

Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

21 июня 2023 г.

Содержание

| | |
|--|-----------|
| 1. Элементарная теория вероятностей | 1 |
| 1.1 Основные понятия | 2 |
| 1.2 Предельные теоремы для схем Бернулли | 5 |
| 2. Общая теория вероятностей | 9 |
| 2.1 Колмогоровская модель теории вероятности | 10 |
| 2.2 Случайные величины | 11 |
| 2.3 Совместное распределение | 14 |
| 2.4 Математическое ожидание и дисперсия | 17 |
| 2.5 Сходимость последовательностей случайных величин | 22 |
| 2.6 Производящие функции | 27 |
| 3. Метод характеристических функций | 28 |
| 3.1 Характеристические функции случайных величин | 29 |
| 3.2 Сходимость по распределению | 33 |
| 3.3 Центральная предельная теорема | 36 |
| 3.4 Большие отклонения | 37 |
| 4. Дискретные случайные процессы | 39 |
| 4.1 Условные математические ожидания | 40 |
| 4.2 Ветвящиеся процессы | 42 |
| 4.3 Цепи Маркова | 43 |
| 4.4 Случайные блуждания | 47 |
| 4.5 Процесс восстановления | 50 |

1. Элементарная теория вероятностей

1.1. Основные понятия

Определение 1.1. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

Определение 1.2. Событие $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Свойства. вероятности

1. $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $P(A) \in [0, 1]$
2. Если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3.
$$\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B \setminus (A \cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, где $\bar{A} = \Omega \setminus A$
5. $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \cdots \cap A_m)$ – формула включений-исключений.

Доказательство. Индукция по m .

База $m = 2$.

Переход $m \rightarrow m + 1$:

$$B_j = A_j \cup A_{m+1}$$

$$P(\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1})$$

$$A_{m+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - \sum_{i \neq j}^m P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^m P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_m)}, \text{ где } B_i := A_i \cap A_{m+1}.$$

$$A_{m+1}.$$

□

6. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
 $P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \leq \sum_{j=1}^m P(A_j)$

Определение 1.3. Условная вероятность.

$$B \neq \emptyset, P(B) > 0.$$

Знаем, что произошло событие B , хотим узнать вероятность наступления A .

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Свойства. 1. $P(A|A) = 1$, если $B \subset A$, то $P(A|B) = 1$

2. Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

$$\text{В частности: } P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

Замечание. $P(A|B) + P(A|\bar{B})$ не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик, B – выпало четное число, A – выпало кратное трем.

$$P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

Теорема 1.1. Формула полной вероятности.

Пусть $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$, $P(B_j) > 0$.

Тогда $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

Доказательство. $\sum_{j=1}^m \underbrace{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}_{= \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}} = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = P(A)$ □

Пример. Пусть есть 2 урны с шариками:

I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II, $P(\text{вынули белый}) = ?$

A – вынули из II белый шар.

B_0, B_1, B_2 , где B_j – переложили j белых шаров из I в II.

Тогда $P(A|B_0) = \frac{5}{12}$, $P(A|B_1) = \frac{1}{2}$, $P(A|B_2) = \frac{7}{12}$.

$$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

$$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

Подставляем в формулу:

$$P(A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{28} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{28} = \frac{23}{48}$$

Теорема 1.2. Формула Байеса.

Пусть $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, тогда $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

Доказательство. Расписываем $P(A|B)$, получаем в правой части: $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$. □

Теорема 1.3. Байеса.

Пусть $P(A) > 0$, $P(B_j) > 0$, $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$, тогда

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_m)P(B_m)}$$

Пример. Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая $P(\text{орла}) = \frac{1}{3}$, $P(\text{решка}) = \frac{2}{3}$). Взяли наугад монету, подбросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

A – выпал орел, B – монета симметричная (\bar{B} – монета кривая).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

Определение 1.4. Независимые события.

Рассуждения: A не зависит от B , если $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Def: A, B независимые события, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Определение 1.5. События A_1, A_2, \dots, A_m – независимы в совокупности, если

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \text{ – для любых индексов } i_j.$$

Замечание. Независимость в совокупности \implies попарная независимость.

Наоборот неверно.

Пример. Есть два игральных кубика.

A – на первом кубике выпало четное число.

B – на втором выпало четное число.

C – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары (i, j) , где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 36$.

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C.$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$, остальные равенства тоже выполняются \implies попарная независимость.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \implies \text{нет независимости в совокупности.}$$

Упражнение. Д-ть, что A_1, \dots, A_m независимы в совокупности $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$, где $B_j = A_j$ или $\overline{A_j}$ (все 2^m равенств).

Замечание. Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть $p_1, \dots, p_n : \sum_{i=1}^n p_i = 1, \forall i : p_i \geq 0$.

$$P(A) = \sum_{j: \omega_j \in A} p_j.$$

Теорема 1.4. Схема Бернулли.

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$$P(\text{орел}) = p, \quad 0 \leq p \leq 1$$

$$P(\text{решка}) = 1 - p$$

Бросаем монету n раз, получаем последовательность исходов:

$$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : x_j = 0 \text{ или } 1.$$

$$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad P(\{\omega\}) = p^{\sum x_i} \cdot q^{\sum (1-x_i)} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n-\sum x_i}$$

Хотим узнать:

$$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(i\text{-ое подбрасывание}) = P(\text{орел}) = p \text{ – независимые в совокупности по } i = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема 1.5. Полиномиальная схема.

$$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1.$$

$$P(x_i = k) = p_k, \text{ где } x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \quad \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$P(\{\omega\}) = p_1^{\#\{i: x_i=1\}} \cdot \dots \cdot p_m^{\#\{i: x_i=m\}}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

$$P(k_1 \text{ раз выпало } 1, k_2 \text{ раз выпало } 2, \dots) = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}}_{= \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$$

Теорема 1.6. Эрдёша-Мозера

Рассмотрим турнир на n команд. При каком наибольшем k можно всегда выбрать команды $A_1, A_2 \dots A_k$, так, что A_i выиграла у A_j , если $i < j$? При $k \leq 1 + [2 \log_2 n]$

Доказательство. Предположим, что $k \geq 2 + [2 \log_2 n] > 1 + 2 \log_2 n$. Хотим показать, что при таких k точно найдётся турнир, в котором нельзя выбрать k команд.

Рассмотрим случайный турнир (Всего встреч $\binom{n}{2}$, тогда $2^{\binom{n}{2}}$ разных турниров. Случайный - берём из этой кучи наугад).

$$P(A \text{ выиграла у } B) = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим A_1, A_2, \dots, A_k команды.

1. $P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ подходят}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$
2. $P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ можно переименовать, так, что они подошли}) \leq \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$
3. $P(\text{какие-то } k \text{ команд подошли}) \leq \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$

Нужно понять, что если $k \geq 2 + [2 \log_2 n]$, то $\binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$.

$$\text{Действительно, } \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{(2^{\frac{k-1}{2}})^k} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k$$

Мы знаем, что $k > 1 + 2 \log_2 n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2} > \log_2 n \Rightarrow 2^{\frac{k-1}{2}} > n$. И тогда $\left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k < 1$. Это значит, что вероятность, что никакие команды не подходят - положительная, значит есть турнир, в котором k команд выбрать нельзя. \square

1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли

Определение 1.6. Схема Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$. S_n - число успехов при n испытаниях. $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Что будет больше $P(S_{1000} = 220)$ при $p = \frac{1}{5}$ или $P(S_{2000}) = 360$ при $p = \frac{1}{6}$. Точные вычисления дают 0.008984 и 0.006625 соответственно.

Теорема 1.7. Пуассона

Схема Бернулли с n испытаниями и вероятностью успеха p_n - зависит от n . Если $np_n \rightarrow \lambda > 0$. Тогда $P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

Замечание. Если $np_n = \lambda$, то теорема верна при $k = o(\sqrt{n})$

Доказательство. $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-p)^{n-k}$.

Осталось показать, что $(1-p)^{n-k} \sim e^{-\lambda}$. Прологарифмируем: $\ln(1-p)^{n-k} = (n-k) \ln(1-p) \sim -np \sim -\lambda$

Доказательство замечания:

Нам нужно показать, что $n(n-1)\dots(n-k+1) \sim n^k$, все остальные переходы будут верны.

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \underbrace{\geq}_{(*)} 1 - \frac{1}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \rightarrow 1$$

(*) Неравенство $(1-x_1)\dots(1-x_k) \geq 1-x_1-x_2-\dots-x_k$ при $0 \leq x_i \leq 1$ - индукция. \square

Теорема 1.8. Прохорова

Если $\lambda = np$, то $\sum_{k=0}^{+\infty} |P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda)$

Пример. Игра в рулетку: 36 чисел и ноль.

$$p = \frac{1}{37}, n = 111, np = 3 = \lambda.$$

$$P(S_{111} = 3) = \binom{111}{3} \left(\frac{1}{37}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{111-3} = 0.227127$$

$$\text{Из Пуассона } \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.224$$

Видим, что приближение хорошее.

$$P(\text{ставка удачная хотя бы 4 раза}) = 1 - P(S_{111} = 0) - P(S_{111} = 1) - P(S_{111} = 2) - P(S_{111} = 3) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.352754$$

А по формулам 0.352768

Теорема 1.9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Схема Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$, $q = 1 - p$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, где k зависит от n , и n меняется. $|x| \leq T$ - при $n \rightarrow +\infty$ и любых k . Тогда:

$$P(S_n = k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Доказательство.

$$1. k = np + x\sqrt{npq} \geq np - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$2. n - k = nq - x\sqrt{npq} \geq nq - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Напишем формулу Стирлинга ($n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$):

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi(n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \cdot \sqrt{2\pi \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) n}}.$$

$$\text{Заметим, что } \frac{k}{n} = p + \frac{x\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \rightarrow p$$

$$\text{и } \frac{n-k}{n} \rightarrow q$$

Поэтому остаётся доказать, что $\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}}{p^k q^{n-k}} \rightarrow e^{\frac{x^2}{2}}$. Прологарифмируем:

$$\text{Получим: } k \ln \frac{k}{n} + (n-k) \ln \frac{n-k}{n} - k \ln p - (n-k) \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

Введём обозначения: $\alpha = \frac{k}{n} \rightarrow p, \beta = \frac{n-k}{n} \rightarrow q$. Тогда $k = n\alpha, n-k = n\beta$ и всё перепишется в виде:

$$n\alpha \ln \alpha + n\beta \ln \beta - n\alpha \ln p - n\beta \ln q = n \underbrace{\alpha \ln \frac{\alpha}{p} + \beta \ln \frac{\beta}{q}}_{(*)} \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

Мы знаем, что $\frac{\alpha}{p} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}$ и $\frac{\beta}{q} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}$ - из первых двух тождеств в доказательстве.

Напишем Тейлора:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\ln \frac{q}{p} = \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{np} + o(\frac{1}{n})$$

$$\ln \frac{p}{q} = \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{nq} + o(\frac{1}{n})$$

$$\text{Тогда } (*) = x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2q - \frac{1}{2}x^2q + o(\frac{1}{n}) - x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2p - \frac{1}{2}x^2p + o(\frac{1}{n}) = x^2(\frac{q}{2} + \frac{p}{2}) + o(1) = \frac{x^2}{2} + o(1) \quad \square$$

Замечание. Если $\varphi(n) = o(n^{\frac{2}{3}})$ и $|k - np| \leq \varphi(n)$, то теорема тоже верна

Пример. Всё та же рулетка. $n = 222, k = 111$. Пытаемся ставить на четное/нечётное(кроме 0).
 $p = \frac{18}{37}$

$$P(S_{222} = 111) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0.049395 \dots$$

Если считать точно, то получим 0.0493228...

Теорема 1.10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$$0 < p < 1. P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Стремление равномерно по $a, b \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.11. Берри-Эссеена

$$\text{Обозначение: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{2}$$

Замечание. Константа лучше, чем $\frac{c}{\sqrt{n}}$ не бывает.

$$\text{Замечание. } P(a < S_n \leq b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Отсюда получили, что лучше всего писать полуцелые a и b .

Замечание. Если p или q очень маленькие, то произведение np маленькое и оценка будет плохой. В таких случаях хорошо использовать Пуассона. Муавра-Лаплас же хорош, когда np большое.

$$\text{Пример. } p = q = \frac{1}{2}. \text{ Вопрос: } P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

$$\text{Но } P(S_{2n} < n) = P(S_{2n} > n).$$

$$\text{Тогда } P(S_{2n} \leq n) = \frac{1 + P(S_{2n} = n)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{Муавра-Лаплас нам говорит, что } P(S_{2n} \leq n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{Но } P(S_{2n} \leq n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Пример. Задача о театре

Есть театр и 2 входа. У каждого входа расположен гардероб. В театре $n = 1600$ мест. Хотим сделать размер гардероба как можно меньше, но чтобы переполнения случались как можно реже (не чаще, чем раз в месяц).

Пусть s мест в итоге в гардеробе.

За успех считаем ситуацию, когда человек вошел в театр и пошел в ближайший к нему гардероб (т.е. в ближайшем гардеробе было место, и человек не пошел в дальний гардероб). Пусть S_n – кол-во успешных испытаний.

Так как в каждый гардероб мы допускаем s мест, то кол-во успехов $S_n \leq s$.

$p = q = \frac{1}{2}$. Нужно, чтобы $n - c \leq S_n \leq c$. И $P(n - c \leq S_n \leq c) > \frac{29}{30}$ – т.е. хотя бы в 29 днях из 30 ближайший к каждому входу гардероб не переполняется.

$$P(n - c \leq S_n \leq c) = P\left(\frac{n-c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right) =$$

$$P\left(\frac{800-c}{20} \leq \frac{S_n-800}{20} \leq \frac{c-800}{20}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{800-c}{20}\right) - \Phi\left(\frac{c-800}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{800-c}{20}}^{\frac{c-800}{20}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{c-800}{20}\right) > \frac{29}{30}$$

$$\Phi_0\left(\frac{c-800}{20}\right) > \frac{29}{60} \implies c = 843.$$

Пример. Случайное блуждание на прямой

Есть прямая, будем считать, что у нас блуждания исключительно по целым точкам.

В каждой точке подбрасываем монетку. С вероятностью p идём вперёд, q – идём назад.

$a_{n+1} = a_n + 1$ с вероятностью p

$a_{n+1} = a_n - 1$ с вероятностью q

$a_n \equiv n \pmod{2}$

Если представить, что шаг влево – это 0, а шаг вправо – это 1, то сдвиг из точки a_n будет определяться как $2 \cdot x - 1$, где $x = 0, 1$ в зависимости от того, в какую сторону идем (т.е. $a_{n+1} = a_n + (2 \cdot x - 1)$).

Тогда пусть S_n – кол-во единичек, тогда $a_n = 2 \cdot S_n - n$.

Пусть мы всегда стартуем с $a_0 = 0$, тогда определим, чему равна вероятность попасть за n шагов в точку k ($a_n = k$):

$$P(a_n = k) = P(S_n = \frac{n+k}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv k \pmod{2} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Теорема 1.12. ван дер Вардена

Рассмотрим числа $1, 2 \dots k$ и покрасим их в 2 цвета.

Тогда существует k_n , такое, что, если $k > k_n$, то при любой раскраске найдётся одноцветная n -членная арифметическая прогрессия.

Теорема 1.13. Эрдеша-Радо

$$k_{n+1} \geq \sqrt{n \cdot 2^{n+1}}$$

Доказательство. $A_1, A_2 \dots A_m$ – все арифметические прогрессии длины $n + 1$ из чисел $1, 2 \dots k$.

С разностью 1 : $k - n$ прогрессий.

С разностью 2 : $k - 2n$ прогрессий.

...

С разностью $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$: $k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n$ прогрессий

Тогда $m = (k - n) + (k - 2n) + \dots + k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n = k \cdot \lfloor \frac{k}{n} \rfloor - n \cdot \frac{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor (\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)}{2} = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor (k - \frac{1}{2} n (\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)) < \frac{k}{n} (k - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{k}{n}) = \frac{k^2}{2n}$ – это оценка сверху.

$P(A_i \text{ - одноцветная}) = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$ (2 – выбор цвета).

$P(\text{какое-то } A_i \text{ - одноцветно}) = \sum_{i=1}^m P(A_i \text{ - одноцветно}) = \frac{m}{2^n} < \frac{k^2}{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = \left(\frac{k}{\sqrt{2^{n+1} \cdot n}}\right)^2 \leq 1$ (если так, то найдётся, на которой не выполнится) \square

2. Общая теория вероятностей

2.1. Колмогоровская модель теории вероятности

Определение 2.1. (Ω, \mathcal{F}, P) - вероятностное пространство.

Ω - множество или пространство элементарных исходов.

\mathcal{F} - σ -алгебра подмножеств Ω . Элементы \mathcal{F} - случайные события.

P - мера на \mathcal{F} с условием $P(\Omega) = 1$.

Замечание. Если Ω не более чем счётно, то можно взять $\mathcal{F} = 2^\Omega$

Определение 2.2. Условная вероятность. A - событие, такое, что $P(A) > 0$. Тогда $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, где $A, B \in \mathcal{F}$.

Определение 2.3. Независимые события A и B . Если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Определение 2.4. Независимость в совокупности $A_1, A_2 \dots A_n$. $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$ для всевозможных наборов индексов.

Определение 2.5. Последовательность событий $A_1, A_2 \dots$ независимы - любой конечный набор событий независим в совокупности.

Лемма. Бореля-Кантелли

A_1, A_2, \dots случайные события.

1. Если $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, то вероятность, что случилось бесконечное число из них равна 0.
2. Если A_1, A_2, \dots независимы и $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$, тогда $P(\text{случилось бесконечное число из } A_n) = 1$.

Доказательство. $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ - это переформулировка события из условия в терминах множеств.

$\omega \in B \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \iff \omega \in A_k$ для бесконечного количества индексов k .

Док-во этого факта:

1. \Leftarrow : Лежит в каждом объединении, значит лежит в B .
2. \Rightarrow : ω лежит в пересечении. Пусть лежит в конечном - возьмём самый большой номер и получим противоречие.

Док-во теоремы:

1. Хотим доказать, что $P(B) = 0$
 $B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow P(B) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$ - это хвост сходящегося ряда, а он стремится к нулю.
2. Давайте смотреть на $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$ - независимые события.

$$P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) \overset{\text{независимость}}{\underset{\sim}{=}} \prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - P(A_k))$$

А ещё $P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) \rightarrow P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k)$, так как множества вложены в друг друга и есть монотонность меры.

Значит $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \xLeftrightarrow{\text{логарифмируем}} \ln P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) =$
 $= \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \stackrel{\ln(1-t) \leq -t}{\leq} \sum_{k=n}^{\infty} (-P(A_k)) = -\infty$ - хвост расходящегося ряда.

А значит мы логарифмировали $0 \Rightarrow P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bar{B}) = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} P(B) = 1$

$$(*) \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = B$$

□

Теорема 2.1. Закон нуля и единицы

Если A_1, A_2, \dots независимы, то $P(B) = 0$ или $P(B) = 1$. При $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Пример. Испытания Бернулли, успех с вероятностью p ,

$P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = ?$.

A_n = случилось ОРО на позициях $n, n+1, n+2$.

Тогда A_1, A_4, A_7, \dots независимы. $P(A_j) = pqr = p^2q > 0$.

Лемма Бореля-Кантелли говорит: бесконечное кол-во A_{3k+1} случится, если $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{3k+1}) = +\infty \Rightarrow P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = 1$.

2.2. Случайные величины

Определение 2.6. (Ω, \mathcal{F}, P) - вероятностное пространство.

$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - случайная величина, если это измеримая функция.

Определение 2.7. Распределение случайной величины

P_{ξ} - вероятностная мера на борелевских подмножествах \mathbb{R}

A - борелевское мн-во, $P_{\xi}(A) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A)$

Определение 2.8. Случайные величины ξ и η одинаково распределены, если $P_{\xi} = P_{\eta}$

Замечание. P_{ξ} однозначно определяются своими значениями на ячейках.

$$P_{\xi}(a, b] = P_{\xi}(-\infty, b] - P_{\xi}(-\infty, a] = P(\xi \leq b) - P(\xi \leq a)$$

Определение 2.9. Функция распределения случайной величины

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x)$$

Свойства. 1. Функция распределения однозначно определяет распределение случайной величины.

Доказательство. Функция распределения однозначно задаёт значения на ячейках □

$$2. 0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$$

Доказательство. берём $x_n \rightarrow -\infty, A_n = \{\xi \leq x_n\}$ Тогда $A_{n+1} \subset A_n$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0$ □

4. F_ξ монотонно возрастает

5. Непрерывность справа: $\lim_{y \rightarrow x+} F_\xi(y) = F_\xi(x)$

Доказательство. берём y_n убывающие и $y_n \rightarrow x$. Тогда $A_n = \{\xi \leq y_n\}$. $A_{n+1} \subset A_n$. А тогда $\lim P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\xi \leq x) = F_\xi(x)$. Но с другой стороны $\lim P(A_n) = \lim P(\xi \leq y_n) = \lim F_\xi(y_n)$ \square

6. $\lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y) = P(\xi < x)$

Доказательство. берём y_n возрастающие и $y_n \rightarrow x$. $B_n = \{\xi \leq y_n\}$ и $B_n \subset B_{n+1}$. $\lim P(B_n) = P(\bigcup B_n) = P(\xi < x)$. Но с другой стороны $\lim P(B_n) = \lim F_\xi(y_n)$ \square

7. $F_{\xi+a}(x) = F_\xi(x-a)$

Доказательство. $\{\xi + a \leq x\} = \{\xi \leq x - a\}$ \square

8. $F_{c\xi} = F_\xi(\frac{x}{c})$

Доказательство. $\{c\xi \leq x\} = \{\xi \leq \frac{x}{c}\}$ \square

Замечание. Функция, обладающая свойствами 3, 4, 5 - это функция распределения некоторой случайной величины.

Доказательство. пусть g - такая функция. Тогда $\nu_g(a, b] = g(b) - g(a)$. $\Omega = \mathbb{R}$, \mathcal{F} - измеримо по Лебегу, случайная величина $\xi(w) = w$. Тогда $F_\xi = g$ \square

Определение 2.10. Случайная величина имеет дискретное распределение, если её множество значений не более чем счётное.

Замечание. 1. $\xi \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$

Если $x \neq y_k$, то $P(\xi = x) = 0$, т.е. $P_\xi(\{x\}) = 0$

2. $P_\xi(A) = \sum_{k: y_k \in A} P(\xi = y_k)$. Тут счётное число слагаемых, поэтому сумма корректно определена.

Распределение однозначно определяется набором вероятностей $P(\xi = y_k)$

3. $F_\xi(x) = \sum_{k: y_k \leq x} P(\xi = y_k)$

Определение 2.11. Случайная величина имеет непрерывное распределение, если $\forall x \in \mathbb{R} : P(\xi = x) = 0$

Замечание. 1. ξ - имеет непрерывное распределение $\iff F_\xi$ непрерывна во всех точках.

$P(\xi < x) = \lim_{y \rightarrow x-} P(\xi \leq y) = \lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y)$

$0 = P(\xi = x) = P(\xi \leq x) - P(\xi < x) = F_\xi(x) - \lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y) \Rightarrow F_\xi(x) = \lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y)$

2. Непрерывные распределения бывают не очень хорошими, например Канторова лестница.

Определение 2.12. Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует $p_\xi(t) \geq 0$, измеримая, т.ч. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$ ($p_\xi(t)$ - плотность распределения).

Свойства. 1. $A \subset \mathbb{R}$ - борелевское, то $P_\xi(A) = \int_A p_\xi(t) dt$

Доказательство. слева мера и справа написаны меры. На лучах они совпадают по определению, значит совпадают на ячейках, а значит и совпадают везде \square

$$P_{\xi}(a, b] = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_a^b p_{\xi}(t) dt$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(t) dt = 1$$

3. p_{ξ} определена однозначно с точностью до почти везде (из теории меры)

4. F_{ξ} почти везде дифференцируема и $F'_{\xi}(x) = p_{\xi}(x)$

Доказательство. без доказательства \square

Пример. Вероятностные распределения

1. Биномиальное распределение: $\xi \sim Binom(p, n), 0 < p < 1$

$$\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}. P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. Распределение Пуассона: $\xi \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$.

$$\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}. P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

3. Геометрическое распределение: $\xi \sim Geom(p), 0 < p < 1$.

$$\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}. P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

4. Дискретное равномерное распределение:

$$\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}. P(\xi = k) = \frac{1}{n}$$

5. Непрерывно равномерное распределение: $\xi \sim U([a, b])$

$$\xi : \Omega \rightarrow [a, b]. p_{\xi}(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$$

6. Нормальное распределение: $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. p_{\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Стандартное нормальное распределение: $\mathcal{N}(0, 1)$

7. Экспоненциальное распределение: $\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$.

$$\xi : \Omega \rightarrow [0, +\infty]. p_{\xi}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{в других точках} \end{cases}$$

Замечание. 1. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

На самом деле это функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

2. Если $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то $\xi = \sigma\nu + a$. $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$F_{\xi}(x) = P(\sigma\nu + a \leq x) = P(\nu \leq \frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Замена $t = \frac{s-a}{\sigma}$. Тогда $dt = \frac{ds}{\sigma}$

$$\text{Тогда: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(s-a)^2}{2\sigma^2}} ds$$

2.3. Совместное распределение

Определение 2.13. Совместное (многомерное) распределение.

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P_{\bar{\xi}}(A) = P(\bar{\xi} \in A), \text{ где } A - \text{борелевское подмножество } \mathbb{R}^n$$

Замечание. $P_{\bar{\xi}}$ однозначно определяет распределение P_{ξ_k} , но не наоборот

Пример. $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ с равными вероятностями.

Если это были независимые подбрасывания: $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ с равными вероятностями.

Если $\xi = \eta$, то $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (1, 1)\}$.

То есть получили 2 разных совместных распределения, при это координатное распределение только одно

Определение 2.14. Случайные величины $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ независимы, если для любых борелевских подмножеств $A_1, A_2 \dots A_n \subset \mathbb{R}$, события $\{\xi_1 \in A_1\}, \dots, \{\xi_n \in A_n\}$ независимы

Замечание. $P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P(\xi_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in A_n)$

Теорема 2.2. $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ независимы $\iff P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n}$

Доказательство. 1. $\Leftarrow P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P_{\xi_1, \dots, \xi_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{\xi_1}(A_1) \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}(A_n)$

2. \Rightarrow . Достаточно проверить совпадение на ячейках, то есть, что $P(\bar{\xi} \in (a, b]) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}(a_n, b_n]$. А это просто определение независимости.

□

Определение 2.15. Совместная (многомерная) функция распределения.

$$\bar{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_n). F_{\bar{\xi}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \text{ и } F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

Свойства. 1. $0 \leq F_{\bar{\xi}} \leq 1$

2. Монотонно возрастает по каждой координате

$$3. \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 0$$

$$\lim_{x_1, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 1$$

$$4. \lim_{x_i \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Определение 2.16. Совместная плотность $p_{\bar{\xi}}(\bar{t})$ - неотрицательная измеримая функция, такая, что $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) dt_n \dots dt_1$

Теорема 2.3. $\xi_1 \dots \xi_n$ независимы $\iff F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n), \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Доказательство. 1. Докажем \Rightarrow . Независимость $\Rightarrow (*) P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\bar{\xi}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P_{\xi_1}((-\infty, x_1]) \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}((-\infty, x_n])$

2. Хотим проверить совпадение на ячейках, чтобы доказать (*) ещё и в другую сторону (приведем выкладки для $n = 2$, для больших n рассуждения не меняются).



$$\begin{aligned} P_{\bar{\xi}}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) &= F_{\bar{\xi}}(b_1, b_2) + F_{\bar{\xi}}(a_1, a_2) - F_{\bar{\xi}}(a_1, b_2) - F_{\bar{\xi}}(a_2, b_1) = \\ &= (F_{\xi_1}(b_1) - F_{\xi_1}(a_1)) \cdot (F_{\xi_2}(b_2) - F_{\xi_2}(a_2)) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot P_{\xi_2}(a_2, b_2] \end{aligned}$$

□

Следствие. $\xi_1 \dots \xi_n$ - абсолютно непрерывные случайные величины. Тогда $\xi_1 \dots \xi_n$ независимы $\iff p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = p_{\xi_1}(t_1) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(t_n)$

В частности, в случае независимости $\bar{\xi}$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. 1. Докажем \Rightarrow .

$$\text{Независимость} \Rightarrow F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1) dt_1 \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_n}(t_n) dt_n = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n) dt_n \dots dt_1.$$

Запишали всё под один интеграл, то что под интегралом и есть совместная плотность.

2. Докажем \Leftarrow .

Просто проинтегрируем равенство.

$$\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) dt_n \dots dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n) dt_n \dots dt_1 = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

по т. Тонелли можно выносить интегралы

т. Тонелли можно использовать, так как мы интегрируем неотрицательную функцию.

□

Замечание. Напоминание.

Свертка последовательностей: $\{a_n\}, \{b_n\}$ это $\{c_n\}$, такая что $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

Мотивировка: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ (при наличии хоть каких-нибудь кругов сходимости у обоих рядов).

Замечание. Свертки мер

μ и ν - конечные меры на борелевских подмножествах \mathbb{R} .

$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x)$ - это свертка мер, где $(A - x) := \{a - x \mid a \in A\}$.

Свойства. Свойства свёртки

$$1. \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(x) d\nu(y)$$

$$\text{Доказательство. } \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) \stackrel{\mu(A-x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x} d\mu(y)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x}(y) d\mu(y) d\nu(x) \quad \square$$

$$2. \mu * \nu = \nu * \mu$$

$$3. \mu_1 * \dots * \mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1 + \dots + x_n) d\mu_1(x_1) \dots d\mu_n(x_n)$$

$$4. (\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$$

$$5. (\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$$

6. δ_x - мера с единичной нагрузкой в точке x . Тогда $\mu * \delta_0 = \mu$.

Получили линейное пространство относительно $+$ и $*$

$$\text{Доказательство. } \mu * \delta_0(A) = \delta_0 * \mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(A - x) d\mu(x) \stackrel{\delta_0=1 \Leftrightarrow 0 \in A-x \Leftrightarrow x \in A}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\mu(x) = \mu A \quad \square$$

Теорема 2.4. Пусть μ и ν имеют плотности p_μ и p_ν

Тогда $\mu * \nu$ имеет плотность $p(t) = \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds$

Доказательство. Возьмём функцию, определяемую этой формулой и проверим, что это плотность.

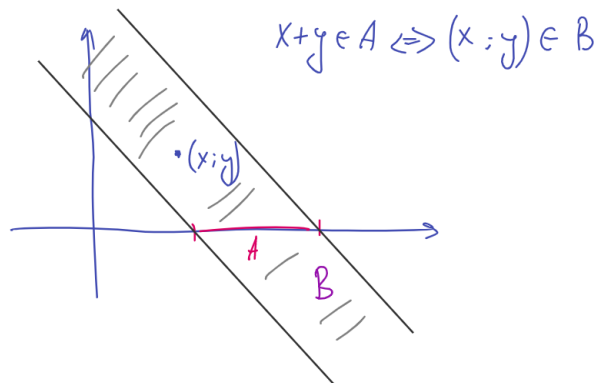
То есть проверим, что $\int_A p(x) dx = \mu * \nu(A)$.

$$\int_A p(t) dt = \int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds dt = (*).$$

Положим $u = t - s$. Тогда $(*) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s) p_\mu(u) p_\nu(s) ds du = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s) d\nu(s) d\mu(u) = \mu * \nu(A) \quad \square$

Теорема 2.5. Если ξ и η независимые случайные величины, то $P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

Доказательство. Нужно взять какое-то борелевское множество и понять как устроено там распределение суммы.



Пусть $B = \{(x, y) : x + y \in A\}$

$$P_{\xi+\eta}(A) = P(\xi + \eta \in A) = P((\xi, \eta) \in B) = P_{\xi, \eta}(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_{\xi, \eta}(x, y) =$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_\xi(x) dP_\eta(y)}_{\text{т.к. } \xi \text{ и } \eta \text{ независимые}} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) dP_\xi(x) dP_\eta(y) = P_\xi * P_\eta(A) \quad \square$$

т.к. ξ и η независимые

Пример. 1. Свертка с дискретным распределением

$$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}.$$

$$\delta_{x_k}(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

Тогда $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A - x_k) p_k$

2. $\xi_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$. ξ_1 и ξ_2 независимы.

$$P_{\xi_1 + \xi_2}(\{n\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{\xi_1}(\{n - k\}) \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^{n-k} e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^{n-k} \lambda_2^k}{k!(n-k)!} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{n!}$$

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

2.4. Математическое ожидание и дисперсия

Определение 2.17. $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - случайная величина ($\xi \geq 0$, либо суммируемая функция). $\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi(\omega) dP(\omega)$ - математическое ожидание (среднее значение случайной величины).

Свойства. 1. $a, b \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$

2. Если $\xi \geq 0$, с вероятностью 1, то $\mathbb{E}\xi \geq 0$ (по сути написано, что если функция почти везде неотрицательна, то интеграл неотрицателен).

3. Если $\xi \geq \eta$ с вероятностью 1, то $\mathbb{E}\xi \geq \mathbb{E}\eta$

$$4. \mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_{\xi}(x)$$

5. Если $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - измерима относительно борелевской σ -алгебры.

$$\text{Тогда } \mathbb{E}f(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dP_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$$

Доказательство: $f = \mathbf{1}_A$. Тогда $\mathbb{E}\mathbf{1}_A(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) dP(\omega) = P(\omega \in \Omega : \bar{\xi} \in A) = P_{\bar{\xi}}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n) dP_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n)$.

Тогда по линейности верно для простых.

Теперь берём f_j неотрицательные простые, такие, что возрастают и $\rightarrow f$. И предельный переход по теореме Леви.

6. Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$

$$\text{Доказательство: } \mathbb{E}(\xi\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{\xi, \eta}(x, y) =$$

$$\stackrel{\text{независимость сл. вел.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}} y \int_{\mathbb{R}} x dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$$

7. Если $\xi \geq 0$, то $\mathbb{E}\xi = \int_0^{+\infty} P(\xi \geq t) dt$ - из теории меры.

8. Если $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\mathbb{E}|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}$ - неравенство Гёльдера

9. Неравенство Ляпунова

$$0 < r < s, \text{ тогда } (\mathbb{E}|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{1}{s}}.$$

$$\text{Доказательство: } p = \frac{s}{r} > 1, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{s-r}{s} < 1.$$

Тогда запишем Гёльдера для ξ и $\eta = 1$:

$$\mathbb{E}|\xi|^r |1| \leq (\mathbb{E}(|\xi|^r)^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}1^q)^{\frac{1}{q}} = (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{r}{s}}.$$

Замечание. $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$ без независимости неверно.

Возьмём $\xi = \pm 1$ с вероятностями $\frac{1}{2}$. Тогда $\mathbb{E}\xi = 0$.

Также пусть $\eta = \xi$. Тогда $\xi\eta = \xi^2 = 1 \neq (\mathbb{E}\xi)^2$

Теорема 2.6. Неравенство Маркова

Если $\xi \geq 0, p, t > 0$, то $P(\xi \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}\xi^p}{t^p}$.

Доказательство. Неравенство Чебышёва из теории меры. □

Определение 2.18. 1. Моменты случайной величины. $\mathbb{E}(\xi^k)$ - k -ый момент.

2. Центральные моменты. $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$ - k -ый центральный момент.

3. Абсолютный момент. $\mathbb{E}|\xi|^k$ - k -ый абсолютный момент.

Определение 2.19. Медиана случайной величины. m - медиана ξ , если $P(\xi \geq m) \geq \frac{1}{2}$ и $P(\xi \leq m) \geq \frac{1}{2}$.

Замечание. Медиана не единственна.

Возьмём кубик. $\xi = 1, 2, \dots, 6$ с вероятностью $\frac{1}{6}$. Тогда любое число $m \in [3, 4]$ подходит.

Чаще всего всё равно берут середину, чтобы была единственность.

Пример. Есть организация из 1000 человек. 1 начальник и 999 подчиненных.

Зарплата начальника 1.000.000\$, а подчинённых 1000\$.

$$\mathbb{E} = \frac{999}{1000} \cdot 1000 + \frac{1}{1000} \cdot 1000000 = 1999$$

$m = 1000$ - медиана лучше характеризует ситуацию в этом случае.

Определение 2.20. Дисперсия. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ - второй центральный момент.

Обозначение в англоязычной литературе: $Var\xi$

Свойства. 1. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

Доказательство: Пусть $a = \mathbb{E}\xi$.

$$\text{Тогда } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - a)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - 2a\mathbb{E}\xi + a^2$$

2. $\mathbb{D}\xi \geq 0$ и если $\mathbb{D}\xi = 0$, то $P(\xi = c) = 1$

Доказательство: Если $\mathbb{D}\xi = 0$, то $\int_{\Omega} (\xi - a)^2 dP = 0$, значит $(\xi - a)^2 = 0$ почти везде.

3. $\mathbb{D}(\xi + a) = \mathbb{D}\xi$

Доказательство: $\mathbb{E}(\xi + a) = \mathbb{E}\xi + a$. А тогда $(\xi + a) - \mathbb{E}(\xi + a) = \xi - \mathbb{E}\xi$

4. $\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi$

Доказательство: $\mathbb{D}(c\xi) = \mathbb{E}(c\xi)^2 - (\mathbb{E}(c\xi))^2$

5. Если ξ и η независимы, то $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

Доказательство: $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}(\xi\eta) + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - (\mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

6. Аналогично предыдущему, но для n случайных величин.

Доказательство: индукция

7. $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

Доказательство: $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq (\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$ - написали Ляпунова.

8. Неравенство Чебышёва

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}, \text{ где } t > 0$$

Доказательство: $P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2}{t^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}$ - неравенство Маркова для $p = 2$.

Определение 2.21. Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

Пример. 1. $\xi \sim U[0, 1]$.

$$\text{Тогда } \mathbb{E}\xi = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ А тогда } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{1}{12}$$

2. $\xi \sim U[a, b]$.

Если $\eta \sim U[0, 1]$ и $\xi = (b - a)\eta + a \sim U[a, b]$. Тогда $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}((b - a)\eta + a) = \frac{a+b}{2}$

$$\mathbb{D}((b - a)\eta + a) = \mathbb{D}((b - a)\eta) = (b - a)^2 \mathbb{D}\eta = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3. $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0, \text{ так как функция нечётная.}$$

$$\text{Значит } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

4. $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Если $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то $\xi = \sigma\eta + a \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sigma\eta + a) = \sigma\mathbb{E}\eta + a = a$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(\sigma\eta + a) = \sigma^2 \mathbb{D}\eta = \sigma^2$$

Определение 2.22. Пусть $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$ и $\mathbb{E}\eta^2 < +\infty$.

Ковариация $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))$

Свойства. 1. $cov(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$

2. $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$

3. $cov(c\xi, \eta) = c \cdot cov(\xi, \eta)$

4. $cov(\xi_1 + \xi_2, \eta) = cov(\xi_1, \eta) + cov(\xi_2, \eta)$

5. $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

Доказательство. $\mathbb{E}\xi = a, \mathbb{E}\eta = b$

$$cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - a)(\eta - b)) = \mathbb{E}(\xi\eta) - a\mathbb{E}\eta - b\mathbb{E}\xi + ab$$

□

6. Если ξ и η независимы, то $cov(\xi, \eta) = 0$

7. $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2cov(\xi, \eta)$

$$8. \mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 + \dots + \mathbb{D}\xi_n + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Пример. $P(\text{успех}) = p$. Делаем n подбрасываний. η = количество переходов от орла к решке.

Пусть $\xi_i = 1$, если на i позиции орёл, на $i + 1$ позиции решка, иначе $\xi_i = 0$.

$$\eta = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}. \text{ Тогда } \mathbb{E}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\xi_i = (n-1)pq.$$

$$\mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Если $i + 1 < j$, то ξ_i и ξ_j независимы, поэтому в сумме почти везде нули.

$$\text{Значит } \mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{cov}(\xi_i, \xi_{i+1}).$$

$$\mathbb{D}\xi_i = \mathbb{E}\xi_i^2 - (\mathbb{E}\xi_i)^2 = pq - p^2q^2.$$

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_{i+1}) = \mathbb{E}(\xi_i \xi_{i+1}) - \mathbb{E}\xi_i \mathbb{E}\xi_{i+1} = -p^2q^2$$

Замечание. 1. $\{\xi : \mathbb{E}\xi^2 < +\infty\}$

$\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}(\xi\eta)$ - скалярное произведение.

$\mathbb{E}\xi$ - ортогональная проекция на константы.

2. $\langle \xi, \eta \rangle = \text{cov}(\xi, \eta)$ - тоже скалярное произведение.

Норма - это стандартное отклонение.

Теорема 2.7. Выбор двудольного подграфа

Есть граф G с n вершинами и m рёбрами. Хотим стереть некоторое количество рёбер (как можно меньше) так, чтобы остался двудольный подграф.

Тогда G содержит двудольный подграф с $\geq \frac{m}{2}$ рёбрами.

Доказательство. A - те вершины, на которых выпал орёл, B - на которых выпала решка.

Будем интересоваться матожиданием количества рёбер в такой ситуации. Пусть $xy \in E(G)$, сопоставим ребру следующую случайную величину:

$$\xi_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{если } x, y \text{ из разных долей} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть $\eta = \sum_{xy \in E} \xi_{xy}$ - число рёбер, которое нужно оставить, при таком разбиении на доли.

$\mathbb{E}\eta = \sum_{xy \in E} \mathbb{E}\xi_{xy} = m \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0) = \frac{m}{2}$, а значит есть реализация с $\frac{m}{2}$ рёбрами (если бы все значения кол-ва ребер были меньше $\frac{m}{2}$, то и мат. ожидание было бы меньше $\frac{m}{2}$). \square

Определение 2.23. Коэффициент корреляции. $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi} \sqrt{\mathbb{D}\eta}} \in [-1, 1]$

Определение 2.24. Если $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, то это некоррелирующие случайные величины.

Теорема 2.8. $v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ - векторы единичной длины, тогда существует расстановка знаков $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, такая, что $\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$.

Замечание. Эта оценка не улучшаема, если все вектора попарно ортогональны, тогда длина вектора \sqrt{n} .

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ - независимые случайные величины, такие, что:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Введем величину $\xi = \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\|^2$.

$$\text{Тогда } \mathbb{E}\xi = \mathbb{E} \langle v, v \rangle = \mathbb{E}(\sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle v_i, v_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \mathbb{E}\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle = n.$$

1. Если $i = j$, то $\mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j = \mathbb{E}\varepsilon_i^2 = 1$
2. Если $i \neq j$, то $\mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j \stackrel{\text{независимость}}{=} \mathbb{E}\varepsilon_i \cdot \mathbb{E}\varepsilon_j = 0$

□

Теорема 2.9. $v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$, $\|v_i\| \leq 1, p_i \in [0, 1]$ и $w = p_1v_1 + \dots + p_nv_n$

Тогда существует $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$, такие, что $v = \varepsilon_1v_1 + \dots + \varepsilon_nv_n$ и $\|v - w\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ - независимые случайные величины.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p_i \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - p_i \end{cases}$$

Интересуемся $\xi = \|v - w\|^2$. Тогда $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sum_{i,j=1}^n (\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j) \langle v_i, v_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \mathbb{E}(\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j) \stackrel{\text{пояснение ниже}}{=} \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle (p_i - p_i^2) \leq \frac{n}{4}$.

1. Если $i = j$, то $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathbb{D}\varepsilon_i = p_i - p_i^2 \leq \frac{1}{4}$
2. Если $i \neq j$, то $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \stackrel{\text{независимы}}{=} 0$

□

Теорема 2.10. Харди-Рамануджана

Пусть $\nu(k)$ - число различных простых делителей в разложении k .

Хотим понять, чему будет равно это число, если мы наугад возьмем число из мн-ва $\{1, 2, \dots, n\}$.

$P(|\nu(k) - \ln \ln n| \geq w(n)\sqrt{\ln \ln n}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, где $w(n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty$ и $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Пусть $m = \sqrt[10]{n}$. $p \leq m$ - простое и

$$\xi_p(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ делится на } p \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\xi = \sum_{p \leq m} \xi_p$ - количество различных простых $\leq m$. Тогда $\nu(k) - 10 \leq \xi(k) \leq \nu(k)$.

Посчитаем матожидание ξ , тогда посчитаем мат. ожидание слагаемых:

$$\mathbb{E}\xi_p = \frac{[\frac{n}{p}]}{n} \leq \frac{\frac{n}{p}}{n} = \frac{1}{p}. \text{ С другой стороны, } \mathbb{E}\xi_p \geq \frac{\frac{n}{p}-1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Знаем, что $\mathbb{E}\xi = \sum_{p \leq m} \mathbb{E}\xi_p$, тогда

$\sum_{p \leq m} \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \leq \sum_{p \leq m} \mathbb{E}\xi_p \leq \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} = \ln \ln m + \mathcal{O}(1) = \ln \ln n + \mathcal{O}(1)$. Оценка в другую сторону аналогично, потому что $\frac{m}{n} \leq 1$.

Теперь считаем дисперсию для ξ_p :

$$\mathbb{D}\xi_p = \mathbb{E}\xi_p^2 - (\mathbb{E}\xi_p)^2 = \mathbb{E}\xi_p - (\mathbb{E}\xi_p)^2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

Теперь оценим ковариацию:

$$\text{cov}(\xi_p, \xi_q) = \underbrace{\mathbb{E}(\xi_p \xi_q)}_{\text{аргумент равен 1, когда } n : pq} - \mathbb{E}\xi_p \mathbb{E}\xi_q = \frac{[\frac{n}{pq}]}{n} - \frac{[\frac{n}{p}]}{n} \cdot \frac{[\frac{n}{q}]}{n} = (*).$$

Оценим (*) с двух сторон:

$$1. (*) \geq \frac{\frac{n}{pq}-1}{n} - \frac{\frac{n}{p}}{n} \cdot \frac{\frac{n}{q}}{n} = -\frac{1}{n}$$

$$2. (*) \leq \frac{\frac{n}{pq}}{n} - \frac{\frac{n-1}{p}}{n} \cdot \frac{\frac{n-1}{q}}{n} \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

Теперь смотрим на сумму ковариаций (так как она фигурирует как слагаемое для $\mathbb{D}\xi$):

$$\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{p < q \leq m} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{= \frac{1}{2n} \sum_{p \neq q, p, q \leq m} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \leq \frac{1}{2n} 2m \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} = \mathcal{O}(1)} \geq \sum_{p < q \leq m} \text{cov}(\xi_p, \xi_q) \geq -\frac{m^2}{n} = \mathcal{O}(1)$$

Теперь оцениваем дисперсию для ξ :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\xi &= \sum_{p \leq m} \mathbb{D}\xi_p + 2 \underbrace{\sum_{p < q \leq m} \text{cov}(\xi_p, \xi_q)}_{=\mathcal{O}(1)} = \sum_{p \leq m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \mathcal{O}(1) = \\ &= \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} + \mathcal{O}(1) = \ln \ln m + \mathcal{O}(1) = \ln \ln n + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Теперь применим Чебышёва.

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}. \text{ В качестве } t \text{ подставим } w(n)\sqrt{\ln \ln n}.$$

$$\text{Тогда } P(|\nu(k) - \ln \ln n| \geq w(n)\sqrt{\ln \ln n}) \underbrace{\leq}_{(**)} P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq w(n)\sqrt{\ln \ln n}) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{w^2(n) \ln \ln n} \rightarrow 0.$$

(**): такое нер-во можно писать, так как $|\nu(k) - \xi(k)| \leq 10$ и $\mathbb{E}\xi = \ln \ln n + \mathcal{O}(1)$.

□

Теорема 2.11. Эрдёша-Каца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \leq n: a \leq \frac{|\nu(k) - \ln \ln n|}{\sqrt{\ln \ln n}} \leq b\}}{n} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

2.5. Сходимость последовательностей случайных величин

Теорема 2.12. ξ_1, ξ_2, \dots - независимые случайные величины, $f_i: \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$ - измерима, относительно борелевской σ -алгебры.

Тогда $f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2})$ - независимые случайные величины.

Доказательство. $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi_1 \dots \xi_m$ и $\eta_1 \dots \eta_n$ независимые случайные величины.

Возьмём \tilde{A} и $\tilde{B} \in \mathbb{R}$ борелевские.

Надо доказать, что

$$\begin{aligned} P(f(\xi_1 \dots \xi_m) \in \tilde{A}) \cdot P(g(\eta_1 \dots \eta_n) \in \tilde{B}) &= P(f(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \tilde{A}, g(\eta_1 \dots \eta_n) \in \tilde{B}). \\ P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in \underbrace{f^{-1}(\tilde{A})}_{=:A}) \cdot P((\eta_1, \dots, \eta_n) \in \underbrace{g^{-1}(\tilde{B})}_{=:B}) &= P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in A, (\eta_1, \dots, \eta_n) \in B) \end{aligned}$$

Поймём это для ячеек.

$$A = (a, b] : (\xi_1, \dots, \xi_m) \in (a, b] \Leftrightarrow \forall k : \xi_k \in (a_k, b_k]$$

$$B = (c, d] : (\eta_1, \dots, \eta_n) \in (c, d] \Leftrightarrow \forall k : \eta_k \in (c_k, d_k]$$

Мы знаем, что

$$P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in A, (\eta_1, \dots, \eta_n) \in B) = P(\forall k : \xi_k \in (a_k, b_k], \forall k : \eta_k \in (c_k, d_k]) = \prod_{k=1}^m P(\xi_k \in (a_k, b_k]) \cdot \prod_{k=1}^n P(\eta_k \in (c_k, d_k])$$

$$\text{Но } \prod_{k=1}^m P(\xi_k \in (a_k, b_k]) = P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in A), \text{ а } \prod_{k=1}^n P(\eta_k \in (c_k, d_k]) = P((\eta_1, \dots, \eta_n) \in B).$$

То есть доказали на ячейках, а значит и доказали теорему.

□

Определение 2.25. $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

1. ξ_n сходится к ξ почти наверное, если $P(w \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(w) = \xi(w)) = 1$
2. ξ_n сходится к ξ в среднем порядка $r > 0$, если $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^r) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$
3. ξ_n сходится к ξ по вероятности, если $\forall \varepsilon > 0, P(\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$
4. $\xi_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$.
 ξ_n сходится к ξ по распределению, если $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ во всех точках непрерывности F_ξ .

Связь между сходимостями:

1. $1 \Rightarrow 3$: теорема Лебега из теории меры

2. $2 \Rightarrow 3$:

Пишем нер-во Маркова

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \rightarrow 0.$$

3. $2 \not\Rightarrow 1$:

$\Omega := [0, 1)$, $P := \lambda$ (мера Лебега).

Возьмем такую последовательность функций, для которой нет такого следствия:

$$\mathbb{1}_{[0,1)}, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)}, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{3})}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})}, \mathbb{1}_{[\frac{2}{3}, 1)}, \dots$$

Тогда $\mathbb{E}|\xi_n|^r = \mathbb{E} \mathbb{1}_{[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m})} = \frac{1}{m} \rightarrow 0$, то сх-ть в среднем есть.

Сх-ти почти наверное нет, потому что ни в одной точке нет сх-ти, так как у $\xi_n(\omega)$ сколько угодно далеко есть как значения 1, так и значения 0.

Иными словами $\lim \xi_n(\omega)$ не существует.

4. $3 \not\Rightarrow 1$:

верно, так как $2 \Rightarrow 3$, но $2 \not\Rightarrow 1$.

5. $1 \not\Rightarrow 2$:

$\Omega := [0, 1]$, $P := \lambda$ (мера Лебега).

$$\xi_n(\omega) = n^{\frac{1}{r}} \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n})}.$$

Тогда $\xi_n(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \neq 0$, тогда ξ_n сх-ся к $\xi \equiv 0$ почти наверное.

$$\mathbb{E}|\xi_n|^r = \mathbb{E} \left(n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n})} \right) = 1 \not\rightarrow 0$$

6. $3 \not\Rightarrow 2$:

верно, так как $1 \not\Rightarrow 2$.

7. $3 \Rightarrow 4$:

Хотим понять, что $P(\xi_1 \leq x) \rightarrow P(\xi \leq x)$ если x – точка непрерывности F_ξ .

$$\{\xi_n \leq x\} \subset \{\xi \leq x + \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}$$

$$P(\xi_n \leq x) \subset P(\xi \leq x + \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$$

Напишем верхние пределы для этого нер-ва:

$$\overline{\lim} P(\xi_n \leq x) \leq \underbrace{P(\xi \leq x + \varepsilon)}_{\text{это просто const}} + \underbrace{\overline{\lim} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)}_{\rightarrow 0, \text{ т.к. сх-ть по вероятности}}$$

Теперь надо подпереть чем-то снизу:

$$\{\xi_n \leq x\} \supset \{\xi \leq x - \varepsilon\} \setminus \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}$$

$$P(\xi_n \leq x) \geq P(\xi \leq x - \varepsilon) - P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$$

Теперь пишем нижние пределы:

$$\underline{\lim} P(\xi_n \leq x) \geq \underbrace{P(\xi \leq x - \varepsilon)}_{=const} - \underbrace{P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)}_{\rightarrow 0}$$

Тогда получаем, что

$$F_\xi(x - \varepsilon) \leq \underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq \overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x + \varepsilon)$$

Теперь устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда

$$F_\xi(x) \leq \underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq \overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x)$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ – доказали стрелочку.

8. $4 \not\Rightarrow 3, 2, 1$:

из-за разных определений (где-то одно вероятностное пр-во, а где-то их может быть много разных)

Теорема 2.13. Закон больших чисел

ξ_1, ξ_2, \dots – попарно некоррелируемые случайные величины и $\mathbb{D}\xi_n = o(n)$.

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Тогда $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$. То есть вероятность того, что $P(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E} \frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

Следствие. Если $\mathbb{D}\xi_n$ ограничены, то такой же вывод.

Доказательство. $P(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E} \frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D} \frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D} S_n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{D} \xi_k}{\varepsilon^2 n^2} \xrightarrow{\text{ШТОЛЬЦ}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D} \xi_n}{\varepsilon^2 (2n-1)} = 0. \quad \square$

Следствие. ЗБЧ в форме Чебышёва

ξ_1, ξ_2, \dots независимые, одинаково распределённые случайные величины с конечной дисперсией и $a = \mathbb{E} \xi_1$.

Тогда $P(|\frac{S_n}{n} - a| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ или же $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$

Доказательство. Мат. ожидание всех случайных величин равно, они одинаково распределены. Поэтому $\mathbb{E} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = a$. Поэтому все условия предыдущей теоремы выполнены \square

Следствие. ЗБЧ для схем Бернулли

Есть схема Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$.

Тогда $P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$, где S_n число успехов при n подбрасываниях.

Теорема 2.14. Усиленный ЗБЧ

ξ_1, ξ_2, \dots - независимые случайные величины. $\mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)^4 \leq C$.

Тогда $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$ почти наверное.

Доказательство. $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k))$. Задвинем все матожидания в ноль.

Тогда по условию $\mathbb{E}\xi_n^4 \leq C$ и надо доказать, что $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$ почти наверное.

Пусть $A_n = \{|\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon\}$. Нам нужно понять, что бесконечное количество A_n случаются с нулевой вероятностью, то есть что $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$.

Из леммы Бореля-Кантелли, если $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$, то нужное нам условие выполнено.

Напишем неравенство Маркова: $P(A_n) = P\left(\frac{S_n^4}{n^4} \geq \varepsilon^4\right) \leq \frac{\mathbb{E}S_n^4}{\varepsilon^4} = \frac{\mathbb{E}S_n^4}{n^4\varepsilon^4}$. Достаточно доказать, что $\mathbb{E}S_n^4 = \mathcal{O}(n^2)$, тогда ряд сойдётся. Раскроем все скобки.

$$\mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n)^4 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^4 + 4 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}\xi_i^3 \xi_j + 6 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j^2 + 12 \sum_{i \neq j \neq k} \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j \xi_k + 24 \sum \dots \mathbb{E}\xi_i \xi_j \xi_k \xi_m$$

$$1. \mathbb{E}\xi_i \xi_j \xi_k \xi_m = 0$$

$$2. \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j \xi_k = 0$$

Итого получаем $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^4 + 6 \sum \mathbb{E}\xi_i^2 \mathbb{E}\xi_j^2 = (*)$. По неравенству Ляпунова $\mathbb{E}\xi_i^2 \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi_i^4} \leq \sqrt{C}$.

Значит $(*) = nC + 6n(n-1)\sqrt{C}\sqrt{C} \leq 6Cn^2 = \mathcal{O}(n^2)$, значит ряд сходится и лемма Бореля-Кантелли выполняется. \square

Следствие. Усиленный ЗБЧ для схем Бернулли

В схеме Бернулли с вероятностью успеха $p : \frac{S_n}{n} \rightarrow p$ почти наверное.

Доказательство. Нужно проверить, что $\mathbb{E}(\xi_i - p)^4$ - конечно, раскроем скобки, получим какие-то константы и ξ_i^4 . \square

Теорема 2.15. Усиленный ЗБС в форме Колмогорова

ξ_1, ξ_2, \dots - независимо, одинаково распределённые случайные величины.

Тогда $\frac{S_n}{n} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ почти наверное $\Leftrightarrow a = \mathbb{E}\xi_1$

Метод Монте-Карло

Φ - ограниченная фигура на плоскости. Хотим примерно узнать её площадь.

Берём случайную точку в прямоугольнике и выясняем, попала она в фигуру или нет.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{точка попала в } \Phi \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вероятность успеха $\frac{Area(\Phi)}{Area(\text{прямоугольника})}$. Тогда усиленный ЗБЧ говорит, что $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$ почти наверное.

Теорема 2.16. ξ_1, ξ_2, \dots последовательность случайных величин, $\xi_n \rightarrow_P a \in \mathbb{R}$. f ограниченная функция, непрерывная в точке a .

Тогда $\mathbb{E}f(\xi_n) \rightarrow f(a)$

Доказательство. $|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| = |\mathbb{E}(f(\xi_n) - f(a))| \leq \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| = \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| \cdot \mathbb{1}_{\{|\xi_n - a| < \varepsilon\}} + \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| \cdot \mathbb{1}_{\{|\xi_n - a| \geq \varepsilon\}} = (*)$.

Пусть f ограничена константой M .

$$\mathbb{E}|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geq \varepsilon\}} \leq 2M\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geq \varepsilon\}}$$

$$|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a < \varepsilon\}} \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)|$$

$$\text{Тогда } (*) \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2MP(|\xi_n - a| \geq \varepsilon).$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2M\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(|\xi_n - a| \geq \varepsilon) \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$\text{Тогда } 0 \leq \underline{\lim} \leq \overline{\lim} \leq 0 \Rightarrow \lim |\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| = 0 \quad \square$$

Замечание. В условии теоремы $|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2MP(|\xi_n - a| \geq \varepsilon)$

Теорема 2.17. Вейерштрасса

$f \in C[a, b]$, то существует последовательность многочленов P_n , такая, что $P_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$

Доказательство. Можно считать, что всё на $[0, 1]$. Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$. Подставим $\xi_n = \frac{S_n}{n}$ в замечание.

$$|\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) - f(p)| \leq \sup_{|x-p| < \varepsilon} |f(x) - f(p)| + 2MP(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) = (*)$$

$$\text{Из неравенства Чебышёва } P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

И тогда $(*) \leq \sup_{|x-p| < \varepsilon} |f(x) - f(p)| + \frac{M}{2n\varepsilon^2}$. При $n = \frac{1}{\varepsilon^3}$ правое слагаемое оценивается ε' , а первое слагаемое мало из равномерной непрерывности.

Значит $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) - f(p) \Rightarrow 0$. $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ - многочлен Бернштейна. \square

Определение 2.26. Многочлен Бернштейна $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Следствие. 1. $B_n(0) = f(0)$

$$2. B_n(1) = f(1)$$

$$3. B'_n(0) = n(f(\frac{1}{n}) - f(0))$$

$$B'_n(1) = n(f(1) - f(\frac{n-1}{n}))$$

$$\text{Доказательство: } B'_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} (kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}) = \\ = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k-nx)$$

$$4. B'_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k-nx)$$

$$5. B_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha B_n(f, x) + \beta B_n(g, x)$$

Кривые Безье

$\sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$, $a_k \in \mathbb{R}^2$. Получается отображение $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

1. $n = 1$: $a(1-t) + bt$ - отрезок соединяющий точки a и b .

2. $n = 2$: $a(1-t)^2 + 2bt(1-t) + ct^2$. Мы знаем, что $B'(0) = 2(b-a)$ и $B'(1) = 2(c-b)$. Это кривая из точки a в c , параметр b задаёт касательную в a и c .

3. $n = 3$: $a(1-t)^3 + 3bt(1-t)^2 + 3ct^2(1-t) + dt^3$.

Здесь $B(0) = a, B(1) = d, B'(0) = 3(b-a), B'(1) = 3(d-c)$. Кривая выходит из точки a с касательной $3(b-a)$, а заходит в точку d с касательной $3(d-c)$.

2.6. Производящие функции

Определение 2.27. $\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ - случайная величина.

$G_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n)z^n$ - производящая функция

Свойства. 1. G_ξ однозначно определяет распределение

2. $G_\xi(1) = 1$ и G_ξ сходится в круге $|z| < 1$.

3. $G_\xi(x) = \mathbb{E}x^\xi$, где $x \in \mathbb{R}$

Доказательство: $\mathbb{E}x^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot P(\xi = n) = G_\xi(x)$

4. $G'_\xi(1) = \mathbb{E}\xi$

Доказательство: $G'_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi = n)nx^{n-1}$ - если подставить единицу - получим матожидание.

5. $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1)$

Доказательство: $G''_\xi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} P(\xi = n)n(n-1)x^{n-2}$ - если подставить единицу - получим матожидание.

6. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2$

7. G_ξ возрастает и выпукла на $[0, 1]$

8. Если ξ и η независимы, то $G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z)$

Доказательство: x^ξ и x^η независимы, а тогда $\mathbb{E}(x^\xi \cdot x^\eta) = \mathbb{E}x^\xi \cdot \mathbb{E}x^\eta$

Пример. 1. Равномерное распределение на $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Тогда $G_\xi(z) = \frac{1}{n}(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = \frac{1-z^n}{1-z} \cdot \frac{1}{n}$. Пусть хотим посчитать матожидание и дисперсию, но единицу то подставить нельзя в свернутую формулу. Решается эта проблема так:

Давайте скажем, что $z = 1 + y$. Тогда $G_\xi(1 + y) = \frac{(1+y)^n - 1}{ny} = 1 + \binom{n}{2}\frac{y}{n} + \binom{n}{3}\frac{y^2}{n} \dots$

Тогда $G'_\xi(1) = \frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$, $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) = 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{6n} + \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2} \left(\frac{2n-4}{3} + 1 \right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$.

И тогда $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{6} = \frac{n^2-1}{12}$

2. Задача Галилея

Есть 3 правильных кубика, бросили и посчитали сумму значений. Интересуемся вероятностью того, что в сумме выпало 10.

$P(\text{в сумме } 10) = ?$

ξ_i - значение на i -том кубике. Тогда $G_{\xi_i}(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + \dots + z^6) = \frac{z(1-z^6)}{1-z} \cdot \frac{1}{6}$. Кубика у нас три, поэтому нас интересует $G_{\xi_1+\xi_2+\xi_3} = G_{\xi_1} \cdot G_{\xi_2} \cdot G_{\xi_3} = \left(\frac{z(1-z^6)}{1-z} \cdot \frac{1}{6} \right)^3 = (*)$

$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} z^n$. Тогда $(*) = \frac{1}{6^3}(z^3 - 3z^9 + 3z^{15} - z^{21}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} z^n$. Коэффициент при z^{10} будет такой $\frac{1}{6^3}(1 \cdot \binom{9}{7} - 3 \cdot \binom{3}{1}) = \frac{1}{6^3}(36 - 3^2) = \frac{1}{8}$

3. Метод характеристических функций

3.1. Характеристические функции случайных величин

Определение 3.1. Комплекснозначная случайная величина $\xi = \operatorname{Re} \xi + i \operatorname{Im} \xi$, где $\operatorname{Re} \xi$ и $\operatorname{Im} \xi$ вещественнозначные случайные величины.

Определение 3.2. $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathbb{E} \xi = \mathbb{E} \operatorname{Re} \xi + i \mathbb{E} \operatorname{Im} \xi$$

Свойства. 1. $\mathbb{E}(i\xi) = i\mathbb{E}\xi$

2. Комплексная линейность $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

Доказательство: $\mathbb{E}(\alpha\xi) = \mathbb{E}(a + ib)\xi = \mathbb{E}(a\xi) + \mathbb{E}(b\xi i) = (a + bi)\mathbb{E}\xi$

3. $\overline{\mathbb{E}\xi} = \mathbb{E}\bar{\xi}$

4. $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$

Доказательство: Возьмём $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$, такой, что $\mathbb{E}(c\xi) = |\mathbb{E}\xi|$, то есть $c = \frac{|\mathbb{E}\xi|}{\mathbb{E}\xi}$ (или $c = e^{-i \cdot \arg \mathbb{E}\xi}$).

Тогда $|\mathbb{E}\xi| = \mathbb{E}(c\xi) = \mathbb{E}(\operatorname{Re}(c\xi)) \leq \mathbb{E}|\operatorname{Re}(c\xi)| \leq \mathbb{E}|c\xi| = \mathbb{E}|\xi|$

Определение 3.3. Ковариация $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$

Определение 3.4. Дисперсия $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2$

$$\operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$$

Определение 3.5. $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Назовём характеристической функцией ξ :

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}, \text{ где } t \in \mathbb{R}$$

Свойства. 1. $\phi_\xi(0) = 1$ и $|\phi_\xi(t)| \leq 1$

Доказательство: $|\phi_\xi(t)| \leq |\mathbb{E}e^{it\xi}| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}| = 1$

2. $\phi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt}\phi_\xi(at)$

Доказательство: $\phi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{i(a\xi+b)t} = \mathbb{E}e^{ibt}e^{ia\xi t} = e^{ibt}\mathbb{E}e^{i\xi(at)} = \phi_\xi(at)e^{ibt}$

3. Если ξ и η независимы, то $\phi_{\xi+\eta}(t) = \phi_\xi(t) \cdot \phi_\eta(t)$

Доказательство: $e^{i\xi t}$ и $e^{i\eta t}$ независимы и пишем произведение матожиданий

4. $\overline{\phi_\xi(t)} = \phi_\xi(-t)$

Доказательство: $\overline{\phi_\xi(t)} = \overline{\mathbb{E}e^{i\xi t}} = \mathbb{E}\overline{e^{i\xi t}} = \mathbb{E}e^{-i\xi t} = \phi_\xi(-t)$

5. ϕ_ξ равномерно непрерывна на \mathbb{R}

Доказательство: $|\phi_\xi(t+h) - \phi_\xi(t)| = |\mathbb{E}e^{i(t+h)\xi} - \mathbb{E}e^{it\xi}| = |\mathbb{E}(e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1))| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| = \mathbb{E}|e^{ih\xi} - 1| = \int_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1| dP_\xi(x) \xrightarrow{(*)} 0.$

(*): Знаем, что $e^{ihx} \rightarrow_{h \rightarrow 0} 1$, хотим понять, что можно вносить предел под знак интеграла. Это сделать можно по теореме Лебега, где суммируемая мажоранта будет 2, так как мера вероятностная.

Напоминание Th Лебега:

Теорема 2.22. **Лебега** о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть $f = \lim f_n$ и $|f_n| \leq \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$ – суммируема на E .

Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$, более того $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

Пример. $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Хотим посчитать характеристическую функцию.

Возьмём $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Тогда $\xi = \sigma\eta + a$ – имеет нужное нам распределение.

$$\phi_{\sigma\eta+a}(t) = e^{ita} \phi_\eta(\sigma t)$$

Считаем для η :

$$\phi_\eta(t) = \mathbb{E} e^{it\eta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx.$$

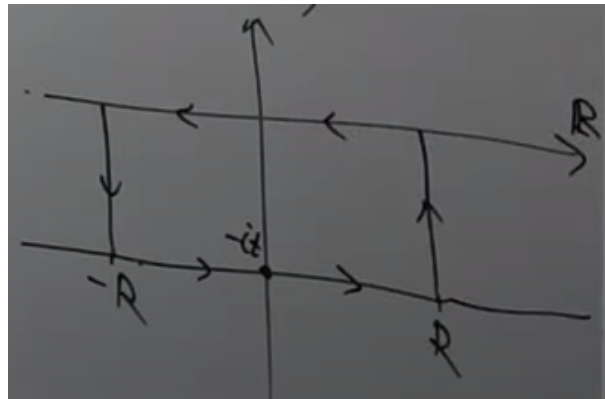
$$\text{Посчитаем } I := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = \int_{-it+\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Чтобы найти I , посчитаем интеграл по контуру Γ_R :

$$\int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 \quad (\text{т.к. особых точек внутри контура нет}).$$

$$\text{С другой стороны это также равно: } \int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = - \underbrace{\int_{-R}^R}_{\rightarrow \sqrt{2\pi}} + \underbrace{\int_{-R-it}^{R-it}}_{\rightarrow I} + \underbrace{\int_{R-it}^R}_{(*) \rightarrow 0} + \underbrace{\int_{-R}^{-R-it}}_{(*) \rightarrow 0}$$

$-\int_{-R}^R \rightarrow \sqrt{2\pi}$ – верно, так как $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-R}^R \rightarrow 1$ – т.к. это вероятность всего (если есть более понятное объяснение, то PR/объяснение в лс приветствуется).



$$\begin{aligned} (*) : \left| \int_{R-it}^R e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| &=_{z=R+iy} \left| i \int_{-t}^0 e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} dy \right| \leq \int_{-t}^0 | \dots | dy = \int_{-t}^0 \left| e^{-\frac{R^2+y^2}{2}} \right| \cdot \underbrace{|e^{-2i \cdot R \cdot y}|}_{=1} dy = \\ &= \int_{-t}^0 e^{-\frac{R^2+y^2}{2}} dy \leq \underbrace{te^{\frac{t^2}{2}}}_{const} e^{-\frac{R^2}{2}} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что $I = \sqrt{2\pi}$, и $\phi_\eta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Теперь находим $\phi_\xi(t) = e^{iat} \phi_\eta(\sigma t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + iat}$.

Теорема 3.1. Пусть $\mathbb{E}|\xi|^n < +\infty$.

Тогда при $k \leq n$ верно, что $\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}((i\xi)^k e^{i\xi t})$.

В частности, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$.

Тут имеется в виду k -ая производная.

Следствие. Если $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$, то $\mathbb{E}\xi = -i\varphi'(0)$ и $\mathbb{D}\xi = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2$

Доказательство. Теоремы.

Индукция по k

База $k = 0$: определение φ .

Переход $k \rightarrow k + 1$:

$\varphi^{(k+1)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(k)}(t+h) - \varphi^{(k)}(t)}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(i\xi)^k e^{i\xi(t+h)} - \mathbb{E}(i\xi)^k e^{it\xi}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}((i\xi)^k e^{it\xi} \cdot \frac{e^{ih\xi} - 1}{h}) = \mathbb{E}((i\xi)^k e^{it\xi} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ih\xi} - 1}{h})$, а предел — это $i\xi$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + ih\xi + \mathbf{O}(h^2 \cdot \xi^2) - 1}{h} = i\xi + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{O}(h \cdot \xi^2)}_{=0} = i\xi$$

Почему можно было записать предел под матожидание?

$\lim \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h} dP_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} ((ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h}) dP_{\xi}(x)$ — нужна суммируемая мажоранта.

$$\left| (ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = |x|^k \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = (*).$$

1. Если $|xh| \geq 1$, то $\frac{1}{|h|} \leq |x|$ и $\left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| \leq \frac{2}{|h|} \leq 2|x|$ и тогда $(*) \leq 2|x|^{k+1}$.

2. Если $|xh| < 1$, то $e^{ihx} = 1 + \mathcal{O}(ihx) \Rightarrow \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = \left| \frac{1 + \mathcal{O}(ihx) - 1}{h} \right| = \mathcal{O}(x)$ и тогда $(*) = \mathcal{O}(|x|^{k+1})$.

Но $\int_{\mathbb{R}} |x|^{k+1} dP_{\xi}(x) = \mathbb{E}|\xi|^{k+1} < +\infty$ по условию, тогда мажоранту подобрали правильную. \square

Теорема 3.2. Если существует $\varphi''_{\xi}(0)$ и конечна, то $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$

Замечание. Если существует $\varphi_{\xi}^{(2n)}$ и конечна, то $\mathbb{E}\xi^{2n} < +\infty$

Доказательство. $\mathbb{E}\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 dP_{\xi}(x) = (*)$ — хотим доказать, что этот интеграл конечен.

Заметим, что $x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(tx)}{t}$ и подставим вместо x .

Тогда:

$(*) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dP_{\xi}(x) \leq \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} -\frac{e^{2itx} + e^{-2itx} - 2}{4t^2} dP_{\xi}(x) = (*)$ — лемма Фату и расписали синус как $\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$.

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\varphi_{\xi}(2t) - \varphi_{\xi}(-2t) - 2}{4t^2} = (*).$$

Причём $\varphi_{\xi}(u) = \varphi_{\xi}(0) + \varphi'_{\xi}(0) \cdot u + \frac{\varphi''_{\xi}(0)u^2}{2} + o(u^2)$.

Тогда $\varphi_{\xi}(2t) + \varphi_{\xi}(-2t) = 2 + \frac{\varphi''_{\xi}(0)((2t)^2 + (-2t)^2)}{2} + o(t^2)$, а тогда $(*) = \lim_{t \rightarrow 0} (-\varphi''_{\xi}(0) + o(1))$.

То есть оценили сверху каким-то числом, тогда интеграл конечен. \square

Теорема 3.3. Формула обращения

Пусть $a < b$ и $P(\xi = a) = P(\xi = b) = 0$.

Тогда $P(\xi \in [a, b]) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi}(t) dt$

То есть $v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi}(t) dt$

Доказательство. Будем доказывать в несколько шагов:

1. Пусть $\xi = \frac{b-a}{2}\eta + \frac{a+b}{2}$, $\xi \in [a, b] \Leftrightarrow \eta \in [-1, 1]$, тогда $P(\xi \in [a, b]) = P(\eta \in [-1, 1]) = (*)$.

Допустим, что мы уже доказали эту формулу для $\eta \in [-1, 1]$, тогда

$$P(\eta \in [-1, 1]) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-it} - e^{it}}{it} \phi_\eta(t) dt = (*)$$

Пересчитаем левую часть формулы (*):

$$\begin{aligned} P(\xi \in [a, b]) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{iat} - e^{ibt}}{it} \phi_\eta\left(\frac{b-a}{2}t\right) e^{i\frac{a+b}{2}t} dt =_{s:=\frac{b-a}{2}t} \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\frac{b-a}{2}}^{T\frac{b-a}{2}} \frac{e^{is} - e^{-is}}{is} \phi_\eta(s) ds = (**). \end{aligned}$$

То есть если мы получили, что $(*) = (**)$.

Тогда если мы докажем формулу при $\eta \in [-1, 1]$, то решим задачу.

2. Пусть $a = -1, b = 1$:

$$P(\xi \in [-1, 1]) \stackrel{?}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \phi_\xi(t) dt.$$

Посчитаем интеграл:

$\int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \phi_\xi(t) dt = \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_\xi(x) dt =_{\text{т. Фубини}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} e^{itx} dt dP_\xi(x)$ – теорему Фубини можно применять, если подынтегральная функция суммируема: $|e^{itx}| < 1$ и $|\frac{e^{it} - e^{-it}}{it}|$ – ограничена (при больших t значение меньше 2, при $t \in [-1, 1]$ это непрерывная функция, а значит ограничена на этом отрезке).

Давайте посмотрим на внутренний интеграл: $\Phi_T(x) = \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} e^{itx} dt$.

Заметим, что $\frac{e^{it} - e^{-it}}{it} = \int_{-1}^1 e^{itu} du$.

Тогда $\Phi_T(x) = \int_{-T}^T \int_{-1}^1 e^{itu} e^{itx} du dt = \int_{-1}^1 \int_{-T}^T e^{it(u+x)} dt du$ – т. Фубини, т.к. подынтегральная ф-я по модулю равна 1.

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_T(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \int_{-T}^T e^{it(u+x)} dt du = (*).$$

Заметим, что $\left. \frac{e^{it(u+x)}}{i(u+x)} \right|_{t=-T}^{t=+T} = \frac{2 \sin((u+x)T)}{u+x}$ – первообразная для внутреннего интервала (*).

Тогда $(*) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{2 \sin((u+x)T)}{u+x} du = (*)$. Сделаем замену $y = (u+x)T$, тогда $dy = T \cdot du$.

$$\text{Тогда } (*) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{(-1+x)T}^{(1+x)T} \frac{2 \sin y}{y} dy = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 1 \\ 0, & \text{при } x < -1 \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin y}{y} dy = 2\pi, & \text{иначе} \end{cases}$$

Получили, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_T(x) = 2\pi \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

Если докажем, что $\int_{\mathbb{R}} \Phi_T(x) dP_\xi(x) \xrightarrow[\text{пользуемся } P(\xi=a)=P(\xi=b)=0]{\text{почти везде}} \int_{\mathbb{R}} 2\pi \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) dP_\xi(x)$, то решим за-

дачу, т.к. правая часть это как раз $2\pi P(\xi \in [-1, 1])$.

То есть нужно понять, почему $\int_a^b \frac{\sin y}{y} dy$ ограничен – интеграл по лучу сходится, значит первообразная в бесконечностях имеет предел, значит в середине тоже ограничена, потому что непрерывность – обоснование примерно такое.

□

Следствие. 1. Если $\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t)$, то $P_\xi = P_\eta$

Доказательство: Рассмотрим $A = \{a \in \mathbb{R} : a - \text{точка непрерывности функции распределения}\}$.

Тогда $\mathbb{R} \setminus A$ – не более чем счётное. Если $a < b$ и $a, b \in A$, то $P_\xi([a, b]) = P_\eta([a, b])$

(a) Пусть $a \in \mathbb{R}, b \in A$:

Рассмотрим $a_n \in A$, такие, что $a_n \rightarrow a$ и убывают.

$$P_\xi((a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\xi([a_n, b_n]) = \lim P_\eta([a_n, b_n]) = P_\eta((a, b]).$$

(b) Пусть $a < b$ произвольные:

Возьмём $b_n \in A$, такие, что $b_n \rightarrow b$ и убывают. Тогда $P_\xi((a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\xi(a, b_n] = \lim P_\eta(a, b_n] = P_\eta(a, b] \Rightarrow P_\xi = P_\eta$ на ячейках, а тогда по единственности продолжения везде совпадают.

2. Если $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\xi(t)| dt < +\infty$, то ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt$ - преобразование Фурье.

Доказательство: Из суммируемости $\varphi_\xi(t) \Rightarrow P_\xi((a, b]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_\xi(t) dt$.

Проверим, что $P_\xi(a, b] = \int_a^b p_\xi(x) dx$.

$\int_a^b p_\xi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt dx = (*)$. Под внутренним интегралом суммируемая функция, значит можно переставлять местами интегралы.

$$\text{Тогда } (*) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_a^b e^{-itx} dx \varphi_\xi(t) dt$$

Теорема 3.4. $\xi_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2)$, $c_k \in \mathbb{R}$ не все нулевые и ξ_k - независимы и $\xi = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k \xi_k$.

Тогда $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, где $a = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k a_k$ и $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2$.

Доказательство. $\varphi_\xi(t) = \varphi_{a_0}(t) \varphi_{c_1 \xi_1}(t) \dots \varphi_{c_n \xi_n}(t) =$

$$= e^{ita_0}(t) \varphi_{\xi_1}(c_1 t) \dots \varphi_{\xi_n}(c_n t) = e^{ita_0} e^{ia_1 c_1 t} e^{-\frac{(c_1 \sigma_1 t)^2}{2}} \dots e^{ia_n c_n t} e^{-\frac{(c_n \sigma_n t)^2}{2}} = e^{ita} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

□

3.2. Сходимость по распределению

Замечание. 1. Точек, где нет непрерывности F_ξ не более чем счётное множество

2. Если $F_{\xi_n}(b) - F_{\xi_n}(a) \rightarrow F_\xi(b) - F_\xi(a)$ для всех a, b , за исключением счётного множества.

Тогда $F_{\xi_n}(b) \rightarrow F_\xi(b)$ за исключением счётного множества.

Доказательство. Рассмотрим $F(x)$, функцию распределения. Возьмём хорошие a , т.ч. $F(a) < \varepsilon$ и b , т.ч. $F(b) > 1 - \varepsilon$.

$$\text{Тогда } (F_n(b) - F_n(a)) - (F(b) - F(a)) \rightarrow 0 \implies |(F_n(b) - F_n(a)) - \underbrace{(F(b) - F(a))}_{> 1-2\varepsilon}| < \varepsilon \implies$$

$$F_n(b) - F_n(a) > 1 - 3\varepsilon \implies F_n(a) < 3\varepsilon \text{ при больших } n.$$

$$\text{Возьмём хорошее } x, |F_n(x) - F(x)| \leq |(F_n(x) - F_n(a)) - (F(x) - F(a))| + \underbrace{F_n(a)}_{< 3\varepsilon} + \underbrace{F(a)}_{< \varepsilon} < 5\varepsilon$$

при больших n

□

3. $D \subset \mathbb{R}$ не более чем счётное и $U \subset \mathbb{R}$ - открытое.

Тогда $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$, где $a_k, b_k \notin D$

Доказательство. Нарезаем открытое множество с шагом 1, тем ячейки, которые целиком попали - берём. Те, что не попали - бьём пополам и так далее. □

4. ξ и η независимые и η имеет непрерывное распределение.

Тогда $\xi + \eta$ имеет непрерывное распределение.

Доказательство. $P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

$$P_{\xi+\eta}(\{a\}) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{P_\eta(\{a-x\})}_{=0, \text{ т.к. непрерывность}} dP_\xi(x)$$

□

Определение 3.6. Множество $B \subset \mathbb{R}$ - регулярное, относительно P_ξ , если $P_\xi(Cl B \setminus Int B) = 0$, то есть $P(\xi \in Cl B \setminus Int B) = 0$

Теорема 3.5. ξ, ξ_1, ξ_2, \dots - случайные величины, F, F_1, F_2, \dots - их функции распределения, а $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ - их характеристические функции. Следующие условия равносильны:

1. ξ_n сходится к ξ по распределению
2. Для любого U открытого $\liminf P(\xi_n \in U) \geq P(\xi \in U)$
3. Для любого A замкнутого $\limsup P(\xi_n \in A) \leq P(\xi \in A)$
4. Для любого B регулярного борелевского $\lim P(\xi_n \in B) = P(\xi \in B)$
5. Для любого B регулярного борелевского $\lim \mathbb{E} \mathbb{1}_B(\xi_n) = \mathbb{E} \mathbb{1}_B(\xi)$
6. Для любой f непрерывной на прямой и ограниченной $\lim \mathbb{E} f(\xi_n) = \mathbb{E} f(\xi)$
7. φ_n сходится к φ поточечно

Доказательство. 1. $2 \iff 3$

Если $A = \mathbb{R} \setminus U$, тогда $P(\xi_n \in A) = 1 - P(\xi_n \in U)$.

$$P(\xi \in A) > \limsup P(\xi_n \in A) = 1 - \liminf P(\xi_n \in U) \leq 1 - P(\xi \in U) = P(\xi \in A)$$

2. $2 \cup 3 \implies 4$

Мы знаем, что $U = \{\xi_n \in Int B\} \cup \{\xi_n \in B\} \subset \{\xi_n \in Cl B\} = A$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } P(\xi_n \in U) \leq P(\xi_n \in B) \leq P(\xi_n \in A) &\implies \underbrace{\limsup P(\xi_n \in B)}_{\geq \liminf P(\xi_n \in B) \geq \liminf P(\xi_n \in U) \geq P(\xi \in U) = P(\xi \in B)} \leq \\ \limsup P(\xi_n \in A) &\leq P(\xi \in A) = P(\xi \in B) \end{aligned}$$

3. $4 \iff 5$

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_B(\xi_n) = P(\mathbb{1}_B(\xi_n) = 1) = P(\xi_n \in B)$$

4. $6 \implies 7$

$$\varphi_\eta(t) = \mathbb{E} e^{it\eta} = \mathbb{E} \cos(t\eta) + i \mathbb{E} \sin(t\eta)$$

$$\text{Тогда } \varphi_n(t) = \mathbb{E} \cos(t\xi_n) + i \mathbb{E} \sin(t\xi_n) \rightarrow \mathbb{E} \cos(t\xi) + i \mathbb{E} \sin(t\xi) = \varphi(t)$$

5. $1 \implies 2$

Берём открытое U , по замечанию $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$, где a_k, b_k - точки непрерывности F .

$$\{\xi_n \in U\} \supset \{\xi_n \in \bigcup_{k=1}^m (a_k, b_k]\} \implies P(\xi_n \in U) \geq \sum_{k=1}^m P(\xi_n \in (a_k, b_k])$$

$$\liminf P(\xi_n \in U) \geq \liminf \sum_{k=1}^m \geq \sum_{k=1}^m \liminf P(\xi_n \in (a_k, b_k]) \stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^m P(\xi \in (a_k, b_k]) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \in (a_k, b_k]) = P(\xi \in U)$$

А значит $\liminf P(\xi_n \in U) \geq P(\xi \in U)$

$$(*) P(\xi_n \in (a_k, b_k]) = F_n(b_k) - F_n(a_k) \rightarrow F(b_k) - F(a_k) = P(\xi \in (a_k, b_k])$$

6. 5 \Rightarrow 6

Пусть $|f| \leq M$ и $D = \{x \in \mathbb{R} : P(f(\xi) = x) > 0\} = \{x : P_\xi(f^{-1}(x) > 0)\}$. Это не более чем счётное множество. Потому что для разных x - это дизъюнкты. Множеств с вероятностью $\frac{1}{2}$ - не больше двух, с вероятностью $\frac{1}{3}$ не больше трёх и так далее.

Пусть $-M = t_0 < t_1 < \dots < t_m = M$, так, что $t_j \notin D$ и мелкость $< \varepsilon$.

Заведём множества $A_j = \{x \in \mathbb{R} : t_{j-1} \leq f(x) \leq t_j\} \supset B_j = \{x \in \mathbb{R} : t_{j-1} < f(x) \leq t_j\} \supset U_j = \{x \in \mathbb{R} : t_{j-1} < f(x) < t_j\}$. Где A_j - замкнутое, а U_j - открытое.

Мы поняли, что $U_j \subset \text{Int } B_j \subset B_j \subset \text{Cl } B_j \subset A_j \Rightarrow \text{Cl } B_j \setminus \text{Int } B_j \subset A_j \setminus U_j$

Тогда B_j регулярно относительно P_ξ

Определим $g(x) = \sum_{j=1}^m t_{j-1} \mathbb{1}_{B_j}(x)$. Тогда $g(x) < f(x) < g(x) + \varepsilon$.

$|g(x) - f(x)| < \varepsilon$ и тогда $\mathbb{E}|g(\xi_n) - f(\xi_n)| \leq \varepsilon$ и мы знаем, что $\mathbb{E}g(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}g(\xi)$ - видно, если расписать матожидание g по линейности.

$\mathbb{E}|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq |\mathbb{E}f(\xi_n) - \mathbb{E}g(\xi_n)| + |\mathbb{E}g(\xi_n) - \mathbb{E}g(\xi)| + |\mathbb{E}g(\xi) - \mathbb{E}f(\xi)| < 3\varepsilon$ при больших n , каждый из модулей $< \varepsilon$

7. 7 \Rightarrow 1

Возьмём $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, такую, что η не зависит от всех ξ_n и ξ

$$\varphi_{\xi_n + \eta}(t) = \varphi_{\xi_n}(t) \varphi_\eta(t) = \varphi_n(t) \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \xrightarrow{\text{поточечно}} \varphi(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \varphi_{\xi + \eta}(t)$$

$\xi_n + \eta$ и $\xi + \eta$ имеют непрерывное распределение, поэтому можем не задумываясь писать формулу обращения:

$$P(\xi_n + \eta \in (a, b]) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi_n + \eta}(t) dt \xrightarrow{*} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi + \eta}(t) dt = P(\xi + \eta \in (a, b]).$$

(*) Нужна суммируемая мажоранта $\left| \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi_n + \eta}(t) \right| \leq e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ - суммируемая мажоранта.

То есть $\underbrace{P(\xi_n + \eta \in (a, b])}_{G_n(b) - G_n(a)} \rightarrow \underbrace{P(\xi + \eta \in (a, b])}_{G(b) - G(a)}$, где $G_n(x) = F_{\xi_n + \eta}(x)$ и $G(x) = F_{\xi + \eta}(x)$

Тогда из замечания $G_n(x) \rightarrow G(x)$

Возьмём x - точка непрерывности F и выберем $\delta > 0$, так, что $|F(x \pm \delta) - F(x)| < \varepsilon$ - есть из непрерывности.

$$\{\xi_n + \eta \leq x - \delta\} \setminus \{|\eta| > \delta\} \subset \{\xi_n \leq x\} \subset \{\xi_n + \eta \leq x + \delta\} \cup \{|\eta| > \delta\}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad \underbrace{G_n(x - \delta) - P(|\eta| > \delta)}_{G_n(x - \delta - \frac{\sigma^2}{2}) > G_n(x - \delta) - \varepsilon > G(x - \delta) - 2\varepsilon > F(x - 2\delta) - 3\varepsilon > F(x) - 4\varepsilon} &\leq F_n(x) \leq \underbrace{G_n(x + \delta) + P(|\eta| > \delta)}_{G_n(x + \delta) + \frac{\sigma^2}{2} < G_n(x + \delta) + \varepsilon < G(x + \delta) + 2\varepsilon < F(x + 2\delta)} \end{aligned}$$

Оценим вероятность: $P(|\eta| > \delta) \leq \frac{\mathbb{D}\eta}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{\delta^2}$

□

Теорема 3.6. $F_n, F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ монотонные, $F \in C(\mathbb{R})$ и $F_n \rightarrow F$ поточечно.

Тогда $F_n \Rightarrow F$

Доказательство. Берём $\varepsilon > 0$ и $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Пусть t_j , такие, что $F(t_j) = \frac{j}{m}$. Если для большого j точки не нашлось, то $F < \frac{j+1}{m}$, а если для маленького не нашлось, то $F > \frac{j-1}{m}$ (потому что иначе из непрерывности такие точки найдутся).

Знаем, что $F_n(t_j) \rightarrow F(t_j)$. Берём $N : \forall n \geq N |F_n(t_j) - F(t_j)| < \varepsilon$.

Теперь смотрим на произвольную точку: $t_j < t < t_{j+1}$. Тогда $F_n(t) \leq F_n(t_{j+1}) < F(t_{j+1}) + \varepsilon = \frac{j+1}{m} + \varepsilon = F(t_j) + \frac{1}{m} + \varepsilon \leq F(t) + \frac{1}{m} + \varepsilon < F(t) + 2\varepsilon$.

Аналогично в другую сторону:

$$F_n(t_j) > F(t_j) - \varepsilon = \frac{j}{m} - \varepsilon = F(t_{j+1}) - \frac{1}{m} - \varepsilon \geq F(t) - 2\varepsilon.$$

□

3.3. Центральная предельная теорема

Теорема 3.7. ЦПТ в форме Леви

ξ_1, ξ_2, \dots независимые, одинаково распределённые случайные величины. $a = \mathbb{E}\xi_1, \sigma^2 = \mathbb{D}\xi_1, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$.

$$\text{Тогда } P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq x\right) \Rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Доказательство. Достаточно проверять поточечную сходимость характеристических функций.

$$\varphi_{\xi_k - a}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2), \text{ потому что мы знаем, что } \mathbb{E}(\xi_k - a) = 0 \text{ и } \mathbb{D}(\xi_k - a) = \sigma^2$$

$$\text{Тогда } \varphi_{S_n - na}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k - a}(t) = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)\right)^n$$

$$\varphi_{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}} = \varphi_{S_n - na}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Чтобы получить последний переход - логарифмируем.

То есть $\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma}$ сходится по распределению к $\mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow$ функция распределения сходится равномерно. □

Следствие. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

S_n - количество успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0, 1)$.

$$\text{Тогда } P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) \Rightarrow \Phi(x)$$

Доказательство. $\mathbb{E}\xi_k = p, \mathbb{D}\xi_k = pq$ □

Пример. Посчитаем характеристическую функцию для Poisson(λ)

$$\varphi_{\xi}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

Теорема 3.8. $P(\xi_{nk} = 1) = p_{nk}$ и $P(\xi_{nk} = 0) = 1 - p_{nk}$ и пусть $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$.

$$\max\{p_{n1}, \dots, p_{nn}\} \rightarrow 0 \text{ и } p_{n1} + \dots + p_{nn} \rightarrow \lambda.$$

$$\text{Тогда } P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Доказательство. $\varphi_{\xi_{nk}}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_{nk}} = 1 - p_{nk} + p_{nk}e^{it} = 1 + p_{nk}(e^{it} - 1)$

$$\text{Тогда } \varphi_{S_n} = \prod_{k=1}^n (1 + p_{nk}(e^{it} - 1)) \xrightarrow{?} \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

$$\text{Пусть } z = e^{it} - 1$$

Значит, нужно проверить $\sum_{k=1}^n \ln(1 + p_{nk}z) \rightarrow \lambda z$. Раскладываем логарифм:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n p_{nk}z}_{\rightarrow \lambda z} + \sum_{k=1}^n \mathcal{O}(p_{nk}^2). \text{ Значит осталось показать, что вторая сумма стремится к нулю.}$$

$$\text{Действительно, } \sum_{k=1}^n \mathcal{O}(p_{nk}^2) \leq (p_{n1} + \dots + p_{nn}) \cdot \max\{p_{n1}, \dots, p_{nn}\} \rightarrow 0$$

□

Теорема 3.9. ЦПТ в форме Линденберга

ξ_1, \dots - независимые случайные величины, $a_k = \mathbb{E}\xi_k, \sigma_k^2 = \mathbb{D}\xi_k > 0, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \mathbb{D}_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$

$$f(x) = x^2 \mathbb{1}_{\{|x| \geq \varepsilon \mathbb{D}_n\}}(x) \forall \varepsilon > 0 \text{ и } Lind(\varepsilon, n) = \frac{1}{\mathbb{D}_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}f(\xi_k - a_k) \rightarrow 0$$

$$\text{Тогда } P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq x\right) \Rightarrow \Phi(x)$$

Теорема 3.10. ЦПТ в форме Ляпунова

ξ_1, \dots независимые случайные величины

$$L(\delta, n) = \frac{1}{\mathbb{D}_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \rightarrow 0 \text{ при некотором } \delta$$

$$\text{Тогда } P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq x\right) \Rightarrow \Phi(x)$$

Доказательство.

□

Теорема 3.11. Пусть $\delta \in [0, 1]$ и ξ_1, \dots независимые случайные величины.

$$\text{Тогда } \left| P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq C_\delta L(\delta, n)$$

Теорема 3.12. Берри-Эссена

ξ_1, \dots независимые, одинаково распределённые случайные величины.

$$\text{Тогда } \left| P\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{\sqrt{n}\sigma}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq C_\delta \cdot \frac{\mathbb{E}|\xi_1 - a|^{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}} \sigma^{2+\delta}}$$

Доказательство. $\mathbb{D}_n^2 = n\sigma^2$ и $L(\delta, n) = \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}} \cdot \sigma^{2+\delta}} \cdot n \mathbb{E}|\xi_1 - a|^{2+\delta}$

$$\text{В частности при } \delta = 1 \quad |P - \Phi| \leq C \frac{\mathbb{E}|\xi_1 - a|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

□

Замечание. Про константы

1. Эссен (1956) $C \geq \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0,4097$
2. Шевцова (2014) $C \leq 0,469$
3. Для общего случая: $C_1 \leq 0,5583$
4. Для схемы Бернулли (2018) $C_1 \leq 0,4099$
5. Для схемы Бернулли с $p = \frac{1}{2}$ $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Теорема 3.13. Хартмана-Винтнера (закон повторного логарифма)

ξ_1, ξ_2, \dots - независимые, одинаково распределённые. $\mathbb{E}\xi_1 = 0, \mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 > 0$

$$\text{Тогда } \overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = \sigma, \text{ а } \underline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -\sigma$$

Теорема 3.14. Штрассена

$\xi_1, \xi_2 \dots$ независимые одинаково распределённые, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ и $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 > 0$

$$\text{Тогда любое число из } [-\sigma, \sigma] \text{ - пред. точка послед. } \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$$

3.4. Большие отклонения

ЗБЧ в форме Чебышёва

ξ_1, ξ_2, \dots - независимые, одинаково распределённые случайные величины. $\mathbb{E}\xi_1 = a, \mathbb{D} = \sigma^2 > 0$

Тогда $P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \rightarrow 0$, если $r > a$

Более того, $P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq \frac{\sigma^2}{(r-a)n}$ - это оценка из доказательства. Но оценка довольно плохая.

Определение 3.7. ξ удовлетворяет условию Крамера, если при $\lambda \in (0, \lambda_0) : \mathbb{E}e^{\lambda\xi} < +\infty$

Теорема 3.15. Оценка Чернова

ξ_1, ξ_2, \dots - независимые, одинаково распределённые, удовлетворяющие условию Крамера и $r > a = \mathbb{E}\xi_1$

Хотим оценить $P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) = P(S_n \geq nr) = P(\lambda S_n \geq \lambda nr) = P(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda nr}) \stackrel{\text{Марков}}{\leq} \frac{\mathbb{E}e^{\lambda S_n}}{e^{\lambda nr}} = \left(\frac{\mathbb{E}e^{\lambda\xi_1}}{e^{\lambda r}}\right)^n$

$$(*) \mathbb{E}e^{\lambda S_n} = \mathbb{E}(\prod_{k=1}^n e^{\lambda\xi_k}) = (\mathbb{E}e^{\lambda\xi_1})^n$$

А теперь, то что получилось - будем минимизировать по λ

$\varphi(\lambda) = \ln \mathbb{E}e^{\lambda\xi_1} - \lambda r \rightarrow \inf$, где λ допустимое

$$I(r) = \sup_{\lambda} \{\lambda r - \ln(\mathbb{E}e^{\lambda\xi_1})\} \implies P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq e^{-nI(r)}$$

Пример. 1. $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\mathbb{E}e^{\lambda\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}} dx \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2}} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\lambda r - \frac{\lambda^2}{2} \rightarrow \max_{\lambda>0}, \text{ максимум при } \lambda = r. \text{ И тогда } I(r) = \frac{r^2}{2}$$

$$\text{Значит } P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq e^{-\frac{nr^2}{2}} \text{ при } r > 0$$

2. $\xi \sim \text{Exp}(1)$

$$\mathbb{E}e^{\lambda\xi} = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-x} dx = \frac{e^{(\lambda-1)x}}{\lambda-1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-\lambda} \text{ сходимость есть при } \lambda \in (0, 1)$$

$$\lambda r - \ln \frac{1}{1-\lambda} = \lambda r + \ln(1-\lambda) - \text{считаем производную по } \lambda$$

$$(\lambda r + \ln(1-\lambda))'_{\lambda} = r - \frac{1}{1-\lambda} \implies 1-\lambda = \frac{1}{r} \implies \lambda = 1 - \frac{1}{r}, r > 1$$

$$\text{Тогда } I(r) = r(1 - \frac{1}{r}) - \ln r = r - 1 - \ln r$$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq e^{-n(r-1-\ln r)} = r^n e^{-n(r-1)}$$

4. Дискретные случайные процессы

4.1. Условные математические ожидания

Определение 4.1. (Ω, \mathcal{F}, P) - вероятностное пространство, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ и \mathcal{A} - σ -алгебра.

$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) = \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - случайная величина, которая:

1. измерима относительно \mathcal{A}
2. $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$

Теорема 4.1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}, \mathbb{E}|\xi| < +\infty$, тогда $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$ существует и единственно, с точностью до почти наверное

Доказательство. Существование:

$\xi = \xi_+ - \xi_-$. Пусть $A \in \mathcal{A}$, определим $\mu_{\pm}A = \int_A \xi_{\pm} dP$ - это конечные меры на \mathcal{A} , так как интеграл от измеримой неотрицательной функции. А ещё эти меры абсолютно непрерывны относительно P т. Радона-Никодима $\implies \exists \eta_{\pm} > 0$ измеримые относительно \mathcal{A} , т.ч. $\mu_{\pm}A = \int_A \eta_{\pm} dP$

$$\eta = \eta_+ - \eta_-, \text{ надо проверить, что } \forall A \in \mathcal{A} : \underbrace{\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A)}_{\mathbb{E}(\xi_+ \mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(\xi_- \mathbb{1}_A)} = \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$$

А ещё $\mathbb{E}(\xi_+ \mathbb{1}_A) = \mu_+A = \int_A \xi_+ dP$ и для остальных точно также

Единственность:

Пусть η_1 и η_2 - условные матожидания. Тогда $\{\eta_1 > \eta_2\} \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{E}(\eta_1 \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\eta_2 \mathbb{1}_A) \implies \underbrace{\mathbb{E}((\eta_1 - \eta_2) \mathbb{1}_A)}_{= \int_A (\eta_1 - \eta_2) dP} = 0 \implies P(A) = P(\eta_1 > \eta_2) = 0. \text{ Аналогично}$$

$$P(\eta_1 < \eta_2) = 0$$

□

Свойства. 1. $\mathbb{E}(c|\mathcal{A}) = c$

2. $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$ линейно по ξ
3. $\xi \leq \eta$, то $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) \leq \mathbb{E}(\eta|\mathcal{A})$

Доказательство. Достаточно проверить, что если $\xi \geq 0$, то $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) \geq 0$

□

$$4. \mathbb{E}(\xi|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}\xi$$

Доказательство. Измеримы относительно такой σ -алгебры только константы. Надо проверить, что $\mathbb{E}(\mathbb{E}\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A)$ для $A = \emptyset$ и $A = \Omega$

□

$$5. \mathcal{F} \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 - \sigma\text{-алгебры}$$

$$\text{Тогда } \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_2)$$

Доказательство. $\eta = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_2)$ и $\zeta = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_1)$

Надо доказать, что $\eta = \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{A}_2)$. η измерима относительно \mathcal{A}_2 . Надо проверить, что $\forall A \in \mathcal{A}_2 : \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\zeta \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A)$, т.к. $A \in \mathcal{A}_1$ по определению ζ . А ещё $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$

□

$$6. \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})) = \mathbb{E}\xi - \text{из 4 и 5}$$

$$7. \text{Если } \xi \text{ измерима относительно } \mathcal{A}, \text{ то } \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) = \xi$$

Пример. Пусть $\Omega = \bigcup A_k$ не более чем счётное объединение

\mathcal{A} - натянутая на A_1, A_2, \dots σ -алгебра

$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) = ?$

Если η измерима относительно $\mathcal{A} \implies \eta = \sum c_k \mathbb{1}_{A_k}$

Нужно чтобы $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{A_n}) = \mathbb{E}(\underbrace{\eta \mathbb{1}_{A_n}}_{c_n \mathbb{1}_{A_n}}) = c_n P(A_n)$

То есть $c_n = \frac{\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)}$

Замечание. Из свойства 6: $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = \sum \frac{\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{A_k})}{P(A_k)} \cdot P(A_k)$

Определение 4.2. Условная вероятность относительно σ -алгебры

$$P(B|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{A})$$

Пример. ξ_1, ξ_2, \dots - независимые, одинаково распределённые случайные величины, N - случайная величина с неотрицательными целыми значениями, не зависящая от ξ_1, \dots

$$S = \xi_1 + \dots + \xi_N$$

Пусть $A_n = \{N = n\}$

$$\mathbb{E}S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(S \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} \cdot P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} na P(N = n) = \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}N$$

$\frac{\mathbb{E}(S \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} = \mathbb{E}(S|N = n) = \mathbb{E}(S_n|N = n) = \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n|N = n) \stackrel{\text{независимость}}{=} \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = na$,
где $a = \mathbb{E}\xi_1$

Пример. Пусть ξ_k тоже принимают неотрицательные целые значения

Тогда $G_{\xi_1}(t) = G(t)$ - производящая функция ξ_k

$$G_S(t) = \mathbb{E}t^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(t^S \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} \cdot P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n(t) P(N = n) = G_n(G_{\xi_1}(t))$$

$$\frac{\mathbb{E}(t^S \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} = \mathbb{E}(t^S|N = n) = \mathbb{E}(t^{S_n}|N = n) = \mathbb{E}(t^{\xi_1} \cdot \dots \cdot t^{\xi_n}|N = n) = \mathbb{E}(t^{\xi_1} \cdot \dots \cdot e^{\xi_n}) = (\mathbb{E}t^{\xi_1})^n = (G(t))^n$$

Замечание. Геометрическая интерпретация

Пусть $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$

Тогда $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ - σ -алгебра. Поэтому $\underbrace{L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)}_{\text{замкнутое подпространство}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\eta = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$ - тогда проекция ξ на $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Нужно проверить, что $\xi - \eta \perp L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

В L^2 плотны ступенчатые, давайте проверим для них, а потом сделаем предельный переход. Достаточно даже понять только для 1 ступеньки.

Достаточно понять, что $\forall A \in \mathcal{A} : \xi - \eta \perp \mathbb{1}_A$

$$0 \stackrel{?}{=} \langle \xi - \eta, \mathbb{1}_A \rangle = \mathbb{E}((\xi - \eta) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$$

Определение 4.3. η - случайная величина. Пусть $\sigma(\eta)$ - наименьшая σ -алгебра, относительно которой η измерима

Замечание. Чтобы её получить, нужно взять все Лебеговы множества и натянуть на них σ -алгебру

Определение 4.4. $\mathbb{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}(\xi|\sigma(\eta))$ - условное матожидание ξ относительно η

Пример. η - дискретная, $\{y_1, y_2, \dots\}$ - множество её значений

Все $\{\eta = y_k\}$ - измеримы, $\Omega = \bigcup \{\eta = y_k\}$, $\sigma(\eta)$ - всевозможные объединения $\{\eta = y_k\}$

Теорема 4.2. 1. Если ξ и η независимы, то $\mathbb{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}\xi$

2. Если η измерима относительно \mathcal{A} , то $\mathbb{E}(\xi\eta|\mathcal{A}) = \eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$

Доказательство. 1. Надо доказать, что $\forall A \in \sigma(\eta) : \mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_A) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\mathbb{1}_A$

То есть достаточно проверить, что ξ и $\mathbb{1}_A$ независимы

Пусть $A = \{\eta \leq a\}$. $P(\xi \in B, \mathbb{1}_A \in C) = P(\xi \in B) \cdot P(\mathbb{1}_A \in C)$

Достаточно рассмотреть только $C = \{0\}$ и $C = \{1\}$

$P(\xi \in B, \mathbb{1}_A = 1) = P(\xi \in B, \eta \leq a) \stackrel{\text{независимость } \xi \text{ и } \eta}{=} P(\xi \in B)P(\eta \leq a) = P(\xi \in B)P(\mathbb{1}_A = 1)$.
Для $\mathbb{1}_A = 0$ аналогично

Для Лебеговых множеств мы это получили, поэтому есть и для любых преобразов ячеек

2. Проверяем для $\eta = \mathbb{1}_A$, где $A \in \mathcal{A}$

$\mathbb{1}_A\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$ - условное матожидание $\mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_A|\mathcal{A})$

Измеримость есть, поэтому достаточно проверить только второе условие

$$\forall B \in \mathcal{A} : \underbrace{\mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B)}_{=\mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_{A \cap B})} \stackrel{?}{=} \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})\mathbb{1}_B)}_{=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A \cap B}\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}))}$$

Тогда по линейности верно для простых η , по теореме Леви предельный переход $\eta_n \rightarrow \eta$ поточечно.

$$\text{Мы знаем, что есть равенство } \underbrace{\mathbb{E}(\xi\eta_n\mathbb{1}_B)}_{=\int_{\Omega} \xi\eta_n\mathbb{1}_B dP} = \underbrace{\mathbb{E}(\eta_n\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})\mathbb{1}_B)}_{=\int_{\Omega} \eta_n\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})\mathbb{1}_B dP}$$

Предельный переход можно делать для η_+ и η_- , сделаем, потом перейдём к η

□

4.2. Ветвящиеся процессы

ξ_{nk} - независимые случайные величины с неотрицательными целыми значениями

Интерпретация - есть много частиц, которые размножаются/умирают. Тогда n - момент времени, k - номер частицы, ξ_{nk} - количество её потомков

$\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{n\eta_{n-1}}$ - количество частиц в момент n

$\eta_0 = 1$ - изначально у нас есть только 1 частица

Считаем, что все ξ_{nk} одинаково распределены и $P(\xi_{nk} = m) = f_m$.

$F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m t^m$ - производящая функция

Пусть $G_n(t)$ - производящая функция для η_n . Тогда $G_n(t) = G_{n-1}(F(t)) = F \circ F \circ F \dots \circ F(t)$ - результат был получен в примере выше.

$$\mathbb{E}\eta_n = G'_n(1) = G'_{n-1}(\underbrace{F(1)}_{=1}) \cdot \underbrace{F'(1)}_{=\mathbb{E}\xi} = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta_{n-1} = (\mathbb{E}\xi)^n$$

Теорема 4.3. Вероятность вырождения процесса - наименьший неотрицательный корень уравнения $F(x) = x$

Доказательство. $A_n = \{\eta_n = 0\}$ - на n -ом шаге не осталось частиц

$P(A_n) = G_n(0) \leq 1$, а ещё $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ - если процесс вырожден, то он и останется вырожденным.

Поэтому у нас существует предел $q = \lim P(A_n) \leq 1$

$\underbrace{G_{n+1}(0)}_{\rightarrow q} = \underbrace{F(G_n(0))}_{F(q)}$, а F непрерывная, поэтому $q = F(q)$, поэтому вероятность - корень

уравнения. Осталось понять, что это наименьший корень

Пусть r другой корень уравнения $r = F(r)$. Ещё мы знаем, что F монотонна, потому что производная неотрицательная (просто коэффициенты неотрицательны).

$P(A_1) = G_1(0) = F(0) \stackrel{\text{монотонность}}{\leq} F(r) = r$ - верно в стартовый момент времени.

Пусть $P(A_n) \leq r$, тогда $P(A_{n+1}) = G_{n+1}(0) = F(G_n(0)) = F(P(A_n)) \leq F(r) = r$

Переходим к пределу и получаем, что $q \leq r$ □

Замечание. F непрерывная, монотонная, выпуклая на $[0, 1]$, а ещё $F(1) = 1$ и $F(0) \geq 0$

Если $m = \mathbb{E}\xi = F'(1) > 1$, то есть вероятность вырождения < 1 , если же $m \leq 1$, то вероятность вырождения $= 1$

Теорема 4.4. Пусть $m = \mathbb{E}\xi = 1$, $b = \mathbb{D}\xi > 0$, q_n - вероятность вырождения к n -ому шагу, $\gamma_n = q_n - q_{n-1}$ - вероятность вырождения ровно на n -ом шаге.

Тогда

$$1. \gamma_n \sim \frac{2}{bn^2}$$

$$2. 1 - q_n \sim \frac{2}{bn}$$

Доказательство. Пусть $p_n = 1 - q_n$ и $H(x) = 1 - F(1 - x)$

Тогда $H(p_n) = 1 - F(q_n) = 1 - q_{n+1} = p_{n+1}$, $H(0) = 1 - F(1) = 0$, $H'(0) = F'(1) = 1$, $H''(x) = F''(1 - x)$ и тогда $H''(0) = -F''(1) = -b$

В итоге $H(x) = x - \frac{bx^2}{2} + o(x^2)$

Пусть $a_n = \frac{1}{p_n}$, $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{p_{n-1} - p_n}{p_n p_{n-1}} = \frac{p_{n-1} - H(p_{n-1})}{p_{n-1} H(p_{n-1})} = \frac{\frac{bp_{n-1}^2}{2} + o(p_{n-1}^2)}{p_{n-1}(p_{n-1} + o(p_{n-1}))} = \frac{b}{2} + o(1) \implies$
 $a_n \sim \frac{bn}{2}$

Тогда $p_n \sim \frac{2}{bn}$

$$\gamma_n = q_n - q_{n-1} = p_{n-1} - p_n = p_{n-1} - H(p_{n-1}) = \frac{bp_{n-1}^2}{2} + o(p_{n-1}^2) \sim \frac{bp_{n-1}^2}{2} \sim \frac{b}{2} \left(\frac{2}{bn}\right)^2 = \frac{2}{bn^2} \quad \square$$

4.3. Цепи Маркова

Определение 4.5. Y , не более чем счётное множество - фазовое пространство

(Ω, \mathcal{F}, P) - вероятностное пространство, $\xi_n : \Omega \rightarrow Y$ - случайная величина, такая, что $P(\xi_n = a_n | \xi_{n-1} = a_{n-1}, \dots, \xi_0 = a_0) = P(\xi_n = a_n | \xi_{n-1} = a_{n-1}) \forall a_0, a_1, \dots, a_n \in Y$

Такая последовательность ξ_n - цепь Маркова

Замечание. То есть ξ_n зависит только от ξ_{n-1}

Пример. 1. Случайное блуждание по \mathbb{Z}

$$P(\xi_n = \xi_{n-1} + 1) = p$$

$$P(\xi_n = \xi_{n-1} - 1) = 1 - p$$

2. Прибор, который бывает в двух состояниях - работает и не работает.

Замечание. $\pi_0 = P_{\xi_0}$ - начальное распределение

$p_n(a, b) = P(\xi_n = b | \xi_{n-1} = a)$ - вероятности переходов. Этот набор данных однозначно определяет все распределения

Определение 4.6. Цепь Маркова называется однородной, если $p_n(a, b)$ не зависят от n .

То есть вероятности переходов не зависят от времени

Обозначение. $p_n(a, b) = p_{ab}$

Замечание. Интерпретация: есть частица, которая бегает по фазовому пространству. И мы в каждый момент фиксируем место, где находится частица.

Определение 4.7. Траектория: $\xi_0 = a_0, \xi_1 = a_1, \dots, \xi_n = a_n$

Теорема 4.5. $P(\xi_0 = a_0, \dots, \xi_n = a_n) = \pi_0(a_0)p_{a_0a_1}p_{a_1a_2} \dots p_{a_{n-1}a_n}$

Доказательство. Индукция по n

1. База индукция - определение π_0

2. Переход: $n - 1 \rightarrow n$

$$P(\xi_0 = a_0, \dots, \xi_n = a_n) = P(\xi_n = a_n | \xi_{n-1} = a_{n-1}, \dots, \xi_0 = a_0) \cdot P(\xi_{n-1} = a_{n-1}, \dots, \xi_0 = a_0) =$$

$$\underbrace{P(\xi_n = a_n | \xi_{n-1} = a_{n-1})}_{=p_{a_{n-1}a_n}} \cdot \pi_0(a_0)p_{a_0a_1} \dots p_{a_{n-2}a_{n-1}}$$

□

Теорема 4.6. Пусть $\pi_0 : Y \rightarrow [0, 1]$, т.ч. $\sum_{y \in Y} \pi_0(y) = 1$, $p : Y \times Y \rightarrow [0, 1]$, т.ч. $\sum_{y \in Y} p_{ay} = 1 \forall a \in Y$

Тогда существует такое пространство (Ω, \mathcal{F}, P) и последовательность $\xi_n : \Omega \rightarrow Y$, такая, что ξ_n цепь Маркова с начальным распределением π_0 и вероятностью перехода p_{ab}

Обозначение. $\pi_n = P_{\xi_n}$ и P - матрица $(p_{ab})_{a,b \in Y}$

Теорема 4.7. $\pi_n = \pi_0 P^n$

Доказательство. Индукция по n . Переход $n - 1 \rightarrow n$

$$\pi_n(b) = P(\xi_n = b) = \sum_{y \in Y} P(\xi_n = b | \xi_{n-1} = y) \cdot P(\xi_{n-1} = y) = \sum_{y \in Y} p_{yb} \pi_{n-1}(y)$$

То есть $\pi_n = \pi_{n-1} P$

□

Обозначение. $p_{ab}(n) = P(\xi_{n+k} = b | \xi_k = a)$ - вероятность перехода за n шагов

Определение 4.8. $\pi : Y \rightarrow [0, 1]$ - распределение на Y , если $\sum_{y \in Y} \pi(y) = 1$

Определение 4.9. π - стационарное распределение для цепи Маркова, если $\pi = \pi P$

Пример. Симметричное случайное блуждание на \mathbb{Z} , то есть $p = \frac{1}{2}$

Пусть π - стационарное распределение для этого блуждания

Тогда $\frac{1}{2}\pi(n-1) + \frac{1}{2}\pi(n+1) = \pi(n) \iff \pi(n) - \pi(n-1) = \pi(n+1) - \pi(n)$, то есть разность $\alpha = \pi(n) - \pi(n-1)$ не зависит от n

1. $\alpha > 0$, то $\pi(n) = n\alpha + \pi(0) \rightarrow +\infty$, так не бывает
2. $\alpha < 0$, то $\pi(n) = n\alpha + \pi(0) \rightarrow -\infty$, так тоже не бывает
3. $\alpha = 0$ и $\pi = \text{const}$, но так тоже не бывает

Теорема 4.8. Эргодическая теорема Маркова

ξ_n - конечная цепь Маркова и $p_{ab} > 0 \forall a, b \in Y$

Тогда существует единственное стационарное распределение и $\pi(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ab}(n)$

Более того, $|\pi(b) - p_{ab}(n)| \leq cq^n$, где $q \in (0, 1)$

Доказательство. Доказательство с использованием теоремы Банаха о сжатии из матанализа

d - количество элементов в Y . Рассмотрим \mathbb{R}^d с нормой $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_d|$ - полное пространство

$S = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1, x_1, x_2, \dots, x_d \geq 0\}$ - замкнутое подмножество \mathbb{R}^d - полное

$T : S \rightarrow S$ и $T(x) = x^T P$, $\delta = \min_{a,b \in Y} p_{ab} > 0$

Проверяем, что T - сжатие с $\lambda = 1 - d\delta$

$$\begin{aligned} \|T_x - T_y\| &\stackrel{z=x-y}{=} \|T_z\| = \sum_{j=1}^d |(T_z)_j| = \sum_{j=1}^d \left| \sum_{k=1}^d z_k p_{kj} \right| = \sum_{j=1}^d \left| \sum_{k=1}^d z_k (p_{kj} - \delta) + \delta \sum_{k=1}^d z_k \right| \leq \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |z_k| (p_{kj} - \delta) \\ &= \sum_{k=1}^d |z_k| \underbrace{\sum_{j=1}^d (p_{kj} - \delta)}_{=1-\delta d=\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^d |z_k| = \lambda \|x - y\| \end{aligned} \quad \square$$

Замечание. Пусть ξ_n - конечная цепь Маркова, $m \in \mathbb{N}$, т.ч. $p_{ab}(m) > 0 \forall a, b \in Y$

Тогда существует единственное стационарное распределение

Определение 4.10. Состояние b достижимо из a , если $\exists n \in \mathbb{N}$, т.ч. $p_{ab}(n) > 0$

Определение 4.11. Состояния a и b сообщающиеся, если a достижимо из b , а b достижимо из a

Определение 4.12. Состояние a существенное, если $\forall b$, достижимого из a - состояния a и b сообщающиеся

Обозначение. $f_a(n) = P(\xi_n = a | x_{n-1} \neq a, \xi_{n-2} \neq a, \dots, \xi_1 \neq a, \xi_0 = a)$ - вероятность, стартовав из a , впервые вернуться назад на n -ном шаге.

$F_a = \sum_{n=1}^{\infty} f_a(n)$ - вероятность возврата назад в a

Определение 4.13. a - возвратное состояние, если $F_a = 1$

Определение 4.14. a - нулевое состояние, если $p_{aa}(n) \rightarrow 0$

Теорема 4.9. Критерий возвратности

a - возвратное $\iff (*) = P_a = \sum_{n=1}^{\infty} p_{aa}(n)$ расходится

И если a не возвратное, то $F_a = \frac{P_a}{1+P_a}$

Лемма. $c_n \geq 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = +\infty$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = +\infty$

Доказательство. Берём n , т.ч. $\sum_{k=0}^n c_k > A$, а $\sum_{k=1}^n \rightarrow_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^n c_k$. Тогда $\underbrace{\sum_{k=0}^n c_k x^k}_{\leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} > A - 1$

при x близких к 1 □

Доказательство. Теоремы

Давайте считать, что $p_{aa}(0) = 1$ и $f_a(0) = 0$

$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_a(n) z^n$, сходится при $|z| \leq 1$

$\mathcal{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{aa}(n) z^n$, сходится при $|z| < 1$

$p_{aa}(n) = \sum_{k=0}^n f_a(k) p_{aa}(n-k)$ - верно при $n \geq 1$

Тогда $\mathcal{P}(z) = \mathcal{F}(z)\mathcal{P}(z)$ - почти верное равенство, надо ещё подкорректировать при z^0 . Получим $\mathcal{P}(z) = \mathcal{F}(z)\mathcal{P}(z) + 1 \implies \mathcal{F}(z) = \frac{\mathcal{P}(z)-1}{\mathcal{P}(z)}$. Давайте устремим $z \rightarrow 1$

$$\underbrace{\lim_{z \rightarrow 1-} \mathcal{F}(z)}_{=F_a} = \lim_{z \rightarrow 1-} \frac{\mathcal{P}(z)-1}{\mathcal{P}(z)} \stackrel{\text{если } (*) \text{ сходится}}{=} \frac{P_a}{P_a+1}.$$

А если расходится, то смотрим на $\underbrace{(1 - \mathcal{F}(z))}_{\rightarrow 1-F_a} \underbrace{\mathcal{P}(z)}_{\rightarrow 1+P_a} = 1$. Отсюда получаем, что $F_a = 1$ □

Следствие. Если a не возвратное $\implies a$ - нулевое

Теорема 4.10. Теорема солидарности

a и b сообщающиеся состояния

Тогда они возвратны/не возвратны (нулевые/не нулевые) одновременно

Доказательство. a и b сообщающиеся, значит $\exists j, k \in \mathbb{N} : p_{ab}(j) > 0$ и $p_{ba}(k) > 0$

$$p_{aa}(n+j+k) \geq p_{ab}(j)p_{bb}(n)p_{ba}(k) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} p_{aa}(n+j+k) \geq p_{ab}(j)p_{ba}(k) \sum_{n=1}^{\infty} p_{bb}(n)$$

Отсюда всё следует, потому что:

Если $p_{aa}(n+j+k) \rightarrow 0$, то $p_{bb}(n) \rightarrow 0$ □

Теорема 4.11. ЗБЧ для цепей Маркова

$\varepsilon > 0$ и цепь удовлетворяет условию теоремы Маркова, π - стационарное распределение

Тогда

$$1. P \left(\left| \frac{\nu_a(n)}{n} - \pi(a) \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0$$

$$2. P \left(\left| \frac{\nu_{ab}(n)}{n} - \pi(a)p_{ab} \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0$$

Здесь $\nu_a(n)$ - количество значений ξ_1, \dots, ξ_n , равных a

$\nu_{ab}(n)$ - количество пар ab на соседних позициях

Доказательство. Пусть $\eta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_k = a \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\tilde{\eta}_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_k = a \text{ и } \xi_{k+1} = b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда $\nu_a(n) = \eta_1 + \dots + \eta_n$ и $\nu_{ab}(n) = \tilde{\eta}_1 + \dots + \tilde{\eta}_n$

Посмотрим на $\mathbb{E}\eta_k = P(\xi_k = a) = \sum_{y \in Y} \pi_0(y) \underbrace{p_{ya}(k)}_{\rightarrow \pi(a)} \rightarrow \pi(a)$

Значит $\mathbb{E} \frac{\nu_a(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\eta_k \rightarrow \pi(a)$

По аналогии считаем для второй ситуации:

$\mathbb{E}\tilde{\eta}_k = P(\xi_k = a, \xi_{k+1} = b) = \sum_{y \in Y} \pi_0(y) \underbrace{p_{ya}(k)}_{\rightarrow \pi(a)} p_{ab} \rightarrow \pi(a)p_{ab}$

$\mathbb{E} \frac{\eta_{ab}(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\tilde{\eta}_k$

Пишем Чебышёва: $P\left(\left|\frac{\nu_a(n)}{n} - \mathbb{E} \frac{\nu_a(n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}\left(\frac{\nu_a(n)}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}\nu_a(n)}{\varepsilon^2 n^2}$

$\mathbb{D}\nu_a(n) = \mathbb{D}(\sum_{k=1}^n \eta_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mathbb{D}\eta_k}_{\leq n} + 2 \sum_{i < j} cov(\eta_i, \eta_j)$

Давайте как-то оценим ковариацию:

$cov(\xi_i, \xi_j) = \mathbb{E}(\eta_i, \eta_j) - \mathbb{E}\eta_i \mathbb{E}\eta_j$

Здесь $\mathbb{E}(\eta_i \eta_j) = P(\xi_i = a, \xi_j = a) = \sum_{y \in Y} \pi_0(y) \underbrace{p_{ya}(i)}_{\pi(a) + \mathcal{O}(\lambda^i)} \underbrace{p_{aa}(j-i)}_{\pi(a) + \mathcal{O}(\lambda^{j-i})} = \pi^2(a) + \mathcal{O}(\lambda^i) + \mathcal{O}(\lambda^{j-i}) +$

$\mathcal{O}(\lambda^i)$

$\mathbb{E}\eta_i = P(\xi_i = a) = \sum_{y \in Y} \pi_0(y) \underbrace{p_{ya}(i)}_{\pi(a) + \mathcal{O}(\lambda^i)} = \pi(a) + \mathcal{O}(\lambda^i)$

Мы поняли, что $cov(\eta_i, \eta_j) = \mathcal{O}(\lambda^i) + \mathcal{O}(\lambda^{j-i})$ и эти ковариации надо просуммировать

$\sum_{i < j} cov(\eta_i, \eta_j) = \sum_{i < j} (\mathcal{O}(\lambda^i) + \mathcal{O}(\lambda^{j-i})) = \mathcal{O}(n)$

Осталось заметить, что $\left\{\left|\frac{\nu_a(n)}{n} - \pi(a)\right| \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|\frac{\nu_a(n)}{n} - \mathbb{E} \frac{\nu_a(n)}{n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$.

Мы полностью доказали первый пункт, во втором аналогично оценивается дисперсия \square

4.4. Случайные блуждания

Теорема 4.12. Рассмотрим блуждание по прямой

Блуждание возвратно $\iff p = \frac{1}{2}$

Доказательство. Возвратность $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = +\infty$

$p_{00}(2n-1) = 0$

$p_{00}(2n) = p^n(1-p)^n \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} (p(1-p))^n$

Если $p \neq \frac{1}{2}$, то $4p(1-p) < 1$ и $p_{00}(2n) \leq C(4p(1-p))^n$ - сходящаяся геометрическая прогрессия

Если $p = \frac{1}{2}$, то $p_{00}(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \implies$ ряд расходится \square

Замечание. Симметричное блуждание по \mathbb{Z} . Возьмём η_k независимые одинаково распределённые случайные величины, т.ч. $P(\eta_k = a) = P(\eta_k = -a)$ и $\xi_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$

Доказательство. Если η_1 имеет матожидание, то блуждание возвратно \square

Доказательство. G - производящая функция для η_1 . То есть $G(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(\eta_1 = k) z^k$

$G_{\xi_n}(z) = (G(z))^n$. Нас интересует $p_{00}(n) = P(\xi_n = 0)$ - коэффициент при z^0 в G_{ξ_n} - подставить 0 в ряд Лорана не можем. Зато умеем считать вычет:

$$p_{00}(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{G^n(z)}{z} dz$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{G^n(z) x^n}{z} dz \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n G^n(z)}_{= \frac{1}{1-xG(z)}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-xG(e^{it})} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1-xG(e^{it})} \stackrel{*}{=}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1-x+o(xt)} \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1-x+xt} = \frac{1}{\pi} \frac{\ln(1-x+xt)}{x} \bigg|_{t=0}^{t=\pi} \rightarrow +\infty$$

$$(*) : G(1+s) = G(1) + G'(1) \cdot s + o(s) = 1 + o(s). \text{ Тогда } G(e^{it}) = 1 + o(e^{it} - 1) = 1 + o(t) \quad \square$$

Замечание. Все состояния нулевые

$$\underbrace{p_{00}(n)}_{?: \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{G^n(z)}{z} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(z)}{z} dz$$

$$|G(z)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\eta = n) z^n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\eta = n) |z|^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\eta = n) = 1$$

$$|\sum P(\eta = n) e^{int}| = \sum P(\eta = n)$$

Если $P(\eta = n) > 0$ и $P(\eta = k) > 0$, то $\arg e^{int} = \arg e^{ikt}$. То есть $nt = kt + 2\pi m \implies t = 2\pi \frac{m}{n-k} \in \pi\mathbb{Q}$ - счётное множество. Значит множество точек, в которых знак нестрогий - счётно.

Значит $G^n(z) \rightarrow 0$ почти везде

Теорема 4.13. Теорема По́йя о возвращении

Рассматриваем решётку \mathbb{Z}^d , вероятность перейти в соседние узлы $\frac{1}{2d}$, то есть аналог случайного блуждания на прямой

Такое блуждание возвратно $\iff d \leq 2$

Доказательство. 1. $d = 1$ обсуждали

2. $d = 2$. По критерию возвратности, нам достаточно доказать, что $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = +\infty$

$p_{00}(n) = 0$, если n нечётное.

Повёрнем оси на 45° . Исходные оси (x, y) , а повёрнутые (x', y')

То есть $P(x' = x' + 1, y' = y' + 1) = P(x = x + 1) = \frac{1}{4} = P(x' = x' + 1) \cdot P(y' = y' + 1)$

$$P(x' = x' + 1) = P(x = x + 1) + P(y = y - 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(y' = y' + 1) = \frac{1}{2}$$

То есть блуждание проекций на оси x' и y' независимы. Значит $p_{00}(n) = \left(\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \right)^2 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^2 = \frac{1}{\pi n}$ - а такой ряд сходится

3. $d = 3$

Если n нечётно, то всё ещё $p_{00}(n) = 0$

По каждой координате мы делаем одинаковое число шагов в обоих направлениях:

$$p_{00}(2n) = \sum_{i+j \leq n} \binom{2n}{i, i+j, j, n-i-j, n-i-j} \cdot \frac{1}{6^{2n}} = \sum_{i+j \leq n} \frac{(2n)!}{(i!j!(n-i-j)!)^2} \cdot \frac{1}{6^{2n}} = \binom{2n}{n} \sum_{i+j \leq n} \left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right)^2 \cdot \frac{1}{6^{2n}} = \leq^*$$

$$\underbrace{\frac{\binom{2n}{n}}{6^{2n}} \cdot 3^n \cdot \max_{i,j, n-i-j} \binom{n}{i, j, n-i-j}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n \cdot \frac{1}{3^n}}}}$$

При этом $\sum_{i+j \leq n} \left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right) = (1 + 1 + 1)^n = 3^n \implies \sum_{i+j \leq n} \left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right)^2 \leq \max_{i,j, n-i-j} \binom{n}{i, j, n-i-j} \cdot \sum_{i+j \leq n} \left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right) \sim (*)$

Осталось разобраться с максимумом: $\max \sim 3^n \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\pi n}$ - упражнение

$$(*) \sim \frac{3\sqrt{3}}{2(\pi n)^{\frac{3}{2}}} \implies \text{ряд сходится}$$

4. Что делать с размерностью ≥ 4 . Выберем первые 3 координаты и будем следить что происходит с проекцией на эти координаты. Если мы двигаемся по ним - происходит смещение. Если по другим, то мы стоим на месте. Эти остановки не бывают бесконечно долгими, то есть получили блуждание по 6 направлениям.

То есть проекция возвращается назад с вероятностью < 1 , а значит и глобальное тоже не возвратное

□

Замечание. Случайное блуждание с отталкивающим экраном

Есть блуждание по прямой и где-то стоит отталкивающий экран. То есть если мы врезались в стенку, то отскочили от неё с вероятностью 1

Замечание. Случайное блуждание с поглощающим экраном

Есть блуждание по прямой, где-то стоит экран, попав в него, мы попадаем в петлю, из которой не выбираемся

Пример. Задача о разорении

A монет у первого, B монет у второго

Это случайное блуждание с поглощающими экранами. Блуждание по прямой, поглощающие экраны в точках $-A$ и B . Между ними мы смещаемся с вероятностями p и $q = 1 - p$

$\beta_k(x)$ - вероятность оказаться в B через k шагов, если сейчас наша фишка находится в x

Переходы: $x \xrightarrow{p} x + 1, x \xleftarrow{q} x - 1$

То есть $\beta_k(x) = p\beta_{k-1}(x + 1) + q\beta_{k-1}(x - 1)$

А ещё $\beta_k(x) \leq \beta_{k+1}(x) \leq 1$

Пусть $\beta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k(x)$

Тогда $\beta(x) = p\beta(x + 1) + q\beta(x - 1)$ - рекуррентна. А ещё $\beta(B) = 1$ и $\beta(-A) = 0$

Общее решение $pt^2 - t + q = 0$, здесь корни 1 и $\frac{q}{p}$

Тогда $\beta(x) = a + b \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^x$

$$\beta(-A) = a + b \left(\frac{q}{p}\right)^{-A} \implies a = -b \left(\frac{q}{p}\right)^{-A}$$

$$\beta(B) = a + b \left(\frac{q}{p}\right)^B = b \left(\frac{q}{p}\right)^B - b \left(\frac{q}{p}\right)^{-A}, \text{ откуда } a \text{ и } b \text{ выражаются}$$

4.5. Процесс восстановления

Определение 4.15. ξ_1, ξ_2, \dots - неотрицательные, одинаково распределённые независимые случайные величины

$$S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

ξ_i - время работы прибора i , после его поломки, его мгновенно меняют на следующий

$\Phi(t) = P(S_n \leq t)$ - функция распределения для S_n

$\nu(t)$ - количество приборов, использованных на момент времени t . То есть $\nu(t) = n$, если $S_{n-1} \leq t < S_n$

$$P(\nu(t) = n) = P(S_{n-1} \leq t < S_n) = \Phi_{n-1}(t) - \Phi_n(t)$$

Функция восстановления $\mathcal{N}(t) = \mathbb{E}\nu(t)$

Теорема 4.14. $\mathcal{N}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)$, если ряд в правой части сходится

Доказательство. $\mathcal{N}(t) = \mathbb{E}\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(\nu(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(\Phi_{n-1}(t) - \Phi_n(t))$ - нужно понять, что это правая часть в утверждении теоремы

Смотрим на частичную сумму: $\sum_{n=1}^m n(\Phi_{n-1} - \Phi_n) = (\Phi_0 - \Phi_1) + 2(\Phi_1 - \Phi_2) + \dots + m(\Phi_{m-1} - \Phi_m) = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots + \Phi_{m-1} + \underbrace{m\Phi_m}_{\xrightarrow{?} 0}$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)$ сходится, тогда $\underbrace{\Phi_n + \Phi_{n+1} + \dots + \Phi_{2n}}_{\geq n\Phi_{2n}} \rightarrow 0$, а ещё $\Phi_{n+1} \leq \Phi_n$. А значит $\Phi_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ □

Дальше все ξ_n будут целозначные

Замечание. $\Phi_n(t) = \sum_{k \leq t} P(S_n = k)$

$$\mathcal{N}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \leq t} P(S_n = k) = \sum_{k \leq t} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = k)}_{=q_k}$$

Пример. Прибор либо работает единицу времени с вероятностью p , либо мгновенно ломается с вероятностью $q = 1 - p$. Считаем, что $0 < p \leq 1$

$$P(S_n = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\leq n^k} p^k q^{n-k} \leq q^n \left(\frac{np}{q}\right)^k$$

$$\text{Тогда } q_k = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n \left(\frac{np}{q}\right)^k = \frac{q}{1-q} \left(\frac{np}{q}\right)^k = n^k \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} < +\infty$$

Теорема 4.15. Если $P(\xi_1 = 0) < 1$, то $\mathcal{N}(t)$ конечно

Доказательство. $\{\xi_1 = 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\xi_1 \leq \frac{1}{m}\} \implies P(\xi_1 = 0) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(\xi_1 \leq \frac{1}{m}) \implies \exists m : q = P(\xi_1 \leq \frac{1}{m}) < 1$ - потому что предел < 1

$$\tilde{\xi}_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_k \leq \frac{1}{m} - \text{это с вероятностью } q \\ 1, & \text{если } \xi_k > \frac{1}{m} \end{cases}$$

Поэтому из примера $\tilde{\mathcal{N}}(t)$ конечно

$$\tilde{\xi}_k \leq m\xi_k \implies \tilde{S}_n \leq mS_n \implies P(\tilde{S}_n \leq t) \geq P(S_n \leq \frac{t}{m}) \implies \tilde{\Phi}_n(t) \geq \Phi_n\left(\frac{t}{m}\right)$$

$$\text{Значит } \mathcal{N}\left(\frac{t}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{t}{m}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_n(t) = \tilde{\mathcal{N}}(t) < +\infty \implies \mathcal{N}(t) \text{ конечна при всех } t \quad \square$$

Определение 4.16. ξ имеет решётчатое распределение с шагом $h \geq 0$, если $\xi(\Omega) \subset a + h\mathbb{Z}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, а для больших h это неверно

Замечание. Рассмотрим целочисленную случайную величину с шагом решётки 1.

Тогда $|G_\xi(z)| < 1$, если $|z| \leq 1$ и $z \neq 1$

$$|G_\xi(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n) z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n) |z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n) = 1$$

Правое неравенство обращается в равенство, если $|z| = 1$

Левое неравенство обращается в равенство, если модуль суммы равен сумме модулей, то есть все z имеют один и тот же аргумент $\implies z = e^{it}$ и $z^n = z^{int}$. Тогда $nt - mt = 2\pi k \implies n - m = \frac{2\pi}{t} \cdot k < \frac{2\pi}{t} \mathbb{Z}$, а так как $0 < t < 2\pi$, то мы получили решётку с $h > 1$

Теорема 4.16. Теорема восстановления

$$\mathcal{N}(t+s) - \mathcal{N}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{S}{\mathbb{E}\xi_1}$$

Если:

1. ξ имеет нерешетчатое распределение
2. ξ имеет решетчатое распределение с шагом h и $S = kh$, где $k \in \mathbb{N}$

Доказательство. Доказываем лишь для целозначных случайных величин ξ_k , тогда можем считать, то $h = 1$

$$\text{Тогда достаточно доказать, что } \underbrace{\mathcal{N}(t+1) - \mathcal{N}(t)}_{= \sum_{k \leq t+1} q_k} \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}\xi_1} \quad = \sum_{k \leq t} q_k$$

То есть нам надо доказать, что $q_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}\xi_1}$

$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$. Поймём, что $Q(z) = \frac{1}{1-G(z)}$, где $G(z)$ - производящая функция для ξ_1

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = k) z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P(S_n = k) z^k}_{\text{производящая функция для } S_n} = \sum_{n=0}^{\infty} G^n(z) = \frac{1}{1-G(z)} - \text{верно}$$

при $|z| \leq 1$ и $z \neq 1$

Лемма. $q_n - q_{n-1} \rightarrow 0$

Доказательство. Производящая функция для $q_n - q_{n-1} = (1-z)Q(z) = \frac{1-z}{1-G(z)}$

$$\text{Значит } q_n - q_{n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \underbrace{\frac{1-z}{1-G(z)}}_{\text{непрерывна в } |z| \leq 1} \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1-z}{1-G(z)} \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1-e^{it}}{1-G(e^{it})}}_{\text{непрерывна, ограничена}} e^{-int} dt$$

лемма Римана-Лебега $\xrightarrow{0}$

\square

Лемма. $\sum_{k=0}^n q_{n-k} r_k = 1$, где $r_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} P(\xi_1 = j)$

Доказательство. $Q(z) \frac{1-G(z)}{1-z} = \frac{1}{1-z}$

Посмотрим на коэффициенты при z^n в левой части равенства - это свёртка. То есть достаточно понять, что r_k появляются из $\frac{1-G(z)}{1-z}$

$$\frac{1-G(z)}{1-z} = \frac{G(1)-G(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(\xi_1=n)(1-z^n)}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_1 = n) \cdot (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k \quad \square$$

Следствие. $q_n \leq \frac{1}{r_0}$

Выберем сходящуюся подпоследовательность $q_{k_m} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} s \implies q_{k_m \pm l} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} s$

$$\text{Мы знаем, что } 1 = \sum_{k=0}^n q_{n-k} r_k \geq \sum_{k=0}^N q_{n-k} r_k \rightarrow s \sum_{k=0}^N r_k \implies 1 \geq s \sum_{k=0}^N r_k \rightarrow s \mathbb{E} \xi_1 \implies \frac{1}{\mathbb{E} \xi_1} \geq s$$

1. Если $\mathbb{E} \xi_1 = +\infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = \mathbb{E} \xi_1 = +\infty \implies \sum_{k=0}^N r_k$ сколь угодно большая, тогда $s = 0$

Можно считать, что $s = \overline{\lim} q_k$, а ещё $q_k \geq 0 \implies \underline{\lim} q_k \geq 0 \implies \lim = 0$

2. Если $\mathbb{E} \xi_1 < +\infty$, тогда $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = \mathbb{E} \xi_1 < +\infty \implies r_k \rightarrow 0 \implies r_k$ ограничены, $r_k \leq M$

$$1 = \sum_{k=0}^n q_{n-k} r_k = \sum_{k=0}^N q_{n-k} r_k + \underbrace{\sum_{k=N+1}^n q_{n-k} r_k}_{M \sum_{k=N+1}^n r_k < \varepsilon M} < \varepsilon M + \sum_{k=0}^N q_{n-k} r_k \rightarrow_{n=k_m} \varepsilon M + s \sum_{k=0}^N r_k \leq \varepsilon M + s \mathbb{E} \xi_1 \implies 1 \leq s \mathbb{E} \xi_1 \implies \underline{\lim} \geq \frac{1}{\mathbb{E} \xi_1}$$

А ещё $\sum_{k=0}^N q_{n-k} r_k \rightarrow s \sum_{k=0}^N r_k \implies 1 \geq s \sum_{k=0}^N r_k \rightarrow s \mathbb{E} \xi_1 \implies \frac{1}{\mathbb{E} \xi_1} \geq s$ - получили неравенство и на верхний предел

□

Следствие. $\frac{\mathcal{N}(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E} \xi_1}$

Доказательство. Теорема Штольца

□

Замечание. Парадокс времени восстановления

$$P(\xi_{\nu(t)} > x) \geq P(\xi_1 > x)$$