

# Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

21 июня 2023 г.

## Содержание

<b>1. Элементарная теория вероятностей</b>	<b>1</b>
1.1 Основные понятия . . . . .	2
1.2 Предельные теоремы для схем Бернулли . . . . .	5
<b>2. Общая теория вероятностей</b>	<b>9</b>
2.1 Колмогоровская модель теории вероятности . . . . .	10
2.2 Случайные величины . . . . .	11
2.3 Совместное распределение . . . . .	14
2.4 Математическое ожидание и дисперсия . . . . .	17
2.5 Сходимость последовательностей случайных величин . . . . .	22
2.6 Производящие функции . . . . .	27
<b>3. Метод характеристических функций</b>	<b>28</b>
3.1 Характеристические функции случайных величин . . . . .	29
3.2 Сходимость по распределению . . . . .	33
3.3 Центральная предельная теорема . . . . .	36
3.4 Большие отклонения . . . . .	38
<b>4. Дискретные случайные процессы</b>	<b>39</b>
4.1 Условные математические ожидания . . . . .	40
4.2 Ветвящиеся процессы . . . . .	42
4.3 Цепи Маркова . . . . .	43
4.4 Случайные блуждания . . . . .	47
4.5 Процесс восстановления . . . . .	50

# 1. Элементарная теория вероятностей

## 1.1. Основные понятия

**Определение 1.1.**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

**Определение 1.2.** Событие  $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

**Свойства.** вероятности

1.  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(A) \in [0, 1]$
2. Если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. 
$$\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B \setminus (A \cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ , где  $\bar{A} = \Omega \setminus A$
5.  $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \cdots \cap A_m)$  – формула включений-исключений.

**Доказательство.** Индукция по  $m$ .

База  $m = 2$ .

Переход  $m \rightarrow m + 1$ :

$$B_j = A_j \cup A_{m+1}$$

$$P(\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1})$$

$$A_{m+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_m)}, \text{ где } B_i := A_i \cap A_{m+1}.$$

$$A_{m+1}.$$

□

6.  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$   
 $P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \leq \sum_{j=1}^m P(A_j)$

**Определение 1.3.** Условная вероятность.

$$B \neq \emptyset, P(B) > 0.$$

Знаем, что произошло событие  $B$ , хотим узнать вероятность наступления  $A$ .

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Свойства.** 1.  $P(A|A) = 1$ , если  $B \subset A$ , то  $P(A|B) = 1$

2. Если  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , то  $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

$$\text{В частности: } P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

**Замечание.**  $P(A|B) + P(A|\bar{B})$  не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик,  $B$  – выпало четное число,  $A$  – выпало кратное трем.

$$P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

**Теорема 1.1. Формула полной вероятности.**

Пусть  $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ ,  $P(B_j) > 0$ .

Тогда  $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

**Доказательство.**  $\sum_{j=1}^m \underbrace{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}_{= \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}} = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = P(A)$  □

**Пример.** Пусть есть 2 урны с шариками:

I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II,  $P(\text{вынули белый}) = ?$

$A$  – вынули из II белый шар.

$B_0, B_1, B_2$ , где  $B_j$  – переложили  $j$  белых шаров из I в II.

Тогда  $P(A|B_0) = \frac{5}{12}$ ,  $P(A|B_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A|B_2) = \frac{7}{12}$ .

$$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

$$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

Подставляем в формулу:

$$P(A) = \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{28} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{28} = \frac{23}{48}$$

**Теорема 1.2. Формула Байеса.**

Пусть  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ , тогда  $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

**Доказательство.** Расписываем  $P(A|B)$ , получаем в правой части:  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$ . □

**Теорема 1.3. Байеса.**

Пусть  $P(A) > 0$ ,  $P(B_j) > 0$ ,  $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ , тогда

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_m)P(B_m)}$$

**Пример.** Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая  $P(\text{орла}) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\text{решка}) = \frac{2}{3}$ ). Взяли наугад монету, подбросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

$A$  – выпал орел,  $B$  – монета симметричная ( $\bar{B}$  – монета кривая).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

**Определение 1.4. Независимые события.**

**Рассуждения:**  $A$  не зависит от  $B$ , если  $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

**Def:**  $A, B$  независимые события, если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Определение 1.5.** События  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – независимы в совокупности, если

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \text{ – для любых индексов } i_j.$$

**Замечание.** Независимость в совокупности  $\implies$  попарная независимость.

Наоборот неверно.

**Пример.** Есть два игральных кубика.

$A$  – на первом кубике выпало четное число.

$B$  – на втором выпало четное число.

$C$  – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары  $(i, j)$ , где  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\#\Omega = 36$ .

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C.$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$ , остальные равенства тоже выполняются  $\implies$  попарная независимость.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \implies \text{нет независимости в совокупности.}$$

**Упражнение.** Д-ть, что  $A_1, \dots, A_m$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$ , где  $B_j = A_j$  или  $\overline{A_j}$  (все  $2^m$  равенств).

**Замечание.** Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть  $p_1, \dots, p_n : \sum_{i=1}^n p_i = 1, \forall i : p_i \geq 0$ .

$$P(A) = \sum_{j: \omega_j \in A} p_j.$$

**Теорема 1.4. Схема Бернулли.**

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$$P(\text{орел}) = p, 0 \leq p \leq 1$$

$$P(\text{решка}) = 1 - p$$

Бросаем монету  $n$  раз, получаем последовательность исходов:

$$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : x_j = 0 \text{ или } 1.$$

$$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n), P(\{\omega\}) = p^{\#i: x_i=1} \cdot q^{\#i: x_i=0} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n-\sum x_i}$$

Хотим узнать:

$$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(i\text{-ое подбрасывание}) = P(\text{орел}) = p \text{ – независимые в совокупности по } i = 1, 2, \dots, n.$$

**Теорема 1.5. Полиномиальная схема.**

$$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1.$$

$$P(x_i = k) = p_k, \text{ где } x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$P(\{\omega\}) = p_1^{\#\{i: x_i=1\}} \cdot \dots \cdot p_m^{\#\{i: x_i=m\}}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

$$P(k_1 \text{ раз выпало } 1, k_2 \text{ раз выпало } 2, \dots) = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}}_{= \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$$

### Теорема 1.6. Эрдёша-Мозера

Рассмотрим турнир на  $n$  команд. При каком наибольшем  $k$  можно всегда выбрать команды  $A_1, A_2 \dots A_k$ , так, что  $A_i$  выиграла у  $A_j$ , если  $i < j$ ? При  $k \leq 1 + [2 \log_2 n]$

**Доказательство.** Предположим, что  $k \geq 2 + [2 \log_2 n] > 1 + 2 \log_2 n$ . Хотим показать, что при таких  $k$  точно найдётся турнир, в котором нельзя выбрать  $k$  команд.

Рассмотрим случайный турнир (Всего встреч  $\binom{n}{2}$ , тогда  $2^{\binom{n}{2}}$  разных турниров. Случайный - берём из этой кучи наугад).

$$P(A \text{ выиграла у } B) = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим  $A_1, A_2, \dots, A_k$  команды.

1.  $P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ подходят}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$
2.  $P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ можно переименовать, так, что они подошли}) \leq \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$
3.  $P(\text{какие-то } k \text{ команд подошли}) \leq \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$

Нужно понять, что если  $k \geq 2 + [2 \log_2 n]$ , то  $\binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$ .

$$\text{Действительно, } \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{(2^{\frac{k-1}{2}})^k} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k$$

Мы знаем, что  $k > 1 + 2 \log_2 n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2} > \log_2 n \Rightarrow 2^{\frac{k-1}{2}} > n$ . И тогда  $\left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k < 1$ . Это значит, что вероятность, что никакие команды не подходят - положительная, значит есть турнир, в котором  $k$  команд выбрать нельзя.  $\square$

## 1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли

**Определение 1.6.** Схема Бернулли с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ .  $S_n$  - число успехов при  $n$  испытаниях.  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Что будет больше  $P(S_{1000} = 220)$  при  $p = \frac{1}{5}$  или  $P(S_{2000}) = 360$  при  $p = \frac{1}{6}$ . Точные вычисления дают 0.008984 и 0.006625 соответственно.

### Теорема 1.7. Пуассона

Схема Бернулли с  $n$  испытаниями и вероятностью успеха  $p_n$  - зависит от  $n$ . Если  $np_n \rightarrow \lambda > 0$ . Тогда  $P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

**Замечание.** Если  $np_n = \lambda$ , то теорема верна при  $k = o(\sqrt{n})$

**Доказательство.**  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} (1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-p)^{n-k}$ .

Осталось показать, что  $(1-p)^{n-k} \sim e^{-\lambda}$ . Прологарифмируем:  $\ln(1-p)^{n-k} = (n-k) \ln(1-p) \sim -np \sim -\lambda$

Доказательство замечания:

Нам нужно показать, что  $n(n-1)\dots(n-k+1) \sim n^k$ , все остальные переходы будут верны.  

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \underbrace{\geq}_{(*)} 1 - \frac{1}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \rightarrow 1$$

(\*) Неравенство  $(1-x_1)\dots(1-x_k) \geq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k$  при  $0 \leq x_i \leq 1$  - индукция.  $\square$

### Теорема 1.8. Прохорова

Если  $\lambda = np$ , то  $\sum_{k=0}^{+\infty} |P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda)$

**Пример.** Игра в рулетку: 36 чисел и ноль.

$$p = \frac{1}{37}, n = 111, np = 3 = \lambda.$$

$$P(S_{111} = 3) = \binom{111}{3} \left(\frac{1}{37}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{111-3} = 0.227127$$

$$\text{Из Пуассона } \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.224$$

Видим, что приближение хорошее.

$$P(\text{ставка удачная хотя бы 4 раза}) = 1 - P(S_{111} = 0) - P(S_{111} = 1) - P(S_{111} = 2) - P(S_{111} = 3) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.352754$$

А по формулам 0.352768

### Теорема 1.9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Схема Бернулли с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ ,  $q = 1 - p$ ,  $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ , где  $k$  зависит от  $n$ , и  $n$  меняется.  $|x| \leq T$  - при  $n \rightarrow +\infty$  и любых  $k$ . Тогда:

$$P(S_n = k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

**Доказательство.**

$$1. k = np + x\sqrt{npq} \geq np - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$2. n - k = nq - x\sqrt{npq} \geq nq - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Напишем формулу Стирлинга ( $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$ ):

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi (n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \cdot \sqrt{2\pi \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) n}}.$$

$$\text{Заметим, что } \frac{k}{n} = p + \frac{x\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \rightarrow p$$

$$\text{и } \frac{n-k}{n} \rightarrow q$$

Поэтому остаётся доказать, что  $\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}}{p^k q^{n-k}} \rightarrow e^{\frac{x^2}{2}}$ . Прологарифмируем:

$$\text{Получим: } k \ln \frac{k}{n} + (n-k) \ln \frac{n-k}{n} - k \ln p - (n-k) \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

Введём обозначения:  $\alpha = \frac{k}{n} \rightarrow p, \beta = \frac{n-k}{n} \rightarrow q$ . Тогда  $k = n\alpha, n-k = n\beta$  и всё перепишется в виде:

$$n\alpha \ln \alpha + n\beta \ln \beta - n\alpha \ln p - n\beta \ln q = \underbrace{n\alpha \ln \frac{\alpha}{p} + n\beta \ln \frac{\beta}{q}}_{(*)} \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

Мы знаем, что  $\frac{\alpha}{p} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}$  и  $\frac{\beta}{q} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}$  - из первых двух тождеств в доказательстве.

Напишем Тейлора:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\ln \frac{q}{p} = \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}) = x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{np} + o(\frac{1}{n})$$

$$\ln \frac{p}{q} = \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}) = -x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{p}{nq} + o(\frac{1}{n})$$

$$\text{Тогда } (*) = x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2q - \frac{1}{2}x^2q + o(\frac{1}{n}) - x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2p - \frac{1}{2}x^2p + o(\frac{1}{n}) = x^2(\frac{q}{2} + \frac{p}{2}) + o(1) = \frac{x^2}{2} + o(1) \quad \square$$

**Замечание.** Если  $\varphi(n) = o(n^{\frac{2}{3}})$  и  $|k - np| \leq \varphi(n)$ , то теорема тоже верна

**Пример.** Всё та же рулетка.  $n = 222, k = 111$ . Пытаемся ставить на четное/нечётное(кроме 0).  
 $p = \frac{18}{37}$

$$P(S_{222} = 111) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0.049395 \dots$$

Если считать точно, то получим 0.0493228...

**Теорема 1.10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа**

$$0 < p < 1. P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Стремление равномерно по  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 1.11. Берри-Эссеена**

$$\text{Обозначение: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{2}$$

**Замечание.** Константа лучше, чем  $\frac{c}{\sqrt{n}}$  не бывает.

$$\text{Замечание. } P(a < S_n \leq b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Отсюда получили, что лучше всего писать полуцелые  $a$  и  $b$ .

**Замечание.** Если  $p$  или  $q$  очень маленькие, то произведение  $np$  маленькое и оценка будет плохой. В таких случаях хорошо использовать Пуассона. Муавра-Лаплас же хорош, когда  $np$  большое.

**Пример.**  $p = q = \frac{1}{2}$ . Вопрос:  $P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ .

$$\text{Но } P(S_{2n} < n) = P(S_{2n} > n).$$

$$\text{Тогда } P(S_{2n} \leq n) = \frac{1 + P(S_{2n} = n)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{Муавра-Лаплас нам говорит, что } P(S_{2n} \leq n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

$$\text{Но } P(S_{2n} \leq n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

**Пример. Задача о театре**

Есть театр и 2 входа. У каждого входа расположен гардероб. В театре  $n = 1600$  мест. Хотим сделать размер гардероба как можно меньше, но чтобы переполнения случались как можно реже (не чаще, чем раз в месяц).

Пусть  $s$  мест в итоге в гардеробе.

За успех считаем ситуацию, когда человек вошел в театр и пошел в ближайший к нему гардероб (т.е. в ближайшем гардеробе было место, и человек не пошел в дальний гардероб). Пусть  $S_n$  – кол-во успешных испытаний.

Так как в каждый гардероб мы допускаем  $s$  мест, то кол-во успехов  $S_n \leq s$ .



$p = q = \frac{1}{2}$ . Нужно, чтобы  $n - c \leq S_n \leq c$ . И  $P(n - c \leq S_n \leq c) > \frac{29}{30}$  – т.е. хотя бы в 29 днях из 30 ближайший к каждому входу гардероб не переполняется.

$$P(n - c \leq S_n \leq c) = P\left(\frac{n-c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{c-\frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right) =$$

$$P\left(\frac{800-c}{20} \leq \frac{S_n-800}{20} \leq \frac{c-800}{20}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{800-c}{20}\right) - \Phi\left(\frac{c-800}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{800-c}{20}}^{\frac{c-800}{20}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2 \cdot \Phi_0\left(\frac{c-800}{20}\right) > \frac{29}{30}$$

$$\Phi_0\left(\frac{c-800}{20}\right) > \frac{29}{60} \implies c = 843.$$

### Пример. Случайное блуждание на прямой

Есть прямая, будем считать, что у нас блуждания исключительно по целым точкам.

В каждой точке подбрасываем монетку. С вероятностью  $p$  идём вперёд,  $q$  – идём назад.

$a_{n+1} = a_n + 1$  с вероятностью  $p$

$a_{n+1} = a_n - 1$  с вероятностью  $q$

$a_n \equiv n \pmod{2}$

Если представить, что шаг влево – это 0, а шаг вправо – это 1, то сдвиг из точки  $a_n$  будет определяться как  $2 \cdot x - 1$ , где  $x = 0, 1$  в зависимости от того, в какую сторону идем (т.е.  $a_{n+1} = a_n + (2 \cdot x - 1)$ ).

Тогда пусть  $S_n$  – кол-во единичек, тогда  $a_n = 2 \cdot S_n - n$ .

Пусть мы всегда стартуем с  $a_0 = 0$ , тогда определим, чему равна вероятность попасть за  $n$  шагов в точку  $k$  ( $a_n = k$ ):

$$P(a_n = k) = P(S_n = \frac{n+k}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv k \pmod{2} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

### Теорема 1.12. ван дер Вардена

Рассмотрим числа  $1, 2 \dots k$  и покрасим их в 2 цвета.

Тогда существует  $k_n$ , такое, что, если  $k > k_n$ , то при любой раскраске найдётся одноцветная  $n$ -членная арифметическая прогрессия.

### Теорема 1.13. Эрдеша-Радо

$$k_{n+1} \geq \sqrt{n \cdot 2^{n+1}}$$

**Доказательство.**  $A_1, A_2 \dots A_m$  – все арифметические прогрессии длины  $n + 1$  из чисел  $1, 2 \dots k$ .

С разностью 1 :  $k - n$  прогрессий.

С разностью 2 :  $k - 2n$  прогрессий.

...

С разностью  $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$  :  $k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n$  прогрессий

Тогда  $m = (k - n) + (k - 2n) + \dots + k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n = k \cdot \lfloor \frac{k}{n} \rfloor - n \cdot \frac{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor (\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)}{2} = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor (k - \frac{1}{2} n (\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)) < \frac{k}{n} (k - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{k}{n}) = \frac{k^2}{2n}$  – это оценка сверху.

$P(A_i \text{ - одноцветная}) = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$  (2 – выбор цвета).

$P(\text{какое-то } A_i \text{ - одноцветно}) = \sum_{i=1}^m P(A_i \text{ - одноцветно}) = \frac{m}{2^n} < \frac{k^2}{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = \left(\frac{k}{\sqrt{2^{n+1} \cdot n}}\right)^2 \leq 1$  (если так, то найдётся, на которой не выполнится)  $\square$

## 2. Общая теория вероятностей

## 2.1. Колмогоровская модель теории вероятности

**Определение 2.1.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство.

$\Omega$  - множество или пространство элементарных исходов.

$\mathcal{F}$  -  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ . Элементы  $\mathcal{F}$  - случайные события.

$P$  - мера на  $\mathcal{F}$  с условием  $P(\Omega) = 1$ .

**Замечание.** Если  $\Omega$  не более чем счётно, то можно взять  $\mathcal{F} = 2^\Omega$

**Определение 2.2.** Условная вероятность.  $A$  - событие, такое, что  $P(A) > 0$ . Тогда  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ , где  $A, B \in \mathcal{F}$ .

**Определение 2.3.** Независимые события  $A$  и  $B$ . Если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Определение 2.4.** Независимость в совокупности  $A_1, A_2 \dots A_n$ .  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$  для всевозможных наборов индексов.

**Определение 2.5.** Последовательность событий  $A_1, A_2 \dots$  независимы - любой конечный набор событий независим в совокупности.

**Лемма. Бореля-Кантелли**

$A_1, A_2, \dots$  случайные события.

1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , то вероятность, что случилось бесконечное число из них равна 0.
2. Если  $A_1, A_2, \dots$  независимы и  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ , тогда  $P(\text{случилось бесконечное число из } A_n) = 1$ .

**Доказательство.**  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$  - это переформулировка события из условия в терминах множеств.

$\omega \in B \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \iff \omega \in A_k$  для бесконечного количества индексов  $k$ .

Док-во этого факта:

1.  $\Leftarrow$ : Лежит в каждом объединении, значит лежит в  $B$ .
2.  $\Rightarrow$ :  $\omega$  лежит в пересечении. Пусть лежит в конечном - возьмём самый большой номер и получим противоречие.

Док-во теоремы:

1. Хотим доказать, что  $P(B) = 0$   
 $B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow P(B) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$  - это хвост сходящегося ряда, а он стремится к нулю.
2. Давайте смотреть на  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$  - независимые события.

$$P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) \overset{\text{независимость}}{\underset{\sim}{=}} \prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - P(A_k))$$

А ещё  $P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) \rightarrow P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k)$ , так как множества вложены в друг друга и есть монотонность меры.

Значит  $P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \xLeftrightarrow{\text{логарифмируем}} \ln P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) =$   
 $= \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \stackrel{\ln(1-t) \leq -t}{\leq} \sum_{k=n}^{\infty} (-P(A_k)) = -\infty$  - хвост расходящегося ряда.

А значит мы логарифмировали  $0 \Rightarrow P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bar{B}) = 0 \stackrel{(*)}{\Rightarrow} P(B) = 1$

$$(*) \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = B$$

□

### Теорема 2.1. Закон нуля и единицы

Если  $A_1, A_2, \dots$  независимы, то  $P(B) = 0$  или  $P(B) = 1$ . При  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ .

**Пример.** Испытания Бернулли, успех с вероятностью  $p$ ,

$P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = ?$ .

$A_n$  = случилось ОРО на позициях  $n, n+1, n+2$ .

Тогда  $A_1, A_4, A_7, \dots$  независимы.  $P(A_j) = pqr = p^2q > 0$ .

Лемма Бореля-Кантелли говорит: бесконечное кол-во  $A_{3k+1}$  случится, если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{3k+1}) = +\infty \Rightarrow P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = 1$ .

## 2.2. Случайные величины

**Определение 2.6.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство.

$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - случайная величина, если это измеримая функция.

**Определение 2.7.** Распределение случайной величины

$P_{\xi}$  - вероятностная мера на борелевских подмножествах  $\mathbb{R}$

$A$  - борелевское мн-во,  $P_{\xi}(A) = P(\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in A)$

**Определение 2.8.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  одинаково распределены, если  $P_{\xi} = P_{\eta}$

**Замечание.**  $P_{\xi}$  однозначно определяются своими значениями на ячейках.

$$P_{\xi}(a, b] = P_{\xi}(-\infty, b] - P_{\xi}(-\infty, a] = P(\xi \leq b) - P(\xi \leq a)$$

**Определение 2.9.** Функция распределения случайной величины

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x)$$

**Свойства.** 1. Функция распределения однозначно определяет распределение случайной величины.

**Доказательство.** Функция распределения однозначно задаёт значения на ячейках □

$$2. 0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$$

**Доказательство.** берём  $x_n \rightarrow -\infty, A_n = \{\xi \leq x_n\}$  Тогда  $A_{n+1} \subset A_n$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0$  □

4.  $F_\xi$  монотонно возрастает

5. Непрерывность справа:  $\lim_{y \rightarrow x+} F_\xi(y) = F_\xi(x)$

**Доказательство.** берём  $y_n$  убывающие и  $y_n \rightarrow x$ . Тогда  $A_n = \{\xi \leq y_n\}$ .  $A_{n+1} \subset A_n$ . А тогда  $\lim P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\xi \leq x) = F_\xi(x)$ . Но с другой стороны  $\lim P(A_n) = \lim P(\xi \leq y_n) = \lim F_\xi(y_n)$   $\square$

6.  $\lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y) = P(\xi < x)$

**Доказательство.** берём  $y_n$  возрастающие и  $y_n \rightarrow x$ .  $B_n = \{\xi \leq y_n\}$  и  $B_n \subset B_{n+1}$ .  $\lim P(B_n) = P(\bigcup B_n) = P(\xi < x)$ . Но с другой стороны  $\lim P(B_n) = \lim F_\xi(y_n)$   $\square$

7.  $F_{\xi+a}(x) = F_\xi(x-a)$

**Доказательство.**  $\{\xi + a \leq x\} = \{\xi \leq x - a\}$   $\square$

8.  $F_{c\xi} = F_\xi(\frac{x}{c})$

**Доказательство.**  $\{c\xi \leq x\} = \{\xi \leq \frac{x}{c}\}$   $\square$

**Замечание.** Функция, обладающая свойствами 3, 4, 5 - это функция распределения некоторой случайной величины.

**Доказательство.** пусть  $g$  - такая функция. Тогда  $\nu_g(a, b] = g(b) - g(a)$ .  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{F}$  - измеримо по Лебегу, случайная величина  $\xi(w) = w$ . Тогда  $F_\xi = g$   $\square$

**Определение 2.10.** Случайная величина имеет дискретное распределение, если её множество значений не более чем счётное.

**Замечание.** 1.  $\xi \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$

Если  $x \neq y_k$ , то  $P(\xi = x) = 0$ , т.е.  $P_\xi(\{x\}) = 0$

2.  $P_\xi(A) = \sum_{k: y_k \in A} P(\xi = y_k)$ . Тут счётное число слагаемых, поэтому сумма корректно определена.

Распределение однозначно определяется набором вероятностей  $P(\xi = y_k)$

3.  $F_\xi(x) = \sum_{k: y_k \leq x} P(\xi = y_k)$

**Определение 2.11.** Случайная величина имеет непрерывное распределение, если  $\forall x \in \mathbb{R} : P(\xi = x) = 0$

**Замечание.** 1.  $\xi$  - имеет непрерывное распределение  $\iff F_\xi$  непрерывна во всех точках.

$P(\xi < x) = \lim_{y \rightarrow x-} P(\xi \leq y) = \lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y)$

$0 = P(\xi = x) = P(\xi \leq x) - P(\xi < x) = F_\xi(x) - \lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y) \Rightarrow F_\xi(x) = \lim_{y \rightarrow x-} F_\xi(y)$

2. Непрерывные распределения бывают не очень хорошими, например Канторова лестница.

**Определение 2.12.** Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует  $p_\xi(t) \geq 0$ , измеримая, т.ч.  $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(t) dt$  ( $p_\xi(t)$  - плотность распределения).

**Свойства.** 1.  $A \subset \mathbb{R}$  - борелевское, то  $P_\xi(A) = \int_A p_\xi(t) dt$

**Доказательство.** слева мера и справа написаны меры. На лучах они совпадают по определению, значит совпадают на ячейках, а значит и совпадают везде  $\square$

$$P_{\xi}(a, b] = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_a^b p_{\xi}(t) dt$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(t) dt = 1$$

3.  $p_{\xi}$  определена однозначно с точностью до почти везде (из теории меры)

4.  $F_{\xi}$  почти везде дифференцируема и  $F'_{\xi}(x) = p_{\xi}(x)$

**Доказательство.** без доказательства  $\square$

### Пример. Вероятностные распределения

1. Биномиальное распределение:  $\xi \sim Binom(p, n), 0 < p < 1$

$$\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}. P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. Распределение Пуассона:  $\xi \sim Poisson(\lambda), \lambda > 0$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}. P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

3. Геометрическое распределение:  $\xi \sim Geom(p), 0 < p < 1$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}. P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

4. Дискретное равномерное распределение:

$$\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}. P(\xi = k) = \frac{1}{n}$$

5. Непрерывно равномерное распределение:  $\xi \sim U([a, b])$

$$\xi : \Omega \rightarrow [a, b]. p_{\xi}(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$$

6. Нормальное распределение:  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. p_{\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Стандартное нормальное распределение:  $\mathcal{N}(0, 1)$

7. Экспоненциальное распределение:  $\xi \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow [0, +\infty]. p_{\xi}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{в других точках} \end{cases}$$

**Замечание.** 1.  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

На самом деле это функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

2. Если  $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\xi = \sigma\nu + a$ .  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$F_{\xi}(x) = P(\sigma\nu + a \leq x) = P(\nu \leq \frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Замена  $t = \frac{s-a}{\sigma}$ . Тогда  $dt = \frac{ds}{\sigma}$

$$\text{Тогда: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(s-a)^2}{2\sigma^2}} ds$$

## 2.3. Совместное распределение

**Определение 2.13.** Совместное (многомерное) распределение.

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P_{\bar{\xi}}(A) = P(\bar{\xi} \in A), \text{ где } A - \text{борелевское подмножество } \mathbb{R}^n$$

**Замечание.**  $P_{\bar{\xi}}$  однозначно определяет распределение  $P_{\xi_k}$ , но не наоборот

**Пример.**  $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  с равными вероятностями.

Если это были независимые подбрасывания:  $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  с равными вероятностями.

Если  $\xi = \eta$ , то  $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (1, 1)\}$ .

То есть получили 2 разных совместных распределения, при это координатное распределение только одно

**Определение 2.14.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  независимы, если для любых борелевских подмножеств  $A_1, A_2 \dots A_n \subset \mathbb{R}$ , события  $\{\xi_1 \in A_1\}, \dots, \{\xi_n \in A_n\}$  независимы

**Замечание.**  $P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P(\xi_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in A_n)$

**Теорема 2.2.**  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  независимы  $\iff P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n}$

**Доказательство.** 1.  $\Leftarrow P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P_{\xi_1, \dots, \xi_n}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{\xi_1}(A_1) \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}(A_n)$

2.  $\Rightarrow$ . Достаточно проверить совпадение на ячейках, то есть, что  $P(\bar{\xi} \in (a, b]) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}(a_n, b_n]$ . А это просто определение независимости.

□

**Определение 2.15.** Совместная (многомерная) функция распределения.

$$\bar{\xi} = (\xi_1 \dots \xi_n). F_{\bar{\xi}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \text{ и } F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n)$$

**Свойства.** 1.  $0 \leq F_{\bar{\xi}} \leq 1$

2. Монотонно возрастает по каждой координате

$$3. \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 0$$

$$\lim_{x_1, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = 1$$

$$4. \lim_{x_i \rightarrow +\infty} F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

**Определение 2.16.** Совместная плотность  $p_{\bar{\xi}}(\bar{t})$  - неотрицательная измеримая функция, такая, что  $F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) dt_n \dots dt_1$

**Теорема 2.3.**  $\xi_1 \dots \xi_n$  независимы  $\iff F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n), \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

**Доказательство.** 1. Докажем  $\Rightarrow$ . Независимость  $\Rightarrow (*) P_{\bar{\xi}} = P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n} \Rightarrow P_{\bar{\xi}}((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P_{\xi_1}((-\infty, x_1]) \cdot \dots \cdot P_{\xi_n}((-\infty, x_n])$

2. Хотим проверить совпадение на ячейках, чтобы доказать (\*) ещё и в другую сторону (приведем выкладки для  $n = 2$ , для больших  $n$  рассуждения не меняются).



$$\begin{aligned} P_{\bar{\xi}}((a_1, b_1] \times (a_2, b_2]) &= F_{\bar{\xi}}(b_1, b_2) + F_{\bar{\xi}}(a_1, a_2) - F_{\bar{\xi}}(a_1, b_2) - F_{\bar{\xi}}(a_2, b_1) = \\ &= (F_{\xi_1}(b_1) - F_{\xi_1}(a_1)) \cdot (F_{\xi_2}(b_2) - F_{\xi_2}(a_2)) = P_{\xi_1}(a_1, b_1] \cdot P_{\xi_2}(a_2, b_2] \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $\xi_1 \dots \xi_n$  - абсолютно непрерывные случайные величины. Тогда  $\xi_1 \dots \xi_n$  независимы  $\iff p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) = p_{\xi_1}(t_1) \cdot \dots \cdot p_{\xi_n}(t_n)$

В частности, в случае независимости  $\bar{\xi}$  абсолютно непрерывна.

**Доказательство.** 1. Докажем  $\Rightarrow$ .

$$\text{Независимость} \Rightarrow F_{\bar{\xi}}(\bar{x}) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{\xi_1}(t_1) dt_1 \cdot \dots \cdot \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_n}(t_n) dt_n = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n) dt_n \dots dt_1.$$

Запишали всё под один интеграл, то что под интегралом и есть совместная плотность.

2. Докажем  $\Leftarrow$ .

Просто проинтегрируем равенство.

$$\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\bar{\xi}}(\bar{t}) dt_n \dots dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\xi_1}(t_1) \dots p_{\xi_n}(t_n) dt_n \dots dt_1 = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_n}(x_n)$$

по т. Тонелли можно выносить интегралы

т. Тонелли можно использовать, так как мы интегрируем неотрицательную функцию.

□

**Замечание.** Напоминание.

Свертка последовательностей:  $\{a_n\}, \{b_n\}$  это  $\{c_n\}$ , такая что  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ .

Мотивировка:  $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  (при наличии хоть каких-нибудь кругов сходимости у обоих рядов).

**Замечание.** Свертки мер

$\mu$  и  $\nu$  - конечные меры на борелевских подмножествах  $\mathbb{R}$ .

$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x)$  - это свертка мер, где  $(A - x) := \{a - x \mid a \in A\}$ .

**Свойства.** Свойства свёртки

$$1. \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) d\mu(x) d\nu(y)$$

$$\text{Доказательство. } \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) \stackrel{\mu(A-x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x} d\mu(y)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A-x}(y) d\mu(y) d\nu(x) \quad \square$$



2.  $\mu * \nu = \nu * \mu$
3.  $\mu_1 * \dots * \mu_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(x_1 + \dots + x_n) d\mu_1(x_1) \dots d\mu_n(x_n)$
4.  $(\mu_1 * \mu_2) * \mu_3 = \mu_1 * (\mu_2 * \mu_3)$
5.  $(\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$
6.  $\delta_x$  - мера с единичной нагрузкой в точке  $x$ . Тогда  $\mu * \delta_0 = \mu$ .

Получили линейное пространство относительно  $+$  и  $*$

**Доказательство.**  $\mu * \delta_0(A) = \delta_0 * \mu(A) = \int_{\mathbb{R}} \delta_0(A - x) d\mu(x) \stackrel{\delta_0=1 \Leftrightarrow 0 \in A-x \Leftrightarrow x \in A}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A d\mu(x) = \mu A$   $\square$

**Теорема 2.4.** Пусть  $\mu$  и  $\nu$  имеют плотности  $p_\mu$  и  $p_\nu$

Тогда  $\mu * \nu$  имеет плотность  $p(t) = \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds$

**Доказательство.** Возьмём функцию, определяемую этой формулой и проверим, что это плотность.

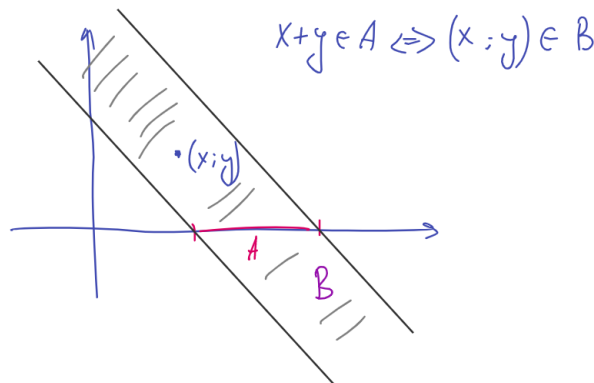
То есть проверим, что  $\int_A p(x) dx = \mu * \nu(A)$ .

$$\int_A p(t) dt = \int_A \int_{\mathbb{R}} p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(t) p_\mu(t - s) p_\nu(s) ds dt = (*).$$

Положим  $u = t - s$ . Тогда  $(*) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s) p_\mu(u) p_\nu(s) ds du = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(u + s) d\nu(s) d\mu(u) = \mu * \nu(A)$   $\square$

**Теорема 2.5.** Если  $\xi$  и  $\eta$  независимые случайные величины, то  $P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

**Доказательство.** Нужно взять какое-то борелевское множество и понять как устроено там распределение суммы.



Пусть  $B = \{(x, y) : x + y \in A\}$

$$P_{\xi+\eta}(A) = P(\xi + \eta \in A) = P((\xi, \eta) \in B) = P_{\xi, \eta}(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_{\xi, \eta}(x, y) =$$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_B(x, y) dP_\xi(x) dP_\eta(y)}_{\text{т.к. } \xi \text{ и } \eta \text{ независимые}} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_A(x + y) dP_\xi(x) dP_\eta(y) = P_\xi * P_\eta(A)$$

$\square$

**Пример.** 1. Свертка с дискретным распределением

$$\nu = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \delta_{x_k}.$$

$$\delta_{x_k}(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

Тогда  $\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu(A - x) d\nu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A - x_k) p_k$

2.  $\xi_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ .  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы.

$$P_{\xi_1 + \xi_2}(\{n\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_{\xi_1}(\{n - k\}) \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^{n-k} e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} \cdot \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!} = e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^{n-k} \lambda_2^k}{k!(n-k)!} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n e^{-\lambda_1 - \lambda_2}}{n!}$$

$$\xi_1 + \xi_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

## 2.4. Математическое ожидание и дисперсия

**Определение 2.17.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - случайная величина ( $\xi \geq 0$ , либо суммируемая функция).  $\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi(\omega) dP(\omega)$  - математическое ожидание (среднее значение случайной величины).

**Свойства.** 1.  $a, b \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$

2. Если  $\xi \geq 0$ , с вероятностью 1, то  $\mathbb{E}\xi \geq 0$  (по сути написано, что если функция почти везде неотрицательна, то интеграл неотрицателен).

3. Если  $\xi \geq \eta$  с вероятностью 1, то  $\mathbb{E}\xi \geq \mathbb{E}\eta$

$$4. \mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x dP_{\xi}(x)$$

5. Если  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - измерима относительно борелевской  $\sigma$ -алгебры.

$$\text{Тогда } \mathbb{E}f(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dP_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$$

*Доказательство:*  $f = \mathbf{1}_A$ . Тогда  $\mathbb{E}\mathbf{1}_A(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{\Omega} \mathbf{1}_A(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) dP(\omega) = P(\omega \in \Omega : \bar{\xi} \in A) = P_{\bar{\xi}}(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(x_1, \dots, x_n) dP_{\bar{\xi}}(x_1, \dots, x_n)$ .

Тогда по линейности верно для простых.

Теперь берём  $f_j$  неотрицательные простые, такие, что возрастают и  $\rightarrow f$ . И предельный переход по теореме Леви.

6. Если  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы, то  $\mathbb{E}(\xi \cdot \eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$

$$\text{Доказательство: } \mathbb{E}(\xi\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} xy dP_{\xi, \eta}(x, y) =$$

$$\stackrel{\text{независимость сл. вел.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \int_{\mathbb{R}} y \int_{\mathbb{R}} x dP_{\xi}(x) dP_{\eta}(y) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$$

7. Если  $\xi \geq 0$ , то  $\mathbb{E}\xi = \int_0^{+\infty} P(\xi \geq t) dt$  - из теории меры.

8. Если  $p, q > 1$  и  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то  $\mathbb{E}|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}$  - неравенство Гёльдера

9. Неравенство Ляпунова

$$0 < r < s, \text{ тогда } (\mathbb{E}|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{1}{s}}.$$

$$\text{Доказательство: } p = \frac{s}{r} > 1, \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{s-r}{s} < 1.$$

Тогда запишем Гёльдера для  $\xi$  и  $\eta = 1$ :

$$\mathbb{E}|\xi|^r |1| \leq (\mathbb{E}(|\xi|^r)^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\mathbb{E}1^q)^{\frac{1}{q}} = (\mathbb{E}|\xi|^s)^{\frac{r}{s}}.$$

**Замечание.**  $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$  без независимости неверно.

Возьмём  $\xi = \pm 1$  с вероятностями  $\frac{1}{2}$ . Тогда  $\mathbb{E}\xi = 0$ .

Также пусть  $\eta = \xi$ . Тогда  $\xi\eta = \xi^2 = 1 \neq (\mathbb{E}\xi)^2$

### Теорема 2.6. Неравенство Маркова

Если  $\xi \geq 0, p, t > 0$ , то  $P(\xi \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}\xi^p}{t^p}$ .

**Доказательство.** Неравенство Чебышёва из теории меры. □

**Определение 2.18.** 1. Моменты случайной величины.  $\mathbb{E}(\xi^k)$  -  $k$ -ый момент.

2. Центральные моменты.  $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$  -  $k$ -ый центральный момент.

3. Абсолютный момент.  $\mathbb{E}|\xi|^k$  -  $k$ -ый абсолютный момент.

**Определение 2.19.** Медиана случайной величины.  $m$  - медиана  $\xi$ , если  $P(\xi \geq m) \geq \frac{1}{2}$  и  $P(\xi \leq m) \geq \frac{1}{2}$ .

**Замечание.** Медиана не единственна.

Возьмём кубик.  $\xi = 1, 2, \dots, 6$  с вероятностью  $\frac{1}{6}$ . Тогда любое число  $m \in [3, 4]$  подходит.

Чаще всего всё равно берут середину, чтобы была единственность.

**Пример.** Есть организация из 1000 человек. 1 начальник и 999 подчиненных.

Зарплата начальника 1.000.000\$, а подчинённых 1000\$.

$$\mathbb{E} = \frac{999}{1000} \cdot 1000 + \frac{1}{1000} \cdot 1000000 = 1999$$

$m = 1000$  - медиана лучше характеризует ситуацию в этом случае.

**Определение 2.20.** Дисперсия.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$  - второй центральный момент.

Обозначение в англоязычной литературе:  $Var\xi$

**Свойства.** 1.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2$

*Доказательство:* Пусть  $a = \mathbb{E}\xi$ .

$$\text{Тогда } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - a)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - 2a\mathbb{E}\xi + a^2$$

2.  $\mathbb{D}\xi \geq 0$  и если  $\mathbb{D}\xi = 0$ , то  $P(\xi = c) = 1$

*Доказательство:* Если  $\mathbb{D}\xi = 0$ , то  $\int_{\Omega} (\xi - a)^2 dP = 0$ , значит  $(\xi - a)^2 = 0$  почти везде.

3.  $\mathbb{D}(\xi + a) = \mathbb{D}\xi$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}(\xi + a) = \mathbb{E}\xi + a$ . А тогда  $(\xi + a) - \mathbb{E}(\xi + a) = \xi - \mathbb{E}\xi$

4.  $\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi$

*Доказательство:*  $\mathbb{D}(c\xi) = \mathbb{E}(c\xi)^2 - (\mathbb{E}(c\xi))^2$

5. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

*Доказательство:*  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{E}(\xi + \eta)^2 - (\mathbb{E}(\xi + \eta))^2 = \mathbb{E}\xi^2 + 2\mathbb{E}(\xi\eta) + \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 - 2\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta - (\mathbb{E}\eta)^2 = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$

6. Аналогично предыдущему, но для  $n$  случайных величин.

*Доказательство:* индукция

7.  $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi| \leq (\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$  - написали Ляпунова.

### 8. Неравенство Чебышёва

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}, \text{ где } t > 0$$

*Доказательство:*  $P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2}{t^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}$  - неравенство Маркова для  $p = 2$ .

**Определение 2.21.** Стандартное отклонение  $\sigma = \sqrt{\mathbb{D}\xi}$

**Пример.** 1.  $\xi \sim U[0, 1]$ .

$$\text{Тогда } \mathbb{E}\xi = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbb{E}\xi^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ А тогда } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{1}{12}$$

2.  $\xi \sim U[a, b]$ .

Если  $\eta \sim U[0, 1]$  и  $\xi = (b - a)\eta + a \sim U[a, b]$ . Тогда  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}((b - a)\eta + a) = \frac{a+b}{2}$

$$\mathbb{D}((b - a)\eta + a) = \mathbb{D}((b - a)\eta) = (b - a)^2 \mathbb{D}\eta = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0, \text{ так как функция нечётная.}$$

$$\text{Значит } \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

4.  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Если  $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\xi = \sigma\eta + a \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ .

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sigma\eta + a) = \sigma\mathbb{E}\eta + a = a$$

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{D}(\sigma\eta + a) = \sigma^2 \mathbb{D}\eta = \sigma^2$$

**Определение 2.22.** Пусть  $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$  и  $\mathbb{E}\eta^2 < +\infty$ .

Ковариация  $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta))$

**Свойства.** 1.  $cov(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$

2.  $cov(\xi, \eta) = cov(\eta, \xi)$

3.  $cov(c\xi, \eta) = c \cdot cov(\xi, \eta)$

4.  $cov(\xi_1 + \xi_2, \eta) = cov(\xi_1, \eta) + cov(\xi_2, \eta)$

5.  $cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$

**Доказательство.**  $\mathbb{E}\xi = a, \mathbb{E}\eta = b$

$$cov(\xi, \eta) = \mathbb{E}((\xi - a)(\eta - b)) = \mathbb{E}(\xi\eta) - a\mathbb{E}\eta - b\mathbb{E}\xi + ab$$

□

6. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $cov(\xi, \eta) = 0$

7.  $\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2cov(\xi, \eta)$

$$8. \mathbb{D}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = \mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{D}\xi_2 + \dots + \mathbb{D}\xi_n + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

**Пример.**  $P(\text{успех}) = p$ . Делаем  $n$  подбрасываний.  $\eta$  = количество переходов от орла к решке.

Пусть  $\xi_i = 1$ , если на  $i$  позиции орёл, на  $i + 1$  позиции решка, иначе  $\xi_i = 0$ .

$$\eta = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}. \text{ Тогда } \mathbb{E}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}\xi_i = (n-1)pq.$$

$$\mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Если  $i + 1 < j$ , то  $\xi_i$  и  $\xi_j$  независимы, поэтому в сумме почти везде нули.

$$\text{Значит } \mathbb{D}\eta = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{D}\xi_i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{cov}(\xi_i, \xi_{i+1}).$$

$$\mathbb{D}\xi_i = \mathbb{E}\xi_i^2 - (\mathbb{E}\xi_i)^2 = pq - p^2q^2.$$

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_{i+1}) = \mathbb{E}(\xi_i \xi_{i+1}) - \mathbb{E}\xi_i \mathbb{E}\xi_{i+1} = -p^2q^2$$

**Замечание.** 1.  $\{\xi : \mathbb{E}\xi^2 < +\infty\}$

$\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}(\xi\eta)$  - скалярное произведение.

$\mathbb{E}\xi$  - ортогональная проекция на константы.

2.  $\langle \xi, \eta \rangle = \text{cov}(\xi, \eta)$  - тоже скалярное произведение.

Норма - это стандартное отклонение.

### Теорема 2.7. Выбор двудольного подграфа

Есть граф  $G$  с  $n$  вершинами и  $m$  рёбрами. Хотим стереть некоторое количество рёбер (как можно меньше) так, чтобы остался двудольный подграф.

Тогда  $G$  содержит двудольный подграф с  $\geq \frac{m}{2}$  рёбрами.

**Доказательство.**  $A$  - те вершины, на которых выпал орёл,  $B$  - на которых выпала решка.

Будем интересоваться матожиданием количества рёбер в такой ситуации. Пусть  $xy \in E(G)$ , сопоставим ребру следующую случайную величину:

$$\xi_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{если } x, y \text{ из разных долей} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Пусть  $\eta = \sum_{xy \in E} \xi_{xy}$  - число рёбер, которое нужно оставить, при таком разбиении на доли.

$\mathbb{E}\eta = \sum_{xy \in E} \mathbb{E}\xi_{xy} = m \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0) = \frac{m}{2}$ , а значит есть реализация с  $\frac{m}{2}$  рёбрами (если бы все значения кол-ва ребер были меньше  $\frac{m}{2}$ , то и мат. ожидание было бы меньше  $\frac{m}{2}$ ).  $\square$

**Определение 2.23.** Коэффициент корреляции.  $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi} \sqrt{\mathbb{D}\eta}} \in [-1, 1]$

**Определение 2.24.** Если  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ , то это некоррелирующие случайные величины.

**Теорема 2.8.**  $v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$  - векторы единичной длины, тогда существует расстановка знаков  $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ , такая, что  $\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$ .

**Замечание.** Эта оценка не улучшаема, если все вектора попарно ортогональны, тогда длина вектора  $\sqrt{n}$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  - независимые случайные величины, такие, что:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Введем величину  $\xi = \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\|^2$ .

$$\text{Тогда } \mathbb{E}\xi = \mathbb{E} \langle v, v \rangle = \mathbb{E}(\sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle v_i, v_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \mathbb{E}\varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle = n.$$

1. Если  $i = j$ , то  $\mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j = \mathbb{E}\varepsilon_i^2 = 1$
2. Если  $i \neq j$ , то  $\mathbb{E}\varepsilon_i\varepsilon_j \stackrel{\text{независимость}}{=} \mathbb{E}\varepsilon_i \cdot \mathbb{E}\varepsilon_j = 0$

□

**Теорема 2.9.**  $v_1, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|v_i\| \leq 1, p_i \in [0, 1]$  и  $w = p_1v_1 + \dots + p_nv_n$

Тогда существует  $\varepsilon_1 \in \{0, 1\}, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$ , такие, что  $v = \varepsilon_1v_1 + \dots + \varepsilon_nv_n$  и  $\|v - w\| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$

**Доказательство.** Пусть  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$  - независимые случайные величины.

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } p_i \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - p_i \end{cases}$$

Интересуемся  $\xi = \|v - w\|^2$ . Тогда  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}(\sum_{i,j=1}^n (\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j) \langle v_i, v_j \rangle) = \sum_{i,j=1}^n \langle v_i, v_j \rangle \mathbb{E}(\varepsilon_i - p_i)(\varepsilon_j - p_j) \stackrel{\text{пояснение ниже}}{=} \sum_{i=1}^n \langle v_i, v_i \rangle (p_i - p_i^2) \leq \frac{n}{4}$ .

1. Если  $i = j$ , то  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \mathbb{D}\varepsilon_i = p_i - p_i^2 \leq \frac{1}{4}$
2. Если  $i \neq j$ , то  $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \stackrel{\text{независимы}}{=} 0$

□

**Теорема 2.10. Харди-Рамануджана**

Пусть  $\nu(k)$  - число различных простых делителей в разложении  $k$ .

Хотим понять, чему будет равно это число, если мы наугад возьмем число из мн-ва  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

$P(|\nu(k) - \ln \ln n| \geq w(n)\sqrt{\ln \ln n}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , где  $w(n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} +\infty$  и  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $m = \sqrt[10]{n}$ .  $p \leq m$  - простое и

$$\xi_p(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \text{ делится на } p \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\xi = \sum_{p \leq m} \xi_p$  - количество различных простых  $\leq m$ . Тогда  $\nu(k) - 10 \leq \xi(k) \leq \nu(k)$ .

Посчитаем матожидание  $\xi$ , тогда посчитаем мат. ожидание слагаемых:

$$\mathbb{E}\xi_p = \frac{[\frac{n}{p}]}{n} \leq \frac{\frac{n}{p}}{n} = \frac{1}{p}. \text{ С другой стороны, } \mathbb{E}\xi_p \geq \frac{\frac{n}{p}-1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Знаем, что  $\mathbb{E}\xi = \sum_{p \leq m} \mathbb{E}\xi_p$ , тогда

$\sum_{p \leq m} \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \leq \sum_{p \leq m} \mathbb{E}\xi_p \leq \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} = \ln \ln m + \mathcal{O}(1) = \ln \ln n + \mathcal{O}(1)$ . Оценка в другую сторону аналогично, потому что  $\frac{m}{n} \leq 1$ .

Теперь считаем дисперсию для  $\xi_p$ :

$$\mathbb{D}\xi_p = \mathbb{E}\xi_p^2 - (\mathbb{E}\xi_p)^2 = \mathbb{E}\xi_p - (\mathbb{E}\xi_p)^2 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n})$$

Теперь оценим ковариацию:

$$\text{cov}(\xi_p, \xi_q) = \underbrace{\mathbb{E}(\xi_p \xi_q)}_{\text{аргумент равен 1, когда } n : pq} - \mathbb{E}\xi_p \mathbb{E}\xi_q = \frac{[\frac{n}{pq}]}{n} - \frac{[\frac{n}{p}]}{n} \cdot \frac{[\frac{n}{q}]}{n} = (*).$$

Оценим (\*) с двух сторон:

$$1. (*) \geq \frac{\frac{n}{pq}-1}{n} - \frac{\frac{n}{p}}{n} \cdot \frac{\frac{n}{q}}{n} = -\frac{1}{n}$$

$$2. (*) \leq \frac{\frac{n}{pq}}{n} - \frac{\frac{n-1}{p}}{n} \cdot \frac{\frac{n-1}{q}}{n} \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

Теперь смотрим на сумму ковариаций (так как она фигурирует как слагаемое для  $\mathbb{D}\xi$ ):

$$\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \sum_{p < q \leq m} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{= \frac{1}{2n} \sum_{p \neq q, p, q \leq m} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \leq \frac{1}{2n} 2m \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} = \mathcal{O}(1)} \geq \sum_{p < q \leq m} \text{cov}(\xi_p, \xi_q) \geq -\frac{m^2}{n} = \mathcal{O}(1)$$

Теперь оцениваем дисперсию для  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\xi &= \sum_{p \leq m} \mathbb{D}\xi_p + 2 \underbrace{\sum_{p < q \leq m} \text{cov}(\xi_p, \xi_q)}_{=\mathcal{O}(1)} = \sum_{p \leq m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \mathcal{O}(1) = \\ &= \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} + \mathcal{O}(1) = \ln \ln m + \mathcal{O}(1) = \ln \ln n + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Теперь применим Чебышёва.

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}. \text{ В качестве } t \text{ подставим } w(n)\sqrt{\ln \ln n}.$$

$$\text{Тогда } P(|\nu(k) - \ln \ln n| \geq w(n)\sqrt{\ln \ln n}) \underbrace{\leq}_{(**)} P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq w(n)\sqrt{\ln \ln n}) \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{w^2(n) \ln \ln n} \rightarrow 0.$$

(\*\*): такое нер-во можно писать, так как  $|\nu(k) - \xi(k)| \leq 10$  и  $\mathbb{E}\xi = \ln \ln n + \mathcal{O}(1)$ .

□

### Теорема 2.11. Эрдёша-Каца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k \leq n: a \leq \frac{|\nu(k) - \ln \ln n|}{\sqrt{\ln \ln n}} \leq b\}}{n} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

## 2.5. Сходимость последовательностей случайных величин

**Теорема 2.12.**  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые случайные величины,  $f_i: \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$  - измерима, относительно борелевской  $\sigma$ -алгебры.

Тогда  $f_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), f_2(\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_1+n_2})$  - независимые случайные величины.

**Доказательство.**  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\xi_1 \dots \xi_m$  и  $\eta_1 \dots \eta_n$  независимые случайные величины.

Возьмём  $\tilde{A}$  и  $\tilde{B} \in \mathbb{R}$  борелевские.

Надо доказать, что

$$\begin{aligned} P(f(\xi_1 \dots \xi_m) \in \tilde{A}) \cdot P(g(\eta_1 \dots \eta_n) \in \tilde{B}) &= P(f(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \tilde{A}, g(\eta_1 \dots \eta_n) \in \tilde{B}). \\ P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in \underbrace{f^{-1}(\tilde{A})}_{=: A}) \cdot P((\eta_1, \dots, \eta_n) \in \underbrace{g^{-1}(\tilde{B})}_{=: B}) &= P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in A, (\eta_1, \dots, \eta_n) \in B) \end{aligned}$$

Поймём это для ячеек.

$$A = (a, b] : (\xi_1, \dots, \xi_m) \in (a, b] \Leftrightarrow \forall k : \xi_k \in (a_k, b_k]$$

$$B = (c, d] : (\eta_1, \dots, \eta_n) \in (c, d] \Leftrightarrow \forall k : \eta_k \in (c_k, d_k]$$

Мы знаем, что

$$P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in A, (\eta_1, \dots, \eta_n) \in B) = P(\forall k : \xi_k \in (a_k, b_k], \forall k : \eta_k \in (c_k, d_k]) = \prod_{k=1}^m P(\xi_k \in (a_k, b_k]) \cdot \prod_{k=1}^n P(\eta_k \in (c_k, d_k])$$

$$\text{Но } \prod_{k=1}^m P(\xi_k \in (a_k, b_k]) = P((\xi_1, \dots, \xi_m) \in A), \text{ а } \prod_{k=1}^n P(\eta_k \in (c_k, d_k]) = P((\eta_1, \dots, \eta_n) \in B).$$

То есть доказали на ячейках, а значит и доказали теорему.

□

**Определение 2.25.**  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $\xi_n$  сходится к  $\xi$  почти наверное, если  $P(w \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(w) = \xi(w)) = 1$
2.  $\xi_n$  сходится к  $\xi$  в среднем порядка  $r > 0$ , если  $\mathbb{E}(|\xi_n - \xi|^r) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$
3.  $\xi_n$  сходится к  $\xi$  по вероятности, если  $\forall \varepsilon > 0, P(\omega \in \Omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$
4.  $\xi_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 $\xi_n$  сходится к  $\xi$  по распределению, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$  во всех точках непрерывности  $F_\xi$ .

Связь между сходимостями:

1.  $1 \Rightarrow 3$ : теорема Лебега из теории меры

2.  $2 \Rightarrow 3$ :

Пишем нер-во Маркова

$$P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \rightarrow 0.$$

3.  $2 \not\Rightarrow 1$ :

$\Omega := [0, 1)$ ,  $P := \lambda$  (мера Лебега).

Возьмем такую последовательность функций, для которой нет такого следствия:

$$\mathbb{1}_{[0,1)}, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)}, \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{3})}, \mathbb{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})}, \mathbb{1}_{[\frac{2}{3}, 1)}, \dots$$

Тогда  $\mathbb{E}|\xi_n|^r = \mathbb{E} \mathbb{1}_{[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m})} = \frac{1}{m} \rightarrow 0$ , то сх-ть в среднем есть.

Сх-ти почти наверное нет, потому что ни в одной точке нет сх-ти, так как у  $\xi_n(\omega)$  сколько угодно далеко есть как значения 1, так и значения 0.

Иными словами  $\lim \xi_n(\omega)$  не существует.

4.  $3 \not\Rightarrow 1$ :

верно, так как  $2 \Rightarrow 3$ , но  $2 \not\Rightarrow 1$ .

5.  $1 \not\Rightarrow 2$ :

$\Omega := [0, 1]$ ,  $P := \lambda$  (мера Лебега).

$$\xi_n(\omega) = n^{\frac{1}{r}} \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n})}.$$

Тогда  $\xi_n(\omega) \rightarrow 0$  при  $\omega \neq 0$ , тогда  $\xi_n$  сх-ся к  $\xi \equiv 0$  почти наверное.

$$\mathbb{E}|\xi_n|^r = \mathbb{E} \left( n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n})} \right) = 1 \not\rightarrow 0$$

6.  $3 \not\Rightarrow 2$ :

верно, так как  $1 \not\Rightarrow 2$ .



7.  $3 \Rightarrow 4$ :

Хотим понять, что  $P(\xi_1 \leq x) \rightarrow P(\xi \leq x)$  если  $x$  – точка непрерывности  $F_\xi$ .

$$\{\xi_n \leq x\} \subset \{\xi \leq x + \varepsilon\} \cup \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}$$

$$P(\xi_n \leq x) \subset P(\xi \leq x + \varepsilon) + P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$$

Напишем верхние пределы для этого нер-ва:

$$\overline{\lim} P(\xi_n \leq x) \leq \underbrace{P(\xi \leq x + \varepsilon)}_{\text{это просто const}} + \underbrace{\overline{\lim} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)}_{\rightarrow 0, \text{ т.к. сх-ть по вероятности}}$$

Теперь надо подпереть чем-то снизу:

$$\{\xi_n \leq x\} \supset \{\xi \leq x - \varepsilon\} \setminus \{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}$$

$$P(\xi_n \leq x) \geq P(\xi \leq x - \varepsilon) - P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)$$

Теперь пишем нижние пределы:

$$\underline{\lim} P(\xi_n \leq x) \geq \underbrace{P(\xi \leq x - \varepsilon)}_{=const} - \underbrace{P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon)}_{\rightarrow 0}$$

Тогда получаем, что

$$F_\xi(x - \varepsilon) \leq \underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq \overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x + \varepsilon)$$

Теперь устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тогда

$$F_\xi(x) \leq \underline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq \overline{\lim} F_{\xi_n}(x) \leq F_\xi(x)$$

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$  – доказали стрелочку.

8.  $4 \not\Rightarrow 3, 2, 1$ :

из-за разных определений (где-то одно вероятностное пр-во, а где-то их может быть много разных)

### Теорема 2.13. Закон больших чисел

$\xi_1, \xi_2, \dots$  – попарно некоррелируемые случайные величины и  $\mathbb{D}\xi_n = o(n)$ .

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Тогда  $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E} \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$ . То есть вероятность того, что  $P(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E} \frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$

**Следствие.** Если  $\mathbb{D}\xi_n$  ограничены, то такой же вывод.

**Доказательство.**  $P(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E} \frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D} \frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D} S_n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbb{D} \xi_k}{\varepsilon^2 n^2} \xrightarrow{\text{ШТОЛЬЦ}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{D} \xi_n}{\varepsilon^2 (2n-1)} = 0. \quad \square$

**Следствие.** ЗБЧ в форме Чебышёва

$\xi_1, \xi_2, \dots$  независимые, одинаково распределённые случайные величины с конечной дисперсией и  $a = \mathbb{E} \xi_1$ .

Тогда  $P(|\frac{S_n}{n} - a| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$  или же  $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a$

**Доказательство.** Мат. ожидание всех случайных величин равно, они одинаково распределены. Поэтому  $\mathbb{E} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = a$ . Поэтому все условия предыдущей теоремы выполнены  $\square$

**Следствие.** ЗБЧ для схем Бернулли

Есть схема Бернулли с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ .

Тогда  $P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ , где  $S_n$  число успехов при  $n$  подбрасываниях.

**Теорема 2.14. Усиленный ЗБЧ**

$\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые случайные величины.  $\mathbb{E}(\xi_n - \mathbb{E}\xi_n)^4 \leq C$ .

Тогда  $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$  почти наверное.

**Доказательство.**  $\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k))$ . Задвинем все матожидания в ноль.

Тогда по условию  $\mathbb{E}\xi_n^4 \leq C$  и надо доказать, что  $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$  почти наверное.

Пусть  $A_n = \{|\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon\}$ . Нам нужно понять, что бесконечное количество  $A_n$  случаются с нулевой вероятностью, то есть что  $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = 0$ .

Из леммы Бореля-Кантелли, если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , то нужное нам условие выполнено.

Напишем неравенство Маркова:  $P(A_n) = P\left(\frac{S_n^4}{n^4} \geq \varepsilon^4\right) \leq \frac{\mathbb{E}S_n^4}{\varepsilon^4} = \frac{\mathbb{E}S_n^4}{n^4\varepsilon^4}$ . Достаточно доказать, что  $\mathbb{E}S_n^4 = \mathcal{O}(n^2)$ , тогда ряд сойдётся. Раскроем все скобки.

$$\mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n)^4 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^4 + 4 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}\xi_i^3 \xi_j + 6 \sum_{i \neq j} \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j^2 + 12 \sum_{i \neq j \neq k} \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j \xi_k + 24 \sum \dots \mathbb{E}\xi_i \xi_j \xi_k \xi_m$$

$$1. \mathbb{E}\xi_i \xi_j \xi_k \xi_m = 0$$

$$2. \mathbb{E}\xi_i^2 \xi_j \xi_k = 0$$

Итого получаем  $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i^4 + 6 \sum \mathbb{E}\xi_i^2 \mathbb{E}\xi_j^2 = (*)$ . По неравенству Ляпунова  $\mathbb{E}\xi_i^2 \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi_i^4} \leq \sqrt{C}$ .

Значит  $(*) = nC + 6n(n-1)\sqrt{C}\sqrt{C} \leq 6Cn^2 = \mathcal{O}(n^2)$ , значит ряд сходится и лемма Бореля-Кантелли выполняется.  $\square$

**Следствие. Усиленный ЗБЧ для схем Бернулли**

В схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p : \frac{S_n}{n} \rightarrow p$  почти наверное.

**Доказательство.** Нужно проверить, что  $\mathbb{E}(\xi_i - p)^4$  - конечно, раскроем скобки, получим какие-то константы и  $\xi_i^4$ .  $\square$

**Теорема 2.15. Усиленный ЗБС в форме Колмогорова**

$\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимо, одинаково распределённые случайные величины.

Тогда  $\frac{S_n}{n} \rightarrow a \in \mathbb{R}$  почти наверное  $\Leftrightarrow a = \mathbb{E}\xi_1$

**Метод Монте-Карло**

$\Phi$  - ограниченная фигура на плоскости. Хотим примерно узнать её площадь.

Берём случайную точку в прямоугольнике и выясняем, попала она в фигуру или нет.

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{точка попала в } \Phi \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вероятность успеха  $\frac{Area(\Phi)}{Area(\text{прямоугольника})}$ . Тогда усиленный ЗБЧ говорит, что  $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$  почти наверное.

**Теорема 2.16.**  $\xi_1, \xi_2, \dots$  последовательность случайных величин,  $\xi_n \rightarrow_P a \in \mathbb{R}$ .  $f$  ограниченная функция, непрерывная в точке  $a$ .

Тогда  $\mathbb{E}f(\xi_n) \rightarrow f(a)$

**Доказательство.**  $|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| = |\mathbb{E}(f(\xi_n) - f(a))| \leq \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| = \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| \cdot \mathbb{1}_{\{|\xi_n - a| < \varepsilon\}} + \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| \cdot \mathbb{1}_{\{|\xi_n - a| \geq \varepsilon\}} = (*)$ .

Пусть  $f$  ограничена константой  $M$ .

$$\mathbb{E}|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geq \varepsilon\}} \leq 2M\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{\xi_n - a \geq \varepsilon\}}$$

$$|f(\xi_n - f(a))| \cdot \mathbb{1}_{\{\xi_n - a < \varepsilon\}} \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)|$$

$$\text{Тогда } (*) \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2MP(|\xi_n - a| \geq \varepsilon).$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}|f(\xi_n) - f(a)| \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2M\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(|\xi_n - a| \geq \varepsilon) \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\text{Тогда } 0 \leq \underline{\lim} \leq \overline{\lim} \leq 0 \Rightarrow \lim |\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| = 0 \quad \square$$

**Замечание.** В условии теоремы  $|\mathbb{E}f(\xi_n) - f(a)| \leq \sup_{|x-a| < \varepsilon} |f(x) - f(a)| + 2MP(|\xi_n - a| \geq \varepsilon)$

### Теорема 2.17. Вейерштрасса

$f \in C[a, b]$ , то существует последовательность многочленов  $P_n$ , такая, что  $P_n \Rightarrow f$  на  $[a, b]$

**Доказательство.** Можно считать, что всё на  $[0, 1]$ . Рассмотрим схему Бернулли с вероятностью успеха  $p$ . Тогда  $\frac{S_n}{n} \rightarrow p$ . Подставим  $\xi_n = \frac{S_n}{n}$  в замечание.

$$|\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) - f(p)| \leq \sup_{|x-p| < \varepsilon} |f(x) - f(p)| + 2MP(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) = (*)$$

$$\text{Из неравенства Чебышёва } P(|\frac{S_n}{n} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

И тогда  $(*) \leq \sup_{|x-p| < \varepsilon} |f(x) - f(p)| + \frac{M}{2n\varepsilon^2}$ . При  $n = \frac{1}{\varepsilon^3}$  правое слагаемое оценивается  $\varepsilon'$ , а первое слагаемое мало из равномерной непрерывности.

Значит  $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) - f(p) \Rightarrow 0$ .  $\mathbb{E}f(\frac{S_n}{n}) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  - многочлен Бернштейна.  $\square$

**Определение 2.26.** Многочлен Бернштейна  $B_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

**Следствие.** 1.  $B_n(0) = f(0)$

$$2. B_n(1) = f(1)$$

$$3. B'_n(0) = n(f(\frac{1}{n}) - f(0))$$

$$B'_n(1) = n(f(1) - f(\frac{n-1}{n}))$$

$$\text{Доказательство: } B'_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} (kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}) = \\ = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k-nx)$$

$$4. B'_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} (k-nx)$$

$$5. B_n(\alpha f + \beta g, x) = \alpha B_n(f, x) + \beta B_n(g, x)$$

### Кривые Безье

$\sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$ ,  $a_k \in \mathbb{R}^2$ . Получается отображение  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

1.  $n = 1$  :  $a(1-t) + bt$  - отрезок соединяющий точки  $a$  и  $b$ .

2.  $n = 2$  :  $a(1-t)^2 + 2bt(1-t) + ct^2$ . Мы знаем, что  $B'(0) = 2(b-a)$  и  $B'(1) = 2(c-b)$ . Это кривая из точки  $a$  в  $c$ , параметр  $b$  задаёт касательную в  $a$  и  $c$ .

3.  $n = 3$  :  $a(1-t)^3 + 3bt(1-t)^2 + 3ct^2(1-t) + dt^3$ .

Здесь  $B(0) = a, B(1) = d, B'(0) = 3(b-a), B'(1) = 3(d-c)$ . Кривая выходит из точки  $a$  с касательной  $3(b-a)$ , а заходит в точку  $d$  с касательной  $3(d-c)$ .

## 2.6. Производящие функции

**Определение 2.27.**  $\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$  - случайная величина.

$G_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n)z^n$  - производящая функция

**Свойства.** 1.  $G_\xi$  однозначно определяет распределение

2.  $G_\xi(1) = 1$  и  $G_\xi$  сходится в круге  $|z| < 1$ .

3.  $G_\xi(x) = \mathbb{E}x^\xi$ , где  $x \in \mathbb{R}$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}x^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot P(\xi = n) = G_\xi(x)$

4.  $G'_\xi(1) = \mathbb{E}\xi$

*Доказательство:*  $G'_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi = n)nx^{n-1}$  - если подставить единицу - получим матожидание.

5.  $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1)$

*Доказательство:*  $G''_\xi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} P(\xi = n)n(n-1)x^{n-2}$  - если подставить единицу - получим матожидание.

6.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) - (G'_\xi(1))^2$

7.  $G_\xi$  возрастает и выпукла на  $[0, 1]$

8. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) \cdot G_\eta(z)$

*Доказательство:*  $x^\xi$  и  $x^\eta$  независимы, а тогда  $\mathbb{E}(x^\xi \cdot x^\eta) = \mathbb{E}x^\xi \cdot \mathbb{E}x^\eta$

**Пример.** 1. Равномерное распределение на  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Тогда  $G_\xi(z) = \frac{1}{n}(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = \frac{1-z^n}{1-z} \cdot \frac{1}{n}$ . Пусть хотим посчитать матожидание и дисперсию, но единицу то подставить нельзя в свернутую формулу. Решается эта проблема так:

Давайте скажем, что  $z = 1 + y$ . Тогда  $G_\xi(1 + y) = \frac{(1+y)^n - 1}{ny} = 1 + \binom{n}{2} \frac{y}{n} + \binom{n}{3} \frac{y^2}{n} \dots$

Тогда  $G'_\xi(1) = \frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$ ,  $\mathbb{E}\xi^2 = G''_\xi(1) + G'_\xi(1) = 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{6n} + \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2} \left( \frac{2n-4}{3} + 1 \right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{2n-1}{3}$ .

И тогда  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{6} = \frac{n^2-1}{12}$

### 2. Задача Галилея

Есть 3 правильных кубика, бросили и посчитали сумму значений. Интересуемся вероятностью того, что в сумме выпало 10.

$P(\text{в сумме } 10) = ?$

$\xi_i$  - значение на  $i$ -том кубике. Тогда  $G_{\xi_i}(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + \dots + z^6) = \frac{z(1-z^6)}{1-z} \cdot \frac{1}{6}$ . Кубика у нас три, поэтому нас интересует  $G_{\xi_1+\xi_2+\xi_3} = G_{\xi_1} \cdot G_{\xi_2} \cdot G_{\xi_3} = \left( \frac{z(1-z^6)}{1-z} \cdot \frac{1}{6} \right)^3 = (*)$

$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} z^n$ . Тогда  $(*) = \frac{1}{6^3} (z^3 - 3z^9 + 3z^{15} - z^{21}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} z^n$ . Коэффициент при  $z^{10}$  будет такой  $\frac{1}{6^3} (1 \cdot \binom{9}{7} - 3 \cdot \binom{3}{1}) = \frac{1}{6^3} (36 - 3) = \frac{1}{8}$

### 3. Метод характеристических функций

### 3.1. Характеристические функции случайных величин

**Определение 3.1.** Комплекснозначная случайная величина  $\xi = \operatorname{Re} \xi + i \operatorname{Im} \xi$ , где  $\operatorname{Re} \xi$  и  $\operatorname{Im} \xi$  вещественнозначные случайные величины.

**Определение 3.2.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mathbb{E} \xi = \mathbb{E} \operatorname{Re} \xi + i \mathbb{E} \operatorname{Im} \xi$$

**Свойства.** 1.  $\mathbb{E}(i\xi) = i\mathbb{E}\xi$

2. Комплексная линейность  $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha\mathbb{E}\xi + \beta\mathbb{E}\eta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \xi, \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

*Доказательство:*  $\mathbb{E}(\alpha\xi) = \mathbb{E}(a + ib)\xi = \mathbb{E}(a\xi) + \mathbb{E}(b\xi i) = (a + bi)\mathbb{E}\xi$

3.  $\overline{\mathbb{E}\xi} = \mathbb{E}\bar{\xi}$

4.  $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$

*Доказательство:* Возьмём  $c \in \mathbb{C}, |c| = 1$ , такой, что  $\mathbb{E}(c\xi) = |\mathbb{E}\xi|$ , то есть  $c = \frac{|\mathbb{E}\xi|}{\mathbb{E}\xi}$  (или  $c = e^{-i \cdot \arg \mathbb{E}\xi}$ ).

Тогда  $|\mathbb{E}\xi| = \mathbb{E}(c\xi) = \mathbb{E}(\operatorname{Re}(c\xi)) \leq \mathbb{E}|\operatorname{Re}(c\xi)| \leq \mathbb{E}|c\xi| = \mathbb{E}|\xi|$

**Определение 3.3.** Ковариация  $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$

**Определение 3.4.** Дисперсия  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^2$

$$\operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{D}\xi$$

**Определение 3.5.**  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Назовём характеристической функцией  $\xi$ :

$$\phi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}, \text{ где } t \in \mathbb{R}$$

**Свойства.** 1.  $\phi_\xi(0) = 1$  и  $|\phi_\xi(t)| \leq 1$

*Доказательство:*  $|\phi_\xi(t)| \leq |\mathbb{E}e^{it\xi}| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}| = 1$

2.  $\phi_{a\xi+b}(t) = e^{ibt}\phi_\xi(at)$

*Доказательство:*  $\phi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{i(a\xi+b)t} = \mathbb{E}e^{ibt}e^{ia\xi t} = e^{ibt}\mathbb{E}e^{i\xi(at)} = \phi_\xi(at)e^{ibt}$

3. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\phi_{\xi+\eta}(t) = \phi_\xi(t) \cdot \phi_\eta(t)$

*Доказательство:*  $e^{i\xi t}$  и  $e^{i\eta t}$  независимы и пишем произведение матожиданий

4.  $\overline{\phi_\xi(t)} = \phi_\xi(-t)$

*Доказательство:*  $\overline{\phi_\xi(t)} = \overline{\mathbb{E}e^{i\xi t}} = \mathbb{E}\overline{e^{i\xi t}} = \mathbb{E}e^{-i\xi t} = \phi_\xi(-t)$

5.  $\phi_\xi$  равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$

*Доказательство:*  $|\phi_\xi(t+h) - \phi_\xi(t)| = |\mathbb{E}e^{i(t+h)\xi} - \mathbb{E}e^{it\xi}| = |\mathbb{E}(e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1))| \leq \mathbb{E}|e^{it\xi}(e^{ih\xi} - 1)| = \mathbb{E}|e^{ih\xi} - 1| = \int_{\mathbb{R}} |e^{ihx} - 1| dP_\xi(x) \xrightarrow{(*)} 0.$

(\*): Знаем, что  $e^{ihx} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ , хотим понять, что можно вносить предел под знак интеграла. Это сделать можно по теореме Лебега, где суммируемая мажоранта будет 2, так как мера вероятностная.

**Напоминание Th Лебега:**

**Теорема 2.22.** **Лебега** о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть  $f = \lim f_n$  и  $|f_n| \leq \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$  – суммируема на  $E$ .

Тогда  $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ , более того  $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

**Пример.**  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ . Хотим посчитать характеристическую функцию.

Возьмём  $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Тогда  $\xi = \sigma\eta + a$  – имеет нужное нам распределение.

$$\phi_{\sigma\eta+a}(t) = e^{ita} \phi_\eta(\sigma t)$$

Считаем для  $\eta$ :

$$\phi_\eta(t) = \mathbb{E} e^{it\eta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx.$$

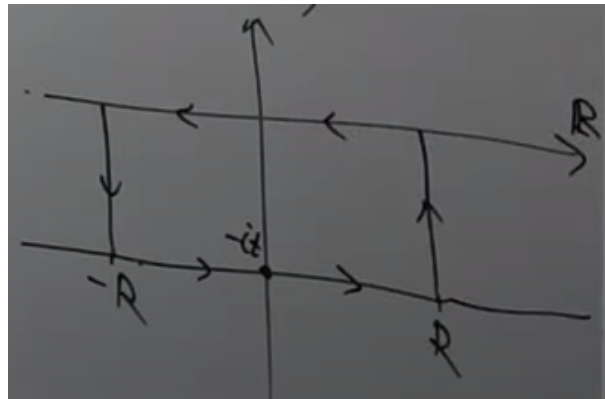
$$\text{Посчитаем } I := \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = \int_{-it+\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Чтобы найти  $I$ , посчитаем интеграл по контуру  $\Gamma_R$ :

$$\int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 \quad (\text{т.к. особых точек внутри контура нет}).$$

$$\text{С другой стороны это также равно: } \int_{\Gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = - \underbrace{\int_{-R}^R}_{\rightarrow \sqrt{2\pi}} + \underbrace{\int_{-R-it}^{R-it}}_{\rightarrow I} + \underbrace{\int_{R-it}^R}_{(*) \rightarrow 0} + \underbrace{\int_{-R}^{-R-it}}_{(*) \rightarrow 0}$$

$-\int_{-R}^R \rightarrow \sqrt{2\pi}$  – верно, так как  $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-R}^R \rightarrow 1$  – т.к. это вероятность всего (если есть более понятное объяснение, то PR/объяснение в лс приветствуется).



$$\begin{aligned} (*) : \left| \int_{R-it}^R e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right| &=_{z=R+iy} \left| i \int_{-t}^0 e^{-\frac{(R+iy)^2}{2}} dy \right| \leq \int_{-t}^0 | \dots | dy = \int_{-t}^0 \left| e^{-\frac{R^2+y^2}{2}} \right| \cdot \underbrace{|e^{-2i \cdot R \cdot y}|}_{=1} dy = \\ &= \int_{-t}^0 e^{-\frac{R^2+y^2}{2}} dy \leq \underbrace{te^{\frac{t^2}{2}}}_{const} e^{-\frac{R^2}{2}} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Тогда получаем, что  $I = \sqrt{2\pi}$ , и  $\phi_\eta(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ .

Теперь находим  $\phi_\xi(t) = e^{iat} \phi_\eta(\sigma t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + iat}$ .

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathbb{E}|\xi|^n < +\infty$ .

Тогда при  $k \leq n$  верно, что  $\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}((i\xi)^k e^{i\xi t})$ .

В частности,  $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$ .

Тут имеется в виду  $k$ -ая производная.

**Следствие.** Если  $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$ , то  $\mathbb{E}\xi = -i\varphi'(0)$  и  $\mathbb{D}\xi = -\varphi''(0) + (\varphi'(0))^2$

**Доказательство.** Теоремы.

Индукция по  $k$

База  $k = 0$ : определение  $\varphi$ .

Переход  $k \rightarrow k + 1$ :

$\varphi^{(k+1)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi^{(k)}(t+h) - \varphi^{(k)}(t)}{h} =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(i\xi)^k e^{i\xi(t+h)} - \mathbb{E}(i\xi)^k e^{it\xi}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}((i\xi)^k e^{it\xi} \cdot \frac{e^{ih\xi} - 1}{h}) = \mathbb{E}((i\xi)^k e^{it\xi} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ih\xi} - 1}{h})$ , а предел — это  $i\xi$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ih\xi} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + ih\xi + \mathbf{O}(h^2 \cdot \xi^2) - 1}{h} = i\xi + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{O}(h \cdot \xi^2)}_{=0} = i\xi$$

Почему можно было записать предел под матожидание?

$\lim \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h} dP_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} ((ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h}) dP_{\xi}(x)$  — нужна суммируемая мажоранта.

$$\left| (ix)^k e^{itx} \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = |x|^k \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = (*).$$

1. Если  $|xh| \geq 1$ , то  $\frac{1}{|h|} \leq |x|$  и  $\left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| \leq \frac{2}{|h|} \leq 2|x|$  и тогда  $(*) \leq 2|x|^{k+1}$ .

2. Если  $|xh| < 1$ , то  $e^{ihx} = 1 + \mathcal{O}(ihx) \Rightarrow \left| \frac{e^{ihx} - 1}{h} \right| = \left| \frac{1 + \mathcal{O}(ihx) - 1}{h} \right| = \mathcal{O}(x)$  и тогда  $(*) = \mathcal{O}(|x|^{k+1})$ .

Но  $\int_{\mathbb{R}} |x|^{k+1} dP_{\xi}(x) = \mathbb{E}|\xi|^{k+1} < +\infty$  по условию, тогда мажоранту подобрали правильную.  $\square$

**Теорема 3.2.** Если существует  $\varphi''_{\xi}(0)$  и конечна, то  $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$

**Замечание.** Если существует  $\varphi_{\xi}^{(2n)}$  и конечна, то  $\mathbb{E}\xi^{2n} < +\infty$

**Доказательство.**  $\mathbb{E}\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 dP_{\xi}(x) = (*)$  — хотим доказать, что этот интеграл конечен.

Заметим, что  $x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(tx)}{t}$  и подставим вместо  $x$ .

Тогда:

$(*) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(tx)}{t^2} dP_{\xi}(x) \leq \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} -\frac{e^{2itx} + e^{-2itx} - 2}{4t^2} dP_{\xi}(x) = (*)$  — лемма Фату и расписали синус как  $\sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}$ .

**Напоминание (лемма Фату):**

**Лемма. Фату.**

Если  $f_n \geq 0$ , то  $\int_E \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu$ .

Заметим, что  $\int_{\mathbb{R}} e^{2itx} dP_{\xi}(x) = \mathbb{E}e^{2it\xi} = \varphi_{\xi}(2t)$  (аналогично для  $\varphi_{\xi}(-2t)$ )

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\varphi_{\xi}(2t) - \varphi_{\xi}(-2t) - 2}{4t^2} = (*).$$

Причём  $\varphi_{\xi}(u) = \varphi_{\xi}(0) + \varphi'_{\xi}(0) \cdot u + \frac{\varphi''_{\xi}(0)u^2}{2} + o(u^2)$  (Тэйлор).

Тогда  $\varphi_{\xi}(2t) + \varphi_{\xi}(-2t) = 2 + \frac{\varphi''_{\xi}(0)((2t)^2 + (-2t)^2)}{2} + o(t^2)$ , а тогда  $(*) = \lim_{t \rightarrow 0} (-\varphi''_{\xi}(0) + o(1))$ .

То есть оценили сверху каким-то числом, тогда интеграл конечен.  $\square$



**Теорема 3.3. Формула обращения**

Пусть  $a < b$  и  $P(\xi = a) = P(\xi = b) = 0$ .

Тогда  $P(\xi \in [a, b]) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_\xi(t) dt$

То есть  $v.p. \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_\xi(t) dt$

**Доказательство.** Будем доказывать в несколько шагов:

1. Пусть  $\xi = \frac{b-a}{2}\eta + \frac{a+b}{2}$ ,  $\xi \in [a, b] \Leftrightarrow \eta \in [-1, 1]$ , тогда  $P(\xi \in [a, b]) = P(\eta \in [-1, 1]) = (*)$ .

Допустим, что мы уже доказали эту формулу для  $\eta \in [-1, 1]$ , тогда

$$P(\eta \in [-1, 1]) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-it} - e^{it}}{it} \phi_\eta(t) dt = (*)$$

Пересчитаем левую часть формулы (\*):

$$\begin{aligned} P(\xi \in [a, b]) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{iat} - e^{ibt}}{it} \phi_\eta\left(\frac{b-a}{2}t\right) e^{i\frac{a+b}{2}t} dt =_{s:=\frac{b-a}{2}t} \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T\frac{b-a}{2}}^{T\frac{b-a}{2}} \frac{e^{is} - e^{-is}}{is} \phi_\eta(s) ds = (**) \end{aligned}$$

То есть если мы получили, что  $(*) = (**)$ .

Тогда если мы докажем формулу при  $\eta \in [-1, 1]$ , то решим задачу.

2. Пусть  $a = -1, b = 1$ :

$$P(\xi \in [-1, 1]) \stackrel{?}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \phi_\xi(t) dt.$$

Посчитаем интеграл:

$\int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \phi_\xi(t) dt = \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_\xi(x) dt =_{\text{т. Фубини}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} e^{itx} dt dP_\xi(x)$  – теорему Фубини можно применять, если подынтегральная функция суммируема:  $|e^{itx}| < 1$  и  $|\frac{e^{it} - e^{-it}}{it}|$  – ограничена (при больших  $t$  значение меньше 2, при  $t \in [-1, 1]$  это непрерывная функция, а значит ограничена на этом отрезке).

Давайте посмотрим на внутренний интеграл:  $\Phi_T(x) = \int_{-T}^T \frac{e^{it} - e^{-it}}{it} e^{itx} dt$ .

Заметим, что  $\frac{e^{it} - e^{-it}}{it} = \int_{-1}^1 e^{itu} du$ .

Тогда  $\Phi_T(x) = \int_{-T}^T \int_{-1}^1 e^{itu} e^{itx} du dt = \int_{-1}^1 \int_{-T}^T e^{it(u+x)} dt du$  – т. Фубини, т.к. подынтегральная ф-я по модулю равна 1.

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi_T(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \int_{-T}^T e^{it(u+x)} dt du = (*).$$

Заметим, что  $\left. \frac{e^{it(u+x)}}{i(u+x)} \right|_{t=-T}^{t=+T} = \frac{2 \sin((u+x)T)}{u+x}$  – первообразная для внутреннего интергала (\*).

Тогда  $(*) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{2 \sin((u+x)T)}{u+x} du = (*).$  Сделаем замену  $y = (u+x)T$ , тогда  $dy = T \cdot du$ .

$$\text{Тогда } (*) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{(-1+x)T}^{(1+x)T} \frac{2 \sin y}{y} dy = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 1 \\ 0, & \text{при } x < -1 \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{2 \sin y}{y} dy = 2\pi, & \text{иначе} \end{cases}$$

Получили, что  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi_T(x) = 2\pi \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$ .

Если докажем, что  $\int_{\mathbb{R}} \Phi_T(x) dP_\xi(x) \xrightarrow[\text{пользуемся } P(\xi=a)=P(\xi=b)=0]{\text{почти везде}} \int_{\mathbb{R}} 2\pi \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) dP_\xi(x)$ , то решим за-

дачу, т.к. правая часть это как раз  $2\pi P(\xi \in [-1, 1])$ .

То есть нужно понять, почему  $\int_a^b \frac{\sin y}{y} dy$  ограничен – интеграл по лучу сходится, значит первообразная в бесконечностях имеет предел, значит в середине тоже ограничена, потому что непрерывность – обоснование примерно такое.

□

**Следствие.** 1. Если  $\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t)$ , то  $P_\xi = P_\eta$

*Доказательство:* Рассмотрим  $A = \{a \in \mathbb{R} : a - \text{точка непрерывности функции распределения}\}$ .

Тогда  $\mathbb{R} \setminus A$  – не более чем счётное. Если  $a < b$  и  $a, b \in A$ , то  $P_\xi([a, b]) = P_\eta([a, b])$

(а) Пусть  $a \in \mathbb{R}, b \in A$ :

Рассмотрим  $a_n \in A$ , такие, что  $a_n \rightarrow a$  и убывают.

$$P_\xi((a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\xi([a_n, b_n]) = \lim P_\eta([a_n, b_n]) = P_\eta((a, b]).$$

(б) Пусть  $a < b$  произвольные:

Возьмём  $b_n \in A$ , такие, что  $b_n \rightarrow b$  и убывают. Тогда  $P_\xi((a, b]) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\xi(a, b_n] = \lim P_\eta(a, b_n] = P_\eta(a, b] \Rightarrow P_\xi = P_\eta$  на ячейках, а тогда по единственности продолжения везде совпадают.

2. Если  $\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\xi(t)| dt < +\infty$ , то  $\xi$  имеет плотность распределения  $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt$  – преобразование Фурье.

*Доказательство:* Из суммируемости  $\varphi_\xi(t) \Rightarrow P_\xi((a, b]) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_\xi(t) dt$ .

Проверим, что  $P_\xi(a, b] = \int_a^b p_\xi(x) dx$ .

$\int_a^b p_\xi(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt dx = (*)$ . Под внутренним интегралом суммируемая функция, значит можно переставлять местами интегралы.

$$\text{Тогда } (*) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_a^b e^{-itx} dx \varphi_\xi(t) dt$$

**Теорема 3.4.**  $\xi_k \sim \mathcal{N}(a_k, \sigma_k^2)$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$  не все нулевые и  $\xi_k$  – независимы и  $\xi = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k \xi_k$ .

Тогда  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ , где  $a = a_0 + \sum_{k=1}^n c_k a_k$  и  $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2$ .

*Доказательство.*  $\varphi_\xi(t) = \varphi_{a_0}(t) \varphi_{c_1 \xi_1}(t) \dots \varphi_{c_n \xi_n}(t) =$

$$= e^{ita_0}(t) \varphi_{\xi_1}(c_1 t) \dots \varphi_{\xi_n}(c_n t) = e^{ita_0} e^{ia_1 c_1 t} e^{-\frac{(c_1 \sigma_1 t)^2}{2}} \dots e^{ia_n c_n t} e^{-\frac{(c_n \sigma_n t)^2}{2}} = e^{ita} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

□

### 3.2. Сходимость по распределению

**Замечание.** 1. Точек, где нет непрерывности  $F_\xi$  не более чем счётное множество

2. Если  $F_{\xi_n}(b) - F_{\xi_n}(a) \rightarrow F_\xi(b) - F_\xi(a)$  для всех  $a, b$ , за исключением счётного множества.

Тогда  $F_{\xi_n}(b) \rightarrow F_\xi(b)$  за исключением счётного множества.

*Доказательство.* Рассмотрим  $F(x)$ , функцию распределения. Возьмём хорошие  $a$ , т.ч.  $F(a) < \varepsilon$  и  $b$ , т.ч.  $F(b) > 1 - \varepsilon$ .

$$\text{Тогда } (F_n(b) - F_n(a)) - (F(b) - F(a)) \rightarrow 0 \implies |(F_n(b) - F_n(a)) - \underbrace{(F(b) - F(a))}_{>1-2\varepsilon}| < \varepsilon \implies$$

$$F_n(b) - F_n(a) > 1 - 3\varepsilon \implies F_n(a) < 3\varepsilon \text{ при больших } n.$$

$$\text{Возьмём хорошее } x, |F_n(x) - F(x)| \leq |(F_n(x) - F_n(a)) - (F(x) - F(a))| + \underbrace{F_n(a)}_{<3\varepsilon} + \underbrace{F(a)}_{<\varepsilon} < 5\varepsilon$$

при больших  $n$

□

3.  $D \subset \mathbb{R}$  не более чем счётное и  $U \subset \mathbb{R}$  - открытое.

Тогда  $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$ , где  $a_k, b_k \notin D$

**Доказательство.** Нарезаем открытое множество с шагом 1, тем ячейки, которые целиком попали - берём. Те, что не попали - бьём пополам и так далее.  $\square$

4.  $\xi$  и  $\eta$  независимые и  $\eta$  имеет непрерывное распределение.

Тогда  $\xi + \eta$  имеет непрерывное распределение.

**Доказательство.**  $P_{\xi+\eta} = P_{\xi} * P_{\eta}$

$$P_{\xi+\eta}(\{a\}) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{P_{\eta}(\{a-x\})}_{=0, \text{ т.к. непрерывность}} dP_{\xi}(x)$$

$\square$

**Определение 3.6.** Множество  $B \subset \mathbb{R}$  - регулярное, относительно  $P_{\xi}$ , если  $P_{\xi}(Cl B \setminus Int B) = 0$ , то есть  $P(\xi \in Cl B \setminus Int B) = 0$

**Теорема 3.5.**  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$  - случайные величины,  $F, F_1, F_2, \dots$  - их функции распределения, а  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  - их характеристические функции. Следующие условия равносильны:

1.  $\xi_n$  сходится к  $\xi$  по распределению
2. Для любого  $U$  открытого  $\underline{\lim} P(\xi_n \in U) \geq P(\xi \in U)$
3. Для любого  $A$  замкнутого  $\overline{\lim} P(\xi_n \in A) \leq P(\xi \in A)$
4. Для любого  $B$  регулярного борелевского  $\lim P(\xi_n \in B) = P(\xi \in B)$
5. Для любого  $B$  регулярного борелевского  $\lim \mathbb{E} \mathbb{1}_B(\xi_n) = \mathbb{E} \mathbb{1}_B(\xi)$
6. Для любой  $f$  непрерывной на прямой и ограниченной  $\lim \mathbb{E} f(\xi_n) = \mathbb{E} f(\xi)$
7.  $\varphi_n$  сходится к  $\varphi$  поточечно

**Доказательство.** 1.  $2 \iff 3$

Если  $A = \mathbb{R} \setminus U$ , тогда  $P(\xi_n \in A) = 1 - P(\xi_n \in U)$ .

$$P(\xi \in A) > \overline{\lim} P(\xi_n \in A) = 1 - \underline{\lim} P(\xi_n \in U) \leq 1 - P(\xi \in U) = P(\xi \in A)$$

2.  $2 \cup 3 \implies 4$

Мы знаем, что  $U = \{\xi_n \in Int B\} \cup \{\xi_n \in B\} \subset \{\xi_n \in Cl B\} = A$

$$P(\xi_n \in U) \leq P(\xi_n \in B) \leq P(\xi_n \in A) \implies \underbrace{\overline{\lim} P(\xi_n \in B)}_{\geq \underline{\lim} P(\xi_n \in B) \geq \underline{\lim} P(\xi_n \in U) \geq P(\xi \in U) = P(\xi \in B)} \leq$$

$$\overline{\lim} P(\xi_n \in A) \leq P(\xi \in A) = P(\xi \in B)$$

3.  $4 \iff 5$

$$\mathbb{E} \mathbb{1}_B(\xi_n) = P(\mathbb{1}_B(\xi_n) = 1) = P(\xi_n \in B)$$

4.  $6 \implies 7$

$$\varphi_{\eta}(t) = \mathbb{E} e^{it\eta} = \mathbb{E} \cos(t\eta) + i \mathbb{E} \sin(t\eta)$$

$$\text{Тогда } \varphi_n(t) = \mathbb{E} \cos(t\xi_n) + i \mathbb{E} \sin(t\xi_n) \rightarrow \mathbb{E} \cos(t\xi) + i \mathbb{E} \sin(t\xi) = \varphi(t)$$

5.  $1 \implies 2$

Берём открытое  $U$ , по замечанию  $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k]$ , где  $a_k, b_k$  - точки непрерывности  $F$ .

$$\{\xi_n \in U\} \supset \{\xi_n \in \bigcup_{k=1}^m (a_k, b_k]\} \implies P(\xi_n \in U) \geq \sum_{k=1}^m P(\xi_n \in (a_k, b_k])$$

$$\liminf P(\xi_n \in U) \geq \liminf \sum_{k=1}^m \geq \sum_{k=1}^m \liminf P(\xi_n \in (a_k, b_k]) \stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^m P(\xi \in (a_k, b_k]) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \in (a_k, b_k]) = P(\xi \in U)$$

А значит  $\liminf P(\xi_n \in U) \geq P(\xi \in U)$

$$(*) P(\xi_n \in (a_k, b_k]) = F_n(b_k) - F_n(a_k) \rightarrow F(b_k) - F(a_k) = P(\xi \in (a_k, b_k])$$

6.  $5 \implies 6$

Пусть  $|f| \leq M$  и  $D = \{x \in \mathbb{R} : P(f(\xi) = x) > 0\} = \{x : P_{\xi}(f^{-1}(x) > 0)\}$ . Это не более чем счётное множество. Потому что для разных  $x$  - это дизъюнктивные. Множеств с вероятностью  $\frac{1}{2}$  - не больше двух, с вероятностью  $\frac{1}{3}$  не больше трёх и так далее.

Пусть  $-M = t_0 < t_1 < \dots < t_m = M$ , так, что  $t_j \notin D$  и мелкость  $< \varepsilon$ .

Заведём множества  $A_j = \{x \in \mathbb{R} : t_{j-1} \leq f(x) \leq t_j\} \supset B_j = \{x \in \mathbb{R} : t_{j-1} < f(x) \leq t_j\} \supset U_j = \{x \in \mathbb{R} : t_{j-1} < f(x) < t_j\}$ . Где  $A_j$  - замкнутое, а  $U_j$  - открытое.

Мы поняли, что  $U_j \subset \text{Int } B_j \subset B_j \subset \text{Cl } B_j \subset A_j \implies \text{Cl } B_j \setminus \text{Int } B_j \subset A_j \setminus U_j$

Тогда  $B_j$  регулярно относительно  $P_{\xi}$

Определим  $g(x) = \sum_{j=1}^m t_{j-1} \mathbb{1}_{B_j}(x)$ . Тогда  $g(x) < f(x) < g(x) + \varepsilon$ .

$|g(x) - f(x)| < \varepsilon$  и тогда  $\mathbb{E}|g(\xi_n) - f(\xi_n)| \leq \varepsilon$  и мы знаем, что  $\mathbb{E}g(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}g(\xi)$  - видно, если расписать матожидание  $g$  по линейности.

$\mathbb{E}|f(\xi_n) - f(\xi)| \leq |\mathbb{E}f(\xi_n) - \mathbb{E}g(\xi_n)| + |\mathbb{E}g(\xi_n) - \mathbb{E}g(\xi)| + |\mathbb{E}g(\xi) - \mathbb{E}f(\xi)| < 3\varepsilon$  при больших  $n$ , каждый из модулей  $< \varepsilon$

7.  $7 \implies 1$

Возьмём  $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , такую, что  $\eta$  не зависит от всех  $\xi_n$  и  $\xi$

$$\varphi_{\xi_n + \eta}(t) = \varphi_{\xi_n}(t) \varphi_{\eta}(t) = \varphi_n(t) \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \xrightarrow{\text{поточечно}} \varphi(t) e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \varphi_{\xi + \eta}(t)$$

$\xi_n + \eta$  и  $\xi + \eta$  имеют непрерывное распределение, поэтому можем не задумываясь писать формулу обращения:

$$P(\xi_n + \eta \in (a, b]) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi_n + \eta}(t) dt \xrightarrow{*} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi + \eta}(t) dt = P(\xi + \eta \in (a, b]).$$

(\*) Нужна суммируемая мажоранта  $\left| \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} \varphi_{\xi_n + \eta}(t) \right| \leq e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$  - суммируемая мажоранта.

То есть  $\underbrace{P(\xi_n + \eta \in (a, b])}_{G_n(b) - G_n(a)} \rightarrow \underbrace{P(\xi + \eta \in (a, b])}_{G(b) - G(a)}$ , где  $G_n(x) = F_{\xi_n + \eta}(x)$  и  $G(x) = F_{\xi + \eta}(x)$

Тогда из замечания  $G_n(x) \rightarrow G(x)$

Возьмём  $x$  - точка непрерывности  $F$  и выберем  $\delta > 0$ , так, что  $|F(x \pm \delta) - F(x)| < \varepsilon$  - есть из непрерывности.

$$\{\xi_n + \eta \leq x - \delta\} \setminus \{|\eta| > \delta\} \subset \{\xi_n \leq x\} \subset \{\xi_n + \eta \leq x + \delta\} \cup \{|\eta| > \delta\}.$$

$$\text{Тогда} \quad \underbrace{G_n(x - \delta) - P(|\eta| > \delta)}_{G_n(x - \delta - \frac{\sigma^2}{2}) > G_n(x - \delta) - \varepsilon > G(x - \delta) - 2\varepsilon > F(x - 2\delta) - 3\varepsilon > F(x) - 4\varepsilon} \leq F_n(x) \leq \underbrace{G_n(x + \delta) + P(|\eta| > \delta)}_{G_n(x + \delta) + \frac{\sigma^2}{2} < G_n(x + \delta) + \varepsilon < G(x + \delta) + 2\varepsilon < F(x + 2\delta)}$$

Оценим вероятность:  $P(|\eta| > \delta) \leq \frac{\mathbb{D}\eta}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{\delta^2}$

□

**Теорема 3.6.**  $F_n, F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  монотонные,  $F \in C(\mathbb{R})$  и  $F_n \rightarrow F$  поточечно.

Тогда  $F_n \Rightarrow F$

**Доказательство.** Берём  $\varepsilon > 0$  и  $m > \frac{1}{\varepsilon}$ . Пусть  $t_j$ , такие, что  $F(t_j) = \frac{j}{m}$ . Если для большого  $j$  точки не нашлось, то  $F < \frac{j+1}{m}$ , а если для маленького не нашлось, то  $F > \frac{j-1}{m}$  (потому что иначе из непрерывности такие точки найдутся).

Знаем, что  $F_n(t_j) \rightarrow F(t_j)$ . Берём  $N: \forall n \geq N |F_n(t_j) - F(t_j)| < \varepsilon$ .

Теперь смотрим на произвольную точку:  $t_j < t < t_{j+1}$ . Тогда  $F_n(t) \leq F_n(t_{j+1}) < F(t_{j+1}) + \varepsilon = \frac{j+1}{m} + \varepsilon = F(t_j) + \frac{1}{m} + \varepsilon \leq F(t) + \frac{1}{m} + \varepsilon < F(t) + 2\varepsilon$ .

Аналогично в другую сторону:

$$F_n(t_j) > F(t_j) - \varepsilon = \frac{j}{m} - \varepsilon = F(t_{j+1}) - \frac{1}{m} - \varepsilon \geq F(t) - 2\varepsilon.$$

□

### 3.3. Центральная предельная теорема

**Теорема 3.7. ЦПТ в форме Леви**

$\xi_1, \xi_2, \dots$  независимые, одинаково распределённые случайные величины.  $a = \mathbb{E}\xi_1, \sigma^2 = \mathbb{D}\xi_1, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ .

$$\text{Тогда } P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq x\right) \Rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

**Доказательство.** Достаточно проверять поточечную сходимость характеристических функций.

$$\varphi_{\xi_k - a}(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2), \text{ потому что мы знаем, что } \mathbb{E}(\xi_k - a) = 0 \text{ и } \mathbb{D}(\xi_k - a) = \sigma^2$$

$$\text{Тогда } \varphi_{S_n - na}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k - a}(t) = \left(1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2)\right)^n$$

$$\varphi_{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}} = \varphi_{S_n - na}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Чтобы получить последний переход - логарифмируем.

То есть  $\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma}$  сходится по распределению к  $\mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow$  функция распределения сходится равномерно. □

**Следствие. Интегральная теорема Муавра-Лапласа**

$S_n$  - количество успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ .

$$\text{Тогда } P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) \Rightarrow \Phi(x)$$

**Доказательство.**  $\mathbb{E}\xi_k = p, \mathbb{D}\xi_k = pq$  □

**Пример. Посчитаем характеристическую функцию для Poisson( $\lambda$ )**

$$\varphi_{\xi}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

**Теорема 3.8.**  $P(\xi_{nk} = 1) = p_{nk}$  и  $P(\xi_{nk} = 0) = 1 - p_{nk}$  и пусть  $S_n = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}$ .

$$\max\{p_{n1}, \dots, p_{nn}\} \rightarrow 0 \text{ и } p_{n1} + \dots + p_{nn} \rightarrow \lambda.$$

$$\text{Тогда } P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

**Доказательство.**  $\varphi_{\xi_{nk}}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_{nk}} = 1 - p_{nk} + p_{nk}e^{it} = 1 + p_{nk}(e^{it} - 1)$

$$\text{Тогда } \varphi_{S_n} = \prod_{k=1}^n (1 + p_{nk}(e^{it} - 1)) \xrightarrow{?} \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

Пусть  $z = e^{it} - 1$

Значит, нужно проверить  $\sum_{k=1}^n \ln(1 + p_{nk}z) \rightarrow \lambda z$ . Раскладываем логарифм:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n p_{nk}z}_{\rightarrow \lambda z} + \sum_{k=1}^n \mathcal{O}(p_{nk}^2). \text{ Значит осталось показать, что вторая сумма стремится к нулю.}$$

$$\text{Действительно, } \sum_{k=1}^n \mathcal{O}(p_{nk}^2) \leq (p_{n1} + \dots + p_{nn}) \cdot \max\{p_{n1}, \dots, p_{nn}\} \rightarrow 0$$

□

### Теорема 3.9. ЦПТ в форме Линденберга

$\xi_1, \dots$  - независимые случайные величины,  $a_k = \mathbb{E}\xi_k, \sigma_k^2 = \mathbb{D}\xi_k > 0, S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \mathbb{D}_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$

$$f(x) = x^2 \mathbb{1}_{\{|x| \geq \varepsilon \mathbb{D}_n\}}(x) \forall \varepsilon > 0 \text{ и } Lind(\varepsilon, n) = \frac{1}{\mathbb{D}_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}f(\xi_k - a_k) \rightarrow 0$$

$$\text{Тогда } P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq x\right) \Rightarrow \Phi(x)$$

### Теорема 3.10. ЦПТ в форме Ляпунова

$\xi_1, \dots$  независимые случайные величины

$$L(\delta, n) = \frac{1}{\mathbb{D}_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \rightarrow 0 \text{ при некотором } \delta$$

$$\text{Тогда } P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq x\right) \Rightarrow \Phi(x)$$

**Доказательство.**

□

**Теорема 3.11.** Пусть  $\delta \in [0, 1]$  и  $\xi_1, \dots$  независимые случайные величины.

$$\text{Тогда } \left|P\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{D}S_n}} \leq x\right) - \Phi(x)\right| \leq C_\delta L(\delta, n)$$

### Теорема 3.12. Берри-Эссена

$\xi_1, \dots$  независимые, одинаково распределённые случайные величины.

$$\text{Тогда } \left|P\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{\sqrt{n}\sigma}} \leq x\right) - \Phi(x)\right| \leq C_\delta \cdot \frac{\mathbb{E}|\xi_1 - a|^{2+\delta}}{n^{\frac{\delta}{2}} \sigma^{2+\delta}}$$

**Доказательство.**  $\mathbb{D}_n^2 = n\sigma^2$  и  $L(\delta, n) = \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}} \sigma^{2+\delta}} \cdot n \mathbb{E}|\xi_1 - a|^{2+\delta}$

$$\text{В частности при } \delta = 1 \quad |P - \Phi| \leq C \frac{\mathbb{E}|\xi_1 - a|^3}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

□

**Замечание. Про константы**

1. Эссен (1956)  $C \geq \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0,4097$
2. Шевцова (2014)  $C \leq 0,469$
3. Для общего случая:  $C_1 \leq 0,5583$
4. Для схемы Бернулли (2018)  $C_1 \leq 0,4099$
5. Для схемы Бернулли с  $p = \frac{1}{2}$   $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

### Теорема 3.13. Хартмана-Винтнера (закон повторного логарифма)

$\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые, одинаково распределённые.  $\mathbb{E}\xi_1 = 0, \mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 > 0$

$$\text{Тогда } \overline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = \sigma, \text{ а } \underline{\lim} \frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = -\sigma$$

**Теорема 3.14. Штрассена**

$\xi_1, \xi_2, \dots$  независимые одинаково распределённые,  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$  и  $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 > 0$

Тогда любое число из  $[-\sigma, \sigma]$  - пред. точка послед.  $\frac{S_n}{\sqrt{2n \ln \ln n}}$

**3.4. Большие отклонения****ЗБЧ в форме Чебышёва**

$\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые, одинаково распределённые случайные величины.  $\mathbb{E}\xi_1 = a, \mathbb{D} = \sigma^2 > 0$

Тогда  $P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \rightarrow 0$ , если  $r > a$

Более того,  $P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq \frac{\sigma^2}{(r-a)n}$  - это оценка из доказательства. Но оценка довольно плохая.

**Определение 3.7.**  $\xi$  удовлетворяет условию Крамера, если при  $\lambda \in (0, \lambda_0)$  :  $\mathbb{E}e^{\lambda\xi} < +\infty$

**Теорема 3.15. Оценка Чернова**

$\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые, одинаково распределённые, удовлетворяющие условию Крамера и  $r > a = \mathbb{E}\xi_1$

Хотим оценить  $P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) = P(S_n \geq nr) = P(\lambda S_n \geq \lambda nr) = P(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda nr}) \stackrel{\text{Марков}}{\leq} \frac{\mathbb{E}e^{\lambda S_n}}{e^{\lambda nr}} \stackrel{*}{=}$   
 $\left(\frac{\mathbb{E}e^{\lambda\xi_1}}{e^{\lambda r}}\right)^n$

$$(*) \mathbb{E}e^{\lambda S_n} = \mathbb{E}(\prod_{k=1}^n e^{\lambda\xi_k}) = (\mathbb{E}e^{\lambda\xi_1})^n$$

А теперь, то что получилось - будем минимизировать по  $\lambda$

$\varphi(\lambda) = \ln \mathbb{E}e^{\lambda\xi_1} - \lambda r \rightarrow \inf$ , где  $\lambda$  допустимое

$$I(r) = \sup_{\lambda} \{\lambda r - \ln(\mathbb{E}e^{\lambda\xi_1})\} \implies P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq e^{-nI(r)}$$

**Пример.** 1.  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\mathbb{E}e^{\lambda\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}} dx \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2}} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\lambda r - \frac{\lambda^2}{2} \rightarrow \max_{\lambda>0}, \text{ максимум при } \lambda = r. \text{ И тогда } I(r) = \frac{r^2}{2}$$

$$\text{Значит } P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq e^{-\frac{nr^2}{2}} \text{ при } r > 0$$

2.  $\xi \sim \text{Exp}(1)$

$$\mathbb{E}e^{\lambda\xi} = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} e^{-x} dx = \frac{e^{(\lambda-1)x}}{\lambda-1} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1-\lambda} \text{ сходимости есть при } \lambda \in (0, 1)$$

$$\lambda r - \ln \frac{1}{1-\lambda} = \lambda r + \ln(1-\lambda) - \text{ считаем производную по } \lambda$$

$$(\lambda r + \ln(1-\lambda))'_{\lambda} = r - \frac{1}{1-\lambda} \implies 1-\lambda = \frac{1}{r} \implies \lambda = 1 - \frac{1}{r}, r > 1$$

$$\text{Тогда } I(r) = r\left(1 - \frac{1}{r}\right) - \ln r = r - 1 - \ln r$$

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq r\right) \leq e^{-n(r-1-\ln r)} = r^n e^{-n(r-1)}$$

## 4. Дискретные случайные процессы



#### 4.1. Условные математические ожидания

**Определение 4.1.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\mathbb{E}|\xi| < +\infty$ . Пусть  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  и  $\mathcal{A}$  -  $\sigma$ -алгебра.

$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) = \eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - случайная величина, которая:

1. измерима относительно  $\mathcal{A}$
2.  $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$

**Теорема 4.1.**  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}, \mathbb{E}|\xi| < +\infty$ , тогда  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$  существует и единственно, с точностью до почти наверное

**Доказательство.** Существование:

$\xi = \xi_+ - \xi_-$ . Пусть  $A \in \mathcal{A}$ , определим  $\mu_{\pm}A = \int_A \xi_{\pm} dP$  - это конечные меры на  $\mathcal{A}$ , так как интеграл от измеримой неотрицательной функции. А ещё эти меры абсолютно непрерывны относительно  $P$  т. Радона-Никодима  $\implies \exists \eta_{\pm} > 0$  измеримые относительно  $\mathcal{A}$ , т.ч.  $\mu_{\pm}A = \int_A \eta_{\pm} dP$

$$\eta = \eta_+ - \eta_-, \text{ надо проверить, что } \forall A \in \mathcal{A} : \underbrace{\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A)}_{\mathbb{E}(\xi_+ \mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(\xi_- \mathbb{1}_A)} = \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$$

А ещё  $\mathbb{E}(\xi_+ \mathbb{1}_A) = \mu_+A = \int_A \xi_+ dP$  и для остальных точно также

Единственность:

Пусть  $\eta_1$  и  $\eta_2$  - условные матожидания. Тогда  $\{\eta_1 > \eta_2\} \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{E}(\eta_1 \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\eta_2 \mathbb{1}_A) \implies \underbrace{\mathbb{E}((\eta_1 - \eta_2) \mathbb{1}_A)}_{= \int_A (\eta_1 - \eta_2) dP} = 0 \implies P(A) = P(\eta_1 > \eta_2) = 0. \text{ Аналогично}$$

$$P(\eta_1 < \eta_2) = 0$$

□

**Свойства.** 1.  $\mathbb{E}(c|\mathcal{A}) = c$

2.  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$  линейно по  $\xi$
3.  $\xi \leq \eta$ , то  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) \leq \mathbb{E}(\eta|\mathcal{A})$

**Доказательство.** Достаточно проверить, что если  $\xi \geq 0$ , то  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) \geq 0$

□

$$4. \mathbb{E}(\xi|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}\xi$$

**Доказательство.** Измеримы относительно такой  $\sigma$ -алгебры только константы. Надо проверить, что  $\mathbb{E}(\mathbb{E}\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A)$  для  $A = \emptyset$  и  $A = \Omega$

□

$$5. \mathcal{F} \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 - \sigma\text{-алгебры}$$

$$\text{Тогда } \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_1)|\mathcal{A}_2) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_2)$$

**Доказательство.**  $\eta = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_2)$  и  $\zeta = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}_1)$

Надо доказать, что  $\eta = \mathbb{E}(\zeta|\mathcal{A}_2)$ .  $\eta$  измерима относительно  $\mathcal{A}_2$ . Надо проверить, что  $\forall A \in \mathcal{A}_2 : \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\zeta \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A)$ , т.к.  $A \in \mathcal{A}_1$  по определению  $\zeta$ . А ещё  $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$

□

$$6. \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})) = \mathbb{E}\xi - \text{из 4 и 5}$$

$$7. \text{Если } \xi \text{ измерима относительно } \mathcal{A}, \text{ то } \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) = \xi$$

**Пример.** Пусть  $\Omega = \bigcup A_k$  не более чем счётное объединение

$\mathcal{A}$  - натянутая на  $A_1, A_2, \dots$   $\sigma$ -алгебра

$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}) = ?$

Если  $\eta$  измерима относительно  $\mathcal{A} \implies \eta = \sum c_k \mathbb{1}_{A_k}$

Нужно чтобы  $\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{A_n}) = \mathbb{E}(\underbrace{\eta \mathbb{1}_{A_n}}_{c_n \mathbb{1}_{A_n}}) = c_n P(A_n)$

То есть  $c_n = \frac{\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)}$

**Замечание.** Из свойства 6:  $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = \sum \frac{\mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{A_k})}{P(A_k)} \cdot P(A_k)$

**Определение 4.2.** Условная вероятность относительно  $\sigma$ -алгебры

$$P(B|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{A})$$

**Пример.**  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - независимые, одинаково распределённые случайные величины,  $N$  - случайная величина с неотрицательными целыми значениями, не зависящая от  $\xi_1, \dots$

$$S = \xi_1 + \dots + \xi_N$$

Пусть  $A_n = \{N = n\}$

$$\mathbb{E}S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}(S \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} \cdot P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} na P(N = n) = \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}N$$

$\frac{\mathbb{E}(S \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} = \mathbb{E}(S|N = n) = \mathbb{E}(S_n|N = n) = \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n|N = n) \stackrel{\text{независимость}}{=} \mathbb{E}(\xi_1 + \dots + \xi_n) = na$ ,  
где  $a = \mathbb{E}\xi_1$

**Пример.** Пусть  $\xi_k$  тоже принимают неотрицательные целые значения

Тогда  $G_{\xi_1}(t) = G(t)$  - производящая функция  $\xi_k$

$$G_S(t) = \mathbb{E}t^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(t^S \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} \cdot P(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n(t) P(N = n) = G_n(G_\xi(t))$$

$$\frac{\mathbb{E}(t^S \mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} = \mathbb{E}(t^S|N = n) = \mathbb{E}(t^{S_n}|N = n) = \mathbb{E}(t^{\xi_1} \cdot \dots \cdot t^{\xi_n}|N = n) = \mathbb{E}(t^{\xi_1} \cdot \dots \cdot e^{\xi_n}) = (\mathbb{E}t^{\xi_1})^n = (G(t))^n$$

**Замечание.** Геометрическая интерпретация

Пусть  $\mathbb{E}\xi^2 < +\infty$

Тогда  $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  -  $\sigma$ -алгебра. Поэтому  $\underbrace{L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)}_{\text{замкнутое подпространство}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\eta = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$  - тогда проекция  $\xi$  на  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Нужно проверить, что  $\xi - \eta \perp L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

В  $L^2$  плотны ступенчатые, давайте проверим для них, а потом сделаем предельный переход. Достаточно даже понять только для 1 ступеньки.

Достаточно понять, что  $\forall A \in \mathcal{A} : \xi - \eta \perp \mathbb{1}_A$

$$0 \stackrel{?}{=} \langle \xi - \eta, \mathbb{1}_A \rangle = \mathbb{E}((\xi - \eta) \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(\eta \mathbb{1}_A)$$

**Определение 4.3.**  $\eta$  - случайная величина. Пусть  $\sigma(\eta)$  - наименьшая  $\sigma$ -алгебра, относительно которой  $\eta$  измерима

**Замечание.** Чтобы её получить, нужно взять все Лебеговы множества и натянуть на них  $\sigma$ -алгебру

**Определение 4.4.**  $\mathbb{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}(\xi|\sigma(\eta))$  - условное матожидание  $\xi$  относительно  $\eta$

**Пример.**  $\eta$  - дискретная,  $\{y_1, y_2, \dots\}$  - множество её значений

Все  $\{\eta = y_k\}$  - измеримы,  $\Omega = \bigcup \{\eta = y_k\}$ ,  $\sigma(\eta)$  - всевозможные объединения  $\{\eta = y_k\}$

**Теорема 4.2.** 1. Если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\mathbb{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}\xi$

2. Если  $\eta$  измерима относительно  $\mathcal{A}$ , то  $\mathbb{E}(\xi\eta|\mathcal{A}) = \eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$

**Доказательство.** 1. Надо доказать, что  $\forall A \in \sigma(\eta) : \mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_A) \stackrel{?}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\mathbb{1}_A$

То есть достаточно проверить, что  $\xi$  и  $\mathbb{1}_A$  независимы

Пусть  $A = \{\eta \leq a\}$ .  $P(\xi \in B, \mathbb{1}_A \in C) = P(\xi \in B) \cdot P(\mathbb{1}_A \in C)$

Достаточно рассмотреть только  $C = \{0\}$  и  $C = \{1\}$

$P(\xi \in B, \mathbb{1}_A = 1) = P(\xi \in B, \eta \leq a) \stackrel{\text{независимость } \xi \text{ и } \eta}{=} P(\xi \in B)P(\eta \leq a) = P(\xi \in B)P(\mathbb{1}_A = 1)$ .  
Для  $\mathbb{1}_A = 0$  аналогично

Для Лебеговых множеств мы это получили, поэтому есть и для любых преобразов ячеек

2. Проверяем для  $\eta = \mathbb{1}_A$ , где  $A \in \mathcal{A}$

$\mathbb{1}_A\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})$  - условное матожидание  $\mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_A|\mathcal{A})$

Измеримость есть, поэтому достаточно проверить только второе условие

$$\forall B \in \mathcal{A} : \underbrace{\mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B)}_{=\mathbb{E}(\xi\mathbb{1}_{A \cap B})} \stackrel{?}{=} \underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})\mathbb{1}_B)}_{=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A \cap B}\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A}))}$$

Тогда по линейности верно для простых  $\eta$ , по теореме Леви предельный переход  $\eta_n \rightarrow \eta$  поточечно.

$$\text{Мы знаем, что есть равенство } \underbrace{\mathbb{E}(\xi\eta_n\mathbb{1}_B)}_{=\int_{\Omega} \xi\eta_n\mathbb{1}_B dP} = \underbrace{\mathbb{E}(\eta_n\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})\mathbb{1}_B)}_{=\int_{\Omega} \eta_n\mathbb{E}(\xi|\mathcal{A})\mathbb{1}_B dP}$$

Предельный переход можно делать для  $\eta_+$  и  $\eta_-$ , сделаем, потом перейдём к  $\eta$

□

## 4.2. Ветвящиеся процессы

$\xi_{nk}$  - независимые случайные величины с неотрицательными целыми значениями

Интерпретация - есть много частиц, которые размножаются/умирают. Тогда  $n$  - момент времени,  $k$  - номер частицы,  $\xi_{nk}$  - количество её потомков

$\eta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{n\eta_{n-1}}$  - количество частиц в момент  $n$

$\eta_0 = 1$  - изначально у нас есть только 1 частица

Считаем, что все  $\xi_{nk}$  одинаково распределены и  $P(\xi_{nk} = m) = f_m$ .

$F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m t^m$  - производящая функция

Пусть  $G_n(t)$  - производящая функция для  $\eta_n$ . Тогда  $G_n(t) = G_{n-1}(F(t)) = F \circ F \circ F \dots \circ F(t)$  - результат был получен в примере выше.

$$\mathbb{E}\eta_n = G'_n(1) = G'_{n-1}(\underbrace{F(1)}_{=1}) \cdot \underbrace{F'(1)}_{=\mathbb{E}\xi} = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta_{n-1} = (\mathbb{E}\xi)^n$$

**Теорема 4.3.** Вероятность вырождения процесса - наименьший неотрицательный корень уравнения  $F(x) = x$

**Доказательство.**  $A_n = \{\eta_n = 0\}$  - на  $n$ -ом шаге не осталось частиц

$P(A_n) = G_n(0) \leq 1$ , а ещё  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  - если процесс вырожден, то он и останется вырожденным.

Поэтому у нас существует предел  $q = \lim P(A_n) \leq 1$

$\underbrace{G_{n+1}(0)}_{\rightarrow q} = \underbrace{F(G_n(0))}_{F(q)}$ , а  $F$  непрерывная, поэтому  $q = F(q)$ , поэтому вероятность - корень

уравнения. Осталось понять, что это наименьший корень

Пусть  $r$  другой корень уравнения  $r = F(r)$ . Ещё мы знаем, что  $F$  монотонна, потому что производная неотрицательная (просто коэффициенты неотрицательны).

$P(A_1) = G_1(0) = F(0) \stackrel{\text{монотонность}}{\leq} F(r) = r$  - верно в стартовый момент времени.

Пусть  $P(A_n) \leq r$ , тогда  $P(A_{n+1}) = G_{n+1}(0) = F(G_n(0)) = F(P(A_n)) \leq F(r) = r$

Переходим к пределу и получаем, что  $q \leq r$  □

**Замечание.**  $F$  непрерывная, монотонная, выпуклая на  $[0, 1]$ , а ещё  $F(1) = 1$  и  $F(0) \geq 0$

Если  $m = \mathbb{E}\xi = F'(1) > 1$ , то есть вероятность вырождения  $< 1$ , если же  $m \leq 1$ , то вероятность вырождения  $= 1$

**Теорема 4.4.** Пусть  $m = \mathbb{E}\xi = 1$ ,  $b = \mathbb{D}\xi > 0$ ,  $q_n$  - вероятность вырождения к  $n$ -ому шагу,  $\gamma_n = q_n - q_{n-1}$  - вероятность вырождения ровно на  $n$ -ом шаге.

Тогда

$$1. \gamma_n \sim \frac{2}{bn^2}$$

$$2. 1 - q_n \sim \frac{2}{bn}$$

**Доказательство.** Пусть  $p_n = 1 - q_n$  и  $H(x) = 1 - F(1 - x)$

Тогда  $H(p_n) = 1 - F(q_n) = 1 - q_{n+1} = p_{n+1}$ ,  $H(0) = 1 - F(1) = 0$ ,  $H'(0) = F'(1) = 1$ ,  $H''(x) = F''(1 - x)$  и тогда  $H''(0) = -F''(1) = -b$

В итоге  $H(x) = x - \frac{bx^2}{2} + o(x^2)$

Пусть  $a_n = \frac{1}{p_n}$ ,  $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{p_{n-1} - p_n}{p_n p_{n-1}} = \frac{p_{n-1} - H(p_{n-1})}{p_{n-1} H(p_{n-1})} = \frac{\frac{bp_{n-1}^2}{2} + o(p_{n-1}^2)}{p_{n-1}(p_{n-1} + o(p_{n-1}))} = \frac{b}{2} + o(1) \implies$   
 $a_n \sim \frac{bn}{2}$

Тогда  $p_n \sim \frac{2}{bn}$

$$\gamma_n = q_n - q_{n-1} = p_{n-1} - p_n = p_{n-1} - H(p_{n-1}) = \frac{bp_{n-1}^2}{2} + o(p_{n-1}^2) \sim \frac{bp_{n-1}^2}{2} \sim \frac{b}{2} \left(\frac{2}{bn}\right)^2 = \frac{2}{bn^2} \quad \square$$

### 4.3. Цепи Маркова

**Определение 4.5.**  $Y$ , не более чем счётное множество - фазовое пространство

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство,  $\xi_n : \Omega \rightarrow Y$  - случайная величина, такая, что  $P(\xi_n = a_n | \xi_{n-1} = a_{n-1}, \dots, \xi_0 = a_0) = P(\xi_n = a_n | \xi_{n-1} = a_{n-1}) \forall a_0, a_1, \dots, a_n \in Y$

Такая последовательность  $\xi_n$  - цепь Маркова

**Замечание.** То есть  $\xi_n$  зависит только от  $\xi_{n-1}$

**Пример.** 1. Случайное блуждание по  $\mathbb{Z}$

$$P(\xi_n = \xi_{n-1} + 1) = p$$

$$P(\xi_n = \xi_{n-1} - 1) = 1 - p$$

2. Прибор, который бывает в двух состояниях - работает и не работает.

**Замечание.**  $\pi_0 = P_{\xi_0}$  - начальное распределение

$p_n(a, b) = P(\xi_n = b | \xi_{n-1} = a)$  - вероятности переходов. Этот набор данных однозначно определяет все распределения

**Определение 4.6.** Цепь Маркова называется однородной, если  $p_n(a, b)$  не зависят от  $n$ .

То есть вероятности переходов не зависят от времени

**Обозначение.**  $p_n(a, b) = p_{ab}$

**Замечание.** Интерпретация: есть частица, которая бегает по фазовому пространству. И мы в каждый момент фиксируем место, где находится частица.

**Определение 4.7.** Траектория:  $\xi_0 = a_0, \xi_1 = a_1, \dots, \xi_n = a_n$

**Теорема 4.5.**  $P(\xi_0 = a_0, \dots, \xi_n = a_n) = \pi_0(a_0)p_{a_0a_1}p_{a_1a_2} \dots p_{a_{n-1}a_n}$

**Доказательство.** Индукция по  $n$

1. База индукция - определение  $\pi_0$

2. Переход:  $n - 1 \rightarrow n$

$$P(\xi_0 = a_0, \dots, \xi_n = a_n) = P(\xi_n = a_n | \xi_{n-1} = a_{n-1}, \dots, \xi_0 = a_0) \cdot P(\xi_{n-1} = a_{n-1}, \dots, \xi_0 = a_0) =$$

$$\underbrace{P(\xi_n = a_n | \xi_{n-1} = a_{n-1})}_{=p_{a_{n-1}a_n}} \cdot \pi_0(a_0)p_{a_0a_1} \dots p_{a_{n-2}a_{n-1}}$$

□

**Теорема 4.6.** Пусть  $\pi_0 : Y \rightarrow [0, 1]$ , т.ч.  $\sum_{y \in Y} \pi_0(y) = 1$ ,  $p : Y \times Y \rightarrow [0, 1]$ , т.ч.  $\sum_{y \in Y} p_{ay} = 1 \forall a \in Y$

Тогда существует такое пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  и последовательность  $\xi_n : \Omega \rightarrow Y$ , такая, что  $\xi_n$  цепь Маркова с начальным распределением  $\pi_0$  и вероятностью перехода  $p_{ab}$

**Обозначение.**  $\pi_n = P_{\xi_n}$  и  $P$  - матрица  $(p_{ab})_{a,b \in Y}$

**Теорема 4.7.**  $\pi_n = \pi_0 P^n$

**Доказательство.** Индукция по  $n$ . Переход  $n - 1 \rightarrow n$

$$\pi_n(b) = P(\xi_n = b) = \sum_{y \in Y} P(\xi_n = b | \xi_{n-1} = y) \cdot P(\xi_{n-1} = y) = \sum_{y \in Y} p_{yb} \pi_{n-1}(y)$$

То есть  $\pi_n = \pi_{n-1} P$

□

**Обозначение.**  $p_{ab}(n) = P(\xi_{n+k} = b | \xi_k = a)$  - вероятность перехода за  $n$  шагов

**Определение 4.8.**  $\pi : Y \rightarrow [0, 1]$  - распределение на  $Y$ , если  $\sum_{y \in Y} \pi(y) = 1$

**Определение 4.9.**  $\pi$  - стационарное распределение для цепи Маркова, если  $\pi = \pi P$

**Пример.** Симметричное случайное блуждание на  $\mathbb{Z}$ , то есть  $p = \frac{1}{2}$

Пусть  $\pi$  - стационарное распределение для этого блуждания

Тогда  $\frac{1}{2}\pi(n-1) + \frac{1}{2}\pi(n+1) = \pi(n) \iff \pi(n) - \pi(n-1) = \pi(n+1) - \pi(n)$ , то есть разность  $\alpha = \pi(n) - \pi(n-1)$  не зависит от  $n$

1.  $\alpha > 0$ , то  $\pi(n) = n\alpha + \pi(0) \rightarrow +\infty$ , так не бывает
2.  $\alpha < 0$ , то  $\pi(n) = n\alpha + \pi(0) \rightarrow -\infty$ , так тоже не бывает
3.  $\alpha = 0$  и  $\pi = \text{const}$ , но так тоже не бывает

#### Теорема 4.8. Эргодическая теорема Маркова

$\xi_n$  - конечная цепь Маркова и  $p_{ab} > 0 \forall a, b \in Y$

Тогда существует единственное стационарное распределение и  $\pi(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ab}(n)$

Более того,  $|\pi(b) - p_{ab}(n)| \leq cq^n$ , где  $q \in (0, 1)$

**Доказательство.** Доказательство с использованием теоремы Банаха о сжатии из матанализа

$d$  - количество элементов в  $Y$ . Рассмотрим  $\mathbb{R}^d$  с нормой  $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_d|$  - полное пространство

$S = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1, x_1, x_2, \dots, x_d \geq 0\}$  - замкнутое подмножество  $\mathbb{R}^d$  - полное

$T : S \rightarrow S$  и  $T(x) = x^T P$ ,  $\delta = \min_{a,b \in Y} p_{ab} > 0$

Проверяем, что  $T$  - сжатие с  $\lambda = 1 - d\delta$

$$\begin{aligned} \|T_x - T_y\| &\stackrel{z=x-y}{=} \|T_z\| = \sum_{j=1}^d |(T_z)_j| = \sum_{j=1}^d \left| \sum_{k=1}^d z_k p_{kj} \right| = \sum_{j=1}^d \left| \sum_{k=1}^d z_k (p_{kj} - \delta) + \delta \sum_{k=1}^d z_k \right| \leq \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d |z_k| (p_{kj} - \delta) \\ &= \sum_{k=1}^d |z_k| \sum_{j=1}^d \underbrace{(p_{kj} - \delta)}_{=1-\delta d=\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^d |z_k| = \lambda \|x - y\| \end{aligned} \quad \square$$

**Замечание.** Пусть  $\xi_n$  - конечная цепь Маркова,  $m \in \mathbb{N}$ , т.ч.  $p_{ab}(m) > 0 \forall a, b \in Y$

Тогда существует единственное стационарное распределение

**Определение 4.10.** Состояние  $b$  достижимо из  $a$ , если  $\exists n \in \mathbb{N}$ , т.ч.  $p_{ab}(n) > 0$

**Определение 4.11.** Состояния  $a$  и  $b$  сообщающиеся, если  $a$  достижимо из  $b$ , а  $b$  достижимо из  $a$

**Определение 4.12.** Состояние  $a$  существенное, если  $\forall b$ , достижимого из  $a$  - состояния  $a$  и  $b$  сообщающиеся

**Обозначение.**  $f_a(n) = P(\xi_n = a | x_{n-1} \neq a, \xi_{n-2} \neq a, \dots, \xi_1 \neq a, \xi_0 = a)$  - вероятность, стартовав из  $a$ , впервые вернуться назад на  $n$ -ном шаге.

$F_a = \sum_{n=1}^{\infty} f_a(n)$  - вероятность возврата назад в  $a$

**Определение 4.13.**  $a$  - возвратное состояние, если  $F_a = 1$

**Определение 4.14.**  $a$  - нулевое состояние, если  $p_{aa}(n) \rightarrow 0$

#### Теорема 4.9. Критерий возвратности

$a$  - возвратное  $\iff (*) = P_a = \sum_{n=1}^{\infty} p_{aa}(n)$  расходится

И если  $a$  не возвратное, то  $F_a = \frac{P_a}{1+P_a}$

**Лемма.**  $c_n \geq 0$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = +\infty$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = +\infty$

**Доказательство.** Берём  $n$ , т.ч.  $\sum_{k=0}^n c_k > A$ , а  $\sum_{k=1}^n \rightarrow_{x \rightarrow 1-} \sum_{n=0}^n c_k$ . Тогда  $\underbrace{\sum_{k=0}^n c_k x^k}_{\leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n} > A - 1$

при  $x$  близких к 1 □

**Доказательство.** Теоремы

Давайте считать, что  $p_{aa}(0) = 1$  и  $f_a(0) = 0$

$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_a(n) z^n$ , сходится при  $|z| \leq 1$

$\mathcal{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{aa}(n) z^n$ , сходится при  $|z| < 1$

$p_{aa}(n) = \sum_{k=0}^n f_a(k) p_{aa}(n-k)$  - верно при  $n \geq 1$

Тогда  $\mathcal{P}(z) = \mathcal{F}(z)\mathcal{P}(z)$  - почти верное равенство, надо ещё подкорректировать при  $z^0$ . Получим  $\mathcal{P}(z) = \mathcal{F}(z)\mathcal{P}(z) + 1 \implies \mathcal{F}(z) = \frac{\mathcal{P}(z)-1}{\mathcal{P}(z)}$ . Давайте устремим  $z \rightarrow 1$

$$\underbrace{\lim_{z \rightarrow 1-} \mathcal{F}(z)}_{=F_a} = \lim_{z \rightarrow 1-} \frac{\mathcal{P}(z)-1}{\mathcal{P}(z)} \stackrel{\text{если } (*) \text{ сходится}}{=} \frac{P_a}{P_a+1}.$$

А если расходится, то смотрим на  $\underbrace{(1 - \mathcal{F}(z))}_{\rightarrow 1 - F_a} \underbrace{\mathcal{P}(z)}_{\rightarrow 1 + P_a} = 1$ . Отсюда получаем, что  $F_a = 1$  □

**Следствие.** Если  $a$  не возвратное  $\implies a$  - нулевое

**Теорема 4.10. Теорема солидарности**

$a$  и  $b$  сообщающиеся состояния

Тогда они возвратны/не возвратны (нулевые/не нулевые) одновременно

**Доказательство.**  $a$  и  $b$  сообщающиеся, значит  $\exists j, k \in \mathbb{N} : p_{ab}(j) > 0$  и  $p_{ba}(k) > 0$

$$p_{aa}(n+j+k) \geq p_{ab}(j)p_{bb}(n)p_{ba}(k) \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} p_{aa}(n+j+k) \geq p_{ab}(j)p_{ba}(k) \sum_{n=1}^{\infty} p_{bb}(n)$$

Отсюда всё следует, потому что:

Если  $p_{aa}(n+j+k) \rightarrow 0$ , то  $p_{bb}(n) \rightarrow 0$  □

**Теорема 4.11. ЗБЧ для цепей Маркова**

$\varepsilon > 0$  и цепь удовлетворяет условию теоремы Маркова,  $\pi$  - стационарное распределение

Тогда

$$1. P \left( \left| \frac{\nu_a(n)}{n} - \pi(a) \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0$$

$$2. P \left( \left| \frac{\nu_{ab}(n)}{n} - \pi(a)p_{ab} \right| \geq \varepsilon \right) \rightarrow 0$$

Здесь  $\nu_a(n)$  - количество значений  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , равных  $a$

$\nu_{ab}(n)$  - количество пар  $ab$  на соседних позициях

**Доказательство.** Пусть  $\eta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_k = a \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\tilde{\eta}_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_k = a \text{ и } \xi_{k+1} = b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда  $\nu_a(n) = \eta_1 + \dots + \eta_n$  и  $\nu_{ab}(n) = \tilde{\eta}_1 + \dots + \tilde{\eta}_n$

Посмотрим на  $\mathbb{E}\eta_k = P(\xi_k = a) = \sum_{y \in Y} \pi_0(y) \underbrace{p_{ya}(k)}_{\rightarrow \pi(a)} \rightarrow \pi(a)$

Значит  $\mathbb{E} \frac{\nu_a(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\eta_k \rightarrow \pi(a)$

По аналогии считаем для второй ситуации:

$\mathbb{E}\tilde{\eta}_k = P(\xi_k = a, \xi_{k+1} = b) = \sum_{y \in Y} \pi_0(y) \underbrace{p_{ya}(k)}_{\rightarrow \pi(a)} p_{ab} \rightarrow \pi(a)p_{ab}$

$\mathbb{E} \frac{\eta_{ab}(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\tilde{\eta}_k$

Пишем Чебышёва:  $P\left(\left|\frac{\nu_a(n)}{n} - \mathbb{E} \frac{\nu_a(n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{D}\left(\frac{\nu_a(n)}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{D}\nu_a(n)}{\varepsilon^2 n^2}$

$\mathbb{D}\nu_a(n) = \mathbb{D}(\sum_{k=1}^n \eta_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mathbb{D}\eta_k}_{\leq n} + 2 \sum_{i < j} cov(\eta_i, \eta_j)$

Давайте как-то оценим ковариацию:

$cov(\xi_i, \xi_j) = \mathbb{E}(\eta_i, \eta_j) - \mathbb{E}\eta_i \mathbb{E}\eta_j$

Здесь  $\mathbb{E}(\eta_i \eta_j) = P(\xi_i = a, \xi_j = a) = \sum_{y \in Y} \pi_0(y) \underbrace{p_{ya}(i)}_{\pi(a) + \mathcal{O}(\lambda^i)} \underbrace{p_{aa}(j-i)}_{\pi(a) + \mathcal{O}(\lambda^{j-i})} = \pi^2(a) + \mathcal{O}(\lambda^i) + \mathcal{O}(\lambda^{j-i}) +$

$\mathcal{O}(\lambda^i)$

$\mathbb{E}\eta_i = P(\xi_i = a) = \sum_{y \in Y} \pi_0(y) \underbrace{p_{ya}(i)}_{\pi(a) + \mathcal{O}(\lambda^i)} = \pi(a) + \mathcal{O}(\lambda^i)$

Мы поняли, что  $cov(\eta_i, \eta_j) = \mathcal{O}(\lambda^i) + \mathcal{O}(\lambda^{j-i})$  и эти ковариации надо просуммировать

$\sum_{i < j} cov(\eta_i, \eta_j) = \sum_{i < j} (\mathcal{O}(\lambda^i) + \mathcal{O}(\lambda^{j-i})) = \mathcal{O}(n)$

Осталось заметить, что  $\left\{\left|\frac{\nu_a(n)}{n} - \pi(a)\right| \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{\left|\frac{\nu_a(n)}{n} - \mathbb{E} \frac{\nu_a(n)}{n}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ .

Мы полностью доказали первый пункт, во втором аналогично оценивается дисперсия  $\square$

## 4.4. Случайные блуждания

**Теорема 4.12.** Рассмотрим блуждание по прямой

Блуждание возвратно  $\iff p = \frac{1}{2}$

**Доказательство.** Возвратность  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = +\infty$

$p_{00}(2n-1) = 0$

$p_{00}(2n) = p^n(1-p)^n \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} (p(1-p))^n$

Если  $p \neq \frac{1}{2}$ , то  $4p(1-p) < 1$  и  $p_{00}(2n) \leq C(4p(1-p))^n$  - сходящаяся геометрическая прогрессия

Если  $p = \frac{1}{2}$ , то  $p_{00}(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \implies$  ряд расходится  $\square$

**Замечание.** Симметричное блуждание по  $\mathbb{Z}$ . Возьмём  $\eta_k$  независимые одинаково распределённые случайные величины, т.ч.  $P(\eta_k = a) = P(\eta_k = -a)$  и  $\xi_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$

**Доказательство.** Если  $\eta_1$  имеет матожидание, то блуждание возвратно  $\square$



**Доказательство.**  $G$  - производящая функция для  $\eta_1$ . То есть  $G(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(\eta_1 = k) z^k$

$G_{\xi_n}(z) = (G(z))^n$ . Нас интересует  $p_{00}(n) = P(\xi_n = 0)$  - коэффициент при  $z^0$  в  $G_{\xi_n}$  - подставить 0 в ряд Лорана не можем. Зато умеем считать вычет:

$$p_{00}(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{G^n(z)}{z} dz$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}(n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{G^n(z) x^n}{z} dz \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^n G^n(z)}_{= \frac{1}{1-xG(z)}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-xG(e^{it})} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1-xG(e^{it})} \stackrel{*}{=}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1-x+o(xt)} \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1-x+xt} = \frac{1}{\pi} \frac{\ln(1-x+xt)}{x} \Bigg|_{t=0}^{t=\pi} \rightarrow +\infty$$

$$(*) : G(1+s) = G(1) + G'(1) \cdot s + o(s) = 1 + o(s). \text{ Тогда } G(e^{it}) = 1 + o(e^{it} - 1) = 1 + o(t) \quad \square$$

**Замечание.** Все состояния нулевые

$$\underbrace{p_{00}(n)}_{?: \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{G^n(z)}{z} dz \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(z)}{z} dz$$

$$|G(z)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\eta = n) z^n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\eta = n) |z|^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(\eta = n) = 1$$

$$|\sum P(\eta = n) e^{int}| = \sum P(\eta = n)$$

Если  $P(\eta = n) > 0$  и  $P(\eta = k) > 0$ , то  $\arg e^{int} = \arg e^{ikt}$ . То есть  $nt = kt + 2\pi m \implies t = 2\pi \frac{m}{n-k} \in \pi\mathbb{Q}$  - счётное множество. Значит множество точек, в которых знак нестрогий - счётно.

Значит  $G^n(z) \rightarrow 0$  почти везде

### Теорема 4.13. Теорема По́йя о возвращении

Рассматриваем решётку  $\mathbb{Z}^d$ , вероятность перейти в соседние узлы  $\frac{1}{2d}$ , то есть аналог случайного блуждания на прямой

Такое блуждание возвратно  $\iff d \leq 2$

**Доказательство.** 1.  $d = 1$  обсуждали

2.  $d = 2$ . По критерию возвратности, нам достаточно доказать, что  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = +\infty$

$p_{00}(n) = 0$ , если  $n$  нечётное.

Повёрнем оси на  $45^\circ$ . Исходные оси  $(x, y)$ , а повёрнутые  $(x', y')$

То есть  $P(x' = x' + 1, y' = y' + 1) = P(x = x + 1) = \frac{1}{4} = P(x' = x' + 1) \cdot P(y' = y' + 1)$

$$P(x' = x' + 1) = P(x = x + 1) + P(y = y - 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(y' = y' + 1) = \frac{1}{2}$$

То есть блуждание проекций на оси  $x'$  и  $y'$  независимы. Значит  $p_{00}(n) = \left( \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \right)^2 \sim \left( \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \right)^2 = \frac{1}{\pi n}$  - а такой ряд сходится

3.  $d = 3$

Если  $n$  нечётно, то всё ещё  $p_{00}(n) = 0$

По каждой координате мы делаем одинаковое число шагов в обоих направлениях:

$$p_{00}(2n) = \sum_{i+j \leq n} \binom{2n}{i, i+j, j, n-i-j, n-i-j} \cdot \frac{1}{6^{2n}} = \sum_{i+j \leq n} \frac{(2n)!}{(i!j!(n-i-j)!)^2} \cdot \frac{1}{6^{2n}} = \binom{2n}{n} \sum_{i+j \leq n} \left( \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right)^2 \cdot \frac{1}{6^{2n}} = \leq^*$$

$$\underbrace{\frac{\binom{2n}{n}}{6^{2n}} \cdot 3^n \cdot \max_{i,j, n-i-j} \binom{n}{i, j, n-i-j}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n \cdot \frac{1}{3^n}}}}$$

При этом  $\sum_{i+j \leq n} \left( \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right) = (1 + 1 + 1)^n = 3^n \implies \sum_{i+j \leq n} \left( \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right)^2 \leq \max_{i,j, n-i-j} \binom{n}{i, j, n-i-j} \cdot \sum_{i+j \leq n} \left( \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \right) \sim (*)$

Осталось разобраться с максимумом:  $\max \sim 3^n \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\pi n}$  - упражнение

$$(*) \sim \frac{3\sqrt{3}}{2(\pi n)^{\frac{3}{2}}} \implies \text{ряд сходится}$$

4. Что делать с размерностью  $\geq 4$ . Выберем первые 3 координаты и будем следить что происходит с проекцией на эти координаты. Если мы двигаемся по ним - происходит смещение. Если по другим, то мы стоим на месте. Эти остановки не бывают бесконечно долгими, то есть получили блуждание по 6 направлениям.

То есть проекция возвращается назад с вероятностью  $< 1$ , а значит и глобальное тоже не возвратное

□

#### Замечание. Случайное блуждание с отталкивающим экраном

Есть блуждание по прямой и где-то стоит отталкивающий экран. То есть если мы врезались в стенку, то отскочили от неё с вероятностью 1

#### Замечание. Случайное блуждание с поглощающим экраном

Есть блуждание по прямой, где-то стоит экран, попав в него, мы попадаем в петлю, из которой не выбираемся

#### Пример. Задача о разорении

$A$  монет у первого,  $B$  монет у второго

Это случайное блуждание с поглощающими экранами. Блуждание по прямой, поглощающие экраны в точках  $-A$  и  $B$ . Между ними мы смещаемся с вероятностями  $p$  и  $q = 1 - p$

$\beta_k(x)$  - вероятность оказаться в  $B$  через  $k$  шагов, если сейчас наша фишка находится в  $x$

Переходы:  $x \xrightarrow{p} x + 1, x \xleftarrow{q} x - 1$

То есть  $\beta_k(x) = p\beta_{k-1}(x + 1) + q\beta_{k-1}(x - 1)$

А ещё  $\beta_k(x) \leq \beta_{k+1}(x) \leq 1$

Пусть  $\beta(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k(x)$

Тогда  $\beta(x) = p\beta(x + 1) + q\beta(x - 1)$  - рекуррентна. А ещё  $\beta(B) = 1$  и  $\beta(-A) = 0$

Общее решение  $pt^2 - t + q = 0$ , здесь корни 1 и  $\frac{q}{p}$

Тогда  $\beta(x) = a + b \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^x$

$$\beta(-A) = a + b \left(\frac{q}{p}\right)^{-A} \implies a = -b \left(\frac{q}{p}\right)^{-A}$$

$$\beta(B) = a + b \left(\frac{q}{p}\right)^B = b \left(\frac{q}{p}\right)^B - b \left(\frac{q}{p}\right)^{-A}, \text{ откуда } a \text{ и } b \text{ выражаются}$$

## 4.5. Процесс восстановления

**Определение 4.15.**  $\xi_1, \xi_2, \dots$  - неотрицательные, одинаково распределённые независимые случайные величины

$$S_0 = 0, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

$\xi_i$  - время работы прибора  $i$ , после его поломки, его мгновенно меняют на следующий

$\Phi(t) = P(S_n \leq t)$  - функция распределения для  $S_n$

$\nu(t)$  - количество приборов, использованных на момент времени  $t$ . То есть  $\nu(t) = n$ , если  $S_{n-1} \leq t < S_n$

$$P(\nu(t) = n) = P(S_{n-1} \leq t < S_n) = \Phi_{n-1}(t) - \Phi_n(t)$$

Функция восстановления  $\mathcal{N}(t) = \mathbb{E}\nu(t)$

**Теорема 4.14.**  $\mathcal{N}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)$ , если ряд в правой части сходится

**Доказательство.**  $\mathcal{N}(t) = \mathbb{E}\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(\nu(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(\Phi_{n-1}(t) - \Phi_n(t))$  - нужно понять, что это правая часть в утверждении теоремы

Смотрим на частичную сумму:  $\sum_{n=1}^m n(\Phi_{n-1} - \Phi_n) = (\Phi_0 - \Phi_1) + 2(\Phi_1 - \Phi_2) + \dots + m(\Phi_{m-1} - \Phi_m) = \Phi_0 + \Phi_1 + \dots + \Phi_{m-1} + \underbrace{m\Phi_m}_{\xrightarrow{?} 0}$

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t)$  сходится, тогда  $\underbrace{\Phi_n + \Phi_{n+1} + \dots + \Phi_{2n}}_{\geq n\Phi_{2n}} \rightarrow 0$ , а ещё  $\Phi_{n+1} \leq \Phi_n$ . А значит  $\Phi_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$  □

Дальше все  $\xi_n$  будут целозначные

**Замечание.**  $\Phi_n(t) = \sum_{k \leq t} P(S_n = k)$

$$\mathcal{N}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \leq t} P(S_n = k) = \sum_{k \leq t} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = k)}_{=q_k}$$

**Пример.** Прибор либо работает единицу времени с вероятностью  $p$ , либо мгновенно ломается с вероятностью  $q = 1 - p$ . Считаем, что  $0 < p \leq 1$

$$P(S_n = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\leq n^k} p^k q^{n-k} \leq q^n \left(\frac{np}{q}\right)^k$$

$$\text{Тогда } q_k = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n = k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q^n \left(\frac{np}{q}\right)^k = \frac{q}{1-q} \left(\frac{np}{q}\right)^k = n^k \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} < +\infty$$

**Теорема 4.15.** Если  $P(\xi_1 = 0) < 1$ , то  $\mathcal{N}(t)$  конечно

**Доказательство.**  $\{\xi_1 = 0\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \{\xi_1 \leq \frac{1}{m}\} \implies P(\xi_1 = 0) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(\xi_1 \leq \frac{1}{m}) \implies \exists m : q = P(\xi_1 \leq \frac{1}{m}) < 1$  - потому что предел  $< 1$

$$\tilde{\xi}_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_k \leq \frac{1}{m} - \text{это с вероятностью } q \\ 1, & \text{если } \xi_k > \frac{1}{m} \end{cases}$$

Поэтому из примера  $\tilde{\mathcal{N}}(t)$  конечно

$$\tilde{\xi}_k \leq m\xi_k \implies \tilde{S}_n \leq mS_n \implies P(\tilde{S}_n \leq t) \geq P(S_n \leq \frac{t}{m}) \implies \tilde{\Phi}_n(t) \geq \Phi_n\left(\frac{t}{m}\right)$$

$$\text{Значит } \mathcal{N}\left(\frac{t}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{t}{m}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_n(t) = \tilde{\mathcal{N}}(t) < +\infty \implies \mathcal{N}(t) \text{ конечна при всех } t \quad \square$$

**Определение 4.16.**  $\xi$  имеет решётчатое распределение с шагом  $h \geq 0$ , если  $\xi(\Omega) \subset a + h\mathbb{Z}$  для некоторого  $a \in \mathbb{R}$ , а для больших  $h$  это неверно

**Замечание.** Рассмотрим целочисленную случайную величину с шагом решётки 1.

Тогда  $|G_\xi(z)| < 1$ , если  $|z| \leq 1$  и  $z \neq 1$

$$|G_\xi(z)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n) z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n) |z^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = n) = 1$$

Правое неравенство обращается в равенство, если  $|z| = 1$

Левое неравенство обращается в равенство, если модуль суммы равен сумме модулей, то есть все  $z$  имеют один и тот же аргумент  $\implies z = e^{it}$  и  $z^n = z^{int}$ . Тогда  $nt - mt = 2\pi k \implies n - m = \frac{2\pi}{t} \cdot k < \frac{2\pi}{t} \mathbb{Z}$ , а так как  $0 < t < 2\pi$ , то мы получили решётку с  $h > 1$

**Теорема 4.16. Теорема восстановления**

$$\mathcal{N}(t+s) - \mathcal{N}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{S}{\mathbb{E}\xi_1}$$

Если:

1.  $\xi$  имеет нерешетчатое распределение
2.  $\xi$  имеет решетчатое распределение с шагом  $h$  и  $S = kh$ , где  $k \in \mathbb{N}$

**Доказательство.** Доказываем лишь для целозначных случайных величин  $\xi_k$ , тогда можем считать, то  $h = 1$

$$\text{Тогда достаточно доказать, что } \underbrace{\mathcal{N}(t+1) - \mathcal{N}(t)}_{= \sum_{k \leq t+1} q_k} \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}\xi_1} \quad = \sum_{k \leq t} q_k$$

То есть нам надо доказать, что  $q_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}\xi_1}$

$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$ . Поймём, что  $Q(z) = \frac{1}{1-G(z)}$ , где  $G(z)$  - производящая функция для  $\xi_1$

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = k) z^k = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P(S_n = k) z^k}_{\text{производящая функция для } S_n} = \sum_{n=0}^{\infty} G^n(z) = \frac{1}{1-G(z)} - \text{верно}$$

при  $|z| \leq 1$  и  $z \neq 1$

**Лемма.**  $q_n - q_{n-1} \rightarrow 0$

**Доказательство.** Производящая функция для  $q_n - q_{n-1} = (1-z)Q(z) = \frac{1-z}{1-G(z)}$

$$\text{Значит } q_n - q_{n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \underbrace{\frac{1-z}{1-G(z)}}_{\text{непрерывна в } |z| \leq 1} \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1-z}{1-G(z)} \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1-e^{it}}{1-G(e^{it})}}_{\text{непрерывна, ограничена}} e^{-int} dt$$

лемма Римана-Лебега  $\xrightarrow{0}$

$\square$

**Лемма.**  $\sum_{k=0}^n q_{n-k} r_k = 1$ , где  $r_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} P(\xi_1 = j)$

**Доказательство.**  $Q(z) \frac{1-G(z)}{1-z} = \frac{1}{1-z}$

Посмотрим на коэффициенты при  $z^n$  в левой части равенства - это свёртка. То есть достаточно понять, что  $r_k$  появляются из  $\frac{1-G(z)}{1-z}$

$$\frac{1-G(z)}{1-z} = \frac{G(1)-G(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(\xi_1=n)(1-z^n)}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_1 = n) \cdot (1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k \quad \square$$

**Следствие.**  $q_n \leq \frac{1}{r_0}$

Выберем сходящуюся подпоследовательность  $q_{k_m} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} s \implies q_{k_m \pm l} \rightarrow_{m \rightarrow \infty} s$

$$\text{Мы знаем, что } 1 = \sum_{k=0}^n q_{n-k} r_k \geq \sum_{k=0}^N q_{n-k} r_k \rightarrow s \sum_{k=0}^N r_k \implies 1 \geq s \sum_{k=0}^N r_k \rightarrow s \mathbb{E} \xi_1 \implies \frac{1}{\mathbb{E} \xi_1} \geq s$$

1. Если  $\mathbb{E} \xi_1 = +\infty$ , то  $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = \mathbb{E} \xi_1 = +\infty \implies \sum_{k=0}^N r_k$  сколь угодно большая, тогда  $s = 0$

Можно считать, что  $s = \overline{\lim} q_k$ , а ещё  $q_k \geq 0 \implies \underline{\lim} q_k \geq 0 \implies \lim = 0$

2. Если  $\mathbb{E} \xi_1 < +\infty$ , тогда  $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = \mathbb{E} \xi_1 < +\infty \implies r_k \rightarrow 0 \implies r_k$  ограничены,  $r_k \leq M$

$$1 = \sum_{k=0}^n q_{n-k} r_k = \sum_{k=0}^N q_{n-k} r_k + \underbrace{\sum_{k=N+1}^n q_{n-k} r_k}_{M \sum_{k=N+1}^n r_k < \varepsilon M} < \varepsilon M + \sum_{k=0}^N q_{n-k} r_k \rightarrow_{n=k_m} \varepsilon M + s \sum_{k=0}^N r_k \leq \varepsilon M + s \mathbb{E} \xi_1 \implies 1 \leq s \mathbb{E} \xi_1 \implies \underline{\lim} \geq \frac{1}{\mathbb{E} \xi_1}$$

А ещё  $\sum_{k=0}^N q_{n-k} r_k \rightarrow s \sum_{k=0}^N r_k \implies 1 \geq s \sum_{k=0}^N r_k \rightarrow s \mathbb{E} \xi_1 \implies \frac{1}{\mathbb{E} \xi_1} \geq s$  - получили неравенство и на верхний предел

□

**Следствие.**  $\frac{\mathcal{N}(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E} \xi_1}$

**Доказательство.** Теорема Штольца

□

**Замечание.** Парадокс времени восстановления

$$P(\xi_{\nu(t)} > x) \geq P(\xi_1 > x)$$