

# Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

9 февраля 2023 г.

## Содержание

<b>1. Элементарная теория вероятностей</b>	<b>1</b>
1.1 Основные понятия . . . . .	2
1.2 Предельные теоремы для схем Бернулли . . . . .	5
<b>2. Общая теория вероятностей</b>	<b>9</b>
2.1 Колмогоровская модель теории вероятности . . . . .	10
2.2 Случайные величины . . . . .	11
2.3 Совместное распределение . . . . .	13

# 1. Элементарная теория вероятностей

## 1.1. Основные понятия

**Определение 1.1.**  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

**Определение 1.2.** Событие  $A \subset \Omega$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

**Свойства.** вероятности

1.  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(A) \in [0, 1]$
2. Если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. 
$$\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B \setminus (A \cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
4.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ , где  $\bar{A} = \Omega \setminus A$
5.  $P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j, i \neq k, j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \cdots \cap A_m)$  – формула включений-исключений.

**Доказательство.** Индукция по  $m$ .

База  $m = 2$ .

Переход  $m \rightarrow m + 1$ :

$$B_j = A_j \cup A_{m+1}$$

$$P(\underbrace{A_1 \cup \cdots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1})$$

$$A_{m+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - \sum_{i \neq j}^m P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^m P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_m)}, \text{ где } B_i :=$$

$$A_i \cap A_{m+1}. \quad \square$$

6.  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) \leq \sum_{j=1}^m P(A_j)$$

**Определение 1.3.** Условная вероятность.

$$B \neq \emptyset, P(B) > 0.$$

Знаем, что произошло событие  $B$ , хотим узнать вероятность наступления  $A$ .

$$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Свойства.** 1.  $P(A|A) = 1$ , если  $B \subset A$ , то  $P(A|B) = 1$

2. Если  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , то  $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

$$\text{В частности: } P(A|B) + P(\bar{A}|B) = 1$$

**Замечание.**  $P(A|B) + P(A|\bar{B})$  не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик,  $B$  – выпало четное число,  $A$  – выпало кратное трем.

$$P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(A|\bar{B}) = \frac{1}{3}$$

**Теорема 1.1. Формула полной вероятности.**

Пусть  $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ ,  $P(B_j) > 0$ .

Тогда  $P(A) = \sum_{j=1}^m P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

**Доказательство.**  $\sum_{j=1}^m \underbrace{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}_{= \frac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}} = \sum_{j=1}^m P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^m B_j) = P(A)$  □

**Пример.** I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II,  $P(\text{вынули белый}) = ?$

$A$  – вынули из II белый шар.

$B_0, B_1, B_2$ , где  $B_j$  – переложили  $j$  белых шаров из I в II.

Тогда  $P(A|B_0) = \frac{5}{12}$ ,  $P(A|B_1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A|B_2) = \frac{7}{12}$ .

$$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$$

$$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$$

$$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$$

Подставляем в формулу:

$$P(A) = \frac{331}{336}$$

**Теорема 1.2. Формула Байеса.**

Пусть  $P(A) > 0$ ,  $P(B) > 0$ , тогда  $P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$

**Доказательство.** Расписываем  $P(A|B)$ , получаем в правой части:  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$ . □

**Теорема 1.3. Байеса.**

Пусть  $P(A) > 0$ ,  $P(B_j) > 0$ ,  $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^m B_j$ , тогда

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_m)P(B_m)}$$

**Пример.** Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая  $P(\text{орла}) = \frac{1}{3}$ ,  $P(\text{решка}) = \frac{2}{3}$ ). Взяли наугад монету, подбросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

$A$  – выпал орел,  $B$  – монета симметричная ( $\bar{B}$  – монета кривая).

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

**Определение 1.4. Независимые события.**

Рассуждения:  $A$  не зависит от  $B$ , если  $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ .

Опр.  $A, B$  независимые события, если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Определение 1.5.** События  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – независимы в совокупности, если

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$  – для любых индексов  $i_j$ .

**Замечание.** Независимость в совокупности  $\implies$  попарная независимость.

Наоборот неверно.

**Пример.** Есть два игральных кубика.

$A$  – на первом кубике выпало четное число.

$B$  – на втором выпало четное число.

$C$  – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары  $(i, j)$ , где  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\#\Omega = 36$ .

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}.$$

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C.$$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$ , остальные равенства тоже выполняются  $\implies$  попарная независимость.

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \implies \text{нет независимости в совокупности.}$$

**Упражнение.** Д-ть, что  $A_1, \dots, A_m$  независимы в совокупности  $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$ , где  $B_j = A_j$  или  $\overline{A_j}$  (все  $2^m$  равенств).

**Замечание.** Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть  $p_1, \dots, p_n : \sum_{i=1}^n p_i = 1, \forall i : p_i \geq 0$ .

$$P(A) = \sum_{j: \omega_j \in A} p_j.$$

**Теорема 1.4. Схема Бернулли.**

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$$P(\text{орел}) = p, 0 \leq p \leq 1$$

$$P(\text{решка}) = 1 - p$$

Бросаем монету  $n$  раз, получаем последовательность исходов:

$$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} : x_j = 0 \text{ или } 1.$$

$$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n), P(\{\omega\}) = p^{\#i: x_i=1} \cdot q^{\#i: x_i=0} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n-\sum x_i}$$

Хотим узнать:

$$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

$P(i\text{-ое подбрасывание} = \text{орел})$  – независимые в совокупности по  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Теорема 1.5. Полиномиальная схема.**

$$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1.$$

$$P(x_i = k) = p_k, \text{ где } x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$P(\{\omega\}) = p_1^{\#\{i: x_i=1\}} \cdot \dots \cdot p_m^{\#\{i: x_i=m\}}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

$$P(k_1 \text{ раз выпало } 1, k_2 \text{ раз выпало } 2, \dots) = \underbrace{\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}}_{= \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$$

**Теорема 1.6. Эрдёша-Мозера**

Рассмотрим турнир на  $n$  команд. При каком наибольшем  $k$  можно всегда выбрать команды  $A_1, A_2 \dots A_k$ , так, что  $A_i$  выиграла у  $A_j$ , если  $i < j$ ? При  $k \leq 1 + [2 \log_2 n]$

**Доказательство.** Рассмотрим случайный турнир (Всего  $\binom{n}{2}$ , тогда Всего  $2^{\binom{n}{2}}$  разных турниров. Случайный - берём из этой кучи наугад).

$P(A \text{ выиграла у } B) = \frac{1}{2}$ . Рассмотрим  $A_1, A_2, \dots A_k$  команды.

$$P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ подходят}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

$$P(A_1, A_2 \dots A_k \text{ можно переименовать, так, что они подошли}) \leq \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$$

$$P(\text{какие-то } k \text{ команд подошли}) \leq \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$$

$$\text{Нужно понять, что если } k \geq [2 + 2 \log_2 n], \text{ то } \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1. \quad \binom{n}{k} \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{(2^{\frac{k-1}{2}})^k} = \left(\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}}\right)^k$$

$$\text{Надо понять, что } 2^{\frac{k-1}{2}} \geq n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2} \geq \log_2 n \quad \square$$

**1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли**

**Определение 1.6.** Схема Бернулли с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ .  $S_n$  - число успехов при  $n$  испытаниях.  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Что будет больше  $P(S_{1000} = 220)$  при  $p = \frac{1}{5}$  или  $P(S_{2000} = 360)$  при  $p = \frac{1}{6}$ . Точные вычисления дают 0.008984 и 0.006625 соответственно.

**Теорема 1.7. Пуассона**

Схема Бернулли с  $n$  испытаниями и вероятностью успеха  $p_n$  - зависит от  $n$ . Если  $np_n \rightarrow \lambda > 0$ . Тогда  $P(S_n = k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

**Замечание.** Если  $np_n = \lambda$ , то теорема верна при  $k = o(\sqrt{n})$

**Доказательство.**  $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{n^k}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!} (1-p)^n$ . Прологарифмируем:  $\ln(1-p)^n = n \ln(1-p) \sim -np_n \sim -\lambda$

Доказательство замечания:

$$\ln(1-p_n)^k = k \ln(1-p_n) \sim -kp_n \rightarrow 0$$

Осталось понять, что  $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \rightarrow 1$  при  $k = o(\sqrt{n})$ .

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \geq 1 - \frac{1}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \rightarrow 1$$

Неравенство  $(1-x_1) \dots (1-x_k) \geq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k$  при  $0 \leq x_i \leq 1$  - индукция.  $\square$

**Теорема 1.8. Прохорова**

Если  $\lambda = np$ , то  $\sum_{i=0}^{+\infty} |P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}| \leq \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda)$

**Пример.** Игра в рулетку: 36 чисел и ноль.

$$p = \frac{1}{37}, n = 111, np = 3 = \lambda.$$

$$P(S_{111} = 3) = \binom{111}{3} \left(\frac{1}{37}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{37}\right)^{111-3} = 0.227127$$

$$\text{Из Пуассона } \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = 0.224$$

Видим, что приближение хорошее.

$$P(\text{выигрыш}) = 1 - P(S_{111} = 0) - P(S_{111} = 1) - P(S_{111} = 2) - P(S_{111} = 3) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 0.352754$$

А по формулам 0.352768

### Теорема 1.9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Схема Бернулии с вероятностью успеха  $p \in (0, 1)$ ,  $q = 1 - p$ ,  $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ .

$$P(S_n = k) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Если  $|x| \leq T$ , то есть равномерность.

**Доказательство.**  $k = np + x\sqrt{npq} \geq np - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$

$$n - k = nq - x\sqrt{npq} \geq nq - T\sqrt{npq} \rightarrow +\infty$$

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

Напишем формулу Стирлинга:

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k} \sqrt{2\pi n} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)} \sqrt{2\pi (n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k} \sqrt{2\pi \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) n}}$$

$$\frac{k}{n} \rightarrow p, \frac{n-k}{n} \rightarrow q$$

$$\text{Поэтому остаётся доказать, что } \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \rightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$k \ln \frac{k}{n} + (n-k) \ln \frac{n-k}{n} - k \ln p - (n-k) \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2}$$

$$\alpha = \frac{k}{n} \rightarrow p, \beta = \frac{n-k}{n} \rightarrow q$$

$$n\alpha \ln \alpha + n\beta \ln \beta - n\alpha \ln p - n\beta \ln q \rightarrow \frac{x^2}{2} = n\alpha \ln \frac{\alpha}{p} + n\beta \ln \frac{\beta}{q}$$

Напишем Тейлора:

$$\frac{\alpha}{p} = 1 + x \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\beta}{q} = 1 - x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\ln \frac{\alpha}{p} = \ln(1 + x \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{n}}) = x \sqrt{\frac{q}{p}} - \frac{1}{2} x^2 \frac{q}{p} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\ln \frac{\beta}{q} = \ln(1 - x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}}) = -x \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} x^2 \frac{p}{q} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Сумма равна: } x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2q - \frac{1}{2}x^2q + o\left(\frac{1}{n}\right) - x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2p - \frac{1}{2}x^2p + o\left(\frac{1}{n}\right) = x^2\left(\frac{q}{2} + \frac{p}{2}\right) + o(1) = \frac{x^2}{2} + o(1)$$

Извините, это было очень больно...

□

**Замечание.** Если  $\varphi(n) = o(n^{\frac{2}{3}})$  и  $|k - np| \leq \varphi(n)$ , то теорема тоже верна

**Пример.** Всё та же рулетка.  $n = 222, k = 111$ . Пытаемся ставить на четное/нечётное(кроме 0).  
 $p = \frac{18}{37}$

$$P(S_{222} = 111) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \approx 0.049395 \dots$$

Если считать точно, то получим 0.0493228...

### Теорема 1.10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$$0 < p < 1. P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Стремление равномерно по  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Теорема 1.11. Берри-Эссеена

$$\text{Обозначение: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\left| P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{2}$$

**Замечание.** Константа лучше, чем  $\frac{c}{\sqrt{n}}$  не бывает.

**Пример.**  $p = q = \frac{1}{2}$ . Вопрос:  $P(S_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ .

Но  $P(S_{2n} < n) = P(S_{2n} > n)$ .

Тогда  $P(S_{2n} \leq n) = \frac{1 + P(S_{2n} = n)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Муавра-Лаплас нам говорит, что  $P(S_{2n} \leq n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2}$

Но  $P(S_{2n} \leq n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

**Замечание.**  $P(a < S_n \leq b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$

Отсюда получили, что лучше всего писать полуцелые  $a$  и  $b$ .

### Пример. Задача о театре

Есть театр и 2 входа. У каждого входа расположен гардероб. В театре  $n = 1600$  мест. Хотим сделать размер гардероба как можно меньше, но чтобы переполнения случались как можно реже.

Пусть  $c$  мест в итоге в гардеробе.

$p = q = \frac{1}{2}$ . Нужно, чтобы  $n - c \leq S_n \leq c$ .

$P(n - c \leq S_n \leq c) = P\left(\frac{n - c - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}}\right) \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} \leq \frac{c - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{4}}} = P\left(\frac{800 - c}{20}\right) \leq \frac{S_n - 800}{20} \leq \frac{c - 800}{20} \rightarrow \Phi\left(\frac{800 - c}{20}\right) -$

$\Phi\left(\frac{c - 800}{20}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{800 - c}{20}}^{\frac{c - 800}{20}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt > \frac{29}{30}$

$\Phi_0\left(\frac{c - 800}{20}\right) > \frac{29}{60}$ . Тогда  $c = 843$ .

### Пример. Случайное блуждание на прямой

Есть прямая, будем считать, что у нас блуждания исключительно по целым точкам.

В каждой точке подбрасываем монетку. С вероятностью  $p$  идём вперёд,  $q$  - идём назад.

$a_{n+1} = a_n + 1$  с вероятностью  $p$

$a_{n+1} = a_n - 1$  с вероятностью  $q$

$a_n \equiv n \pmod{2}$

Это почти похоже на схему Бернулли:  $2S_n - n = a_n$

$P(a_n = k) = P\left(S_n = \frac{n+k}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv k \pmod{2} \\ \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, & \text{иначе} \end{cases}$

### Теорема 1.12. ван дер Вардена

Рассмотрим числа  $1, 2 \dots k$  и покрасим их в 2 цвета.

Тогда существует  $k_n$ , такое, что, если  $k > k_n$ , то при любой раскраске найдётся одноцветная  $n$ -членная арифметическая прогрессия.

### Теорема 1.13. Эрдеша-Радó

$k_{n+1} \geq \sqrt{n \cdot 2^{n+1}}$

**Доказательство.**  $A_1, A_2 \dots A_m$  - все арифметические прогрессии длины  $n + 1$  из чисел  $1, 2 \dots k$ .

С разностью 1  $k - n$  прогрессий.



С разностью  $2k - 2n$  прогрессий.

...

С разностью  $k - \lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot n$  прогрессий с разностью  $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$

Тогда  $m = (k - n) + (k - 2n) + \dots = k \cdot \lfloor \frac{k}{n} \rfloor - n \cdot \frac{\lfloor \frac{k}{n} \rfloor \cdot (\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)}{2} = \lfloor \frac{k}{n} \rfloor (k - \frac{1}{2}n(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor + 1)) < \frac{k}{n} (k - \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{k}{n}) = \frac{k^2}{2n}$   
 - это оценка сверху.

$P(A_i \text{ - одноцветная}) = 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$  (2 - выбор цвета).

$P(\text{какое-то } A_i \text{ - одноцветно}) = \sum_{i=1}^m P(A_i \text{ - одноцветно}) = \frac{m}{2^n} < \frac{k^2}{2n} \cdot \frac{1}{2^n} = (\frac{k}{\sqrt{2^{n+1} \cdot n}})^2 \leq 1$  (если так, то найдётся, на которой не выполнится)  $\square$

## 2. Общая теория вероятностей

## 2.1. Колмогоровская модель теории вероятности

**Определение 2.1.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство.

$\Omega$  - множество или пространство элементарных исходов.

$\mathcal{F}$  -  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $\Omega$ . Элементы  $\mathcal{F}$  - случайные события.

$P$  - мера на  $\mathcal{F}$  с условием  $P(\Omega) = 1$ .

**Замечание.** Если  $\Omega$  не более чем счётно, то можно взять  $\mathcal{F} = 2^\Omega$

**Определение 2.2.** Условная вероятность.  $A$  - событие, такое, что  $P(A) > 0$ . Тогда  $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ , где  $A, B \in \mathcal{F}$ .

**Определение 2.3.** Независимые события  $A$  и  $B$ . Если  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

**Определение 2.4.** Независимость в совокупности  $A_1, A_2 \dots A_n$ .  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$  для всевозможных наборов индексов.

**Определение 2.5.** Последовательность событий  $A_1, A_2 \dots$  независимы - любой конечный набор событий независим в совокупности.

**Лемма. Бореля-Кантелли**

$A_1, A_2, \dots$  случайные события.

1. Если  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$ , то вероятность, что случилось бесконечное число из них равна 0.
2. Если  $A_1, A_2, \dots$  независимы и  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$ , тогда  $P(\text{случилось бесконечное число из } A_n) = 1$ .

**Доказательство.**  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ .

$\omega \in B \iff \omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \forall n \iff \omega \in A_k$  для бесконечного количества индексов  $k$ .

Док-во этого факта:

1.  $\Leftarrow$ : Лежит в каждом объединении, значит лежит в  $B$ .
2.  $\Rightarrow$ :  $\omega$  лежит в пересечении. Пусть лежит в конечном - возьмём самый большой номер и получим противоречие.

Док-во теоремы:

1.  $P(B) = 0$  - хотим доказать.  
 $B \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Rightarrow P(B) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$ , а это хвост сходящегося ряда, а он стремится к нулю.
2. Давайте смотреть на  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$  - независимые события (следует из упражнения с прошлой лекции).  
 $P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) = \prod_{k=1}^n P(\bar{A}_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k)$   
 Но всё вложено по убыванию, по монотонности меры получаем  $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{\infty} P(\bar{A}_k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - P(A_k))$   
 Прологарифмируем это равенство.

$\ln(P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k)) = \sum_{k=n}^{\infty} \ln(1 - P(A_k)) \leq \sum_{k=n}^{\infty} (-P(A_k)) = -\infty$  – сумма хвоста расходящегося ряда.

А значит мы логарифмировали  $0 \Rightarrow P(\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k) = 0 \Rightarrow P(\bar{B}) = 0 \Rightarrow \Rightarrow \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = B \Rightarrow P(B) = 1$ .

Добавим, что  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ , где  $B_1 \supset B_2 \supset \dots$  и  $P(B) = \lim P(B_n) = 1$ .

□

### Теорема 2.1. Закон нуля и единицы

Если  $A_1, A_2 \dots$  независимы, то  $P(B) = 0$  или  $P(B) = 1$ .

**Пример.** Испытания Бернулли, успех с вероятностью  $p$ ,

$P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = ?$ .

$A_n$  = случилось ОРО на позициях  $n, n+1, n+2$ .

Тогда  $A_1, A_4, A_7, \dots$  независимы.  $P(A_j) = pqr = p^2q > 0$ .

Лемма Бореля-Кантелли говорит: бесконечное кол-во  $A_{3k+1}$  случится, если  $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{3k+1}) = +\infty \Rightarrow P(\text{ОРО встречается бесконечное число раз}) = 1$ .

## 2.2. Случайные величины

**Определение 2.6.**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  - вероятностное пространство.

$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - случайная величина, если это измеримая функция.

**Определение 2.7.** Распределение случайной величины

$P_{\xi}$  - вероятностная мера на борелевских подмножествах  $\mathbb{R}$

$$P_{\xi}(A) = P(\xi \in A)$$

**Определение 2.8.** Случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  одинаково распределены, если  $P_{\xi} = P_{\eta}$

**Замечание.**  $P_{\xi}$  однозначно определяются своими значениями на ячейках.

$$P_{\xi}(a, b] = P_{\xi}(-\infty, b] - P_{\xi}(-\infty, a] = P(\xi \leq b) - P(\xi \leq a)$$

**Определение 2.9.** Функция распределения случайной величины

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x)$$

**Свойства.** 1. Функция распределения однозначно определяет распределение случайной величины.

*Доказательство:* Если у двух случайных величин совпали, то у них одинаковые распределения

$$2. 0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$$

*Доказательство:* берём  $x_n \rightarrow -\infty$ .  $A_n = \{\xi \leq x_n\}$  Тогда  $A_{n+1} \subset A_n$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0$

$$4. F_{\xi} \text{ монотонно возрастает}$$

5. Непрерывность справа:  $\lim_{y \rightarrow x+} F_{\xi}(y) = F_{\xi}(x)$

*Доказательство:* берём  $y_n$  убывающие и  $y_n \rightarrow x$ . Тогда  $A_n = \{\xi \leq y_n\}$ .  $A_{n+1} \subset A_n$ . А тогда  $\lim P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\xi \leq x) = F_{\xi}(x)$ . Но с другой стороны  $\lim P(A_n) = \lim P(\xi \leq y_n) = \lim F_{\xi}(y_n)$

6.  $\lim_{y \rightarrow x-} F_{\xi}(y) = P(\xi < x)$

*Доказательство:* берём  $y_n$  возрастающие и  $y_n \rightarrow x$ .  $B_n = \{\xi \leq y_n\}$  и  $B_n \subset B_{n+1}$ .  $\lim P(B_n) = P(\bigcup B_n) = P(\xi < x)$ . Но с другой стороны  $\lim P(B_n) = \lim F_{\xi}(y_n)$

7.  $F_{\xi+a}(x) = F_{\xi}(x - a)$

*Доказательство:*  $\{\xi + a \leq x\} = \{\xi \leq x - a\}$

8.  $F_{c\xi} = F_{\xi}(\frac{x}{c})$

*Доказательство:*  $\{c\xi \leq x\} = \{\xi \leq \frac{x}{c}\}$

**Замечание.** Функция, обладающая свойствами 3, 4, 5 - это функция распределения некоторой случайной величины.

*Доказательство:* пусть  $g$  - такая функция. Тогда  $\nu_g(a, b] = g(b) - g(a)$ . Случайная величина  $\xi(x) = x$ . Тогда  $F_{\xi} = g$

**Определение 2.10.** Случайная величина имеет дискретное распределение, если её множество значений не более чем счётное.

**Замечание.** 1.  $\xi \rightarrow \{y_1, y_2, \dots\}$

Если  $x \neq y_k$ , то  $P(\xi = x) = 0$ , т.е.  $P_{\xi}(\{x\}) = 0$

2.  $P_{\xi}(A) = \sum_{k: y_k \in A} P(\xi = y_k)$ . Тут счётное число слагаемых, поэтому сумма корректно определена.

Распределение однозначно определяется набором вероятностей  $P(\xi = y_k)$

3.  $F_{\xi}(x) = \sum_{k: y_k \leq x} P(\xi = y_k)$

**Определение 2.11.** Случайная величина имеет непрерывное распределение, если  $P(\xi = x) = 0$

**Замечание.** 1. Это значит, что функция распределения непрерывна.

2. Непрерывные распределения бывают не очень хорошими, например Канторова лестница.

**Определение 2.12.** Случайная величина имеет абсолютно непрерывное распределение, если существует  $p_{\xi}(t) \geq 0$ , измеримая, т.ч.  $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p_{\xi}(t) dt$

**Свойства.** 1.  $P_{\xi}(A) = \int_A p_{\xi}(t) dt$

*Доказательство:* слева мера и справа мера. Нужно понять, почему они совпадают на ячейках.

$$P_{\xi}(a, b] = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a) = \int_a^b p_{\xi}(t) dt$$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(t) dt = 1$

3.  $p_{\xi}$  определена однозначно с точностью до почти везде (из теории меры)

4.  $F_{\xi}$  почти везде дифференцируема и  $F'_{\xi}(x) = p_{\xi}(x)$

*Доказательство:* а его не будет

**Пример. Вероятностные распределения**

1. Биномиальное распределение:  $\xi \sim \text{Binom}(p, n), 0 < p < 1$

$$\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}. P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. Распределение Пуассона:  $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda), \lambda > 0$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots\}. P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

3. Геометрическое распределение:  $\xi \sim \text{Geom}(p), 0 < p < 1$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}. P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

4. Дискретные равномерные распределения:  $\xi \sim U(\dots)$

$$\xi : \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}. P(\xi = k) = \frac{1}{n}$$

5. Непрерывно равномерное распределение:  $\xi \sim U([a, b])$

$$\xi : \Omega \rightarrow [a, b]. p_\xi(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_{[a,b]}(t)$$

6. Нормальное распределение:  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

$$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}. p_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Стандартное нормальное распределение:  $\mathcal{N}(0, 1)$

7. Экспоненциальное распределение:  $\xi \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$ .

$$\xi : \Omega \rightarrow [0, +\infty]. p_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ при } t \geq 0. \text{ В других точках } 0.$$

**Замечание.** 1.  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

На самом деле это функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

2. Если  $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , то  $\xi = \sigma\nu + a$ .  $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$

$$F_\xi(x) = P(\sigma\nu + a \leq x) = P(\nu \leq \frac{x-a}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Замена  $t = \frac{s-a}{\sigma}$ . Тогда  $dt = \frac{ds}{\sigma}$

$$\text{Тогда: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(s-a)^2}{2\sigma^2}} ds$$

**2.3. Совместное распределение**

**Определение 2.13.** Совместное(многомерное) распределение.

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P_{\bar{\xi}}(A) = P(\bar{\xi} \in A), \text{ где } A - \text{ борелевское подмножество } \mathbb{R}^n$$

**Замечание.** Совместное распределение однозначно определяет распределение случайной величины, но не наоборот

**Пример.**  $\xi, \eta : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  с равными вероятностями.

Если это были независимые подбрасывания:  $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$  с равными вероятностями.

Если  $\xi = \eta$ , то  $(\xi, \eta) : \Omega \rightarrow \{(0, 0), (1, 1)\}$ .

**Определение 2.14.** Случайные величины  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  независимы, если для любых борелевских подмножеств  $A_1, A_2 \dots A_n \subset \mathbb{R}$ , события  $\{\xi_1 \in A_1\}, \dots, \{\xi_n \in A_n\}$  независимы

**Замечание.**  $P(\xi_1 \in A_1, \dots, \xi_n \in A_n) = P(\xi_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_n \in A_n)$

**Теорема 2.2.**  $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$  независимы  $\iff P_\xi P_{\xi_1} \times \dots \times P_{\xi_n}$

**Доказательство.** 1.  $\Leftarrow$  очевидно.  $P_\xi(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{\xi_1}(A_1) \dots P_{\xi_n}(A_n)$

2.  $\Rightarrow$ . На множествах  $A_1 \times \dots \times A_n$  есть равенство + единственность продолжения.

□