

# Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

2 марта 2023 г.

## Содержание

<b>1. Элементарная теория вероятностей</b>	<b>1</b>
1.1 Основные понятия . . . . .	2
1.2 Предельные теоремы для схем Бернулли . . . . .	5
<b>2. Общая теория вероятностей</b>	<b>9</b>
2.1 Колмогоровская модель теории вероятности . . . . .	10
2.2 Случайные величины . . . . .	11
2.3 Совместное распределение . . . . .	13
2.4 Математическое ожидание и дисперсия . . . . .	16

# 1. Элементарная теория вероятностей

## 1.1. Основные понятия

**Определение 1.1.**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

**Определение 1.2.** Событие  $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

**Свойства.** вероятности

1.  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(A) \in [0, 1]$
2. Если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. 
$$\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B \setminus (A \cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ , где  $\bar{A} = \Omega \setminus A$
5.  $P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_m)$  – формула включений-исключений.

**Доказательство.** Индукция по  $m$ .

База  $m = 2$ .

Переход  $m \rightarrow m + 1$ :

$$B_j = A_j \cup A_{m+1}$$

$$P(\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1})$$

$$A_{m+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - \sum_{i \neq j}^m P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^m P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1 \cup B_2 \dots \cup B_m)}, \text{ где } B_i :=$$

$$A_i \cap A_{m+1}. \quad \square$$

$$6. P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_m) \leq \sum_{j=1}^m P(A_j)$$

**Определение 1.3.** Условная вероятность.

$$B \neq \emptyset, P(B) > 0.$$

Знаем, что произошло событие  $B$ , хотим узнать вероятность наступления  $A$ .

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Свойства.** 1.  $P(A|A) = 1$ , если  $B \subset A$ , то  $P(A|B) = 1$

$$2. \text{ Если } A_1 \cap A_2 = \emptyset, \text{ то } P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

$$\text{В частности: } P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

**Замечание.**  $P(A|B) + P(A|\bar{B})$  не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик,  $B$  – выпало четное число,  $A$  – выпало кратное трем.

$$P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

**Теорема 1.1. Формула полной вероятности.**

Пусть  $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ ,  $P(B_j) > 0$ .

Тогда  $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

**Доказательство.**  $\sum_{j=1}^m \underbrace{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}_{= \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}} = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = P(A)$  □

**Пример.** I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II,  $P(\text{вынули белый}) = ?$

$A$  – вынули из II белый шар.

$B_0, B_1, B_2$ , где  $B_j$  – переложили  $j$  белых шаров из I в II.

Тогда  $P(A|B_0) = \frac{5}{12}$ ,  $P(A|B_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A|B_2) = \frac{7}{12}$ .

$$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

$$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

Подставляем в формулу:

$$P(A) = \frac{331}{336}$$

**Теорема 1.2. Формула Байеса.**

Пусть  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ , тогда  $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

**Доказательство.** Расписываем  $P(A|B)$ , получаем в правой части:  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$ . □

**Теорема 1.3. Байеса.**

Пусть  $P(A) > 0$ ,  $P(B_j) > 0$ ,  $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ , тогда

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_m)P(B_m)}$$

**Пример.** Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая  $P(\text{орла}) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\text{решка}) = \frac{2}{3}$ ). Взяли наугад монету, бросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

$A$  – выпал орел,  $B$  – монета симметричная ( $\bar{B}$  – монета кривая).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

**Определение 1.4. Независимые события.**

Рассуждения:  $A$  не зависит от  $B$ , если  $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

Опр.  $A, B$  независимые события, если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Определение 1.5.** События  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – независимы в совокупности, если

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$  – для любых индексов  $i_j$ .

**Замечание.** Независимость в совокупности  $\implies$  попарная независимость.

Наоборот неверно.

**Пример.** Есть два игральных кубика.

$A$  – на первом кубике выпало четное число.

$B$  – на втором выпало четное число.

$C$  – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары  $(i, j)$ , где  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\#\Omega = 36$ .

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C.$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$ , остальные равенства тоже выполняются  $\implies$  попарная независимость.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \implies \text{нет независимости в совокупности.}$$

**Упражнение.** Д-ть, что  $A_1, \dots, A_m$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$ , где  $B_j = A_j$  или  $\overline{A_j}$  (все  $2^m$  равенств).

**Замечание.** Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть  $p_1, \dots, p_n : \sum_{i=1}^n p_i = 1, \forall i : p_i \geq 0$ .

$$P(A) = \sum_{j: \omega_j \in A} p_j.$$

**Теорема 1.4. Схема Бернулли.**

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$$P(\text{орел}) = p, 0 \leq p \leq 1$$

$$P(\text{решка}) = 1 - p$$

Бросаем монету  $n$  раз, получаем последовательность исходов:

$$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : x_j = 0 \text{ или } 1.$$

$$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n), P(\{\omega\}) = p^{\#i: x_i=1} \cdot q^{\#i: x_i=0} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n-\sum x_i}$$

Хотим узнать:

$$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$P(i\text{-ое подбрасывание} = \text{орел})$  – независимые в совокупности по  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Теорема 1.5. Полиномиальная схема.**

$$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1.$$

$$P(x_i = k) = p_k, \text{ где } x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$P(\{\omega\}) = p_1^{\#i: x_i=1} \cdot \dots \cdot p_m^{\#i: x_i=m}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

$$P(k_1 \text{ раз выпало } 1, k_2 \text{ раз выпало } 2, \dots) = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}}_{= \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$$

**Теорема 1.6. Эрдёша-Мозера**

Рассмотрим турнир на  $n$  команд. При каком наибольшем  $k$  можно всегда выбрать команды  $A_1, A_2 \dots A_k$ , так, что  $A_i$  выиграла у  $A_j$ , если  $i < j$ ? При  $k \leq 1 + [2 \log_2 n]$

**Доказательство.** Рассмотрим случайный турнир (Всего  $\binom{n}{2}$ , тогда Всего  $2^{\binom{n}{2}}$  разных турниров. Случайный - берём из этой кучи наугад).

$P(A \text{ выиграла у } B) = \frac{1}{2}$ . Рассмотрим  $A_1, A_2, \dots A_k$  команды.

$$P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ подходят}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

$$P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ можно переименовать, так, что они подошли}) \leq \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$$

$$P(\text{какие-то } k \text{ команд подошли}) \leq \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$$

$$\text{Нужно понять, что если } k \geq [2 + 2 \log_2 n], \text{ то } \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1. \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{(2^{\frac{k-1}{2}})^k} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k$$

$$\text{Надо понять, что } 2^{\frac{k-1}{2}} \geq n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2} \geq \log_2 n \quad \square$$

**1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли**

**Определение 1.6.** Схема Бернулли с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ .  $S_n$  - число успехов при  $n$  испытаниях.  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Что будет больше  $P(S_{1000} = 220)$  при  $p = \frac{1}{5}$  или  $P(S_{2000} = 360)$  при  $p = \frac{1}{6}$ . Точные вычисления дают 0.008984 и 0.006625 соответственно.

**Теорема 1.7. Пуассона**

Схема Бернулли с  $n$  испытаниями и вероятностью успеха  $p_n$  - зависит от  $n$ . Если  $np_n \rightarrow \lambda > 0$ . Тогда  $P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

**Замечание.** Если  $np_n = \lambda$ , то теорема верна при  $k = o(\sqrt{n})$

**Доказательство.**  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} p_n^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-p_n)^n$ . Прологарифмируем:  $\ln(1-p_n)^n = n \ln(1-p_n) \sim -np_n \sim -\lambda$

Доказательство замечания:

$$\ln(1-p_n)^k = k \ln(1-p_n) \sim -kp_n \rightarrow 0$$

Осталось понять, что  $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \rightarrow 1$  при  $k = o(\sqrt{n})$ .

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \rightarrow 1$$

Неравенство  $(1-x_1)\dots(1-x_k) \geq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k$  при  $0 \leq x_i \leq 1$  - индукция.  $\square$

**Теорема 1.8. Прохорова**

Если  $\lambda = np$ , то  $\sum_{i=0}^{+\infty} |P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda)$

**Пример.** Игра в рулетку: 36 чисел и ноль.

$$p = \frac{1}{37}, n = 111, np = 3 = \lambda.$$

$$P(S_{111} = 3) = \binom{111}{3} \left(\frac{1}{37}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{111-3} = 0.227127$$

$$\text{Из Пуассона } \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.224$$

Видим, что приближение хорошее.

$$P(\text{выигрыш}) = 1 - P(S_{111} = 0) - P(S_{111} = 1) - P(S_{111} = 2) - P(S_{111} = 3) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 0.352754$$

А по формулам 0.352768

### Теорема 1.9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Схема Бернулии с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ ,  $q = 1 - p$ ,  $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ .

$$P(S_n = k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Если  $|x| \leq T$ , то есть равномерность.

**Доказательство.**  $k = np + x\sqrt{npq} \geq np - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$

$$n - k = nq - x\sqrt{npq} \geq nq - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Напишем формулу Стирлинга:

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi n} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi (n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) n}}$$

$$\frac{k}{n} \rightarrow p, \frac{n-k}{n} \rightarrow q$$

$$\text{Поэтому остаётся доказать, что } \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$k \ln \frac{k}{n} + (n-k) \ln \frac{n-k}{n} - k \ln p - (n-k) \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

$$\alpha = \frac{k}{n} \rightarrow p, \beta = \frac{n-k}{n} \rightarrow q$$

$$n\alpha \ln \alpha + n\beta \ln \beta - n\alpha \ln p - n\beta \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2} = n\alpha \ln \frac{\alpha}{p} + n\beta \ln \frac{\beta}{q}$$

Напишем Тейлора:

$$\frac{\alpha}{p} = 1 + x \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\beta}{q} = 1 - x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\ln \frac{\alpha}{p} = \ln(1 + x \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{n}}) = x \sqrt{\frac{q}{p}} - \frac{1}{2} x^2 \frac{q}{p} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\ln \frac{\beta}{q} = \ln(1 - x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}}) = -x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} x^2 \frac{p}{q} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Сумма равна: } x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2q - \frac{1}{2}x^2q + o\left(\frac{1}{n}\right) - x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2p - \frac{1}{2}x^2p + o\left(\frac{1}{n}\right) = x^2\left(\frac{q}{2} + \frac{p}{2}\right) + o(1) = \frac{x^2}{2} + o(1)$$

Извините, это было очень больно...

□

**Замечание.** Если  $\varphi(n) = o(n^{\frac{2}{3}})$  и  $|k - np| \leq \varphi(n)$ , то теорема тоже верна

**Пример.** Всё та же рулетка.  $n = 222, k = 111$ . Пытаемся ставить на четное/нечётное(кроме 0).  
 $p = \frac{18}{37}$

$$P(S_{222} = 111) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0.049395 \dots$$

Если считать точно, то получим 0.0493228...

### Теорема 1.10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$$0 < p < 1. P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Стремление равномерно по  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Теорема 1.11. Берри-Эссена

$$\text{Обозначение: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{2}$$

**Замечание.** Константа лучше, чем  $\frac{c}{\sqrt{n}}$  не бывает.

**Пример.**  $p = q = \frac{1}{2}$ . Вопрос:  $P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ .

Но  $P(S_{2n} < n) = P(S_{2n} > n)$ .

Тогда  $P(S_{2n} \leq n) = \frac{1 + P(S_{2n} = n)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Муавра-Лаплас нам говорит, что  $P(S_{2n} \leq n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$

Но  $P(S_{2n} \leq n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

**Замечание.**  $P(a < S_n \leq b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$

Отсюда получили, что лучше всего писать полуцелые  $a$  и  $b$ .

### Пример. Задача о театре

Есть театр и 2 входа. У каждого входа расположен гардероб. В театре  $n = 1600$  мест. Хотим сделать размер гардероба как можно меньше, но чтобы переполнения случались как можно реже.

Пусть  $c$  мест в итоге в гардеробе.

$p = q = \frac{1}{2}$ . Нужно, чтобы  $n - c \leq S_n \leq c$ .

$P(n - c \leq S_n \leq c) = P\left(\frac{n - c - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{c - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right) = P\left(\frac{800 - c}{20} \leq \frac{S_n - 800}{20} \leq \frac{c - 800}{20}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{800 - c}{20}\right) -$

$\Phi\left(\frac{c - 800}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{800 - c}{20}}^{\frac{c - 800}{20}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt > \frac{29}{30}$

$\Phi_0\left(\frac{c - 800}{20}\right) > \frac{29}{60}$ . Тогда  $c = 843$ .

### Пример. Случайное блуждание на прямой

Есть прямая, будем считать, что у нас блуждания исключительно по целым точкам.

В каждой точке подбрасываем монетку. С вероятностью  $p$  идём вперёд,  $q$  - идём назад.

$a_{n+1} = a_n + 1$  с вероятностью  $p$

$a_{n+1} = a_n - 1$  с вероятностью  $q$

$a_n \equiv n \pmod{2}$

Это почти похоже на схему Бернулли:  $2S_n - n = a_n$

$P(a_n = k) = P\left(S_n = \frac{n+k}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv k \pmod{2} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{иначе} \end{cases}$

### Теорема 1.12. ван дер Вардена

Рассмотрим числа  $1, 2 \dots k$  и покрасим их в 2 цвета.

Тогда существует  $k_n$ , такое, что, если  $k > k_n$ , то при любой раскраске найдётся одноцветная  $n$ -членная арифметическая прогрессия.

### Теорема 1.13. Эрдеша-Радó

$k_{n+1} \geq \sqrt{n \cdot 2^{n+1}}$

**Доказательство.**  $A_1, A_2 \dots A_m$  - все арифметические прогрессии длины  $n + 1$  из чисел  $1, 2 \dots k$ .

С разностью 1  $k - n$  прогрессий.



С разностью  $2k - 2n$  прогрессий.

...

С разностью  $k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n$  прогрессий с разностью  $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$

Тогда  $m = (k - n) + (k - 2n) + \dots = k \cdot \lfloor \frac{k}{n} \rfloor - n \cdot \frac{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot (\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)}{2} = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor (k - \frac{1}{2}n(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)) < \frac{k}{n} (k - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{k}{n}) = \frac{k^2}{2n}$   
 - это оценка сверху.

$P(A_i \text{ - одноцветная}) = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$  (2 - выбор цвета).

$P(\text{какое-то } A_i \text{ - одноцветно}) = \sum_{i=1}^m P(A_i \text{ - одноцветно}) = \frac{m}{2^n} < \frac{k^2}{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = (\frac{k}{\sqrt{2^{n+1} \cdot n}})^2 \leq 1$  (если так, то найдётся, на которой не выполнится)  $\square$

## 2. Общая теория вероятностей

## 2.1. Колмогоровская модель теории вероятности

**Определение 2.1.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство.

$\Omega$  - множество или пространство элементарных исходов.

$\mathcal{F}$  -  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ . Элементы  $\mathcal{F}$  - случайные события.

$P$  - мера на  $\mathcal{F}$  с условием  $P(\Omega) = 1$ .

**Замечание.** Если  $\Omega$  не более чем счётно, то можно взять  $\mathcal{F} = 2^\Omega$

**Определение 2.2.** Условная вероятность.  $A$  - событие, такое, что  $P(A) > 0$ . Тогда  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ , где  $A, B \in \mathcal{F}$ .

**Определение 2.3.** Независимые события  $A$  и  $B$ . Если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Определение 2.4.** Независимость в совокупности  $A_1, A_2 \dots A_n$ .  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$  для всевозможных наборов индексов.

**Определение 2.5.** Последовательность событий  $A_1, A_2 \dots$  независимы - любой конечный набор событий независим в совокупности.

**Лемма. Бореля-Кантелли**

$A_1, A_2, \dots$  случайные события.

1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , то вероятность, что случилось бесконечное число из них равна 0.
2. Если  $A_1, A_2, \dots$  независимы и  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ , тогда  $P(\text{случилось бесконечное число из } A_n) = 1$ .

**Доказательство.**  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ .

$\omega \in B \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \iff \omega \in A_k$  для бесконечного количества индексов  $k$ .

Док-во этого факта:

1.  $\Leftarrow$ : Лежит в каждом объединении, значит лежит в  $B$ .
2.  $\Rightarrow$ :  $\omega$  лежит в пересечении. Пусть лежит в конечном - возьмём самый большой номер и получим противоречие.

Док-во теоремы:

1.  $P(B) = 0$  - хотим доказать.  
 $B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow P(B) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$ , а это хвост сходящегося ряда, а он стремится к нулю.
2. Давайте смотреть на  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$  - независимые события (следует из упражнения с прошлой лекции).  
 $P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) = \prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k)$   
 Но всё вложено по убыванию, по монотонности меры получаем  $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - P(A_k))$   
 Прологарифмируем это равенство.

$\ln(P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k)) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \leq \sum_{k=n}^{\infty} (-P(A_k)) = -\infty$  – сумма хвоста расходящегося ряда.

А значит мы логарифмировали  $0 \Rightarrow P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bar{B}) = 0 \Rightarrow \Rightarrow \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = B \Rightarrow P(B) = 1$ .

Добавим, что  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , где  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$  и  $P(B) = \lim P(B_n) = 1$ .

□

### Теорема 2.1. Закон нуля и единицы

Если  $A_1, A_2 \dots$  независимы, то  $P(B) = 0$  или  $P(B) = 1$ .

**Пример.** Испытания Бернулли, успех с вероятностью  $p$ ,

$P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = ?$ .

$A_n$  – случилось ОРО на позициях  $n, n+1, n+2$ .

Тогда  $A_1, A_4, A_7, \dots$  независимы.  $P(A_j) = pqr = p^2q > 0$ .

Лемма Бореля-Кантелли говорит: бесконечное кол-во  $A_{3k+1}$  случится, если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{3k+1}) = +\infty \Rightarrow P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = 1$ .

## 2.2. Случайные величины

**Определение 2.6.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство.

$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  – случайная величина, если это измеримая функция.

**Определение 2.7.** Распределение случайной величины

$P_{\xi}$  – вероятностная мера на борелевских подмножествах  $\mathbb{R}$

$A$  – борелевское мн-во,  $P_{\xi}(A) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A)$

**Определение 2.8.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  одинаково распределены, если  $P_{\xi} = P_{\eta}$

**Замечание.**  $P_{\xi}$  однозначно определяются своими значениями на ячейках.

$$P_{\xi}(a, b] = P_{\xi}(-\infty, b] - P_{\xi}(-\infty, a] = P(\xi \leq b) - P(\xi \leq a)$$

**Определение 2.9.** Функция распределения случайной величины

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x)$$

**Свойства.** 1. Функция распределения однозначно определяет распределение случайной величины.

*Доказательство:* Если у двух случайных величин совпали, то у них одинаковые распределения

$$2. 0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$$

*Доказательство:* берём  $x_n \rightarrow -\infty$ .  $A_n = \{\xi \leq x_n\}$  Тогда  $A_{n+1} \subset A_n$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0$

$$4. F_{\xi} \text{ монотонно возрастает}$$

5. Непрерывность справа:  $\lim_{y \rightarrow x+} F_{\xi}(y) = F_{\xi}(x)$

*Доказательство:* берём  $y_n$  убывающие и  $y_n \rightarrow x$ . Тогда  $A_n = \{\xi \leq y_n\}$ .  $A_{n+1} \subset A_n$ . А тогда  $\lim P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\xi \leq x) = F_{\xi}(x)$ . Но с другой стороны  $\lim P(A_n) = \lim P(\xi \leq y_n) = \lim F_{\xi}(y_n)$

6.  $\lim_{y \rightarrow x-} F_{\xi}(y)P(\xi < x)$

*Доказательство:* берём  $y_n$  возрастающие и  $y_n \rightarrow x$ .  $B_n = \{\xi \leq y_n\}$  и  $B_n \subset B_{n+1}$ .  $\lim P(B_n) = P(\bigcup B_n) = P(\xi < x)$ . Но с другой стороны  $\lim P(B_n) = \lim F_{\xi}(y_n)$

7.  $F_{\xi+a}(x) = F_{\xi}(x - a)$

*Доказательство:*  $\{\xi + a \leq x\} = \{\xi \leq x - a\}$

8.  $F_{c\xi} = F_{\xi}(\frac{x}{c})$

*Доказательство:*  $\{c\xi \leq x\} = \{\xi \leq \frac{x}{c}\}$

**Замечание.** Функция, обладающая свойствами 3, 4, 5 - это функция распределения некоторой случайной величины.

*Доказательство:* пусть  $g$  - такая функция. Тогда  $\nu_g(a, b] = g(b) - g(a)$ . Случайная величина  $\xi(x) = x$ . Тогда  $F_{\xi} = g$

**Определение 2.10.** Случайная величина имеет дискретное распределение, если её множество значений не более чем счётное.

**Замечание.** 1.  $\xi \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$

Если  $x \neq y_k$ , то  $P(\xi = x) = 0$ , т.е.  $P_{\xi}(\{x\}) = 0$

2.  $P_{\xi}(A) = \sum_{k: y_k \in A} P(\xi = y_k)$ . Тут счётное число слагаемых, поэтому сумма корректно определена.

Распределение однозначно определяется набором вероятностей  $P(\xi = y_k)$

3.  $F_{\xi}(x) = \sum_{k: y_k \leq x} P(\xi = y_k)$

**Определение 2.11.** Случайная величина имеет непрерывное распределение, если  $P(\xi = x) = 0$

**Замечание.** 1. Это значит, что функция распределения непрерывна.

2. Непрерывные распределения бывают не очень хорошими, например Канторова лестница.

**Определение 2.12.** Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует  $p_{\xi}(t) \geq 0$ , измеримая, т.ч.  $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt$  ( $p_{\xi}(t)$  - плотность распределения).

**Свойства.** 1.  $A \subset \mathbb{R}$  - борелевское, то  $P_{\xi}(A) = \int_A p_{\xi}(t) dt$

*Доказательство:* слева мера и справа мера. Нужно понять, почему они совпадают на ячейках.

$$P_{\xi}(a, b] = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_a^b p_{\xi}(t) dt$$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(t) dt = 1$

3.  $p_{\xi}$  определена однозначно с точностью до почти везде (из теории меры)

4.  $F_{\xi}$  почти везде дифференцируема и  $F'_{\xi}(x) = p_{\xi}(x)$

*Доказательство:* а его не будет

**Пример. Вероятностные распределения**

1. Биномиальное распределение:  $\xi \sim \text{Binom}(p, n), 0 < p < 1$

$$\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}. P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. Распределение Пуассона:  $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda), \lambda > 0$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}. P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

3. Геометрическое распределение:  $\xi \sim \text{Geom}(p), 0 < p < 1$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}. P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

4. Дискретные равномерные распределения:  $\xi \sim U(\dots)$

$$\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}. P(\xi = k) = \frac{1}{n}$$

5. Непрерывно равномерное распределение:  $\xi \sim U([a, b])$

$$\xi : \Omega \rightarrow [a, b]. p_\xi(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$$

6. Нормальное распределение:  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. p_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Стандартное нормальное распределение:  $\mathcal{N}(0, 1)$

7. Экспоненциальное распределение:  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow [0, +\infty]. p_\xi(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{в других точках} \end{cases}$$

**Замечание.** 1.  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

На самом деле это функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

2. Если  $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\xi = \sigma\nu + a$ .  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$F_\xi(x) = P(\sigma\nu + a \leq x) = P(\nu \leq \frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Замена  $t = \frac{s-a}{\sigma}$ . Тогда  $dt = \frac{ds}{\sigma}$

$$\text{Тогда: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(s-a)^2}{2\sigma^2}} ds$$

**2.3. Совместное распределение**

**Определение 2.13.** Совместное(многомерное) распределение.

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P_{\bar{\xi}}(A) = P(\bar{\xi} \in A), \text{ где } A - \text{борелевское подмножество } \mathbb{R}^n$$

**Замечание.** Совместное распределение однозначно определяет распределение случайной величины, но не наоборот

**Пример.**  $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  с равными вероятностями.

Если это были независимые подбрасывания:  $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  с равными вероятностями.

Если  $\xi = \eta$ , то  $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (1, 1)\}$ .

**Определение 2.14.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  независимы, если для любых борелевских подмножеств  $A_1, A_2 \dots A_n \subset \mathbb{R}$ , события  $\{\xi_1 \in A_1\}, \dots, \{\xi_n \in A_n\}$  независимы

**Замечание.**  $P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P(\xi_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in A_n)$

**Теорема 2.2.**  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  независимы  $\iff P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n}$

**Доказательство.** 1.  $\Leftarrow$  очевидно.  $P_{\bar{\xi}}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{\xi_1}(A_1) \dots P_{\xi_n}(A_n)$

2.  $\Rightarrow$ . На множествах  $A_1 \times \dots \times A_n$  есть равенство + единственность продолжения.

□

**Определение 2.15.** Совместная (многомерная) функция распределения.

$\bar{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_n)$ .  $F_{\bar{\xi}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . и  $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$

**Свойства.** 1.  $0 \leq F_{\bar{\xi}} \leq 1$

2. Монотонно возрастает по каждой координате

3.  $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 0$

$\lim_{x_1, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 1$

4.  $\lim_{x_i \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots}$

**Определение 2.16.** Совместная плотность  $p_{\bar{\xi}}(\bar{t})$  - неотрицательная измеримая функция, такая, что  $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) dt_n \dots dt_1$

**Теорема 2.3.**  $\xi_1 \dots \xi_n$  независимы  $\iff F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$

**Доказательство.** 1. Докажем  $\Rightarrow$ . Независимость  $\Rightarrow (*) P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\bar{\xi}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P_{\xi_1}(-\infty, x_1] \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}(-\infty, x_n]$

2. Хотим проверить совпадение на ячейках, чтобы доказать (\*) ещё и в другую сторону.



$$\begin{aligned} P_{\bar{\xi}}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) &= F_{\bar{\xi}}(b_1, b_2) + F_{\bar{\xi}}(a_1, a_2) - F_{\bar{\xi}}(a_1, b_2) - F_{\bar{\xi}}(a_2, b_1) = \\ &= (F_{\xi_1}(b_1) - F_{\xi_1}(a_1)) \cdot (F_{\xi_2}(b_2) - F_{\xi_2}(a_2)) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot P_{\xi_2}(a_2, b_2] \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $\xi_1 \dots \xi_n$  - абсолютно непрерывные случайные величины. Тогда  $\xi_1 \dots \xi_n$  независимы  $\iff p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = p_{\xi_1}(t_1) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(t_n)$

В частности, в случае независимости  $\bar{\xi}$  абсолютно непрерывна.

**Доказательство.** 1. Докажем  $\Rightarrow$ .

$$\text{Независимость} \Rightarrow F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1) dt_1 \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_n}(t_n) dt_n = \\ \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n) dt_n \dots dt_1.$$

Запишали всё под один интеграл, то что под интегралом и есть совместная плотность.

2. Докажем  $\Leftarrow$ .

Просто проинтегрируем равенство.

$$\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) dt_n \dots dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n) dt_n \dots dt_1 = \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{по т. Тонелли можно выносить интегралы}} F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

по т. Тонелли можно выносить интегралы

□

**Замечание.** Напоминание.

Свертка последовательностей:  $\{a_n\}, \{b_n\}$  это  $\{c_n\}$ , такая что  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ .

Мотивировка:  $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  (при наличии хоть каких-нибудь кругов сходимости у обоих рядов).

**Замечание.** Свертки мер

$\mu$  и  $\nu$  - конечные меры на борелевских подмножествах  $\mathbb{R}$ .

$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x)$  - это свертка мер, где  $(A - x) := \{a - x \mid a \in A\}$ .

**Свойства.** Свойства свёртки

$$1. \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(x) d\nu(y)$$

$$\text{Доказательство: } \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x}(y) d\mu(y) d\nu(x)$$

$$2. \mu * \nu = \nu * \mu$$

$$3. \mu_1 * \dots * \mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1 + \dots + x_n) d\mu_1(x_1) \dots d\mu_n(x_n)$$

$$4. (\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$$

$$5. (\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$$

$$6. \delta_x - \text{мера с единичной нагрузкой в точке } x. \text{ Тогда } \mu * \delta_0 = \mu.$$

Получили линейное пространство относительно  $+$  и  $*$

*Доказательство:*  $\mu * \delta_0(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\delta_0(x) = \mu A$  - значение подынтегральной функции в точке  $x = 0$ .

**Теорема 2.4.** Пусть  $\mu$  и  $\nu$  имеют плотности  $p_{\mu}$  и  $p_{\nu}$

Тогда  $\mu * \nu$  имеет плотность  $p(t) = \int_{\mathbb{R}} p_{\mu}(t - s) p_{\nu}(s) ds$

**Доказательство.** Возьмём функцию, определяемую этой формулой и проверим, что подходит.

$$\int_A p(t) dt = \int_A \int_{\mathbb{R}} p_{\mu}(t - s) p_{\nu}(s) ds dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) p_{\mu}(t - s) p_{\nu}(s) ds dt = (*).$$

Положим  $u = t - s$ . Тогда  $(*) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s) p_{\mu}(u) p_{\nu}(s) ds du = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s) d\nu(s) d\mu(u) = \mu * \nu(A)$  □

**Теорема 2.5.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимые случайные величины, то  $P_{\xi+\eta} = P_{\xi} * P_{\eta}$



**Доказательство.** Нужно взять какое-то борелевское множество и понять как устроено там распределение суммы.

Пусть  $B = \{(x, y) : x + y \in A\}$

$$P_{\xi+\eta}(A) = P(\xi + \eta \in A) = P((\xi, \eta) \in B) = P_{\xi, \eta}(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = P_{\xi} * P_{\eta}(A) \quad \square$$

**Пример.** 1. **Свертка с дискретным распределением**

$$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}. \text{ Тогда } \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A - x_k) p_k$$

2.  $\xi_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ .  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы.

$$P_{\xi_1 + \xi_2}(\{n\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{\xi_1}(\{n - k\}) \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^{n-k} e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^{n-k} \lambda_2^k}{k!(n-k)!} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{n!}$$

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

## 2.4. Математическое ожидание и дисперсия

**Определение 2.17.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - случайная величина ( $\xi \geq 0$ , либо суммируемая функция).  $\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi(\omega) dP(\omega)$  - математическое ожидание (среднее значение случайной величины).

**Свойства.** 1.  $a, b \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$

2. Если  $\xi \geq 0$ , с вероятностью 1, то  $\mathbb{E}\xi \geq 0$  (по сути написано, что если функция почти везде неотрицательна, то интеграл неотрицателен).

3. Если  $\xi \geq \eta$  с вероятностью 1, то  $\mathbb{E}\xi \geq \mathbb{E}\eta$

$$4. \mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_{\xi}(x)$$

5. Если  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - измерима относительно борелевской  $\sigma$ -алгебры.

$$\text{Тогда } \mathbb{E}f(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dP_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$$

*Доказательство:*  $f = \mathbb{1}_A$ . Тогда  $\mathbb{E}\mathbb{1}_A(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) dP(\omega) = P(\omega \in \Omega : \xi \in A) = P_{\xi}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1, \dots, x_n) dP_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$ .

Тогда по линейности верно для простых.

Теперь берём  $f_j$  неотрицательные простые, такие, что возрастают и  $\rightarrow f$ . И предельный переход по теореме Леви.

6. Если  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то  $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$

$$\text{Доказательство: } \mathbb{E}(\xi\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{\xi, \eta}(x, y) =$$

$$\underbrace{=}_{\text{независимость сл. вел.}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}} y \int_{\mathbb{R}} x dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$$

7. Если  $\xi \geq 0$ , то  $\mathbb{E}\xi = \int_0^{+\infty} P(\xi \geq t) dt$  - из теории меры.

8. Если  $p, q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то  $\mathbb{E}|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}$  - неравенство Гёльдера

9. Неравенство Ляпунова

$$0 < r < s, \text{ тогда } (\mathbb{E}|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{1}{s}}.$$

$$\text{Доказательство: } p = \frac{s}{r} > 1, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{s-r}{s} < 1.$$

Тогда запишем Гельдера для  $\xi$  и  $\eta = 1$ :

$$\mathbb{E}|\xi|^r |1| \leq (\mathbb{E}(|\xi|^r)^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}1^q)^{\frac{1}{q}} = (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{r}{s}}.$$

**Замечание.**  $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$  без независимости неверно. Пример.

### Теорема 2.6. Неравенство Маркова

Если  $\xi \geq 0, p, t > 0$ , то  $P(\xi \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}\xi^p}{t^p}$ .

**Доказательство.** Неравенство Чебышёва из теории меры. □

**Определение 2.18.** 1. Моменты случайной величины.  $\mathbb{E}(\xi^k)$  -  $k$ -ый момент.

2. Центральные моменты.  $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$  -  $k$ -ый центральный момент.

3. Абсолютный момент.  $\mathbb{E}|\xi|^k$  -  $k$ -ый абсолютный момент.

**Определение 2.19.** Медиана случайной величины.  $m$  - медиана  $\xi$ , если  $P(\xi \geq m) \geq \frac{1}{2}$  и  $P(\xi \leq m) \geq \frac{1}{2}$ .

**Замечание.** Медиана не единственна.

Возьмём кубик.  $\xi = 1, 2, \dots, 6$  с вероятностью  $\frac{1}{6}$ . Тогда любое число  $m \in [3, 4]$  подходит.

Чаще всего всё равно берут середину, чтобы была единственность.

**Пример.** Есть организация из 1000 человек. 1 начальник и 999 подчиненных.

Зарплата начальника 1.000.000\$, а подчинённых 1000\$.

$$\mathbb{E} = \frac{999}{1000} \cdot 1000 + \frac{1}{1000} \cdot 1000000 = 1999$$

$m = 1000$  - медиана лучше характеризует ситуацию в этом случае.

**Определение 2.20.** Дисперсия.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$  - второй центральный момент.

Обозначение в англоязычной литературе:  $Var\xi$

**Свойства.** 1.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

*Доказательство:* Пусть  $a = \mathbb{E}\xi$ .

$$\text{Тогда } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - a)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - 2a\mathbb{E}\xi + a^2$$

2.  $\mathbb{D}\xi \geq 0$  и если  $\mathbb{D}\xi = 0$ , то  $P(\xi = c) = 1$

*Доказательство:* Если  $\mathbb{D}\xi = 0$ , то  $\int_{\Omega} (\xi - a)^2 dP = 0$ , значит  $(\xi - a)^2 = 0$  почти везде.

3.  $\mathbb{D}(\xi + a) = \mathbb{D}\xi$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}(\xi + a) = \mathbb{E}\xi + a$ . А тогда  $(\xi + a) - \mathbb{E}(\xi + a) = \xi - \mathbb{E}\xi$

4.  $\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi$

*Доказательство:*  $\mathbb{D}(c\xi) = \mathbb{E}(c\xi)^2 - (\mathbb{E}(c\xi))^2$

5. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

*Доказательство:*  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}(\xi\eta) + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - (\mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

6. Аналогично предыдущему, но для  $n$  случайных величин.

*Доказательство:* индукция

7.  $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq (\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$  - написали Ляпунова.

### 8. Неравенство Чебышёва

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}, \text{ где } t > 0$$

*Доказательство:*  $P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2}{t^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}$  - неравенство Маркова для  $p = 2$ .

**Определение 2.21.** Стандартное отклонение  $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

**Пример.** 1.  $\xi \sim U[0, 1]$ .

$$\text{Тогда } \mathbb{E}\xi = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ А тогда } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{1}{12}$$

2.  $\xi \sim U[a, b]$ .

Если  $\eta \sim U[0, 1]$  и  $\xi = (b - a)\eta + a \sim U[a, b]$ . Тогда  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}((b - a)\eta + a) = \frac{a+b}{2}$

$$\mathbb{D}((b - a)\eta + a) = \mathbb{D}((b - a)\eta) = (b - a)^2 \mathbb{D}\eta = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0, \text{ так как функция нечётная.}$$

$$\text{Значит } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

4.  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Если  $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\xi = \sigma\eta + a \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ .

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sigma\eta + a) = \sigma\mathbb{E}\eta + a = a$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(\sigma\eta + a) = \sigma^2 \mathbb{D}\eta = \sigma^2$$

**Определение 2.22.** Пусть  $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$  и  $\mathbb{E}\eta^2 < +\infty$ .

Ковариация  $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))$

**Свойства.** 1.  $cov(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$

2.  $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$

3.  $cov(c\xi, \eta) = c \cdot cov(\xi, \eta)$

4.  $cov(\xi_1 + \xi_2, \eta) = cov(\xi_1, \eta) + cov(\xi_2, \eta)$

5.  $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}\xi = a, \mathbb{E}\eta = b$

$$cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - a)(\eta - b)) = \mathbb{E}(\xi\eta) - a\mathbb{E}\eta - b\mathbb{E}\xi + ab$$

6. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $cov(\xi, \eta) = 0$

7.  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2cov(\xi, \eta)$

8.  $\mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 + \dots + \mathbb{D}\xi_n + 2 \sum_{i < j} cov(\xi_i, \xi_j).$

**Пример.**  $P(\text{успех}) = p$ . Делаем  $n$  подбрасываний.  $\eta$  = количество переходов от орла к решке.

Пусть  $\xi_i = 1$ , если на  $i$  позиции орёл, на  $i + 1$  позиции решка, иначе  $\xi_i = 0$ .

$\eta = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}$ . Тогда  $\mathbb{E}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\xi_i = (n-1)pq$ .

$\mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$ .

Если  $i + 1 < j$ , то  $\xi_i$  и  $\xi_j$  независимы, поэтому в сумме почти везде нули.

Значит  $\mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{cov}(\xi_i, \xi_{i+1})$ .

$\mathbb{D}\xi_i = \mathbb{E}\xi_i^2 - (\mathbb{E}\xi_i)^2 = pq - p^2q^2$ .

$\text{cov}(\xi_i, \xi_{i+1}) = \mathbb{E}(\xi_i \xi_{i+1}) - \mathbb{E}\xi_i \mathbb{E}\xi_{i+1} = -p^2q^2$

**Замечание.** 1.  $\{\xi : \mathbb{E}\xi^2 < +\infty\}$

$\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}(\xi \eta)$  - скалярное произведение.

$\mathbb{E}\xi$  - ортогональная проекция на константы.

2.  $\langle \xi, \eta \rangle = \text{cov}(\xi, \eta)$  - тоже скалярное произведение.

Норма - это стандартное отклонение.

### Теорема 2.7. Выбор двудольного подграфа

Есть граф  $G$  с  $n$  вершинами и  $m$  рёбрами. Хотим стереть некоторое количество рёбер (как можно меньше) так, чтобы остался двудольный подграф.

Тогда  $G$  содержит двудольный подграф с  $\geq \frac{m}{2}$  рёбрами.

**Доказательство.**  $A$  - те вершины, на которых выпал орёл,  $B$  - на которых выпала решка.

Будем интересоваться матожидание количества рёбер в такой ситуации.

$$\xi_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{если } x, y \text{ из разных долей} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\mathbb{E}\xi = \sum_{xy \in E} \mathbb{E}\xi_{xy} = \frac{m}{2}$ , а значит есть реализация с  $\frac{m}{2}$ .

□