace{\quad}_{\text{замена } x=uv, \quad dx=u \cdot dv} \quad \int_0^{+\infty} \int_0^1 (uv)^{p-1} (u-uv)^{q-1} e^{-u} u dv du =$   
 $= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} \cdot \underbrace{\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv}_{=B(p,q)} du = B(p, q) \Gamma(p+q)$ . □

**Следствие.** (формула дополнения)

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad p \in (0, 1).$$

**Доказательство.**  $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \Gamma(1) B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad \underbrace{\quad}_{\text{просто верим в это}} \quad \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$ . □

**Следствие.** (формула удвоения)

$$\Gamma(p) \Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)$$

**Доказательство.**  $\frac{\Gamma(p) \Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx =$   
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx \quad \underbrace{\quad}_{x=\frac{1}{2}-t} \quad 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} d(-t) =$   
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} dt \quad \underbrace{\quad}_{t=\frac{\sqrt{u}}{2}} \quad 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{u}{4}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du =$   
 $= \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{B(p, \frac{1}{2})}{2^{2p-1}} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2^{2p-1}} =$   
 $= \frac{\Gamma(p) \sqrt{\pi}}{\Gamma(p+\frac{1}{2}) \cdot 2^{2p-1}}$  □



**Теорема 3.15.**  $\Gamma(t+a) \sim t^a \Gamma(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$

**Доказательство.**  $\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t+a)}$  при больших  $t$

$$\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(a)}{\Gamma(t+1+a)} = B(t+1, a) = \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx$$

$$t^a \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx \underset{y=xt}{=} t^a \int_0^t \left(\frac{y}{t}\right)^{a-1} \underbrace{\left(1 - \frac{y}{t}\right)^t}_{\rightarrow e^{-y}} \frac{1}{t} dy \rightarrow \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)$$

На самом деле интегрируем  $\mathbb{1}_{[0,t]} y^{a-1} (1 - \frac{y}{t})^t \leq y^{a-1} e^{-y}$  — это суммируемая мажоранта, поэтому можем перейти к пределу по т. Лебега.  $\square$

**Следствие.** При  $a = \frac{1}{2}$  это формула Валлиса.

**Доказательство.**  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \sim n^{\frac{1}{2}} \Gamma(n)$   $\square$

**Теорема 3.16.** формула Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

**Доказательство.**  $\Gamma(n+p) = (p+n-1) \cdot (p+n-2) \cdot \dots \cdot (p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p)$

$$n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)} = \frac{n^p}{p+n} \cdot \frac{n! \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \underbrace{\frac{n}{p+n}}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left(n^p \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}\right)}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \Gamma(p) \quad \square$$

**Пример.**  $1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 \cdot \dots \cdot (5n+1) = 5^n \cdot \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} + 1) \cdot (\frac{1}{5} + 2) \dots (\frac{1}{5} + n) \sim 5^{n+1} \frac{n^{\frac{1}{5}} n!}{\Gamma(\frac{1}{5})}$

**Пример.** 1.  $\int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)$  при  $p > 0$ .

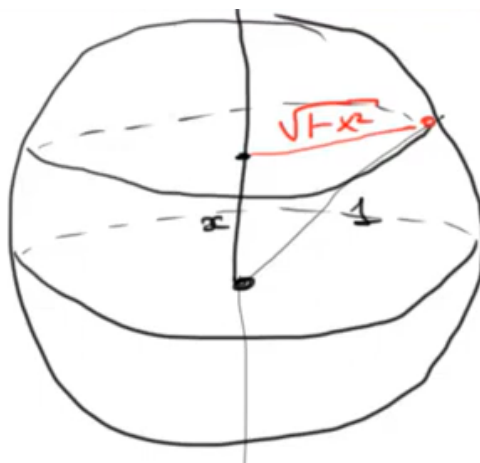
$$\text{Док-во: } \int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt \underset{x=t^p}{=} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} dx = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1} e^{-x} dx = \frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right).$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

$$\text{В частности, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}.$$

$$\begin{aligned} \text{Док-во: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\phi))^{\frac{p-2}{2}} \cdot (\cos^2(\phi))^{\frac{q-2}{2}} \cdot 2 \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \underset{t=\sin^2(\phi)}{=} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{\frac{p}{2}-1} (1-t)^{\frac{q}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right). \end{aligned}$$

3. Объем  $n$ -мерного шара  $V_n(r) = C_n \cdot r^n$ , где  $C_n = V_n(1)$  – объем  $n$ -мерного шара, радиуса 1.



$$V_n(1) = \int_{-1}^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{n-1} dx \stackrel{x=\sin(\phi)}{=} \\ = 2 \cdot C_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\phi))^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Получили, что  $C_n = C_{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}$ .

$$C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi} \cdot C_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \dots \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} C_1 = \\ = 2 \cdot \frac{(\sqrt{\pi})^{n-1} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

### 3.4. Криволинейные интегралы

**Определение 3.4.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  – гладкая кривая

$f$  – функция, заданная на  $\gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

Криволинейный интеграл ( $I$  рода (интеграл по длине дуги)):

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt, \text{ где } \|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2}$$

**Теорема 3.17.** 1. Не зависит от параметризации кривой

2. Не зависит от направления

3.  $\int_{\gamma} ds = l(\gamma)$  – длина кривой

4. Линейность по функции

5. Аддитивность по кривой: если  $\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$ , то  $\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds$

6. Если  $f \leq g$ , то  $\int_{\gamma} f \leq \int_{\gamma} g$

7.  $|\int_{\gamma} f ds| \leq \int_{\gamma} |f| ds$

8.  $\int_{\gamma} f ds \leq \max f \cdot l(\gamma)$

**Доказательство.** 1-2  $\tilde{\gamma}$  – другая параметризация.  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ , где  $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$  – гладкая строго монотонная биекция

$$\int_{\tilde{\gamma}} f ds = \int_c^d f(\gamma(\tau(u))) \|\tilde{\gamma}'(u)\| du$$

$$\tilde{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}'_1(u) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 \circ \tau, \tilde{\gamma}'_1(u) = \gamma'_1(\tau(u))\tau'(u)$$

$\|\tilde{\gamma}'(u)\| = |\tau'(u)| \cdot \|\gamma'(\tau(u))\|$  – если бы не было модуля, могли бы просто сделать замену переменной, но надо что-то умнее

Если  $\tau \uparrow$ , тогда  $\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds$ , где  $t = \tau(u)$

А если  $\tau \downarrow$ , то лишний минус появится, когда поменяем местами концы

В итоге не зависим от убывания/возрастания

### 3 Формула для длины кривой

$$4 \int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \int_a^b (\alpha f(\gamma(t)) + \beta g(\gamma(t))) \|\gamma'(t)\| dt = \alpha \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt + \dots = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds$$

5  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c \in (a, b)$ ,  $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$ ,  $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$  и по аналогии

6  $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$  и если заменим на  $g$ , станем только больше

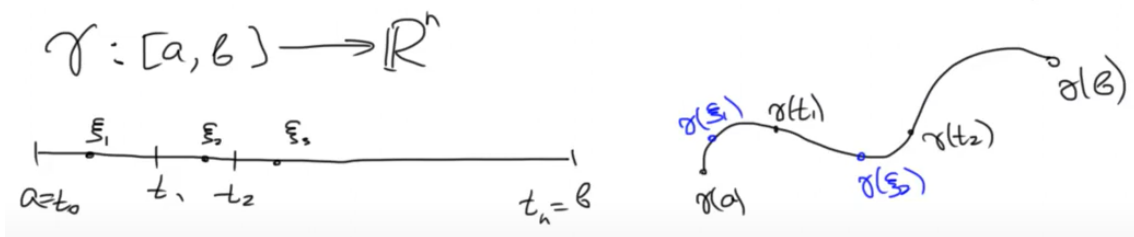
$$7 \left| \int_{\gamma} f ds \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \right| = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} |f| ds$$

$$8 f \leq \max f \implies \int_{\gamma} f ds \leq \int_{\gamma} \max f ds = l(\gamma) \cdot \max f$$

□

**Замечание.** Можно определить  $\int_{\gamma} f ds$  для кусочно-гладких  $\gamma$ . Содержательная тут только проверка на корректность, но она проверится с помощью аддитивности по кривой

**Упражнение.**  $\int_{\gamma} f ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f(\gamma(\xi_k)) \cdot l(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]})$ , где  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , при мелкости дробления  $\rightarrow 0$ .



**Определение 3.5.** Дифференциальная форма (1-го порядка) в  $\mathbb{R}^n$ .

$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ , где

$f_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\omega(x)$  – линейное отображение:  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$dx_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – проекция на  $k$ -ую координату, то есть  $dx_k(\underbrace{h}_{\text{вектор}=(h_1, \dots, h_n)}) = h_k$ .

Пример записи:  $\omega(x, h) = f_1(x)h_1 + \dots + f_n(x)h_n$ .

**Определение 3.6.** Криволинейный интеграл  $II$  рода (интеграл от дифференциальной формы)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  – гладкая кривая

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \dots + f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'_n(t)) dt$$

Если коротко:  $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ ,  $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

**Свойства.** 1. Не зависит от параметризации

2. Смена направления меняет знак интеграла

3. (Связь с интегралом по длине дуги).  $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds$ , где  $\bar{\sigma}$  – единичный касательный вектор к кривой

4. Линейность по  $\bar{f}$

5. Аддитивность по кривой

6.  $|\int_{\gamma} \omega| \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| ds \leq \max \|\bar{f}\| \cdot l(\gamma)$

**Доказательство.** 1.  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ ,  $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$  – строго возрастает, гладкая,  $\tau(c) = a$ ,  $\tau(d) = b$ .

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\tilde{\gamma}'(u)) du = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\tau(u))) \gamma'_k(\tau(u)) \tau'(u) du = (*)$$

$$\text{Делаем замену } t = \tau(u) : (*) = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_{\gamma} \omega$$

2. Доказали вместе с первым: если меняется направление, то  $\tau(c) = b$ ,  $\tau(d) = a$ ,  $\int_b^a = -\int_a^b$

3.  $\bar{\sigma}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ . Тогда  $\int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \bar{\sigma}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt =$   
 $= \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

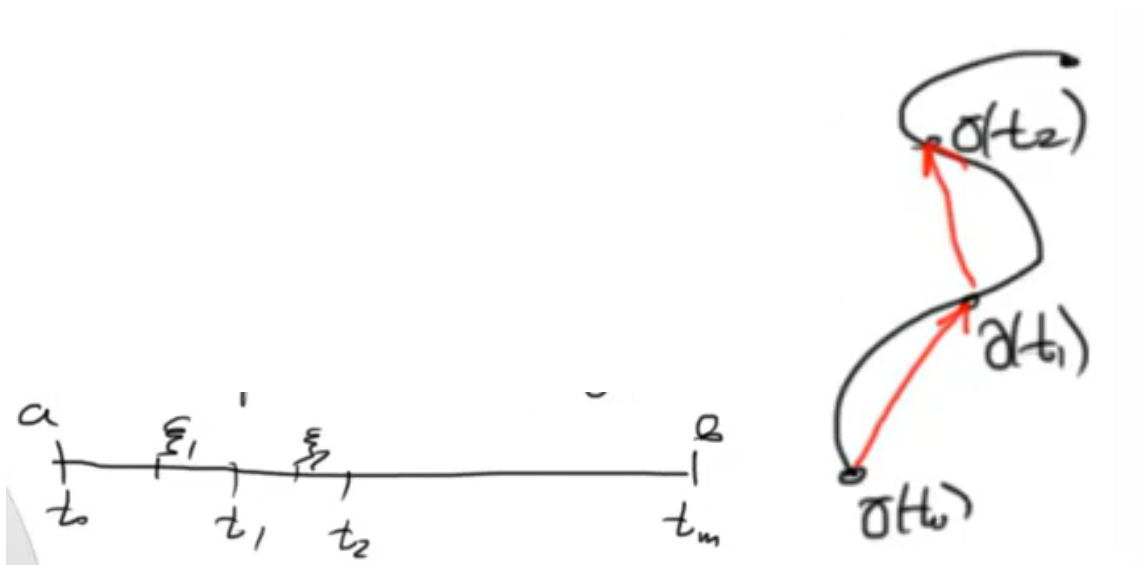
4, 5. следуют из 3 (по линейности интеграла  $I$  рода и линейности скалярного произведения).

6.  $|\int_{\gamma} \omega| = |\int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds| \leq \int_{\gamma} |\langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle| ds \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| \cdot \|\bar{\sigma}\| ds$

□

**Упражнение.** Доказать формулу:  $\int_{\gamma} \omega = \lim \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\xi_j))(\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))$ , если мелкость дробления  $\rightarrow 0$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$



**Определение 3.7.**  $\omega$  – дифференциальная форма, заданная в  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – открытом множестве

$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – первообразная для  $\omega$ , если  $dF = \omega$

$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n$ , т.е. нужно, чтобы  $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$  при  $k = 1, 2, \dots, n$

**Теорема 3.18.** Пусть  $F$  – первообразная,  $\omega, \gamma$  – кривая, соединяющая точки  $A, B$

Тогда  $\int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A)$

**Доказательство.**  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_k(t)}_{(F \circ \gamma)'(t)} dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F \circ \gamma(b) - F \circ \gamma(a) =$$

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(B) - F(A). \quad \square$$

**Определение 3.8.**  $\Omega$  – область, если  $\Omega$  – открытое линейно связанное множество

Линейная связность – любая пара точек может быть соединена какой-либо кривой  $\in \Omega$

**Следствие.** 1. Если у  $\omega$  есть первообразная, то  $\int_{\gamma} \omega$  зависит только от концов кривой, но не зависит от самой кривой

2. Если  $\Omega$  – область, то все первообразные отличаются друг от друга на  $\text{const}$

**Доказательство.**

2.  $F$  и  $G$  – первообразные  $\omega$ , возьмем точки  $A, B$  из  $\Omega$  и соединим кривой  $\gamma \implies G(B) - G(A) = \int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A) \implies G(B) = F(B) + \underbrace{G(A) - F(A)}_{=\text{const, при фикс. } A}$  (фиксируем  $A$  и меняем  $B$ ).  $\square$

**Лемма.**  $\Omega$  – область  $\implies$  между любыми двумя её точками можно провести ломанную, все звенья которой параллельны осям координат

**Доказательство.**  $A, B \in \Omega \implies \exists \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  такая что  $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$ . Для  $t \in [a, b]$  рассмотрим шар  $B_{r(t)}(\gamma(t)) \in \Omega$

$\gamma([a, b])$  – компакт  $\implies$  выберем конечное подпокрытие. Тогда можем перемещаться между центрами шариков по звеньям, параллельным осям координат

□

**Теорема 3.19.** Пусть  $\Omega$  – область,  $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  – дифференциальная форма в  $\Omega$  и  $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – непрерывные функции. Тогда следующие условия равносильны

1.  $\omega$  имеет первообразную  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
2.  $\int_{\gamma} \omega = 0$  для любой замкнутой кривой  $\gamma$
3.  $\int_{\gamma} \omega = 0$  для любой замкнутой ломаной  $\gamma$  со звеньями, параллельными осям координат

**Доказательство.** 1)  $\implies$  2)  $\implies$  3) очевидны

3)  $\implies$  1):

Соединим  $s$  и  $x \in \Omega$  ломаной со звеньями, параллельными осям координат.

$F(x) := \int_{\gamma} \omega$ . Поймем, что результат не зависит от выбора ломаной  $\gamma$

$0 = \int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega$ , где  $\tilde{\gamma}^{-1}$  – инвертированная по направлению вторая ломаная

Осталось проверить, что  $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma \sqcup [x, x+h]} \omega}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \omega =$$

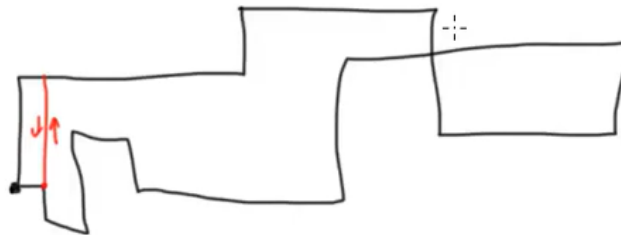
$$\underbrace{=}_{[0, h] = [x, x+h] \text{ (сдвиг на } x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{f_1(\gamma(t))}_{x+e_1 t} \underbrace{\gamma'_1(t)}_{=1} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{\int_0^h f_1(x + e_1 t) dt}_{=h \cdot f_1(x + e_1 h \cdot \theta), \theta \in (0, 1)} =$$

$$= f_1(x), \text{ т.к. } \gamma(t) = x + e_1 \cdot t, \gamma'_1(t) = 1, \gamma'_2(t) = \dots = \gamma'_n(t) = 0$$

□

**Замечание.** Для  $\mathbb{R}^2$  3) можно заменить на 3'):  $\int_{\gamma} \omega = 0$  для любого прямоугольного  $\gamma$  со сторонами, параллельными осям координат

**Доказательство.** Индукция по числу звеньев. Когда отсекаем новый прямоугольник, то по его ребру мы считаем интеграл в разные стороны, то есть с остатком фигуры значение сократится, поэтому такой индукционный переход сделать можно:



□

**Замечание.**  $\omega$  в  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . В каждой точке  $\Omega$  своё линейное отображение  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

$dx_1$  - функция  $g_1(x) = x_1$

$$dg_1$$

$g_1(x+h) = g_1(x) + dg_1(g) = o(h)$ , поэтому  $dx_i$  в определении  $\omega$  – проекции на соотв. координаты

**Определение 3.9.** Живём в  $\mathbb{R}^2$ . Назовём элементарной область в  $\mathbb{R}^2$ , если

$\Omega = \{(x, y) : a < x < b \wedge \phi(x) < y < \psi(x)\} = \{(x, y) : c < y < d \wedge \alpha(y) < x < \beta(y)\}$ , причем ограничивающие функции непрерывны.

Может показаться, что такого не бывает, но вот пример:



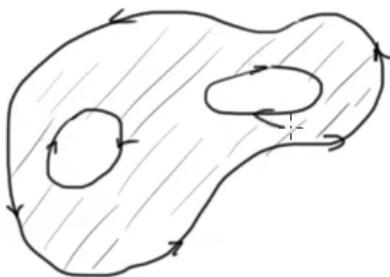
**Теорема 3.20. Формула Грина**

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  область, граница которой состоит из конечного числа кусочно гладких простых замкнутых кривых, ориентированных положительно.

$P, Q : Cl(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны.

Тогда  $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) d\lambda_2$ , где  $\gamma$  – граница  $\Omega$ .

Заметим, что направление на кусочках границ такое, что область слева. То есть ориентация устроена так:



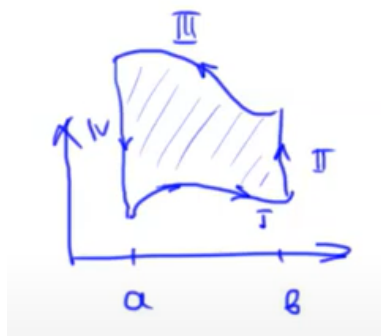
Область всегда по левую руку  
при обходе

**Доказательство.** Хотим доказывать это:  $\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Qdy$  и  $-\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Pdx$ , при этом формулы никак не связаны, то есть можно и по-отдельности доказывать. Проверим вторую формулу:

1.  $\Omega = \{(x, y) : x \in (a, b), \phi(x) < y < \psi(x)\}$  – элементарная область.

Левая часть:  $\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$

Правая часть:  $\int_{\gamma} Pdx = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$



$x \rightarrow (x, \phi(x)) : (I) = \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$

$y \rightarrow (b, y) : (II) = \int_{\phi(b)}^{\psi(b)} P(b, y) b' dy = 0$

$x \rightarrow (x, \psi(x)) : (III) = - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx$

$y \rightarrow (a, y) : (IV) = - \int_{\phi(a)}^{\psi(a)} P(a, y) a' dy = 0$

Записывая сумму  $(I) + (II) + (III) + (IV)$ , получим ровно то, что записано в левой части со знаком минус.

2.  $\Omega = \Omega_1 \cup l \cup \Omega_2$ . Пусть формула верна для  $\Omega_1, \Omega_2$ , выведем ее для  $\Omega$ .





$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\lambda_2 &= \int_{\Omega_1} + \underbrace{\int_l}_{=0, \text{ т.к. мера } l \text{ это } 0} + \int_{\Omega_2} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} = \\ &= \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int_{\gamma_2} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy \text{ (обходя } l \text{ с разных сторон, слагаемое сократится)}. \end{aligned}$$

3. Формула верна для конечного объединения элементарных областей.
4. Формула верна для области из условия, так как та нарезается на конечное число элементарных областей (без док-ва).

□

**Следствие. Формулы площади.**

$$\lambda_2 \Omega = \int_{\gamma} xdy = - \int_{\gamma} ydx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} xdy - ydx$$

**Доказательство.** Просто подставляем в формулу Грина подходящие  $P$  и  $Q$  (кто-то из них 0, а кто-то  $x$ , либо  $y$ ). □

### 3.5. Точные и замкнутые формы

**Определение 3.10.**  $\Omega$  – область,  $\omega$  – дифф. форма в  $\Omega$ .  $\omega$  – точная форма, если у нее существует первообразная.

**Определение 3.11.**  $\omega$  – локально точная форма, если  $\forall a \in \Omega$  найдется  $U_a$ , такая что в  $U_a$  есть первообразная  $\omega$ .

**Определение 3.12.**  $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$  – замкнутая, если  $\forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ .

**Замечание.** Точность  $\implies$  локальная точность (но не наоборот).

Возьмем  $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$  на  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  и покажем, что она замкнутая, локально точная, но не точная.

Проверим на замкнутость, то есть на равенство частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{y}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Проверим на локальную точность: везде, кроме оси  $Ox$ , есть первообразная  $F(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  (можно честно продифференцировать и проверить)

А теперь покажем, что точности нет: для этого нужно, чтобы интеграл любой замкнутой кривой был равен нулю. Возьмем тогда интеграл по единичной окружности с параметризацией  $(x, y) \rightarrow (\cos t, \sin t)$ :

$$\int_{\text{един. окр.}} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)(\sin(t))' - \sin(t)(\cos(t))'}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

**Теорема 3.21.** Если коэфф. формы  $f_i$  из  $C^1$ , тогда локальная точность  $\implies$  замкнутость.

**Доказательство.** Берем  $a \in \Omega$  и  $U_a$ , где есть первообразная  $F \implies f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$ .

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \quad \underbrace{\quad}_{\text{т.к. непрер. слева и справа от равенства}} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \implies \text{замкнутость}$$

$\omega$ .

□

**Лемма. Пуанкаре.**

Если  $\Omega$  – выпуклая область и коэфф. формы из  $C^1$ , то замкнутость  $\implies$  точность.

**Доказательство.** Только для  $\mathbb{R}^2$ .

Для существования первообр. достаточно чтобы интеграл по любому прямоугольнику сторонами параллельными осям координат был равен 0.

$$\omega = Pdx + Qdy : \int_{\text{обход контура}} \omega = \int_{\text{заполненные прямоуг.}} \underbrace{\left( \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)}_{\text{этот интеграл = 0 из-за замкнутости}} d\lambda_2 = 0.$$

Выпуклость  $\Omega$  важна, чтобы внутри заполненного прямоугольника не было дырок.

□

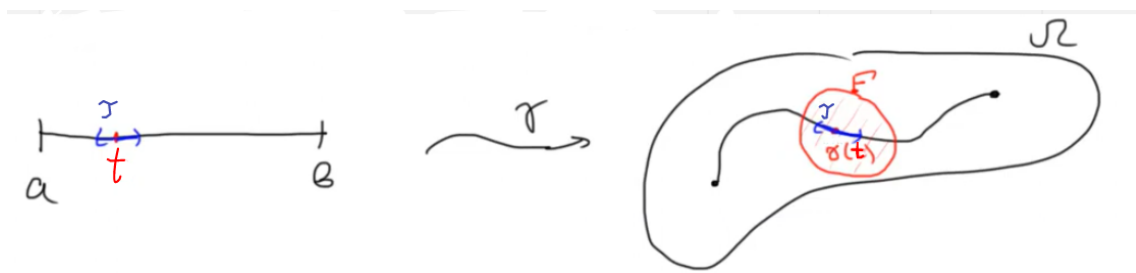
**Следствие.** 1. Замкнутая форма с коэфф. из  $C^1$  в любом открытом шаре из  $\Omega$  имеет первообразную.

2. Замкнутая форма с коэфф. из  $C^1$  лок. точная.

**Определение 3.13.**  $\omega$  – лок. точная форма в  $\Omega$ .

$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  путь.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  первообразная  $\omega$  вдоль пути  $\gamma$ , если  $\forall t \in [a, b]$  у  $\gamma(t)$  найдется окр.  $U_{\gamma(t)}$ , а в ней первообразная  $F$  формы  $\omega$ , т.ч.  $f(\tau) = F(\gamma(\tau))$  при  $\tau$  близких к  $t$ .



**Теорема 3.22.** Первообразная вдоль пути существует и единственная с точностью до константы.

**Лемма.** Локально постоянная функция (в каждой точке есть окрестность, что функция на ней постоянная) – константа.

**Доказательство.** Док-во теоремы.

**Единственность:**  $f_1, f_2$  – первообр. вдоль пути  $\gamma$ .

$f_1 - f_2$  – лок. постоянная, покажем это:

Берем  $t \in [a, b]$ , есть  $U_{\gamma(t)}$  и в ней первообр.  $F_1$  и  $F_2$ , т.ч.  $f_1(\tau) = F_1(\gamma(\tau))$  и  $f_2(\tau) = F_2(\gamma(\tau))$  при  $\tau$  близких к  $t$ , но  $F_1 - F_2 = \text{const} \implies f_1 - f_2 = \text{const}$  при  $\tau$  близких к  $t$ .

**Существование:** берем  $t \in [a, b]$ , у  $\gamma(t)$  есть окр-ть  $U_{\gamma(t)}$ , в которой существ. первообр.

$\bigcup_{t \in [a, b]} U_{\gamma(t)}$  – покрытие  $\gamma[a, b]$  – компакт.

Выберем конечные подпокрытия  $U_1, \dots, U_m$  и  $F_1, \dots, F_m$  – первообр. в соответствующем  $U_j$ .

Из леммы Лебега  $\exists r > 0 : \forall t \in [a, b] : B_r(\gamma(t))$  целиком содержится в каком-то элементе покрытия.

Нарежем  $[a, b]$  на кусочки длины  $< \delta$ , где  $\delta > 0$  выбрано по  $\epsilon = r$  из равномерной непрерывности  $\gamma$ .

$a =: t_0, t_1, \dots, t_n := b$  – нарезка.

Тогда образы маленьких отрезков целиком содержатся в своих элементах покрытия.

$\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ , так занумеруем  $F_i$  — первообр. в  $U_i$ .

$f|_{[t_0, t_1]} = F_1 \circ \gamma, f|_{[t_1, t_2]} = F_2 \circ \gamma$ .

В  $\underbrace{U_1}_{\ni \gamma(t_1)} \cap U_2 \neq \emptyset \implies F_1, F_2$  – первообр.  $\implies$  они отличаются на  $const \implies F_2 = F_1 + c$ ,

подменяем  $c$  так, что в  $U_1 \cap U_2$  они совпали. И так далее для всех остальных кусочков.  $\square$

**Следствие.**  $f$  – первообраз.  $\omega$  вдоль пути  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ . Тогда  $\int_\gamma \omega = f(b) - f(a)$

**Доказательство.** Смотрим на нарезку из предыдущей теоремы. Тогда  $\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}} \omega = \sum_{i=1}^n (F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))) = F_n(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)) = f(b) - f(a)$ .

$F_i(\gamma(t_i)) = F_{i+1}(\gamma(t_i))$  так согласованы  $F_j$ .  $\square$

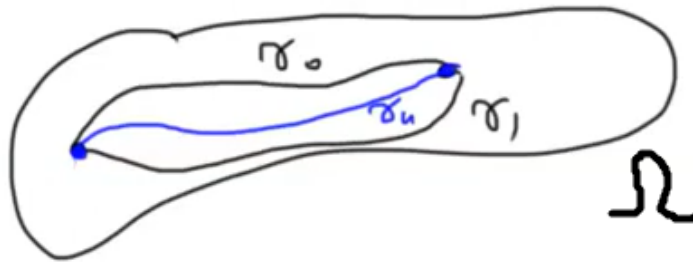
**Определение 3.14.**  $\Omega$  – область в  $\mathbb{R}^2$ .

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  пути в  $\Omega$ .

1.  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  и  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ .

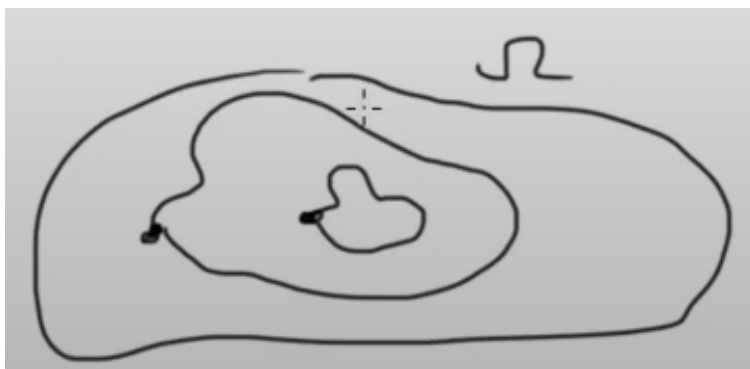
$\gamma_0, \gamma_1$  – гомотопные пути с неподвижными концами, если  $\exists \gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  непрерывное, т.ч.  $\forall t : \gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$  и  $\forall u : \gamma(a, u) = \gamma_0(a), \gamma(b, u) = \gamma_0(b)$ .

$\gamma_u(t) := \gamma(t, u)$  путь, соединяющий точки  $\gamma_0(a)$  и  $\gamma_0(b)$ .



2.  $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ .

$\gamma_0, \gamma_1$  – гомотопны замкнутые пути, если  $\exists \gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  непрерывное, т.ч.  $\forall t : \gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$  и  $\forall u : \gamma(a, u) = \gamma(b, u)$ .



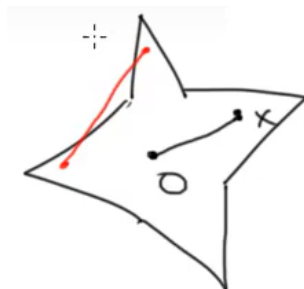
**Определение 3.15.**  $\gamma$  – стягиваемый замкнутый путь в  $\Omega$ , если он гомотопен точке.

**Определение 3.16.**  $\Omega$  – односвязная область, если любой замкнутый путь в ней – стягиваемый.

**Пример.** 1. Выпуклая область односвязна (для любых двух точек верно, что отрезок, соединяющий их лежит в области).

2. Звездная область односвязна (одна точка фиксированна и верно, что отрезок, соединяющий ее и любую другую, лежит в области)

PS. Напомним, что для обычной выпуклости нужно было, чтобы отрезок для двух произвольных точек из области целиком содержался в ней.



**Доказательство.**  $\Omega$  – звездная,  $O$  – фикс. точка.

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$  – замк. путь.

$\gamma_u(t) := u \cdot \gamma_1(t) \in \Omega$ .

$\gamma_0(t) = 0$ .

Хз, что это доказывает, но вот оно есть :/

□

3.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  не явл. односвязной.

**Упражнение.**  $\Omega$  – односвязна,  $f : \underbrace{\mathbb{T}}_{\text{окр. единичного радиуса}} \rightarrow \Omega$  непрер. отображ.

Доказать, что существует  $g : \text{замк. круг. един. радиуса} \rightarrow \Omega$  – непрер.

**Определение 3.17.**  $\gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \Omega$  непрер. отображ.

$\omega$  – лок. точная форма в  $\Omega$ .

$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  – первообразная  $\omega$  относительно отображения  $\gamma$ , если  $\forall (t, u) \in [a, b] \times [c, d]$  существует окр-ть  $U_{\gamma(t, u)}$  и первообр  $F$  в этой окр-ти, т.ч.  $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$  для  $(\tau, \nu)$  близких к  $(t, u)$ .

**Теорема 3.23.** Первообразная отн-но отображения существует и единственна с точностью до константы.

**Доказательство. Единственность:**  $f, g$  – первообразные отн-но отображения  $\gamma$ , то  $(f - g)$  – локально постоянная функция двух переменных  $\implies (f - g) = \text{const}$ .

То что  $(f - g)$  – локально постоянная следует отсюда:

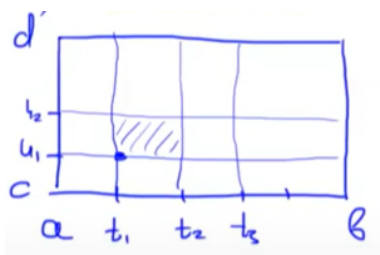
Берем  $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$ , в окр-ти  $U_{\gamma(t, u)}$ :  $\exists F_1, F_2$  – первообразные, т.ч.  $f(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu))$  и  $g(\tau, \nu) = F_2(\gamma(\tau, \nu))$  при  $(\tau, \nu)$  близких к  $(t, u)$ .

Знаем, что  $F_1 = F_2 + \text{const} \implies f(\tau, \nu) - g(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu)) - F_2(\gamma(\tau, \nu)) = \text{const}$ .

**Существование:** берем  $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$ , у  $\gamma(t, u)$  есть окр-ть  $U_{\gamma(t, u)}$  в которой существует первообразная  $\implies [a, b] \times [c, d] \subset \bigcup_{(t, u) \in [a, b] \times [c, d]} U_{\gamma(t, u)}$ .

Выбираем конечное подпокрытие, по нему  $r > 0$  из леммы Лебега  $\implies B_r(\gamma(t, u))$  целиком содержится в эл-те подпокрытия.

$\gamma \in C([a, b] \times [c, d]) \implies$  равном. непрер. Берем по  $\epsilon = r$  такое  $\delta > 0$  из равн. непрерывности  $\implies$  если  $(t, u)$  и  $(t', u')$  на расстоянии  $< \delta$ , то  $\gamma(t, u)$  и  $\gamma(t', u')$  на расстоянии  $< r$ .



$\gamma([t_{i-1}, t_i] \times [u_{j-1}, u_j]) \subset U_{ij}$  и  $F_{ij}$  первообразная в  $U_{ij}$ .

$f|_{[t_0, t_1] \times [u_0, u_1]} = F_{11} \circ \gamma$

$f|_{[t_1, t_2] \times [u_0, u_1]} = F_{21} \circ \gamma$

$\gamma(\{t_1\} \times [u_0, u_1]) \subset U_{11} \cap U_{21} \leftarrow$  тут  $F_{11}, F_{21}$  – первообраз.  $\implies$  они отличаются на  $\text{const}$ .

Подправим  $F_{21}$  так, что в  $U_{11} \cap U_{21}$  они совпадают.

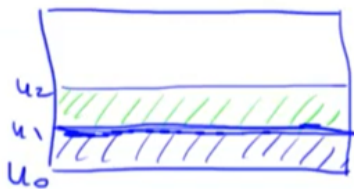
В итоге построим  $f_1 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  – первообр. отн-но  $\gamma|_{[a, b] \times [u_0, u_1]}$ .

Аналогично  $f_j : [a, b] \times [u_{j-1}, u_j] \rightarrow \mathbb{R}$  – первообр. отн-но  $\gamma|_{[a, b] \times [u_{j-1}, u_j]}$ .

осталось склеить их в  $f$ .

Рассмотрим  $f_1, f_2$ .  $f_1(\cdot, u_1), f_2(\cdot, u_1)$  – первообр. вдоль пути  $\gamma_{u_1} \implies$  они отличаются на константу.

Подправим  $f_2$  так, что  $f_1(\cdot, u_1) = f_2(\cdot, u_1)$ .



□

**Теорема 3.24.**  $\gamma_0, \gamma_1$  – гомотопные пути с неподвижными концами в  $\Omega$ .  $\omega$  – локально точная форма в  $\Omega$ . Тогда  $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ .

**Доказательство.**  $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  гомотопия между  $\gamma_0, \gamma_1$ .

$f$  – первообразная  $\omega$  относительно отображения  $\gamma$ ,  $f(\cdot, 0), f(\cdot, 1)$  – первообразные вдоль путей  $\gamma_0, \gamma_1$ , соответственно.

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0).$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1).$$

Докажем, что  $f(a, \cdot)$  – лок. постоянная. Рассмотрим  $(a, u)$ : у  $\gamma(a, u)$  есть окр-ть  $U$  и в ней первообразная  $F$ , т.ч.  $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$  при  $(\tau, \nu)$  близких к  $(a, u)$ .

$f(a, \nu) = F(\gamma(a, \nu)) = F(\gamma_0(a))$  не зависит от  $\nu$  (по аналогии делаем с другим концом, то есть доказываем, что  $f(b, \cdot)$  – локальная постоянная, тогда получили, что  $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ ).  $\square$

**Теорема 3.25.**  $\gamma_0, \gamma_1$  – замкнутые гомотопные пути в  $\Omega$ .  $\omega$  – лок. точная форма в  $\Omega$ . Тогда  $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$ .

**Доказательство.**  $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  – гомотопия,  $f$  – первообразная  $\omega$  относительно  $\gamma$ .

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0)$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1)$$

Докажем, что  $(f(b, \cdot) - f(a, \cdot))$  лок. постоянна.

Рассмотрим  $(a, u)$ , у  $\gamma(a, u)$  есть окр-ть  $U$  и в ней первообраз.  $F$ , т.ч.  $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$  при  $(\tau, \nu)$  близких к  $(a, u)$ .

Рассмотрим  $(b, u)$ , у  $\gamma(b, u)$  есть окр-ть  $\tilde{U}$  и в ней первообраз.  $\tilde{F}$ , т.ч.  $f(\tau, \nu) = \tilde{F}(\gamma(\tau, \nu))$  при  $(\tau, \nu)$  близких к  $(b, u)$ .

$$\gamma(a, u) = \gamma(b, u) \in U \cap \tilde{U}$$

$$F \text{ и } \tilde{F} \text{ – первообразные в } U \cap \tilde{U} \implies \tilde{F} = F + C \text{ в } U \cap \tilde{U}.$$

$$f(b, \nu) - f(a, \nu) = \tilde{F}(\gamma(b, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = \tilde{F}(\gamma(a, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = C. \quad \square$$

**Следствие.** Если  $\gamma_1$  – стягиваемый путь в  $\Omega$ ,  $\omega$  – лок. точная форма в  $\Omega$ . Тогда  $\int_{\gamma_1} \omega = 0$ .

**Теорема 3.26.** Если  $\Omega$  – односвязна, а  $\omega$  – лок. точная, то  $\omega$  – точная.

**Доказательство.**  $\gamma_1$  – замкнутая кривая  $\implies \gamma_1$  – стягиваемая  $\implies \int_{\gamma_1} \omega = 0 \implies$  существует первообр.  $\square$

**Замечание.**  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  не односвязна, т.к. там есть лок. точная форма, не являющаяся точной.

## 4. ТФКП

## 4.1. Голоморфные функции

Если доказательство не указано, то оно повторяет то, что было в  $\mathbb{R}$  (смотреть 1 семестр).

**Определение 4.1.**  $\Omega$  – область в  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0 \in \Omega$ .

$f$  – голоморфна в точке  $z_0$ , если существует  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ .

**Определение 4.2.**  $f$  комплексно дифф. в точке  $z_0$ , если  $\exists k \in \mathbb{C}$ :

$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$  при  $z \rightarrow z_0$ .

**Утверждение 4.1.**  $f$  – голоморфна в точке  $z_0 \Leftrightarrow f$  комплексно дифф. в точке  $z_0$  и  $k = f'(z_0)$ .

**Следствие.**  $f$  и  $g$  голоморфны в точке  $z_0$ . Тогда

1.  $f \pm g$  голом. в точке  $z_0$
2.  $f \cdot g$  голом. в точке  $z_0$
3. Если  $g(z_0) \neq 0$ , то  $\frac{f}{g}$  голом. в точке  $z_0$ .
4. Если  $h$  голом. в точке  $f(z_0)$ , то  $h \circ f$  голом. в точке  $z_0$ .

**Замечание.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$z = x + iy$ ,  $f(z) = f(x + iy) = g(x + iy) + ih(x + iy) : g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$ .

$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} = \frac{f'(z_0)}{i} = i \cdot f'(z_0)$ .

**Замечание.**  $\begin{pmatrix} g(x+iy) \\ h(x+iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_0+iy_0) \\ h(x_0+iy_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\|(x-x_0, y-y_0)\|)$ .

$k = \alpha + i\beta$

$k \cdot (z - z_0) = (\alpha + i\beta)((x - x_0) + i(y - y_0)) = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + i(\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0))$

Вещественная линейность +  $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$  комплексная линейность.

**Замечание.** Комплексная дифференцируемость  $\Leftrightarrow$  вещественная дифференцируемость + матрица Якоби  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Комплексная дифференцируемость  $\Leftrightarrow$  вещественная дифференцируемость + условия Коши-Римана  $\begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \end{cases}$

**Замечание.**  $f(z) = f(z_0) + \underbrace{k}_{\in \mathbb{C}}(z - z_0) + o(z - z_0)$

$k(z - z_0) = kw = |k| \cdot e^{i\phi} \cdot w$ ,  $\phi = \arg(k)$

**Замечание.** Обозначения.

$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$dz = dx + idy$

$d\bar{z} = dx - idy$

$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$



**Теорема 4.2. Условия Коши-Римана.**

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \in \Omega$$

$f$  – дифф. в точке  $a$  как функция из  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ . Следующие условия равносильны:

1.  $f$  – голоморфна в точке  $a$ .
2.  $d_a f$  – комплексно линейен
3. условия Коши-Римана
4.  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$

**Доказательство.** Мы выяснили все, кроме (3)  $\Leftrightarrow$  (4):

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(Re(f)+iIm(f))}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial(Re(f)+iIm(f))}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial Re(f)}{\partial x} - \frac{\partial Im(f)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Im(f)}{\partial x} + \frac{\partial Re(f)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad - \text{ а это}$$

и есть условия Коши-Римана. □

**Замечание.** Обозначения.

$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  и голоморфна во всех точках из  $\Omega$ .

**Следствие.**  $\Omega$  – область,  $f \in H(\Omega)$  и  $Im(f) = const \implies f = const$

**Доказательство.**  $\frac{\partial Im(f)}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial Re(f)}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial Im(f)}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial Re(f)}{\partial y} = 0$$

$$\implies Re(f) = const \quad \square$$

**Теорема 4.3. Коши** (ah, shit, here we go again...)

$f \in H(\Omega) \implies$  форма  $f(z)dz$  локально точная.

**Доказательство.** Будет два разных док-ва.

1. Для случая непрерывно-дифф.  $\frac{\partial Re(f)}{\partial x}, \dots$  (имеются в виду все частные производные).

Тогда замкнутость  $\implies$  локальная точность.

$$f(z)dz = f(z)(dx + idy) = (Re(f) + i \cdot Im(f)) \cdot (dx + idy) = Re(f)dx - Im(f)dy + i(Im(f)dx + Re(f)dy).$$

$$Pdx + Qdy - \text{замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

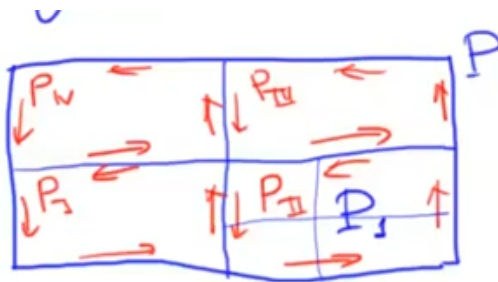
$$Re(f)dx - Im(f)dy - \text{замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial Re(f)}{\partial y} = -\frac{\partial Im(f)}{\partial x}$$

$$Im(f)dx + Re(f)dy - \text{замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial Im(f)}{\partial y} = \frac{\partial Re(f)}{\partial x}$$

2. Общий случай.

Надо доказать, что интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат из шарика  $U \subset \Omega$ , содержащего произвольную точку, равен 0.

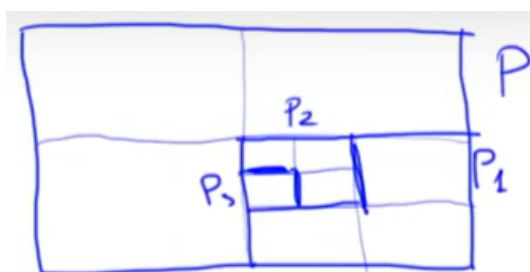
От противного: пусть нашелся прямоугольник  $P$ , т.ч.  $\alpha(P) := \int_P f(z)dz \neq 0$ .



Режем прямоугольник на 4 части, индексируем как  $P^1, P^2, P^3, P^4$ , строим обходы каждого (против часовой стрелки). Тогда  $\alpha(P) = \alpha(P^1) + \alpha(P^2) + \alpha(P^3) + \alpha(P^4)$ ,  $|\alpha(P)| \leq |\alpha(P^1)| + |\alpha(P^2)| + |\alpha(P^3)| + |\alpha(P^4)|$ .

Хотя бы одно из слагаемых  $\geq \frac{1}{4}|\alpha(P)|$ , назовем такое  $P_1$  (индекс уже снизу!). Разрежем его на 4 равные части. Пусть  $P_2$  такой, что  $|\alpha(P_2)| \geq \frac{1}{4}|\alpha(P_1)|$  и т.д.

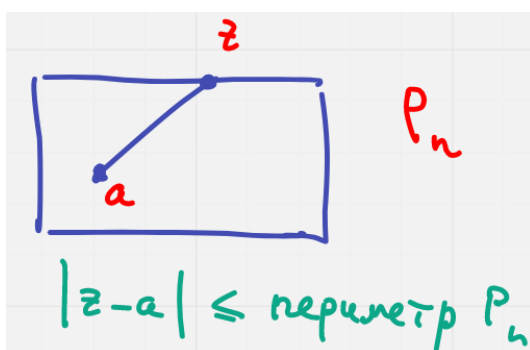
$$|\alpha(P_n)| \geq \frac{1}{4^n} |\alpha(P)|.$$



Берем  $a$  из  $P_n$ :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + o(z - a)$$

$$\alpha(P_n) = \int_{P_n} f(z) dz = \underbrace{\int_{P_n} f(a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \underbrace{\int_{P_n} f'(a)(z - a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \int_{P_n} o(z - a) dz$$



$$o(z - a) = (z - a) \cdot \beta(z - a), \text{ где } \beta(z - a) \xrightarrow{z \rightarrow a} 0$$

$$\left| \int_{P_n} (z - a) \beta(z - a) dz \right| \leq \max_{z \in P_n} |z - a| \cdot \underbrace{|\beta(z - a)|}_{\text{периметр}} \cdot l(P_n) \leq \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \cdot \frac{l(P)}{2^n} \cdot \frac{l(P)}{2^n} \implies$$

$$\implies \frac{|\alpha(P)|}{4^n} \leq |\alpha(P_n)| \leq \frac{l(P) \cdot l(P)}{4^n} \cdot \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \implies \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \geq \frac{|\alpha(P)|}{l(P) \cdot l(P)} > 0 - \text{противоречие, т.к. } \beta(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow a.$$

□

**Следствие.** 1. Если  $f \in H(\Omega)$ , то у каждой точки  $a \in \Omega$  есть окрестность, в которой существует ф-я  $F$ , т.ч.  $F' = f$  в этой окрестности.

**Доказательство.** Пусть  $F$  первообразная формы  $f(z)dz$ . Поймем, что  $F' = f$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i \cdot f(z) \implies \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

□

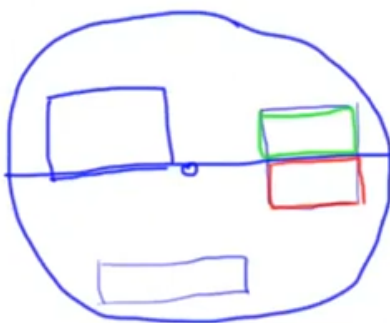
$$2. f \in H(\Omega), \gamma \text{ стягиваемый в } \Omega \text{ путь} \implies \int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

**Теорема 4.4.**  $f \in C(\Omega)$ ,  $\Delta$  – прямая параллельная оси координат.

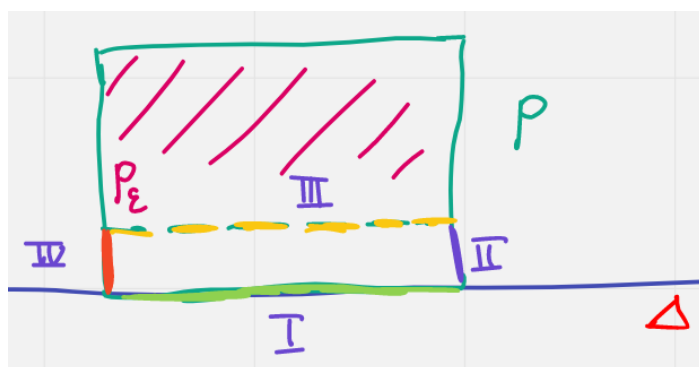
$$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$$

Тогда  $f(z)dz$  локально точная.

**Доказательство.** Надо проверять, что интеграл по довольно маленькому прямоугольнику (со сторонами паралл. осям) это 0.



Очевидно, что если прямоугольник не пересекает  $\Delta$ , то там все очевидно. Хотим рассматривать только те, что задевают. Те, что пересекают  $\Delta$ , можно разбить на две части (верхнюю и нижнюю). По каждой из частей будет 0, тогда и в сумме тоже будет 0. То есть нас вообще интересуют только те прямоугольники, у которых  $\Delta$  это одна из сторон. Рассмотрим их:



$$\int_{P_\epsilon} f(z)dz = 0 \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} \int_P f(z)dz$$

$$\left| \int_P f(z)dz - \int_{P_\epsilon} f(z)dz \right| \leq |\int_1 + \int_3| + |\int_2| + |\int_4|$$

$$|\int_2 f(z)dz| \leq M \cdot (\text{длина } 2) = M\epsilon$$

$$|\int_1 + \int_3| = \left| \int_a^b (f(x + iy_0) - f(x + i(y_0 + \epsilon))) dx \right| \leq \int_a^b |\dots| dx = (*)$$

$f$  непрер. на компакте  $\implies$  равномерно непрер.

$\forall \gamma > 0 : \exists \epsilon > 0$  если  $\rho(\text{аргумент}) < \epsilon \implies |f(\dots) - f(\dots)| < \gamma$ , тогда

$$(*) \leq (b - a) \cdot \gamma$$

□

**Следствие.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$f \in C(\Omega)$  и  $f$  голоморфна в  $\Omega$  за исключением мн-ва изолированных точек, тогда форма  $f(z)dz$  все равно лок. точная.

**Доказательство.** Рассмотрим окр-ть, в которой ровно одна плохая точка.

Давайте проведем прямую через эту точку, тогда работает теорема.

□

**Определение 4.3.** Индекс кривой отн-но точки  $Ind(\gamma, z_0)$ .

$\gamma$  – замкнутая кривая, не проходящая через точку  $z_0$ .

$$Ind(\gamma, 0) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z} - \text{кол-во оборотов } \gamma \text{ вокруг } 0.$$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, \phi - \text{непрерывна (полярная замена)}.$$

**Теорема 4.5.** Пусть  $\gamma$  – замкнутая кривая, не проходящая через 0. Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i Ind(\gamma, 0).$$

**Доказательство.** Берем параметризацию  $r, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$z(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, dz = (r'e^{i\phi} + ri\phi'e^{i\phi}) dt$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{r'}{r} + i\phi'$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_a^b \left( \frac{r'(t)}{r(t)} + i\phi'(t) \right) dt = (\ln(r(t)) + i\phi(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = i(\phi(b) - \phi(a)) = 2\pi i Ind(\gamma, 0)$$

□

**Следствие.** Пусть  $\gamma$  – замкнутая кривая, не проходящая через точку  $a$ . Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i Ind(\gamma, a).$$

**Теорема 4.6.** (интегральная формула Коши).

$$f \in H(\Omega)$$

$\gamma$  – стягиваемая в  $\Omega$  кривая, не проходящая через  $a \in \Omega$ .

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a) Ind(\gamma, a)$$

**Доказательство.**  $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{при } z \neq a, \\ f'(a), & \text{иначе} \end{cases}$

$$g \in C(\Omega)$$

$$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$$

$$\implies g(z)dz - \text{локально точная форма} \implies \int_{\gamma} g(z)dz = 0, \text{ так как } \gamma - \text{стягиваемая}$$

$$\implies 0 = \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} - \int_{\gamma} \frac{f(a)dz}{z-a} \implies \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = f(a) \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = f(a) \cdot 2\pi i \cdot Ind(\gamma, a)$$

□

**Пример.** Берем круг.  $f$  – голоморфна в окр-ти этого круга.

$$\int_{\text{окр.}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ вне круга} \\ f(a) \cdot 2\pi i, & \text{если } a \text{ внутри круга} \end{cases}$$

**Замечание.** Обозначение.

$$\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\} - \text{единичный круг.}$$

$$\mathbb{T} = \{|z| = 1\} - \text{единичная окружность, обход против часовой стрелки.}$$

$$r\mathbb{T} + a = \{|z - a| = r\}$$

**Теорема 4.7.**  $f \in H(r\mathbb{D}) \implies f$  аналитична (= функция раскладывается в ряд) в этом круге.

**Доказательство.** В нашем круге радиуса  $r$  берем еще два круга с тем же центром, но меньшими радиусами ( $r > r_1 > r_2 > 0$ ). Берем  $z : |z| < r_2$  – точка внутри наименьшего круга. Хотим интегрировать по средней окружности.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} = (*) \text{ равномерно сх-ся, так как } \left| \frac{z}{\zeta} \right| \leq \frac{r_2}{r_1} < 1$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=: a_n \cdot 2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \square$$

**Следствие.** 1. Если  $f \in H(r\mathbb{D})$  и  $0 < r_1 < r$ , то

$$\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = f^{(n)}(0)$$

$$2. f \in H(r\mathbb{D} + a), 0 < r_1 < r \implies \frac{n!}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}+a} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a)$$

$$z = w + a$$

$$g(w) = f(w + a)$$

$$g^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw$$

$$3. f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

Тогда  $f$  – голоморфна в  $\Omega \Leftrightarrow f$  – аналитична в  $\Omega$ .

$$4. f \in H(\Omega) \implies f \text{ – бесконечно дифференцируема.}$$

$$5. f \in H(\Omega) \implies f' \in H(\Omega)$$

6.

**Определение 4.4.**  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  – гармоническая, если  $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} = 0$ .

Продолжаем свойство:

$f \in H(\Omega) \implies \operatorname{Re}(f)$  и  $\operatorname{Im}(f)$  – гармонические функции.

$$\text{Доказательство. } \frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial y^2}$$

про  $\operatorname{Im}(f)$  аналогично доказывается.  $\square$

**Замечание.** Если  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  гармоническая ф-я, то существует единств. (с точностью до прибавления  $\operatorname{const} \in \mathbb{R}$ ) гармоническая ф-я  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , т.ч.  $g + ih \in H(\Omega)$

**Теорема 4.8. Мореры.**

$f \in C(\Omega)$ . Если  $f(z)dz$  локально точная, то  $f \in H(\Omega)$ .

**Доказательство.** Возьмем  $a \in \Omega$ . Существует окр-ть  $a$ , что для  $f$  в ней есть первообразная  $F$  (т.е.  $F' = f$  в  $U$ ).

Тогда  $F \in H(U) \implies F' = f \in H(U)$  – это локальное свойство, поэтому на всей  $\Omega$  тоже будет голоморфность.  $\square$

**Следствие.**  $f \in C(\Omega)$ ,  $\Delta$  – прямая, параллельная оси координат.

$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$ . Тогда  $f \in H(\Omega)$ .

**Доказательство.**  $f \in C(\Omega)$  и  $f \in H(\Omega \setminus \Delta) \implies f(z)dz$  локально точная в  $\Omega \xRightarrow{\text{т. Мореры}} f \in H(\Omega)$ .  $\square$

**Теорема 4.9.** (интегральная формула Коши).

$f \in H(\Omega)$

$K \subset \Omega$  – компакт, граница которого – конечное число кусочно-гладких замкнутых кривых. Тогда

1.  $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$
2. Если  $a \in \text{Int}(K)$ , то  $\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$ .

**Доказательство.** 1. Пишем **формулу Грина**.

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z)dz &= \int_{\partial K} f(z)dx + i \cdot f(z)dy \underbrace{=}_{\text{Грин}} \int_K \left( i \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= i \cdot \int_K \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

2. Берем круг, содержащий  $a$ , не выходящий за границу формы  $B_r(a)$ .

$\tilde{K} = K \setminus B_r(a)$  – компакт.

$\frac{f(z)}{z-a} \in H(\Omega \setminus \{a\})$ ,  $\tilde{K} \subset \Omega \setminus \{a\}$ .

$$0 = \int_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz - \underbrace{\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz}_{=2\pi i f(a)}.$$

$\square$

**Упражнение.**  $f \in H(r\mathbb{D})$  и  $f \in C(Cl(r\mathbb{D}))$

$a \in \mathbb{D}$ .

Доказать, что  $\int_{r\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$

**Теорема 4.10.**  $f \in C(\Omega)$ . Следующие условия равносильны (равносильность всех утверждений, так или иначе, уже доказывалась ранее):

1.  $f \in H(\Omega)$
2.  $f(z)dz$  – локально точная в  $\Omega$
3. В окр-ти каждой точки  $y$   $f$  есть первообразная
4.  $f$  аналитична в  $\Omega$
5.  $\int f(z)dz = 0$  по любому достаточно малому прямоугольнику со сторонами параллельными осям
6.  $f(z)dz$  – замкнутая и частн. производные по  $x$  и  $y$  непрерывны.

**Теорема 4.11. Неравенство Коши.**

$f \in H(R\mathbb{D}), 0 < r < R.$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$  Тогда  $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n},$  где  $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$

**Теорема 4.12.**  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ 

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|t|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot r = \frac{M(r)}{r^n}$$

**Теорема 4.13. Луивилля.**

Если  $f \in H(\mathbb{C})$  и  $f$  – ограничена, то  $f = \text{const}.$

**Доказательство.**  $f$  – ограничена  $\implies |f| \leq M.$

$$f \in H(\mathbb{C}) \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ и ряд сходится } \forall z \in \mathbb{C} \quad \underbrace{\implies}_{\text{нер-во Коши}} |a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \implies$$

$$a_n = 0 : \forall n \geq 1 \quad \square$$

**Замечание.**  $\sin$  и  $\cos$  неограничены в  $\mathbb{C}.$

**Определение 4.5.** Целая функция – функция, голоморфная в  $\mathbb{C}.$

**Теорема 4.14. Основная теорема алгебры.**

$P$  – многочлен степени  $\geq 1.$  Тогда у  $P$  есть хотя бы один корень.

**Следствие.** Если  $\deg P = n,$  то  $P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$  для некоторых  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$

**Доказательство.** Если  $z_1$  – корень  $P,$  то  $P(z) = (z - z_1) \cdot Q(z),$  где  $\deg Q = n - 1.$   $\square$

**Доказательство.** Основной теоремы алгебры.

От противного:

пусть  $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}.$  Тогда  $f(z) = \frac{1}{P(z)} \in H(\mathbb{C}).$

Докажем, что  $f$  – ограниченная функция.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

$$R := 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|. \text{ Пусть } |z| \geq R, |P(z)| \geq |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_1||z| - |a_0| \geq |z|^n - |z|^{n-1}(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|) = \underbrace{|z|^{n-1}}_{\geq 1} \underbrace{(|z| - |a_0| - |a_1| - \dots - |a_{n-1}|)}_{\geq 1} \implies |P(z)| \geq 1$$

при  $|z| \geq R \implies |f(z)| \leq 1$  при  $|z| \geq R.$

Докажем, что при  $|z| \leq R, |f(z)|$  – ограничена.

$f \in H(\mathbb{C}) \implies f$  непрер. в  $\mathbb{C} \implies f$  непрер. в  $\{|z| \leq R\}$  – компакт  $\implies |f|$  огр. в  $\{|z| \leq R\}.$

Тогда по т. Луивилля  $f(z) = \text{const} \implies P(z) = \frac{1}{\text{const}},$  что противоречит условию, что  $P(z)$  – многочлен степени  $\geq 1.$   $\square$

**4.2. Теоремы единственности**

**Теорема 4.15.**  $f \in H(\Omega), \Omega$  – область,  $z_0 \in \Omega.$  След. условия равносильны:

1.  $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n = 0, 1, 2, \dots$
2.  $f = 0$  в некоторой окр-ти точки  $z_0.$

3.  $f \equiv 0$  в  $\Omega$

**Лемма.**  $\Omega$  – область в метрическом пространстве,  $E \subset \Omega$ , т.ч.  $E \neq \emptyset$ ,  $E$  – открыто в  $\Omega$ ,  $E$  – замкнуто в  $\Omega$ . Тогда  $E = \Omega$ .

**Доказательство.** Леммы.

Пусть  $\Omega \setminus E \neq \emptyset$ , берем  $a \in E$  и  $b \in \Omega \setminus E$ . Возьмем путь  $\gamma$ , соединяющий эти точки.

$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ , т.ч.  $\gamma(\alpha) = a$ ,  $\gamma(\beta) = b$ .  $\gamma$  – непрер.  $\implies \gamma^{-1}(E)$  – открыто,  $\gamma^{-1}(\Omega \setminus E)$  – открыто  $\implies \gamma^{-1}(E)$  – открыт. и замкнут. подмн-во  $[\alpha, \beta]$ ,  $\alpha \in \gamma^{-1}(E)$ ,  $\beta \notin \gamma^{-1}(E)$ .

$s := \sup \gamma^{-1}(E)$  из замкн.  $s \in \gamma^{-1}(E) \implies s < \beta$ .

Возьмем окр-ть  $s$ , т.ч.  $(s - \delta, s + \delta) \subset \gamma^{-1}(E) \cap (\alpha, \beta) \implies$  в  $\gamma^{-1}(E)$  есть точки  $> s \implies s$  не  $\sup$ . Противоречие.  $\square$

**Доказательство.** Теоремы.

(3)  $\implies$  (2)  $\implies$  (1) – очевидно.

(1)  $\implies$  (2) – почти очевидно:

Берем  $z_0 \in \Omega$  и  $B_r(z_0) \subset \Omega$ , тогда в круге  $|z - z_0| < r$ :  $f$  раскл. в свой ряд Тейлора  $\implies$  в нем  $f \equiv 0$ .

(2)  $\implies$  (3):

$E := \{z \in \Omega : \text{в некоторой окр-ти точки } z, f = 0\}$

$z_0 \in E$  по условию  $\implies E \neq \emptyset$ .

$E$  – открыто. Если  $w \in E$ , то в круге  $|z - w| < r$ ,  $f = 0$ .

$\forall z$  из этого круга есть круг меньшего радиуса, содерж.  $\{|z - w| < r\}$ , в нем  $f = 0$ .

$E$  – замкнуто. Пусть  $z_*$  – предельная точка  $E$ , то есть  $z_n \in E$  и  $\lim z_n = z_*$ .  $f^{(m)}(z_n) = 0 \forall m, \forall n$  (так как есть (2)  $\implies$  (1)). По непрерывности  $f^{(m)}(z_*) = \lim f^{(m)}(z_n) = 0 \xRightarrow{(1) \implies (2)} z_* \in E$ .

Тогда по лемме  $E = \Omega$ .  $\square$

**Следствие.**  $f, g \in H(\mathbb{C})$ , т.ч.  $f(z) = g(z)$  в окр-ти точки  $z_0 \in \Omega \implies f \equiv g$ .

**Теорема 4.16. О среднем.**

$f \in H(\Omega)$  и  $a \in \Omega$ , причем  $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$ , тогда  $f(a) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi$  (т.е. среднее значение на окружности радиуса  $r$  с центром в  $a$  равно  $f(a)$ ).

**Доказательство.**  $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\phi})}{re^{i\phi}} re^{i\phi} i d\phi$ , где  $z = a + re^{i\phi}$ ,  $dz = re^{i\phi} i d\phi$ .  $\square$

**Следствие.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$ ,  $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$ . Тогда  $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a| \leq r} f(z) d\lambda_2$ .

**Доказательство.**  $\int_{|z-a| \leq r} f(z) d\lambda_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\phi}) \rho d\phi d\rho = \int_0^r 2\pi f(a) \rho d\rho = 2\pi f(a) \frac{r^2}{2} = \pi r^2 f(a)$ .  $\square$

**Теорема 4.17. Принцип максимума.**

$f \in H(\mathbb{C})$ ,  $a \in \Omega$ . Если  $|f(a)| \geq |f(z)| \forall z$  из окр-ти точки  $a$ , то  $f \equiv \text{const}$ .



**Доказательство.** Пусть  $|f(a)| =: M$ . Домножим  $f$  на  $e^{i\alpha}$  так, что  $f(a) = M > 0$ .

$$|f(a)| = M = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\phi = M.$$

Все нер-ва обращаются в равенства  $\implies |f(a + re^{i\phi})| = M \forall \phi \forall$  маленьких  $r$ .

$Re(f(a)) = M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(f(a + re^{i\phi})) d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq M$ . Это все равенства  $\implies Re(f(a + re^{i\phi})) = |f(a + re^{i\phi})| = M \implies f(z) = M$  в окр-ти точки  $a$   $\implies f(z) \equiv const$ .  $\square$   
т. о единственности

**Следствие.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $\Omega$  – огранич. область,  $f \in C(Cl(\Omega))$ . Тогда  $|f|$  достигает своего тах на границе  $\Omega$ .

**Доказательство.**  $Cl(\Omega)$  – компакт,  $|f|$  непрер. на компакте  $\implies$  в какой-то точке  $a \in Cl(\Omega)$  достигает тах.

Если  $a \in \Omega$ , то по принципу максимума  $f \equiv const$ , значит на границе то же самое значение.

Если  $a \notin \Omega$ , то это точка на границе.  $\square$

**Определение 4.6.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$ ,  $a$  – ноль функции  $f$ , если  $f(a) = 0$ .

**Теорема 4.18.**  $f \not\equiv 0$ ,  $f \in H(\Omega)$ ,  $a \in \Omega$ ,  $f(a) = 0$ . Тогда существует  $m \in \mathbb{N}$  и  $g \in H(\Omega)$ , т.ч.  $g(a) \neq 0$  и  $f(z) = (z - a)^m \cdot g(z)$ .

**Доказательство.** Разложим  $f$  в ряд Тейлора в окр-ти точки  $a$ .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z - a)^n, \quad m := \min\{n : f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m}, & z \neq a \\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!}, & z = a \end{cases}$$

$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$ ,  $g$  – непрерывная в точке  $a$ ,  $\implies g \in H(\Omega)$ .

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-m} \xrightarrow{z \rightarrow a} \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \quad \square$$

**Следствие.** 1. Если  $f \in H(\Omega)$  и  $a \in \Omega$  – ноль функции  $f$ , то  $\exists U_a$  – кор-ть точки  $a$ , т.ч.  $f(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$  (проколота окр-ть).

**Доказательство.**  $f(z) = (z - a)^m g(z)$ ,  $g(a) \neq 0$  из теоремы.

$g$  – непрер. в точке  $a \implies g(z) \neq 0$  в окр-ти точки  $a \implies f(z) = (z - a)^m g(z) \neq 0$  в прокол. окр-ти точки  $a$ .  $\square$

2. Если  $f, g \in H(\Omega)$  и  $fg \equiv 0$ , то либо  $f \equiv 0$ , либо  $g \equiv 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \not\equiv 0$ . Если  $f(z) \neq 0 \forall z$ , то  $g \equiv 0$ . Иначе найдется  $a \in \Omega$ , т.ч.  $f(a) = 0 \implies f(z) \neq 0, \forall z \in U_a^\circ \implies g(z) = 0 \forall z \in U_a^\circ \implies g \equiv 0$ .  $\square$

**Теорема 4.19. Единственности.**

$f, g \in H(\Omega)$  и  $z_n \in \Omega$ ,  $z_n$  – различные, т.ч.  $f(z_n) = g(z_n)$ . Если  $\lim z_n \in \Omega$ , то  $f \equiv g$ .

**Следствие.**  $f, g \in H(\Omega)$ ,  $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ . Если какая-то предельная точка мн-ва  $A$  лежит в  $\Omega$ , то  $f \equiv g$ .

**Доказательство.** Теоремы.

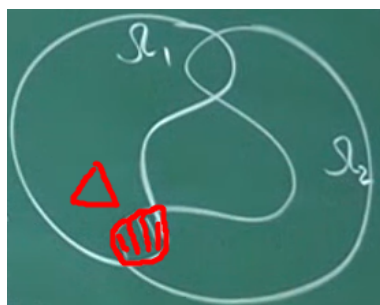
$h(z) = f(z) - g(z)$ . По условию  $h \in H(\Omega)$  и  $h(z_n) = 0$ .  $a := \lim z_n$ , по непрерывности  $h(a) = 0 \implies \exists U_a$ , т.ч.  $h(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$ , но  $z_n$  начиная с некоторого места лежат в  $U_a$ .  $\square$   
по следствию 1

**Следствие.**  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$ .

### 4.3. Аналитическое продолжение

**Определение 4.7.**  $f_1 \in H(\Omega_1), f_2 \in H(\Omega_2)$ .

$\Delta$  – компонента связности  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ .



$f_2$  непосредственное аналитическое продолжение  $f_1$  через  $\Delta$ , если  $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Delta$ .

**Замечание.** 1. При фиксации  $\Omega_1, \Omega_2, \Delta, f_1$ , функция  $f_2$  определена однозначно.

**Доказательство.**  $g$  – непоср. аналитическое продолжение  $f_1$ :

$$g(z) = f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Delta$$

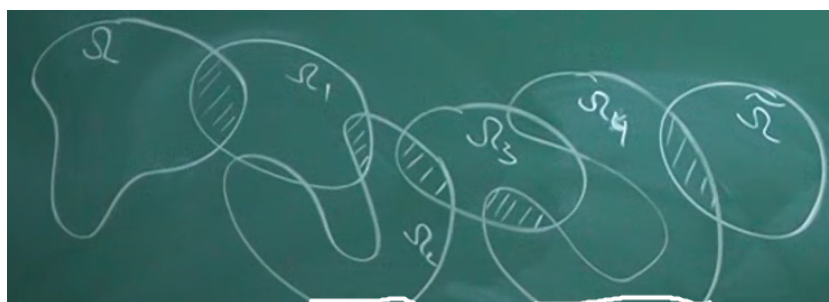
$$g, f_2 \in H(\Omega_2) \quad \underbrace{\implies}_{\text{по т. единственности}} \quad f_2 \equiv g.$$

□

2. Для другой компоненты продолжение может быть другим (тут понятнее на картинке, добавьте, плиз).

**Определение 4.8.**  $f \in H(\Omega), \tilde{f} \in H(\tilde{\Omega})$ .

$\tilde{f}$  – аналитическое продолжение  $f$  на цепочке областей, если  $\exists \Omega_1, \dots, \Omega_n$  и  $f_1 \in H(\Omega_1), \dots, f_n \in H(\Omega_n)$ , т.ч.  $f_1$  – непосредственное аналитическое продолжение  $f$ ,  $f_2$  – непосредственное аналитическое продолжение  $f_1, \dots, \tilde{f}$  – непосредственное аналитическое продолжение  $f_n$ .



**Замечание.** Рассмотрим всевозможные пары  $(f, \Omega)$ , т.ч.  $f \in H(\Omega)$ , тогда существование аналитического продолжения по цепочке областей – отношение эквивалентности на мн-ве таких пар.

**Определение 4.9.** Полная аналитическая функция – класс эквивалентности.

$F$  – полная аналитическая ф-я.  $M := \bigcup_{(f, \Omega) \in F} \Omega$  – область определения (существования)  $F$ .

**Утверждение 4.20.**  $M$  – область.

**Доказательство. Открытость:** объединения открытых – открытое.

**Линейная связность:**  $a, b \in M \implies a \in \Omega, b \in \tilde{\Omega}$ .  $(f, \Omega)$ ,  $(\tilde{f}, \tilde{\Omega})$  связана аналитическим продолжением по цепочке, будем переходить по соответствующим областям и дойдем из  $a$  в  $b$ .  $\square$

**Определение 4.10.**  $F$  – полная аналитическая функция,  $M$  – область определения  $F$ ,  $z \in M$ .

$$F(z) := \{f(z) : (f, \Omega) \in F \wedge z \in \Omega\}.$$

**Теорема 4.21. Пуанкаре-Вольтерры.**

$F(z)$  – не более чем счетное мн-во.

**Пример.**  $\underbrace{f(z)}_{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  – ряд сх-ся при  $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$$

$\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$  – круг сходимости ряда.

$$|z-a| < |1-a|$$

**Определение 4.11.**  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$ ,  $R$  – радиус сх-ти ряда.

Берем точку  $w$  на границе круга ( $|w-z_0| = R$ ).  $w$  – правильная точка, если найдется  $U_w$  – окр-ть точки  $w$  и  $g \in H(U_w)$  являющаяся непосредственным продолжением  $f$ .

**Определение 4.12.** Особая точка – точка, не являющаяся правильной.

**Теорема 4.22.** На границе круга сх-ти лежит хотя бы одна особая точка.

**Доказательство.** От противного.

Пусть все точки правильные  $|z| = R$  – правильные.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ,  $R$  – радиус сх-ти.

$\forall w : |w| = R$  – правильная, тогда найдется  $B_{r_w}(w)$  и  $g \in H(B_{r_w}(w))$ , т.ч.  $f = g$  на пересечении  $\{|z| < R\} \cap \{|z-w| < r_w\}$ .

То есть круги  $B_{r_w}(w)$  покрывают окр-ть  $|w| = R$ . Это компакт, выберем конечное подпокрытие.

По лемме Лебега  $\exists \epsilon > 0 : B_{\epsilon}(w)$  целиком содержится в элементе подпокрытия.

$\{|z| < R + \epsilon\} \subset \{|z| < R\} \cup$  конечное подпокрытие.

$$h(z) := \begin{cases} f(z), & |z| < R \\ g_{w_j}(z), & |z - w_j| < r_{w_j} \end{cases} \in H(\{|z| < R + \epsilon\}).$$

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  – ряд Тейлора для  $g$ , он сх-ся в круге  $|z| < R + \epsilon$ .

Противоречие тому, что радиус сходимости был  $R$ .  $\square$

**Пример.** 1.  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  сх-ся при  $|z| \leq 1$ .

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

$$(zf'(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$  – сх-ся при  $|z| < 1$ , все точки  $|z| = 1$  – особые.

Начало 4-ого семестра.

**Теорема 4.23.**  $f \in H(\Omega)$ ,  $\Omega$  – односвязная,  $f \neq 0$  в  $\Omega$ .

Тогда существует  $g \in H(\Omega)$ , т.ч.  $e^{g(z)} = f(z)$  и  $g$  – единственна с точностью до аддит. константы  $2\pi ik$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство. Существование:**

$$\frac{f'}{f} \in H(\Omega) \implies \text{есть первообразная } g \in H(\Omega).$$

Подберем константу так, что  $e^{g(z_0)} = f(z_0)$  для некоторого  $z_0 \in \Omega$ .

Покажем, что  $g$  подходит:  $h(z) := e^{-g(z)} \cdot f(z)$ .

Хотим доказать, что  $h \equiv 1$ . Знаем, что  $h(z_0) = 1$  и

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} + f(z)e^{-g(z)}(-g'(z)) = e^{-g(z)} \left( f'(z) - f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \equiv 0.$$

**Единственность:**

$$\text{Пусть } e^{g(z)} = f(z) = e^{\tilde{g}(z)} \implies e^{g(z)-\tilde{g}(z)} \equiv 1 \implies \underbrace{g(z) - \tilde{g}(z)}_{\in H(\Omega) \subset C(\Omega)} = 2\pi ik_z : k_z \in \mathbb{Z} \implies g(z) - \tilde{g}(z) =$$

$2\pi ik$

□

**Следствие.** Пусть  $0 \notin \Omega$  – односвязна, тогда существует единственный с точностью до  $+2\pi ik$  функция  $g \in H(\Omega)$ , т.ч.  $e^{g(z)} = z$ .

**Замечание.**  $g(z) = \ln |z| + i \arg z$

**Замечание.** Обозначение:

$$Ln(z) = \ln |z| + i Arg(z)$$

ветви логарифма

**Свойства.** 1.  $e^{Ln(z)} = z : \forall z \neq 0$

$$2. Ln(zw) = Ln(z) + Ln(w)$$

$$3. Ln(z) = \ln |z| + i Arg(z), \text{ где } Arg(z) = \{\arg z + 2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$$

**Замечание.** Св-во 2 для ветви может быть неверно.

Берем конкретную ветку и точку:  $0 < \arg < 2\pi$

$$Ln(-i) = \underbrace{\ln |-i|}_{=0} + i Arg(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

$$Ln((-i)^2) = Ln(-1) = \ln |-1| + i Arg(-1) = \pi i$$

$$\text{Но } \pi i \neq \frac{3\pi i}{2} + \frac{3\pi i}{2}$$

**Замечание.**  $z^p := e^{pLn(z)}$  – полная аналит. функция.

Если  $p \in \mathbb{Z}$ , то все однозначно, т.к.  $e^{p(2\pi ik)} = 1$ .

Если  $p \in \mathbb{Q}$ ,  $p = \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{несократимая}}$ , то  $e^{\frac{m}{n}(2\pi ik)}$  – принимает  $n$  значений.

Если  $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ , то  $e^{p(2\pi ik)}$  – принимает счетное кол-во значений.

**Упражнение.** 1. Найти  $i^i$

$$2. \text{ Д-ть, что } (z^p)' = \frac{pz^p}{z} \text{ при } z \neq 0$$

$$3. (zw)^p = z^p w^p \text{ как полные аналитические функции, но это неверно для ветвей.}$$

## 4.4. Ряды Лорана

**Определение 4.13.**  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  – ряд Лорана.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  – правильная часть.

$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$  – главная часть.

Ряд Лорана сходится  $\Leftrightarrow$  правильная и главная части сходятся.

Ниже будем считать, что  $z_0 = 0$  для простоты записи.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  – сх-ся в круге сх-ти  $|z| < R$  – радиус сх-ти  $[0, +\infty]$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ , где  $w = \frac{1}{z}$  – сх-ся в круге сх-ти  $|w| < \tilde{R} \Rightarrow |z| > \frac{1}{\tilde{R}} =: r$ .

То есть ряд Лорана сх-ся в кольце  $r < |z| < R$  – кольцо сх-ти ряда Лорана.

**Свойства.** 1. Ряд Лорана абс. сх-ся в кольце  $r < |z| < R$ , где  $r, R \in [0, +\infty]$

2. В кольце, лежащем строго внутри кольца сх-ти, ряда Лорана сх-ся равномерно.

3. В кольце сх-ти ряд Лорана можно почленно дифференцировать.

4. Ряд Лорана в кольце сх-ти – голоморфная функция.

**Теорема 4.24.** Пусть  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$  в кольце  $r < |z| < R$ .

Тогда  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ , где  $r < \rho < R$ .

**Доказательство.**  $\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{|z|=\rho} \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k}{z^{n+1}} dz =$

$$= \int_{|z|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z|=\rho} z^{k-n-1} dz = 2\pi i a_n$$

$$\int_{|z|=\rho} z^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i \rho e^{it} dt = \rho^{m+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{при } m = -1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \square$$

**Замечание.** Нер-во Коши тут тоже выполняется:

$$|a_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}, \text{ где } M_\rho = \max_{|z|=\rho} \{|f(z)|\}.$$

**Теорема 4.25.** Пусть  $f \in H(r < |z| < R)$ . Тогда  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ , для некоторых  $a_n \in \mathbb{C}$ .

**Доказательство.**  $r < r_1 < r_2 < R_2 < R_1 < R$ .

Берем  $r_2 < |z| < R_2$ : пишем для него и компакта  $K = \{r_1 \leq |z| \leq R_2\}$  интегральную теорему Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\eta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$|\zeta| = R_1, |z| < R_2, |\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}| < \frac{R_2}{R_1} < 1$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

$$\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=R_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=: a_n}$$

$$|\zeta| = r_1, |z| > r_2, \left| \frac{z}{\zeta} \right| < \frac{r_1}{r_2} < 1, \frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$$

$$- \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=r_1} \frac{1}{z^{n+1}} f(\zeta) \zeta^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \underbrace{\int_{|\zeta|=r_1} f(\zeta) \zeta^n d\zeta}_{=: a_{n-1}} \quad \square$$

**Теорема 4.26.** Пусть  $f \in H(r < |z| < R)$ . Тогда существует  $g \in H(|z| < R)$  и  $h \in H(|z| > r)$ , т.ч.  $f(z) = g(z) + h(z)$ . А если добавить условие:  $h \rightarrow_{z \rightarrow \infty} 0$ , то такое представление единственно.

**Доказательство. Существование:**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Пусть  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  – главная часть (сх-ся в  $\{|z| < R\}$ ),  $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$  – правильная часть (сх-ся в  $\{|z| > r\}$ ).

**Единственность:**

Пусть  $f(z) = g(z) + h(z)$ ,  $f(z) = g_1(z) + h_1(z) \implies g(z) - g_1(z) = h_1(z) - h(z)$  при  $r < |z| < R$ .

$$F(z) := \begin{cases} g(z) - g_1(z), & \text{при } |z| < R \\ h_1(z) - h(z), & \text{при } |z| > r \end{cases} \in H(\mathbb{C})$$

Поймем, что  $F$  ограничена:  $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 \implies$

$$|F(z)| \leq 1 \text{ при } |z| \geq \rho$$

$|F(x)|$  – огр. при  $|z| \leq \rho$  по т. Вейерштрасса. □

**Определение 4.14.**  $a \in \mathbb{C}$ . Если  $f$  голоморфна в проколотой окрестности точки  $a$ , но не голоморфна в  $a$ , то  $a$  – изолированная особая точка.

$$f \in H(0 < |z - a| < r)$$

**Определение 4.15.** Если существует  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ , то  $a$  – устранимая особая точка.

Если  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ , то  $a$  – полюс.

Если  $\lim_{z \rightarrow a}$  не существует, то  $a$  существенно особая точка.

**Пример.** 1.  $\frac{\sin z}{z}, \frac{e^z - 1}{z}$ .  $z = 0$  – устранимая особая точка. Из Тейлора.

2.  $\frac{1}{z}, \frac{1}{\sin z}$ .  $z = 0$  – полюс.

3.  $e^{\frac{1}{z}}$ .  $z = 0$  – существенно особая точка. Предела нет, т.к.  $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n$ ,  $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n + \pi$ . Разные последовательности точек.

**Теорема 4.27. Характеристика устранимой особой точки**

$$f \in H(0 < |z - a| < r)$$

Следующие условия равносильны:

1.  $a$  – устранимая особая точка
2.  $f$  ограничена в некоторой проколотой окрестности  $a$
3.  $\exists g \in H(|z - a| < r)$ , такая, что  $f(z) = g(z) \forall z \neq a$
4. В главной части ряда Лорана в точке  $a$  все коэффициенты 0

**Доказательство.** 1.  $4 \Rightarrow 3$  – очевидно

2.  $3 \Rightarrow 1$  – очевидно.  $g$  непрерывна, предел  $g(a)$

3.  $1 \Rightarrow 2$  – очевидно

4. Докажем  $2 \Rightarrow 4$ . Пусть ограничена:  $f(z) \leq M, \forall 0 < |z - a| < r$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, |c_n| \leq \frac{\max_{|z-a|=\rho} |f(z)|}{\rho^n}$  при  $|z-a| = \rho, c_{-n} \leq \rho^n \max_{|z-a|=\rho} f(z) \leq M\rho^n$  и устремим  $\rho \rightarrow 0, M\rho^n \rightarrow 0$

□

#### Теорема 4.28. Характеристика полюса

Пусть  $f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны:

1.  $a$  - полюс
2. Существует  $g \in H(|z - a| < r), g(a) \neq 0$ , такая, что  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, m \in \mathbb{N}$
3. В главной части ряда Лорана в точке  $a$  лишь конечное число ненулевых коэффициентов. Но они есть.

**Доказательство.** 1.  $2 \Rightarrow 3$ .  $g(z) = \sum c_n(z-a)^n, c_0 \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^{n-m}$  - разложение в ряд Лорана

2.  $3 \Rightarrow 1$ .  $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n(z-a)^n$ . Все слагаемые  $o((z-a)^{-m})$ , а на  $b_{-m}(z-a)^{-m} \rightarrow \infty$

3.  $1 \Rightarrow 2$ .  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ . Значит в некоторой проколотой окрестности  $0 < |z - a| < \varepsilon, |f(z)| > 1$ . Рассмотрим  $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in H(0 < |z - a| < r), \lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$ . Доопределим  $g(a) = 0$  и получим  $g \in H(|z - a| < \varepsilon)$  (предыдущая теорема (?)).  $a$  - ноль функции  $g$ . Тогда  $g(z) = (z-a)^m h(z)$ , где  $h(a) \neq 0$  и  $h \in H(|z - a| < \varepsilon)$

$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z-a)^m h(z)$ . Тогда  $f(z) = (z-a)^{-m} \frac{1}{h(z)}$  и  $\frac{1}{h(z)} \in H(|z - a| < \varepsilon)$ , потому что  $h$  не обращается в 0

□

**Определение 4.16.** Это  $m$  называется порядком полюса.

**Замечание.** Это аналог кратности нуля

**Замечание.**  $f$  имеет в  $a$  полюс порядка  $m \iff \frac{1}{f}$  имеет в точке  $a$  ноль кратности  $m$  (доопределяем  $\frac{1}{f}$  в  $a$  пл непрерывности)

А также  $\iff f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ , где  $c_m \neq 0$

#### Теорема 4.29. Характеристика существенной особой точки

$f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны

1.  $a$  - существенно особая точка
2. В главной части ряда Лорана в точке  $a$  бесконечное число ненулевых коэфф.

**Доказательство.** Доказательство очевидно следует из предыдущего.

□

**Определение 4.17.**  $f$  - мероморфная в  $\Omega$ , если  $f \in H(\Omega \setminus E)$  и в точках из  $E$  у неё полюсы

**Пример.**  $f = \operatorname{ctg} \frac{1}{z}$  - мероморфная в  $\mathbb{C} \setminus 0$

Полюсы в точках  $z = \frac{1}{\pi k}$ .

Но при этом  $\operatorname{ctg} \frac{1}{z}$  не будет мероморфной в  $\mathbb{C}$ . В точке  $z = 0$  проблема. В любой окрестности 0, найдётся плохая точка, а значит она не изолированная особая.

**Замечание.** 1.  $E$  не имеет предельных точек в  $\Omega$ .

2.  $E$  не более чем счётно.

**Свойства.** Пусть  $f$  и  $g$  мероморфные в  $\Omega$ . Тогда:

1.  $f \pm g, \frac{f}{g}, fg, f'$  - мероморфны в  $\Omega$  и порядки полюсов у  $f'$  на 1 больше, чем у  $f$

Док-во:  $fg$  и  $\frac{f}{g}$ . Если не полюсы и не нули, то голоморфность сохранится.

$f(z) = \varphi(z)(z-a)^n$ ,  $a$  - полюс или 0.

$g(z) = \Psi(z)(z-a)^m$ ,  $a$  - полюс или 0.

Тогда  $f(z)g(z) = \varphi(z)\Psi(z)(z-a)^{n+m}$

Для  $f \pm g$  складываем ряды Лорана в  $a$ . В главной части  $f \pm g$  конечное число ненулевых.

Для  $f'$ .  $f'(z) = \varphi'(z)(z-a)^{-n} - n\varphi(z)(z-a)^{-n-1} = (z-a)^{-n-1}(z-a) - n\varphi(z) = \Psi(z)$

$\Psi(z) = -n\varphi(a) \neq 0$

**Утверждение 4.30.** Если  $f$  мероморфна в  $\mathbb{C}$ , то существует  $g, h \in H(\mathbb{C})$ , т.ч.  $f = \frac{g}{h}$

**Теорема 4.31. Сохоцкого**

Пусть  $a$  - существенно особая точка функции  $f$ . Тогда  $Cl(f(0 < |z-a| < \varepsilon)) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Более того,  $\forall b \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  найдётся такая последовательность  $z_n \rightarrow a$ , т.ч.  $f(z_n) \rightarrow b$

**Доказательство.** 1. Случай  $b = \infty$ .  $f$  не ограничена в  $0 < |z-a| < \frac{1}{n}$ . Иначе  $a$  была бы устранимой особой точкой. Значит найдётся  $z_n$ , такое что  $0 < |z_n-a| < \frac{1}{n}$  и  $|f(z_n)| \geq n$ .  $z_n \rightarrow a$  и  $f(z_n) \rightarrow \infty$

2.  $b \in \mathbb{C}$ . Если найдётся последовательность  $z_n \rightarrow a$ , т.ч.  $f(z_n) = b$ , то всё ясно. Если не найдётся, то в некоторой проколотой окрестности  $0 < |z-a| < \varepsilon$   $f(z) \neq b$ . Тогда рассмотрим  $g(z) = \frac{1}{f(z)-b} \in H(0 < |z-a| < \varepsilon)$ .  $a$  - изолированная особая точка для  $g$ .

$f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$

Если  $a$  - полюс у  $g$ , то  $a$  - устранимая особая точка  $f$  - не подходит

Если  $a$  - устранимая особая точка  $g$ , то  $a$  - устранимая особая точка  $f$  или полюс - не подходит

Значит  $a$  - существенно особая точка  $g$ . Воспользуемся уже доказанным случаем для  $g$ . Найдётся  $z_n \rightarrow a$ , такая, что  $g(z_n) \rightarrow \infty$ . А тогда  $\lim f(z_n) = b$ .

□

**Теорема 4.32. Пикара**

Пусть  $a$  - существенно особая точка  $f$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $f(0 < |z-a| < \varepsilon) = \mathbb{C}$  или  $\mathbb{C}$  без одной точки.

**Пример.**  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  не обращается в ноль, хотя  $z = 0$  - существенно особая точка.

**Определение 4.18.** Бесконечные пределы.  $\lim z_n = \infty \iff \lim |z_n| = +\infty$



**Свойства.**

Если  $\lim z_n = \infty$ ,  $w_n$  ограничена. Тогда  $\lim(z_n \pm w_n) = \infty$

$$\lim z_n = 0 \iff \lim \frac{1}{z_n} = \infty$$

Если  $\lim z_n = \infty$  и  $|w_n| \geq c > 0$ , то  $\lim z_n w_n = \infty$

Доказательства очевидны + с первого курса

**Определение 4.19.**  $f \in H(|z| > R)$ .  $f$  голоморфна в  $\infty$ , если там устранимая особая точка. То есть  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$

**Замечание.**  $g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$  - перешли от бесконечности к нулю.

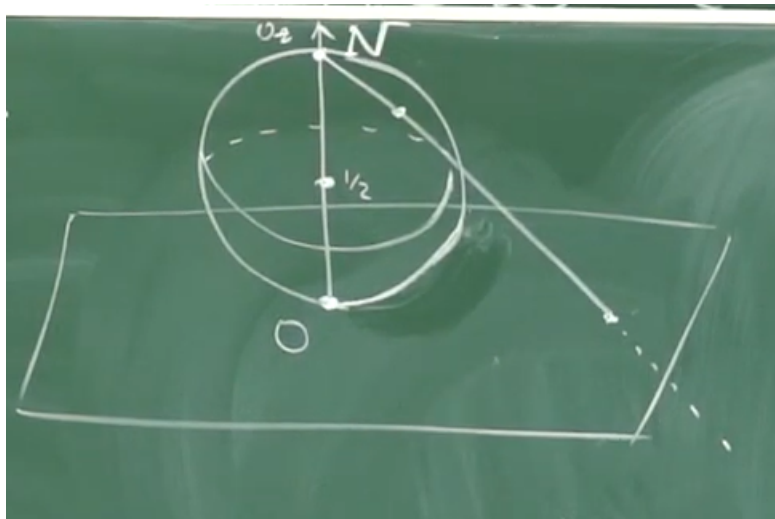
**Замечание.**  $f \in H(|z| > R), g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$

1.  $\infty$  - устранимая особая точка  $f \iff 0$  - устранимая особая точка  $g$
2.  $\infty$  - полюс  $f \iff 0$  - полюс  $g$
3.  $\infty$  - существенно особая точка  $f \iff 0$  - существенно особая точка  $g$   
 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$
4.  $\infty$  - устранимая особая точка  $f \iff$  коэфф. при положительных степенях 0
5.  $\infty$  - полюс  $f \iff$  при положительных степенях лишь конечное число ненулевых коэффциентов.
6.  $\infty$  - существенно особая точка  $f \iff$  при положительных степенях беск. число ненулевых коэфф.

**Теорема 4.33. Луивилля**

Если  $f \in H(\bar{\mathbb{C}})$ , то  $f \equiv \text{const}$

**Доказательство.**  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$ , значит при больших  $|z|$  ограничена.  $|f(z)| \leq M$  для  $|z| > R$ . С другой стороны  $f \in C(|z| \leq R)$ . Значит  $|f(z)| \leq \bar{M}$ . По теореме Лиувилля(старой),  $f \equiv \text{const}$   $\square$

**Определение 4.20. Стереографическая проекция**

$z = x + iy$  - плоскость.  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ .

$$u^2 + v^2 + (w - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2^2}$$

Или же  $u^2 + v^2 + w^2 = w$  - уравнение сферы Римана.

**Теорема 4.34. Связь между точкой на плоскости и точкой на сфере**

Точке  $z$  соответствует точка с координатами  $(\frac{x}{1+|z|^2}, \frac{y}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2})$

**Замечание.** Точке  $(u, v, w)$  соответствует точка  $z = x + iy = \frac{u}{1-w} + i\frac{v}{1-w}$

**Доказательство.** Прямая через точки  $(0, 0, 1)$  и  $(x, y, 0)$ . Параметризация луча:  $(xt, yt, 1 - t)$ . Нас интересует точка, в которой луч пересекает сферу, то есть:

$$(xt)^2 + (yt)^2 + (1 - t)^2 = 1 - t.$$

$$(x^2 + y^2 + 1)t^2 + 1 - 2t = 1 - t \Leftrightarrow t = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{|z|^2 + 1} \quad \square$$

**Следствие.** 1. Расстояние между образами  $z$  и  $\tilde{z}$  равно  $\rho = \frac{|z - \tilde{z}|}{\sqrt{1+|z|^2} \cdot \sqrt{1+|\tilde{z}|^2}}$ , а расстояние между  $z$  и  $\infty$  равно  $\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$

**Доказательство:** предложено посчитать самому, у кого есть силы добавьте, плиз.

2. Сходимость на плоскости и сходимость на сфере Римана совпадают

**Доказательство:**  $z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow \frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2} \cdot \sqrt{1+|z_0|^2}} \rightarrow 0$

$$z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \rightarrow 0$$

Пусть  $\frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2} \cdot \sqrt{1+|z_0|^2}} \rightarrow 0$

Тогда  $\frac{|z_n - z_0|}{\sqrt{1+|z_n|^2}} \rightarrow 0$ . Если  $z_n$  ограничена, то  $|z_n - z_0| \rightarrow 0$

Если не ограничена, то возьмём  $|z_{n_k}| \rightarrow \infty$ , тогда  $\frac{|z_{n_k} - z_0|}{\sqrt{1+|z_{n_k}|^2}} \rightarrow 1$

3.  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  - компакт.

## 4.5. Вычеты

**Определение 4.21.**  $a$  - изолированная особая точка.  $f \in H(0 < |z-a| < R)$ .  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$  - сходится при  $0 < |z-a| < R$ .

$$\operatorname{res}_{z=a} f = c_{-1}$$

**Определение 4.22.**  $f \in H(|z| > R)$  раскладывается в  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$$

**Свойства.** 1.  $f \in H(0 < |z-a| < R)$  и  $0 < r < R$ .

Тогда  $\operatorname{res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$  - положительный обход точки  $a$ .

**Доказательство:** смотреть формулу для коэффициентов ряда Лорана.

2.  $f \in H(|z| > R), r > R$ .

Тогда  $\operatorname{res}_{z=\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} f(z) dz$  - положительный обход для  $\infty$

3. Если  $a \in \mathbb{C}$  - полюс  $n$ -го порядка.

Тогда  $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z-a)^n f(z))$

**Доказательство:** Считаем, что  $a = 0$ .

$f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k z^k \Rightarrow g(z) = z^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-n} z^k$  - формула Тейлора.

Тогда  $c_{-1} = \frac{g^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$ .

4. Если  $a \in \mathbb{C}$  - полюс первого порядка.

Тогда  $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$

5. Если  $a \in \mathbb{C}$ ,  $g$  и  $h$  голоморфны в окрестности точки  $a$ .  $h(a) = 0, h'(a) \neq 0, g(a) \neq 0$ .  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$

Тогда  $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

**Доказательство:**  $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{h(z)-h(a)} g(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}$

6. Если  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A \in \mathbb{C}$ .

Тогда  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(A - f(z))$

**Доказательство:**  $f(z) = A + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k z^k$ , правильная часть - константа, иначе всё бы пошло на бесконечность.

7.  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{z=0} \frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}$

**Доказательство:**  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n-2}$$

### Теорема 4.35. Коши о вычетах

$f$  голоморфна в  $\Omega$ , за исключением точек  $a_1, \dots, a_n$ .  $K \subset \Omega$  - компакт и  $a_1 \dots a_n \in \operatorname{Int} K$

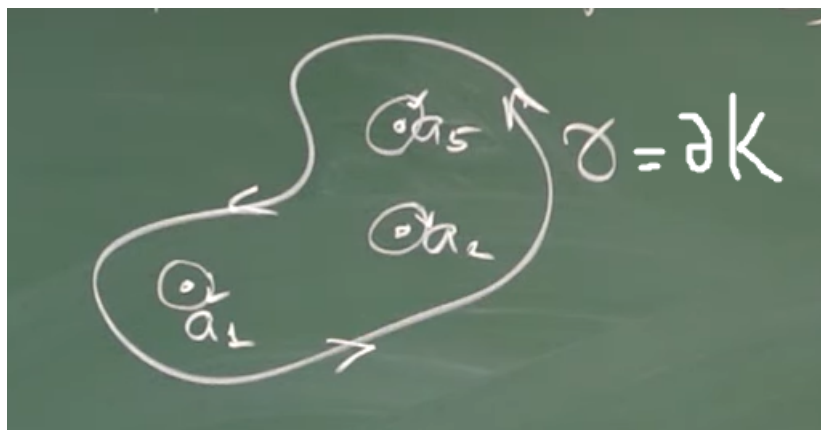
Тогда  $\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z)$

**Доказательство.** У каждой точки можем взять окрестность, чтобы они лежали внутри компакта и попарно не пересекаются.  $\tilde{K} = K \setminus \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(a_k)$  - компакт.

А ещё  $f \in H(\Omega \setminus \{a_1 \dots a_n\})$

Из интегральной формулы Коши:  $\int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = 0$

Но  $\int_{\partial \tilde{K}} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{|z-a_k|=\varepsilon} f(z) dz$ , а под знаком суммы - вычеты.



□

**Следствие.** Если  $f$  голоморфна в  $\mathbb{C} \setminus \{a_1 \dots a_n\}$ , то  $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = 0$

**Доказательство:** возьмём круг  $B_R(0)$ , внутри которого содержатся все эти точки.

$$\int_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{z=a_j} f(z).$$

Но также  $\int_{|z|=R} f(z) dz = \int_{|z|=R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$ . Перекидываем и доказываем.

**Пример.** 1.  $\int_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z + 1} dz = 2\pi i (\operatorname{res}_{z=\pi i} + \operatorname{res}_{z=-\pi i}) = -4\pi^5 i$ .

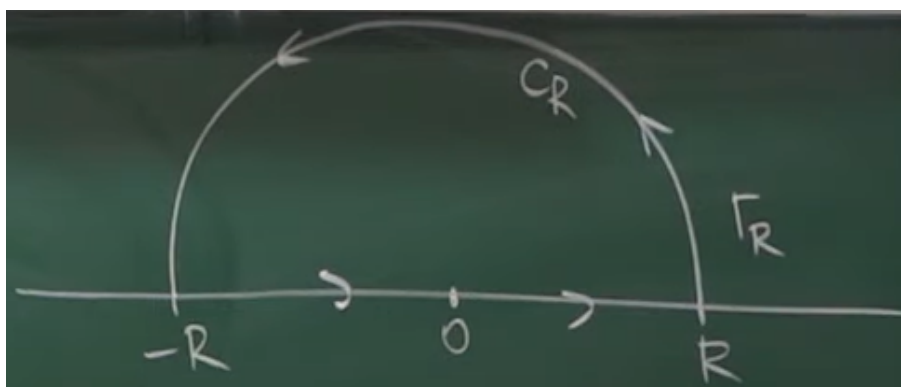
Особые точки:  $e^z = -1$  при  $z = \pi i + 2\pi i k$ .

$$\operatorname{res}_{z=\pi i} = \frac{g(\pi i)}{h'(\pi i)} = -\pi^4$$

$$g(z) = z^4, h(z) = e^z + 1.$$

$$\operatorname{res}_{z=-\pi i} = \frac{g(-\pi i)}{h'(-\pi i)} = -\pi^4$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^{2n}}.$$



Контур - полукруг.  $\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} = 2\pi i \sum \operatorname{res}$

Но с другой стороны  $\int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^R + \int_{C_R}$

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^{2n}} \right| \leq \underbrace{\pi R}_{\text{длина кривой}} \cdot \underbrace{\max \left| \frac{1}{1+z^{2n}} \right|}_{\text{макс. подынтегрального выражения}} = \pi R \frac{1}{\min |1+z^{2n}|} \leq \frac{\pi R}{R^{2n}-1} \rightarrow 0$$

Оценка:  $|a+b| \geq |a| - |b|$ .

Значит то, что мы хотим найти - просто сумма вычетов.

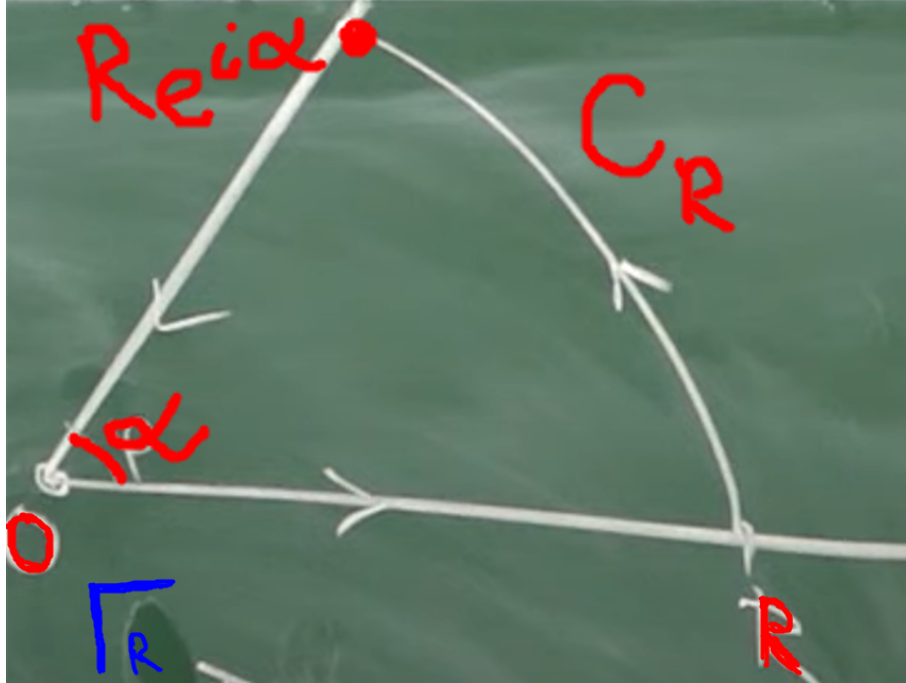
Какие особые точки?  $z^{2n} = -1$ .  $e^{\frac{\pi i k}{2n}}$  и  $k$  нечётно. Нас интересует  $k = 1, 3 \dots 2n-1$

Тогда  $I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{2k-1}$

$\text{res}_{a_k} f = \frac{1}{(z^{2n+1})'} = \frac{1}{2n \cdot a_k^{2n-1}} = \frac{a_k}{2n a_k^{2n}} = -\frac{a_k}{2n}$ , так как  $a_k$  - полюс первого порядка.

3. Оптимизация решения из предыдущего пункта.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}} = I$$



$$f(x) = \frac{1}{1+z^{2n}} \cdot \int_{\Gamma_r} f(z) dz = \int_{C_R} + \int_0^R + \int_{Re^{i\alpha}}.$$

$$\int_{e^{i\alpha}R}^0 f(z) dz = - \int_0^{e^{i\alpha}R} = - \int_0^R f(e^{i\alpha}t) e^{i\alpha} dt - \text{взяли параметризацию } t \rightarrow e^{i\alpha}t.$$

$$f(e^{i\alpha}t) = \frac{1}{1+e^{2\pi i \alpha} t^{2n}} = \frac{1}{1+t^{2n}}, \alpha = \frac{\pi}{n}.$$

Единственная особая точка  $e^{\frac{i\pi}{2n}}$  и интеграл равен  $2\pi i \text{ res}$ .

$$\text{То есть: } I - e^{i\frac{\pi}{n}} I = 2\pi i \text{ res}_{z=e^{\frac{i\pi}{2n}}} f = 2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{\frac{i\pi}{2n}}}{2n}\right)$$

$$\text{Тогда } I = \frac{2ie^{\frac{i\pi}{2n}}}{e^{\frac{i\pi}{2n}}} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}}$$

**Лемма. Жордана**

$$C_{R_n} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_n, \text{Im } z \geq 0\}$$

$$f : \{\text{Im } z \geq 0\} \rightarrow \mathbb{C}. M_{R_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in C_{R_n}} |f(z)| = 0$$

$$\text{Тогда } \forall \lambda > 0 : \lim \int_{C_{R_n}} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0$$

**Доказательство.** Параметризация  $z = R_n \cdot e^{it}$ , где  $t \in [0, \pi]$ .

$$\text{Тогда } dz = R_n e^{it} dt. \int_{C_{R_n}} f(z) e^{i\lambda z} dz = R_n \int_0^\pi f(R_n e^{it}) e^{it} \cdot e^{i\lambda R_n e^{it}} dt = I_n$$

$$|I_n| \leq R_n \int_0^\pi |f(R_n e^{it}) e^{it}| \cdot |e^{i\lambda R_n e^{it}}| dt \leq R_n \cdot M_{R_n} \cdot \int_0^\pi e^{-\lambda R_n \sin t} dt = (*)$$

То что написано под интегралом симметрично относительно  $\frac{\pi}{2}$ .

$$(*) = 2R_n M_{R_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \sin t} dt \leq \underbrace{2R_n M_{R_n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R_n \frac{2t}{\pi}} dt}_{(**)} = 2R_n M_{R_n} \left. \frac{e^{-\lambda R_n \frac{2t}{\pi}}}{-\lambda R_n \frac{2}{\pi}} \right|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \leq M_{R_n} \cdot \frac{1}{\lambda} \rightarrow 0$$

$$(**) : \text{верно, так как при } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} : \sin(t) \geq \frac{2}{\pi} t$$

□

**Пример.**  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = I$ .

Можем считать на всей прямой и не исходный интеграл, а  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} = I^*$ .

Тогда  $\operatorname{Re} I^* = 2I$ .

Пусть  $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ . Контур - полуокружность от  $-R$  до  $R$ .

$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R + \int_{C_R}$ . Здесь  $\int_{C_R} \rightarrow 0$  по лемме Жордана, где  $\lambda = 1$  и  $M_R = \sup_{|z|=R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2-1} \rightarrow 0$

(написанное выше верно, так как  $|1+z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$ )

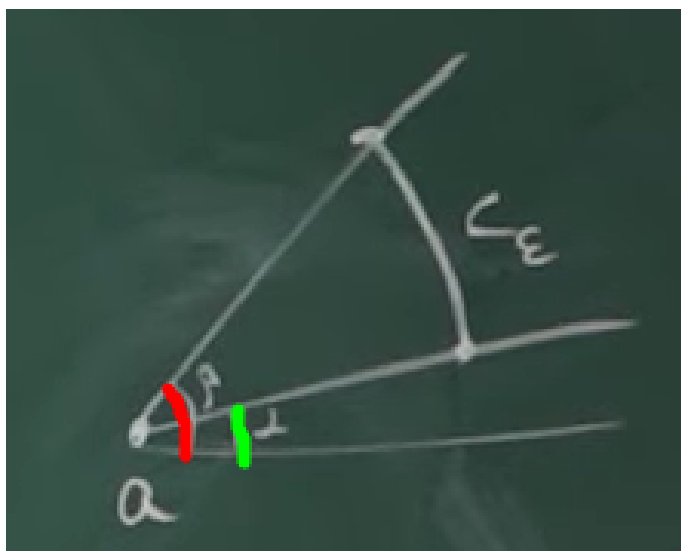
Тогда  $\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum \operatorname{res} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=i} = (*)$ .

$i$  - полюс 1 порядка, тогда  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , где  $g(i) \neq 0, h(i) = 0, h'(i) \neq 0$ .  $\operatorname{res} = \frac{g(i)}{h'(i)} = \frac{e^{-1}}{2i}$ .

Тогда  $(*) = \frac{\pi}{e}$ . А значит  $I = \frac{\pi}{2e}$

**Лемма. О полувычете**

$f \in H(0 < |z-a| < R)$  и  $a$  - полюс первого порядка.  $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \varepsilon, \alpha \leq \arg(z-a) \leq \beta\}$



Тогда  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = (\beta - \alpha)i \cdot \operatorname{res}_{z=a} f$

**Доказательство.** Считаем, что  $a = 0$ . У нас полюс 1-го порядка, тогда  $f(z) = \frac{c}{z} + g(z)$ , где  $g \in H(|z| < R)$ .

Параметризация  $z = \varepsilon e^{it}$ , где  $t \in [\alpha, \beta]$ . Тогда  $dz = \varepsilon e^{it} i dt$ .

$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \int_{C_\varepsilon} \frac{c}{z} dz + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz = \int_\alpha^\beta \frac{c}{\varepsilon e^{it}} \cdot \varepsilon e^{it} i dt + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz = (\beta - \alpha) \cdot i \cdot c + \int_{C_\varepsilon} g(z) dz$

Оценим второй интеграл:  $\int_{C_\varepsilon} g(z) dz \leq M\varepsilon(\beta - \alpha)$ , где  $M = \max_{|z| \leq \frac{R}{2}} |g(z)|$ . и тогда  $\int_{C_\varepsilon} g(z) dz \rightarrow 0$ .  $\square$

**Определение 4.23.** Главное значение интеграла (*v.p.*  $\int$ ).

$\int_a^b f(x) dx$ , где  $c$  - единственная особая (в этой точке нет непрерывности функции) точка,  $c \in (a, b)$ .

$\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$  и устремляем  $\varepsilon$  к нулю. Предел - главное значение интеграла.

**Пример.** *v.p.*  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$ .

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 = 0$ , потому что функция нечетная.

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} = 0$$

**Свойства.** 1. Если  $\int$  сходится, то  $\int = v.p. \int$

2. Линейность

3. Аддитивность, если резать не по особым точкам

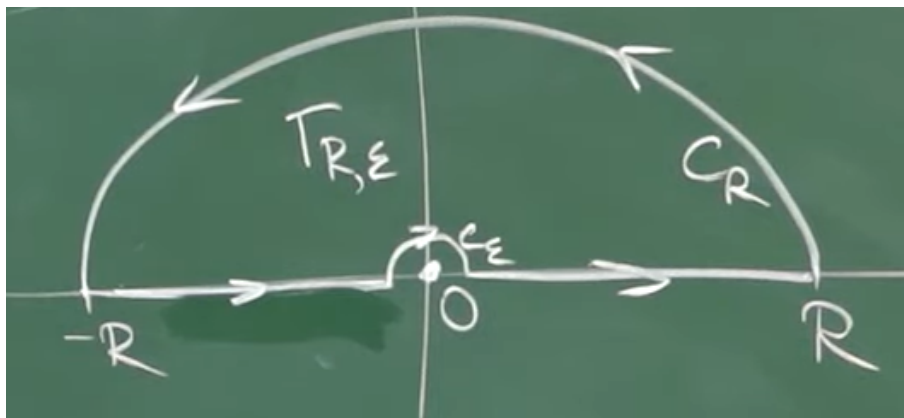
**Пример.**  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

Функция четная, поэтому  $2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

$$\left(\frac{e^{ix}}{x} = \frac{1}{x} + \frac{ix}{x} + \dots\right).$$

Тогда  $2I = \operatorname{Im} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R.$$



$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0$ , так как особая точка только 0, а он не в контуре. Но с другой стороны:

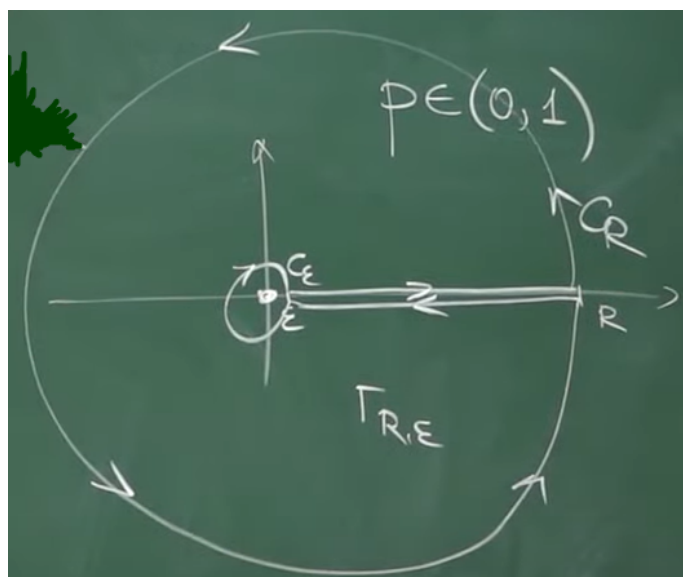
$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^R + \int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon}$$

$\int_{C_R} \rightarrow 0$  по лемме Жордана.

$$\int_{C_\varepsilon} f(z) dz \rightarrow -\pi i \operatorname{res}_{z=0} f = -\pi i.$$

А значит  $v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i$ . А значит  $I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \dots = \frac{\pi}{2}$

**Пример.**  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$ , где  $0 < p < 1$ .



$$f(z) = \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z}$$

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R + \int_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon e^{2\pi i}} + \int_{C_{\varepsilon}} + \int_{C_R}.$$

Но с другой стороны  $\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 2\pi i \sum \text{res} = 2\pi i \text{res}_{z=-1}$

$$\text{res}_{z=-1} = e^{(p-1)Ln(-1)} = e^{(p-1)\pi i}$$

$$1. \int_{\varepsilon}^R \rightarrow I$$

$$2. \int_{Re^{2\pi i}}^{\varepsilon e^{2\pi i}} \rightarrow -e^{(p-1)\pi i} \cdot I$$

$$3. \left| \int_{C_R} \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} dz \right| \leq \pi R \cdot \max \left| \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} \right| = \pi R \cdot \frac{R^{p-1}}{\min |1+z|} = \pi R \cdot \frac{R^{p-1}}{R-1} \rightarrow 0$$

$$4. \left| \int_{C_{\varepsilon}} \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} dz \right| \leq \pi \varepsilon \cdot \max \left| \frac{e^{(p-1)Lnz}}{1+z} \right| = \pi \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{p-1}}{\min |1+z|} = \pi \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{p-1}}{1-\varepsilon} \rightarrow 0$$

$$\text{Получили в итоге } I = \pi \frac{2ie^{(p-1)\pi i}}{1-e^{(p-1)2\pi i}} = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

**Теорема 4.36.** Пусть  $f$  - мероморфная функция в  $\mathbb{C}$ .  $z_1, \dots, z_n$  - полюсы.  $G_1, \dots, G_n$  - главные части рядов Лорана в точках  $z_1, \dots, z_n$ .  $\infty$  - полюс или устранимая особая точка.  $G$  - правильная часть ряда Лорана в  $\infty$

Тогда  $f(z) = G(z) + \sum_{k=1}^n G_k(z) + C$ , в частности,  $f$  - рациональная функция.

**Доказательство.**  $g(z) = f(z) - G(z) - \sum_{k=1}^n G_k(z)$ . У этой функции  $z_1, \dots, z_n, \infty$  - устранимые особые точки, а во всех остальных точках есть голоморфность.

Тогда по теореме Лувилля  $g \equiv \text{const}$ . □

**Теорема 4.37.** Пусть  $f$  мероморфная функция в  $\mathbb{C}$ ,  $z_1, z_2, \dots$  - полюсы,  $R_1, R_2, \dots$  - последовательность радиусов,  $M_{R_n} = \max_{|z|=R_n} |f(z)| \rightarrow 0$ .

Тогда  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |z_k| < R_n} G_k(z)$ .

$$\text{Доказательство. } I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_n} \underbrace{\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}}_{=: g(\zeta)} d\zeta = \sum \text{res } g = \text{res}_{\zeta=z} g(\zeta) + \sum_{k: |z_k| < R_n} \text{res}_{\zeta=z_k} g$$



- $$2. \operatorname{res}_{\zeta=z_k} g = \underbrace{\operatorname{res}_{\zeta=z_k} \frac{f(\zeta) - G_k(\zeta)}{\zeta - z}}_{\text{голоморфна в окр. } z_k, \dots, 0} + \operatorname{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta - z}$$

$res_{\zeta=z} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta-z} = G_k(z)$ , а второе слагаемое равно тому, что мы хотим найти.

$$\left| \int_{|\zeta|=R} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \right| \leq 2\pi R \cdot \frac{O(\frac{1}{R})}{R-|z|} \rightarrow 0, \text{ где } G_k = \frac{c_{-1}}{\zeta-z_k} + \frac{c_{-2}}{(\zeta-z_k)^2} + \dots = O(\frac{1}{R}).$$

Из стремления к нулю, мы поняли, что  $\text{res}_{\zeta=z_k} \frac{G_k(\zeta)}{\zeta-z} = -G_k(z)$ .

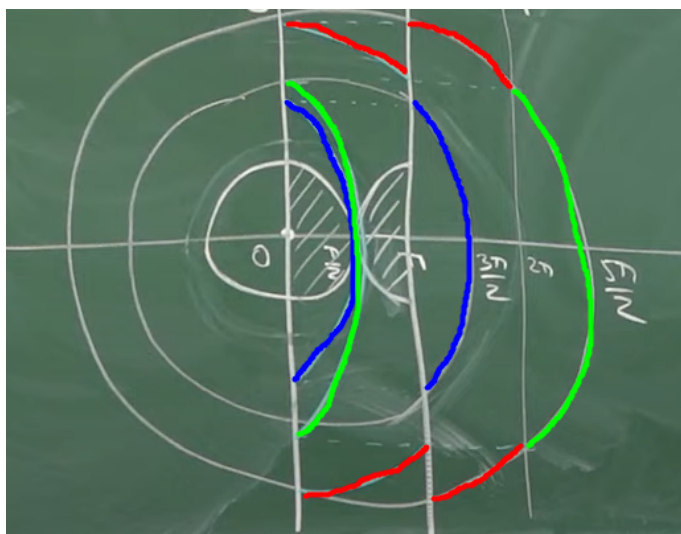
$$|I_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R_n \cdot \max_{|\zeta|=R_n} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} \right| \leq R_n \cdot \frac{M_{R_n}}{R_n-|z|} \rightarrow 0.$$
☐

**Пример.**  $\operatorname{ctg}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$

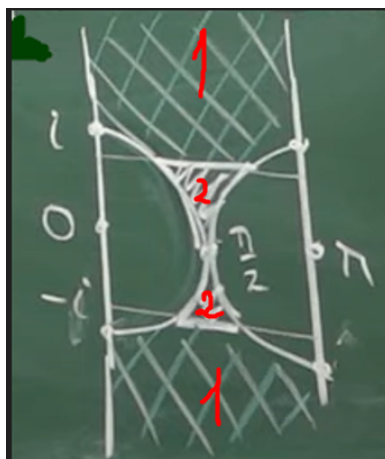
**Лемма.** Существует  $M$ , такая что,  $|\operatorname{ctg} z| \leq M$  на окружностях  $|z| = \pi(n + \frac{1}{2})$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .

Наблюдения про  $\operatorname{ctg} z$ :

1.  $\pi$ -периодическая функция  $\implies$  все значения содержатся в полосе  $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi$ , можно все окружности сдвинуть по периоду.
2. нечетная функция  $\implies$  можем интересоваться только половиной картинки (давайте смотреть на  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ ).


$$\{0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq \pi\} \setminus \{|z| < \frac{\pi}{2}\} \cup \{|z - \pi| < \frac{\pi}{2}\}.$$

Получаем следующее мн-во:



Хотим понять, что  $\operatorname{ctg}$  ограничен на заштрихованном мн-ве.

$$z = x + iy$$

1. Зона 1 ( $y \geq 1$  или  $y \leq -1$ , в силу нечетности  $\operatorname{ctg}$ ):

$$|\operatorname{ctg} z| = \left| \frac{\cos z}{\sin z} \right| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \right| = \left| \frac{1 + e^{2iz}}{1 - e^{2iz}} \right| \leq \frac{1 + |e^{2iz}|}{|1 - e^{2iz}|} = (*)$$

Пусть  $z = x + iy$  и пока что  $y \geq 1$ :

$$|e^{2iz}| = |e^{2ix} \cdot e^{-2y}| = e^{-2y}, \text{ тогда } (*) = \frac{1 + e^{-2y}}{|1 - e^{2iz}|} \leq \frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2}}$$

2. Зона 2:

Очевидно, что эта зона это компакт, а  $\operatorname{ctg}$  на ней непрерывен  $\implies \operatorname{ctg}$  – ограничен на этом компакте.

□

**Доказательство. Примера.**

$$f(z) = \frac{\operatorname{ctg} z}{z}, \text{ из леммы: } \operatorname{ctg} z \leq M \text{ при } |z| = \pi(n + \frac{1}{2}).$$

$$\text{Берем радиусы } R_n = \pi(n + \frac{1}{2}) \implies M_{R_n} \leq \frac{M}{\pi(n + \frac{1}{2})} \rightarrow 0.$$

Особые точки  $f(z)$ :  $z = 0$  – полюс 2-ого порядка,  $z = \pi k$  – полюсы 1-ого порядка при  $k \neq 0$ .

$$G_k - \text{главная часть ряда Лорана в } \pi k, k \neq 0 \implies G_k(z) = \frac{\operatorname{res}_{z=\pi k} \operatorname{ctg}(z)}{z - \pi k} = \frac{1}{\pi k(z - \pi k)}, \text{ где}$$

$$\operatorname{res}_{z=\pi k} \operatorname{ctg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin'(z)}|_{z=\pi k} = \frac{1}{\pi k}.$$

$G_0(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{\operatorname{res}_{z=0} f(z)}{z} = \frac{A}{z^2}$ , вычет занулился, так как  $f(z)$  – четная функция и все коэффициенты перед нечетными степенями в ряде Лорана равны 0.

$$G_0(z) = \frac{A}{z^2} = \frac{1}{z^2}, \text{ так как } \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = \frac{\cos(z)}{z \sin(z)} \sim \frac{1}{z^2} \text{ при } z \text{ близких к нулю.}$$

$$\text{То есть } \frac{\operatorname{ctg}(z)}{z} = G_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (G_k(z) + G_{-k}(z)) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\pi k(z - \pi k)} + \frac{1}{\pi(-k)(z + \pi k)} \right) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{z^2 - \pi^2 k^2}.$$

□

**Пример.**  $(\ln \sin z)' = \operatorname{ctg} z$

$$(\ln \frac{\sin z}{z})' = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}.$$

$\ln \frac{\sin z}{z} = \int_0^z (\operatorname{ctg} w - \frac{1}{w}) dw = \int_0^z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} dw = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \frac{2w}{w^2 - \pi^2 k^2} dw$  (можем переставлять, потому что есть равномерная сходимость).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z \left( \frac{1}{w - \pi k} + \frac{1}{w + \pi k} \right) dw =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \ln(w - \pi k) + \ln(w + \pi k) \Big|_0^z = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( \frac{z^2 - \pi^2 k^2}{-\pi^2 k^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

$$\text{Тогда } \frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

$$\text{Либо } \sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}. \text{ Посмотрим на } f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z). \text{ Тогда } \operatorname{res}_{z=k} f(z) \cdot \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{f(k)}{\pi}.$$

$$g(z) = \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} \text{ и проинтегрируем.}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz = \sum_{k=-n, k \neq 0}^n \frac{1}{\pi k^2} + \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}.$$

$$\text{При этом есть такая оценка: } \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz \right| \leqslant \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{M}{(n+\frac{1}{2})^2} \rightarrow 0$$

$$\text{Значит, } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{res}_{z=0} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2}.$$

Такой вычет не очень приятно считать – раскладываем в ряд.

$$\text{Найдем коэффициент перед } z^1: \text{ в разложении } \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \mathcal{O}(z^4)}{\pi z (1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4))} = \frac{(1 - \frac{\pi^2 z^2}{2} + \mathcal{O}(z^4))(1 + \frac{\pi^2 z^2}{6} + \mathcal{O}(z^4))}{\pi z} \\ \frac{1}{\pi z} - \frac{1}{3} \pi z + \mathcal{O}(z^3).$$

То есть этот коэффициент равен:  $-\frac{\pi}{3}$ .

$$\text{Тогда } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot \left( -\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$