Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

16 января 2023 г.

Содержание

1. Элементарная теория вероятностей

1.1. Основные понятия

***Определение* 1.1.** $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

***Определение* 1.2.** Событие $A \subset \Omega$

$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

Свойства. вероятности

1. $P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1,\ P(A) \in [0, 1]$
2. Если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B \setminus (A \cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, где $\overline{A} = \Omega \setminus A$
5. $P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_m)$ – формула включений-исключений.

   Доказательство. Индукция по m.

   База $m = 2$.

   Переход $m \to m + 1$:

   $B_j = A_j \cup A_{m+1}$

   $P(\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1}) =$

   $= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - sum_{i \neq j}^{m} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^{m} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1 \cup B_2 \dots \cup B_m)}$, где $B_i := A_i \cap A_{m+1}$. □

6. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

   $P(A_1 \cup \dots \cup A_m) \leq \sum_{j=1}^{m} P(A_j)$

***Определение* 1.3. Условная вероятность**.

$B \neq \varnothing,\ P(B) > 0$.

Знаем, что выполнилось событие B, хотим узнать вероятность наступления A.

$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Свойства.

1. $P(A|A) = 1$, если $B \subset A$, то $P(A|B) = 1$
2. Если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

   В частности: $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$

Замечание. $P(A|B) + P(A|\overline{B})$ не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик, B – выпало четное число, A – выпало кратное трем.

$P(A|B) = \frac{1}{3},\ P(A|\overline{B}) = \frac{1}{3}$

Теорема 1.1. Формула полной вероятности.

Пусть $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j,\ P(B_j) > 0$.

Тогда $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

Доказательство. $\sum_{j=1}^m \underbrace{P(A|B_j)}_{=\frac{P(A\cap B_j)}{P(B_j)}} \cdot P(B_j) = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = P(A)$ ☐

Пример. I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II, P(вынули белый) $=$?

A – вынули из II белый шар.

$B_0,\ B_1,\ B_2$, где B_j – переложили j белых шаров из I в II.

Тогда $P(A|B_0) = \frac{5}{12},\ P(A|B_1) = \frac{1}{2},\ P(A|B_2) = \frac{7}{12}$.

$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$

$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$

$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$

Подставляем в формулу:

$P(A) = \frac{331}{336}$

Теорема 1.2. Формула Байеса.

Пусть $P(A) > 0,\ P(B) > 0$, тогда $P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$

Доказательство. Расписываем $P(A|B)$, получаем в правой части: $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$. ☐

Теорема 1.3. Байеса.

Пусть $P(A) > 0,\ P(B_j) > 0,\ \Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$, тогда

$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1)+\dots+P(A|B_m)P(B_m)}$

Пример. Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая P(орла) $= \frac{1}{3}$, P(решка) $= \frac{2}{3}$). Взялу наугад монету, побросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

A – выпал орел, B – монета симметричная ($\overline{B}$ – монета кривая).

$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$

***Определение* 1.4. Независимые события**.

Рассуждения: A не зависит от B, если $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Опр. $A,\ B$ независимые события, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

***Определение* 1.5.** События $A_1, A_2, \dots, A_m$ – независимы в совокупности, если

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ – для любых индексов i_j.

Замечание. Независимость в совокупности $\Longrightarrow$ попарная независимость.

Наоборот неверно.

Пример. Есть два игральных кубика.

A – на первом кубике выпало четное число.

B – на втором выпало четное число.

C – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары (i, j), где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 36$.

$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{2}$.

$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$, остальные равенства тоже выполняются $\Longrightarrow$ попарная независимость.

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \Longrightarrow$ нет независимости в совокупности.

Упражнение. Д-ть, что $A_1, \dots A_m$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$, где $B_j = A_j$ или $\overline{A_j}$ (все 2^m равенств).

Замечание. Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть $p_1, \dots p_n:\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ \forall i:\ p_i \geq 0$.

$P(A) = \sum_{j:\ \omega_j \in A} p_j$.

Теорема 1.4. Схема Бернулли.

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$P(\text{орел}) = p,\ 0 \leq p \leq 1$

$P(\text{решка}) = 1 - p$

Бросаем монету n раз, получаем последовательность исходов:

$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}:\ x_j = 0$ или 1.

$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ P(\{\omega\}) = p^{\#i:\ x_i = 1} \cdot q^{\#i:\ x_i = 0} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n - \sum x_i}$

Хотим узнать:

$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$P(i\text{-ое подбрасывание } = \text{ орел})$ – независимые в совокупности по $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 1.5. Полиномиальная схема.

$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1$.

$P(x_i = k) = p_k$, где $x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$

$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\},\ \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$P(\{\omega\}) = p_1^{\#\{i: x_i = 1\}} \cdot \dots \cdot p_m^{\#\{i: x_i = m\}}$

$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

$P(k \text{ раз выпало } 1,\ k_2 \text{ раз выпало } 2,\ \dots) = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$