

Математический анализ

Храбров Александр Игоревич

29 января 2023 г.

Содержание

| | |
|--|-----------|
| 1. Теория меры | 1 |
| 1.1 Система множеств | 2 |
| 1.2 Объем и мера | 6 |
| 1.3 Продолжение мер | 9 |
| 1.4 Мера Лебега | 13 |
| 2. Интеграл Лебега | 19 |
| 2.1 Измеримые функции | 20 |
| 2.2 Последовательности измеримых функций | 23 |
| 2.3 Определение интеграла | 26 |
| 2.4 Суммируемые функции | 29 |
| 2.5 Предельный переход под знаком интеграла | 34 |
| 2.6 Произведение мер | 36 |
| 2.7 Замена переменной | 42 |
| 3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы | 46 |
| 3.1 Собственные интегралы с параметрами | 47 |
| 3.2 Несобственные интегралы с параметрами | 49 |
| 3.3 В- и Г-функции Эйлера | 54 |
| 3.4 Криволинейные интегралы | 57 |
| 3.5 Точные и замкнутые формы | 64 |
| 4. ТФКП | 70 |
| 4.1 Голоморфные функции | 71 |
| 4.2 Теоремы единственности | 78 |
| 4.3 Аналитическое продолжение | 81 |
| 4.4 Ряды Лорана | 84 |

1. Теория меры

1.1. Система множеств

Полезные обозначения: $A \sqcup B$ - объединение A и B , такие что $A \cap B = \emptyset$

Определение 1.1. Набор мн-в дизъюнктивный, если мн-ва попарно не пересекаются: $\bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha$

Определение 1.2. E – мн-во; если $E = \bigsqcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ – разбиение мн-ва E .

Напоминание:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

Определение 1.3. \mathcal{A} – система подмн-в X : $A \subset 2^X$

1. (δ_0) : если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$
2. (σ_0) : если $\forall A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$
3. (δ) : если $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
4. (σ) : если $A_n \in \mathcal{A}, \forall n \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Определение 1.4. \mathcal{A} – симметрическая система мн-в, если $\forall A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Утверждение 1.1. Если \mathcal{A} – симм., то $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$ и $(\delta) \Leftrightarrow (\sigma)$.

Доказательство. $A_\alpha \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \in \mathcal{A}$ □

Определение 1.5. \mathcal{A} – алгебра мн-в, если \mathcal{A} – симметр., $\emptyset \in \mathcal{A}$ и $\forall A, B \in \mathcal{A}: A \cup B \in \mathcal{A}$ (по утв. 1.1 $(\delta_0) \Leftrightarrow (\sigma_0)$; смотри [опр. алгебры](#)).

Свойства. алгебры мн-в:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A} \wedge \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap (X \setminus B) = A \setminus B \in \mathcal{A}$

Определение 1.6. \mathcal{A} – σ -алгебра мн-в, если \mathcal{A} – симм., $\emptyset \in \mathcal{A}$ и свойство (σ) выполнено (т.е. есть замкнутость по объединению любого числа множеств; в силу симметричности по утв. 1.1 получаем $(\sigma) \Leftrightarrow (\delta)$).

Замечание. σ -алгебра \implies алгебра.

Пример. 1. 2^X – σ -алгебра.

2. $X = \mathbb{R}^2$, \mathcal{A} – всевозможные [огр. подмн-ва](#). \mathbb{R}^2 и их дополнения. (\mathcal{A} – алгебра, но не σ -алгебра).

Rem: [огр. множество](#) – в метрич. пр-ве это множество ограниченного диаметра ($d(x, y) := ||x - y||$), т.е. $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}$ – ограничен.

3. \mathcal{A} – алгебра (σ -алгебра) подмн-в X и $Y \subset X$. $\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ – индуцированная алгебра (σ -алгебра).

4. Пусть \mathcal{A}_α – алгебры (σ -алгебры), тогда $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ – алгебра (σ -алгебра).

5. $A, B \subset X$ ниже перечислено, что есть в алгебре, содержащей A, B :

$\emptyset, X, A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, X \setminus A, X \setminus B, X \setminus (A \cup B), X \setminus (A \cap B), A \Delta B, X \setminus (A \Delta B), X \setminus (A \setminus B), X \setminus (B \setminus A).$

Теорема 1.2. Пусть ϵ – семейство подмн-в в X , тогда существует наименьшая по включению σ -алгебра (алгебра) \mathcal{A} , такая что $\epsilon \subset \mathcal{A}$.

Доказательство. \mathcal{A}_α – всевозможные σ -алгебры $\supset \epsilon$. Такие есть, так как 2^X подходит.

$\mathcal{A} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha \supset \epsilon$. Теперь проверим, что \mathcal{A} – наим. по вкл. $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\alpha \forall \alpha \in I$.

Определение 1.7. 1. Такая σ -алгебра – борелевская оболочка $\epsilon = (\mathcal{B}(\epsilon))$.

2. $X = \mathbb{R}^n$; такая σ -алгебра, натянутая на все открытые мн-ва – борелевская σ -алгебра (\mathcal{B}^n).

Замечание. $\underbrace{\mathcal{B}^n}_{\text{континуальное}} \neq \underbrace{2^{\mathbb{R}^n}}_{\text{больше континуального}}$

□

Определение 1.8. R – кольцо, если $\forall A, B \in R \implies A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in R$.

Замечание. Кольцо + $(X \in R) \implies$ алгебра.

Определение 1.9. P – полукольцо, если

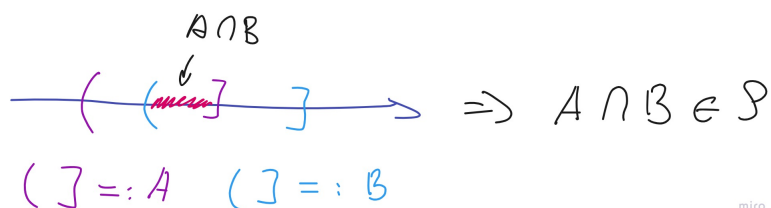
1. $\emptyset \in P$

2. $\forall A, B \in P \implies A \cap B \in P$

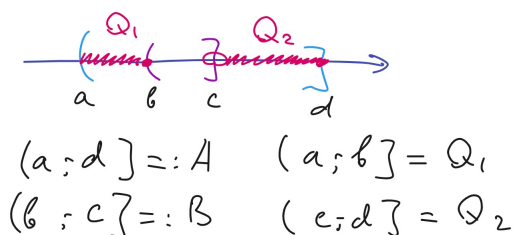
3. $\forall A, B \in P \implies \exists Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in P$, такие что $A \setminus B = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k$.

Пример. $X = \mathbb{R}, P = \{(a, b] : a, b \in X\}$ – полукольцо.

Свойство 2:



Свойство 3:



Лемма. $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigsqcup_{n=1}^N A_n \setminus \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)}_{B_n}.$

Доказательство. \supset : Дизъюнктивность $B_n \subset A_n$ и при $m > n$ $B_m \cap A_n = \emptyset \implies B_n \cap B_m = \emptyset$.

\subset : Пусть $x \in \bigcup_{n=1}^N A_n$. Возьмем наим. m , такой что $x \in A_m \implies x \in B_m \implies x \in \bigsqcup_{n=1}^N B_n$. \square

Теорема 1.3. $P, P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$. Тогда

1. $P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, где $Q_j \in \mathcal{P}$ – полукольцо.

2. $\bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}$, где $Q_{kj} \in \mathcal{P}$ и $Q_{kj} \subset P_k$.

Доказательство. 1. индукция по n . База – опр. полукольца. Переход $(n \rightarrow n+1)$:

$$P \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} P_k = (P \setminus \bigcup_{k=1}^n P_k) \setminus P_{n+1} = \bigsqcup_{j=1}^m \left(\underbrace{Q_j \setminus P_{n+1}}_{\bigsqcup_{i=1}^{l_j} Q_{ji}} \right)$$

$$2. \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^n \left(\underbrace{P_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} P_j}_{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}} \right)$$

\square

Замечание. В (2) можно писать $n = \infty$.

Определение 1.10. \mathcal{P} – полукольцо подмн-ва X .

\mathcal{Q} – полукольцо подмн-ва Y .

$\mathcal{P} \times \mathcal{Q} := \{P \times Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ – декартово произведение полуколец.

Теорема 1.4. Декартово произведение полуколец – полукольцо.

Доказательство.

$$(P \times Q) \cap (P' \times Q') = (P \cap P') \times (Q \cap Q')$$

$$(P \times Q) \setminus (P' \times Q') = (P \setminus P') \times Q \sqcup (P \cap P') \times (Q \setminus Q')$$

\square

Замечание. Остальные структуры не сохр. при декартовом произведении: $2^X \times 2^Y$ – полукольцо.

Определение 1.11. Замкнутый параллелепипед $a, b \in \mathbb{R}^m$.

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$$

Открытый параллелепипед:

$$(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m)$$

Ячейка:

$$(a, b] = [a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_m, b_m]$$

Теорема 1.5. Непустая ячейка – пересечение убыв. посл. открытых паралл. / объединение возраст. послед. замкн.

Доказательство. $P_n := (a_1, b_1 + \frac{1}{n}) \times \cdots \times (a_m, b_m + \frac{1}{n})$

$$P_n \supset P_{n+1} \text{ и } \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n = (a, b]$$

$$Q_n := [a_1 + \frac{1}{n}, b_1] \times \cdots \times [a_m + \frac{1}{n}, b_m]$$

$$Q_n \subset Q_{n+1} \text{ и } \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = (a, b]$$



□

Обозначения: \mathcal{P}^m – сем-во ячеек из \mathbb{R}^m .

$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ – сем-во ячеек из \mathbb{R}^m с рациональными координатами вершин.

Теорема 1.6. $\mathcal{P}^m, \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m$ – полукольца.

Доказательство. $\mathcal{P}^m = \mathcal{P}^{m-1} \times \mathcal{P}^1$

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m = \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^{m-1} \times \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^1$$

□

Теорема 1.7. $G \neq \emptyset$ – открытое множество в \mathbb{R}^m . Тогда его можно представить как не более чем счетное дизъюнктивное объединение ячеек, замыкание каждой из которых содержится в G (можно считать, что ячейки с рациональными координатными вершинами).

Доказательство. R_x – ячейка, $\underbrace{Cl(R_x)}_{\text{замыкание ячейки}} \subset G, x \in R_x$, получаем, что $G = \bigcup_{x \in G} R_x$.



Выкинем повторы: $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_{x_n} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{m_n} Q_{nj}$

□

Следствие. $\mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) = \mathcal{B}^m$.

Доказательство. 1. $\mathcal{P}^m \supset \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \supset \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m)$
 $(a, b] \in \mathcal{B}^m \implies \mathcal{P}^m \subset \mathcal{B}^m \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}^m) \subset \mathcal{B}^m$
 $G - \text{открытое} \implies G \in \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \implies \mathcal{B}(\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m) \supset \mathcal{B}^m$

□

1.2. Объем и мера

Определение 1.12. \mathcal{P} – полукольцо. $\mu : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$. μ – объем, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu(\bigsqcup_{k=1}^n P_k) = \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Определение 1.13. μ – мера, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Если $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ и $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k}_{\text{счетная аддитивность}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k$

Упражнение. μ – мера. Если $\mu \not\equiv +\infty$, то условия $\mu\emptyset = 0$ выполнено автоматически.

Пример. 1. \mathcal{P}^1 , $\mu(a, b] := b - a$ – длина (упр. доказать, что объем и мера).

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – нестрого монотонная

(а) $\mu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ (упр. доказать, что объем).

3. \mathcal{P}^m (m-мерные ячейки), $\mu(a, b] := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_m - a_m)$, $a := (a_1, \dots, a_m)$, $b := (b_1, \dots, b_m)$ – классический объем.

4. $\mathcal{P} = 2^X$, $x_0 \in X$, $a \geq 0$

$$\mu A := \begin{cases} a, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

μ – мера.

5. \mathcal{P} – огр. мн-ва и их дополнения.

$$\mu A := \begin{cases} 1, & \text{if } x_0 \in A \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

μ – объем, но не мера.

Теорема 1.8. μ – объем на полукольце \mathcal{P}

1. Монотонность: $\mathcal{P} \ni P \subset \tilde{P} \in \mathcal{P} \implies \mu P \leq \mu \tilde{P}$
2. (а) Усиленная монотонность: $P_1, P_2, \dots, P_n, P \in \mathcal{P}$. $\bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \leq \mu P$
 (б) Пункт (а), но $n = \infty$

3. Полуаддитивность: $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{P}$ и $P \subset \bigcup_{k=1}^n P_k$, тогда $\mu P \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$

Доказательство. 1. Очев тип.

$$2. (a) P \setminus \bigsqcup_{k=1}^n \mu P_k = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \sqcup \bigsqcup_{j=1}^m Q_j \implies \mu P = \sum_{k=1}^n \mu P_k + \sum_{j=1}^m \mu Q_j \geq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

$$(b) \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k \subset P \implies \bigsqcup_{k=1}^n P_k \subset P \implies \sum_{k=1}^n \mu P_k \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \leq \mu P$$

$$3. P'_k := P \cap P_k \in \mathcal{P} \text{ (}\mathcal{P} \text{ - полукольцо)}, \quad P = \bigcup_{k=1}^n P'_k = \bigsqcup_{k=1}^n \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{m_k} Q_{kj}}_{\in P'_k} \implies$$

$$\implies \mu P = \sum_{k=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^{m_k} \mu Q_{kj}}_{\leq \mu P'_k \leq \mu P_k \text{ (свойство 2(a))}} \leq \sum_{k=1}^n \mu P_k$$

□

Замечание. 1. Если \mathcal{P} – кольцо и A, B ($B \subset A$) $\in \mathcal{P}$, то $A \setminus B \in \mathcal{P}$

$$\mu(A \setminus B) + \mu B = \mu A$$

$$\text{Если } \mu B \neq +\infty, \text{ то } \mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$$

Теорема 1.9. \mathcal{P} – полукольцо подмн-в X , μ – объем на \mathcal{P}

\mathcal{Q} – полукольцо подмн-в Y , ν – объем на \mathcal{Q}

$$\lambda(P \times Q) := \mu P \cdot \nu Q, \text{ где } 0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$$

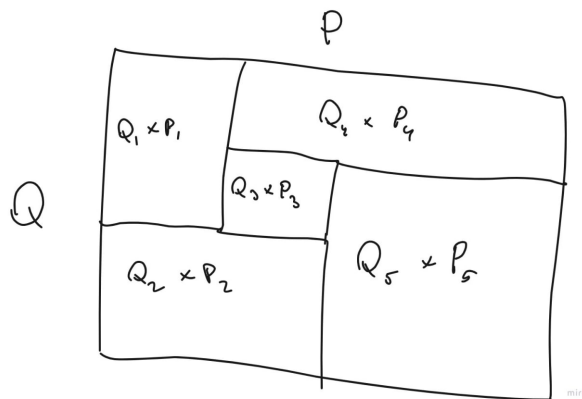
Тогда λ – объем на $P \times Q$.

Следствие. Классический объем на ячейках – действительно объем.

Доказательство. Простой случай. $P = \bigsqcup_{k=1}^n P_k, Q = \bigsqcup_{j=1}^m Q_j$, тогда:

$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{j=1}^m P_k \times Q_j, \text{ докажем, что } \underbrace{\lambda(P \times Q)}_{\sum_{k=1}^n \mu P_k \cdot \sum_{j=1}^m \nu Q_j = \mu P \cdot \nu Q} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \underbrace{\lambda(P_k \times Q_j)}_{\mu P_k \cdot \nu Q_j}$$

Общий случай.



$$P \times Q = \bigsqcup_{k=1}^n P_k \times Q_k$$

$$P = \bigcup_{k=1}^n P_k = \bigsqcup_{k=1}^N P'_k$$

$$Q = \bigcup_{j=1}^m Q_j = \bigsqcup_{j=1}^M Q'_j$$

□

Пример. 1. Классический объем на ячейках λ_m – мера

2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ нестрого монотонная возрастающая и непрерывна слева во всех точках, тогда $\nu_g(a, b] := g(b) - g(a)$ – мера.

(Rem: $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$ – непрерывность слева).

3. Считающаяся мера: $\mu A := \#A$ – кол-во элементов.

4. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное множество, $w_1, w_2, \dots \geq 0$, $\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k \rightarrow \mu$ – мера.

Доказательство. 4. $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$

Обозначения:

$$1. \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (*)$$

$$2. \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (***)$$

1. $\mu A = \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**) \geq \sum_{n=1}^N \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (*)$ – т.к. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\forall i, j : i \neq j)$, то каждое слагаемое w_k не более 1 раза попадет в $(*)$ и $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \quad (***) \geq \sum_{k: t_k \in A} w_k \quad (**) = \mu A$ – нер-во верно, так как мы можем к каждому w_k из $(**)$ найти этот же w_k в $(***)$.

Итого имеем равенство:

$$(**) = (***) : \sum_{k: t_k \in A} w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: t_k \in A_n} w_k \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n, \text{ чтд.}$$

(От автора: если у кого-то лучше расписано данное док-во, сделайте, пожалуйста, PR).

□

Теорема 1.10. (О счетной аддитивности меры).

μ – объем на полукольце \mathcal{P} . Тогда μ -мера \Leftrightarrow если $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P, P_n \in \mathcal{P}$, то $\mu \cdot P \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \cdot P_n$ (счетная полуаддитивность).

Доказательство. " \Leftarrow ": Пусть $P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n$, тогда надо д-ть, что $\mu P = \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$: для " \leq " – счетная полуаддитивность, для " \geq " – усиленная монот. объема.

$$\begin{aligned} \text{"}\Rightarrow\text{"}: P'_n &:= P \cap P_n \implies P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P'_n \implies P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Q_{nk}, \text{ где } Q_{nk} \subset P'_n \implies \mu P = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk}}_{\leq \mu P_n} \text{ – усиленная монот. объема. } \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk} \subset P'_n \subset P_n. \end{aligned}$$

□

Следствие. Если μ – мера на σ -алгебре, то счетное объединение мн-в ненулевой меры – мн-во нулевой меры.

Доказательство. $\mu A_n = 0 \implies \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = 0$.

□

Теорема 1.11. (О непрерывности меры снизу).

μ – объем на σ -алгебре \mathcal{A} . Тогда μ – мера \Leftrightarrow если $\mathcal{A} \ni A_n \subset A_{n+1}$, то $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$ – непр. меры снизу.

Доказательство. " \Rightarrow ": $\mathcal{A} \ni B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $A_0 = \emptyset$.

B_n – дизъюнкты: $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu\left[\bigsqcup B_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu B_k = \lim \mu A_n.$$

" \Leftarrow ": Пусть $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$$A_n := \bigsqcup_{k=1}^n C_k, \quad A_n \subset A_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

$$\underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)}_{=\mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n)} = \lim \mu A_n = \lim \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n C_k\right) = \lim \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n \quad \square$$

Теорема 1.12. (О непрерывности меры сверху).

μ – объем на σ -алгебре \mathcal{A} и $\mu X < +\infty$.

Тогда равносильны:

1. μ – мера
2. если $A_n \supset A_{n+1}$, то $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim \mu A_n$
3. если $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, то $\lim \mu A_n = 0$.

Доказательство. (1) \Rightarrow (2): $A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow B_n := X \setminus A_n \subset X \setminus A_{n+1} =: B_{n+1}$. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

$$\Rightarrow \underbrace{\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)}_{\mu(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)} = \lim \mu B_n = \lim \mu(X \setminus A_n) = \lim(\mu X - \mu A_n)$$

(3) \Rightarrow (1): $C = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} C_n$, надо д-ть, что $\mu C = \sum_{n=1}^{\infty} \mu C_n$.

$A_n := \bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} C_k$, $A_n \supset A_{n+1}$ и $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, тогда $\lim \mu A_n = 0$.

$$C = \bigsqcup_{k=1}^n C_k \sqcup A_n \Rightarrow \mu C = \sum_{k=1}^n \mu C_k + \mu A_n. \quad \square$$

Следствие. Если μ – мера, $A_n \supset A_{n+1}$ и существует m , такое что $\mu A_m < +\infty$, тогда $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$.

Доказательство. Просто берем $X := A_m$ и пользуемся теоремой о непрерывности меры сверху. \square

Упражнение. Придумать объем, не являющийся мерой, обладающей св-вом из следствия.

1.3. Продолжение мер

Определение 1.14. $\nu : 2^X \rightarrow [0; +\infty]$ – субмера, если

1. $\nu \emptyset = 0$
2. монотонность: если $A \subset B$, $\nu A \leq \nu B$
3. счетная полуаддитивность: если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то $\nu A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu A_n$

Замечание. 1. счетная полуаддитивность \Rightarrow конечная.

2. монотонность (следует из счетной полуаддитивности) $A \subset B$, $n = 1$.

Определение 1.15. μ – полная мера на σ -алгебре \mathcal{A} , если $A \subset B \in \mathcal{A}$ и $\mu B = 0 \implies A \in \mathcal{A}$.

Замечание. это означает, что $\mu A = 0$.

Определение 1.16. ν – субмера, назовем $E \subset X$ ν -измеримым, если $\forall A \subset X \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$

Замечание. Достаточен знак " \geq " (следует из счетной полуаддитивности).

Теорема 1.13. Каратеодори.

Пусть ν – субмера. Тогда все ν -измеримые мн-ва образуют σ -алгебру и сужение ν на эту σ -алгебру – это полная мера.

Доказательство. Обозначим через \mathcal{A} ν -измеримые мн-ва.

1. Если $E = \emptyset$, то $E \in \mathcal{A}$.

$$\forall A \subset X, \underbrace{\nu A}_{?} \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$$

$A \cap E \subset E, \nu(A \cap E) \leq \nu E = 0 \implies \nu(A \cap E) = 0$, тогда доказали вопросик сверху.

2. \mathcal{A} – симметричное семейство мн-в.

$$E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$$

$$A \cap E = A \setminus (X \setminus E)$$

$$A \setminus E = A \cap (X \setminus E)$$

3. Если E и $F \in \mathcal{A}$, то $E \cup F \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \nu A = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) &= \underbrace{\nu(A \cap E) + \nu((A \setminus E) \cap F)}_{\geq \nu(A \cap (E \cup F))} + \underbrace{\nu((A \setminus E) \setminus F)}_{\nu(A \setminus (E \cup F))} \geq \nu(A \cap (E \cup F)) + \\ &\nu(A \setminus (E \cup F)) \end{aligned}$$

4. \mathcal{A} – алгебра.

5. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \in \mathcal{A} \implies E \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \nu A = \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k) + \nu(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^n E_k) &\geq \underbrace{\nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^n E_k)}_{\nu(A \cap E_n) + \nu(A \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} E_k)} + \nu(A \setminus E) \implies \\ \implies \nu A &\geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap E_k)}_{\geq \nu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)) = \nu(A \cap E)} + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E). \end{aligned}$$

6. Если $E_n \in \mathcal{A}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $E \in \mathcal{A}$.

7. \mathcal{A} – σ -алгебра.

8. ν – мера на \mathcal{A} .

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \underbrace{\nu E}_{?} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu E_n.$$

Докажем, что $\nu E \geq \sum_{k=1}^n \nu E_k$ (т. к. \leq уже есть из определения субмеры). Знаем, что $\nu E \geq \nu(\bigsqcup_{k=1}^n E_k) = \sum_{k=1}^n \nu E_k$

□

Определение 1.17. μ – мера на полукольце \mathcal{P} , $A \subset X$.

$$\mu^* A := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : P_k \in \mathcal{P} \wedge A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right\}$$

если покрытия нет, то $+\infty$.

– внешняя мера, порожд. μ .

Замечание. 1. Можно считать, что P_k – дизъюнкты

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{m_k} Q_{nk}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_k} \mu Q_{nk} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n$$

2. Если μ задана на σ -алгебре \mathcal{A} , то $\mu^* A = \inf \{ \mu B : B \in \mathcal{A} \wedge A \subset B \}$

Теорема 1.14. Пусть μ – мера на полукольце \mathcal{P} . Тогда μ^* – субмера, совпадающая с мерой μ на полукольце \mathcal{P} .

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{P}$, хотим доказать, что $\mu A = \mu^* A$.

” \geq ”: очевидно, так как множество покрывает само себя. $\mu^* A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A \}$

$$\text{”}\leq\text{”}: A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad \underbrace{\implies}_{\text{счетная полуаддитивность}} \quad \mu A_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k \implies \mu A \leq \inf = \mu^* A$$

2. μ^* – субмера, т.е. нужна счетная полуаддитивность.

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \underbrace{\implies}_{?} \quad \mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \epsilon$$

$\mu^* A_n = \inf \dots$, берем покрытие $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ т.ч. $\sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \mu^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}$

$\mu^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_{nk} < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^* A_n + \epsilon$ и $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} P_{nk}$ – устремляем ϵ к нулю.

□

Определение 1.18. Стандартное продолжение меры – конструкция, полученная следующими действиями:

1. Берем меру μ_0 на полукольце \mathcal{P} .
2. Берем μ_0^* – внешняя мера.
3. Сужаем полученную внешнюю меру на множество всех μ_0^* -измеримых множеств.

Получилась полная мера μ на σ -алгебре $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$ и $\mu P = \mu_0 P$ для $P \in \mathcal{P}$.

Множества, содержащиеся в \mathcal{A} , назовем μ -измеримыми.

Теорема 1.15. Это действительно продолжение, то есть $\mathcal{A} \supset \mathcal{P}$.

Доказательство. Надо доказать, что $E \in \mathcal{P} \wedge A \subset X$, $\mu_0^* A \geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E)$.

Рассмотрим случаи:

1. $A \in \mathcal{P}$.

$$\mu_0^* A = \mu_0 A, \quad \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0(A \cap E)$$

$$A \setminus E = \bigsqcup_{k=1}^n Q_k, \quad Q_k \in \mathcal{P}$$

$$A = (A \cap E) \sqcup \bigsqcup_{k=1}^n Q_k \implies \mu_0^* A = \mu_0 A = \underbrace{\sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k}_{\geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\mu_0(A \cap E)}_{\mu_0^*(A \cap E)}$$

2. $A \notin \mathcal{P}$.

Если $\mu_0^* A = +\infty$, то все очевидно, поэтому считаем, что оно конечно.

Считаем, что $\mu_0^* A < +\infty$. Возьмем $P_k \in \mathcal{P}$, такое что $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k < \mu_0^* A + \epsilon$.

Знаем, что $\mu_0^* P_k \geq \mu_0^*(P_k \setminus E) + \mu_0^*(P_k \cap E)$

$$\begin{aligned} \mu_0^* A + \epsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k &\geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \setminus E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \setminus E)) \geq \mu_0^*(A \setminus E)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(P_k \cap E)}_{\geq \mu_0^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \cap E)) \geq \mu_0^*(A \cap E)} \\ &\geq \mu_0^*(A \setminus E) + \mu_0^*(A \cap E) = \mu_0^* A \end{aligned}$$

□

Замечание. 1. Дальше меру и ее продолжение обозначаем как μ .

Если A – μ -измеримое множество, то $\mu A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P} \}$

2. Стандартное продолжение, примененное к стандартному продолжению, не дает ничего нового.

Упражнение. Указание. Проверить, что стандартное продолжение порождает ту же внешнюю меру, что и μ .

3. Можно ли распространить меру на более широкую σ -алгебру.

4.

Определение 1.19. ν – σ -конечная мера на полукольце \mathcal{P} , если $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n \in \mathcal{P} \wedge \mu P_n < +\infty$.

Можно ли по-другому продолжить на σ -алгебру μ -измерим. мн-в?

Если μ – σ -конечная мера, то нельзя.

5. Обязательно ли полная мера будет задана на μ -измеримых множествах.

Если μ – σ -конечная мера, то обязательно.

Теорема 1.16. μ – стандартное продолжение меры с полукольца \mathcal{P} , μ^* – соответствующая внешняя мера, $A \subset X$, $\mu^* A < +\infty$. Тогда $\exists B_{nk} \in \mathcal{P}$, такие что $C_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk}$, $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, $C \supset A \wedge \mu^* A = \mu C$.

Доказательство. $\mu^* A = \inf \{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \wedge P_k \in \mathcal{P} \}$, берем покрытие с суммой $< \mu^* A + \frac{1}{n}$.

$$\mu C_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_{nk} < \mu^* A + \frac{1}{n}, \quad C_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{nk} \supset A \implies C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \supset A.$$

$$\mu^* A \leq (\mu^* C = \mu C) \leq \mu C_n < \mu^* A + \frac{1}{n}$$

□

Следствие. μ – стандартное продолжение с полукольца \mathcal{P} . A – μ -измеримое мн-во и $\mu A < +\infty$. Тогда $A = B \sqcup e$, где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mu e = 0$.

Доказательство. Берем $C \in \underbrace{\mathcal{B}(\mathcal{P})}_{\text{получаем автоматически}}$ из теоремы. $A \subset C$, и $\mu A = \mu C$.

$e_1 := C \setminus A$, $\mu e_1 = 0$, теперь подставляем e_1 в теорему:

$$\text{найдется } e_2 : e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \wedge e_2 \supset e_1 \wedge \mu e_2 = \mu e_1 = 0 \implies B := C \setminus e_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{P}) \implies B \subset A.$$

$$C \setminus e_2 \subset B \subset C, \quad \mu C = \mu C - \mu e_2 \leq \mu B \leq \mu C \implies \mu B = \mu A. \quad e = A \setminus B \implies \mu e = 0$$

□

Теорема 1.17. (Единственность продолжения).

μ – стандартное продолжение с полукольца \mathcal{P} на σ -алгебру \mathcal{A} .

ν – другая мера на \mathcal{A} , совпадающая с μ на \mathcal{P} . Если μ – σ -конечная, то $\mu = \nu$.

Доказательство. Если $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n \in \mathcal{P}$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \mu P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \nu P_n \geq \nu A$ (пользуемся счетной полуаддитивностью).

$$\mu A = \inf \{ \sum \mu P_n \} \geq \nu A.$$

Возьмем $P \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{A}$: $\mu P = \nu P \implies \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P$

Если $\mu P < +\infty$, то равенство вместо неравенства.

$$\implies \mu(P \cap A) = \nu(P \cap A)$$

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} P_k, \text{ т.ч. } \mu P_k < +\infty \implies \mu(P_k \cap A) = \nu(P_k \cap A)$$

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(P_k \cap A) = \nu A \quad \square$$

1.4. Мера Лебега

Теорема 1.18. Классический объем λ_m на полукольце ячеек \mathcal{P}^m – мера.

Доказательство. Так как λ_m – объем, то нам необходимо проверить счетную полуаддитивность, то есть следующую стрелочку:

$$(a; b] = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a^{(n)}; b^{(n)}) \xRightarrow{?} \lambda(a; b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(a^{(n)}; b^{(n)}).$$

Берем $\epsilon > 0$.

Затем возьмем:

1. $[a, b'] \subset [a, b]$ и $\lambda_m[a, b] < \lambda_m[a, b'] + \epsilon$.
2. $(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) \supset [a^{(n)}, b^{(n)})$ и $\lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) < \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{\epsilon}{2^n}$.

Тогда получаем, что $\underbrace{[a, b']}_{\text{компакт}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})}_{\text{открытое мн-во}} \implies$ существует конечное подпокрытие, то есть $[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N (\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})$.

Далее можно написать ячейки и вложенность сохранится:

$$[a, b'] \subset \bigcup_{n=1}^N [\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}).$$

Теперь давайте запишем конечную полуаддитивность для объема:

$$\lambda_m[a, b'] \leq \underbrace{\sum_{n=1}^N \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)})}_{\text{кон. полуаддитивность}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[\tilde{a}^{(n)}, b^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \frac{\epsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \epsilon.$$

Теперь поймем, что у нас есть нер-во в другую сторону и мы можем зажать $\lambda_m[a, b']$ с двух сторон:

$$\lambda_m[a, b] - \epsilon < \lambda_m[a, b'] < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + \epsilon.$$

Переносим ϵ в другую сторону и устремляем к 0:

$$\lambda_m[a, b] < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) + 2\epsilon$$

$$\lambda_m[a, b] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m[a^{(n)}, b^{(n)}) - \text{получили, что хотели.} \quad \square$$

Определение 1.20. Мера Лебега в \mathbb{R}^m (обозначение λ_m) – стандартное продолжение классического объема с \mathcal{P}^m .

σ -алгебра, на которую все продолжилось, лебегевская σ -алгебра (\mathcal{L}^m).

Замечание. $\lambda_m A = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m P_k : P_k - \text{ячейки и } \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \supset A\}$.

Можно вместо $P_k \in \mathcal{P}^m$ писать $P_k \in \mathcal{P}_Q^m$.

Свойства. Свойства меры Лебега:

1. Открытое мн-во измеримо и мера непустого открытого > 0 .

Доказательство. Пусть G - открытое, $x \in G$, B – шар, накрывающий x и $B \subset G$, вписываем ячейку в шар. \square

2. Замкнутое мн-во измеримо и мера одноточечного мн-ва $= 0$.

Доказательство. Берем точку и ячейку, которая ее накрывает (стороны по ϵ), тогда $\lambda_m E_\epsilon = \epsilon^m \implies \inf = 0$. \square

3. Мера ограниченного мн-ва конечна.

Доказательство. Есть множество, его можно положить в шар, а шар в кубик. \square

4. Всякое измеримое мн-во – объединение мн-в конечной меры.

Доказательство. Берем все \mathbb{R}^m и нарежем его на ячейки по целочисленной сетке, тогда $\mathbb{R}^m = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{P_k}_{\text{ячейки по сетке } \mathbb{Z}}$, тогда $E = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(P_k \cap E)}_{\text{ограничено и измеримо}}$. \square

5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \exists A_\epsilon, B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$.

$A_\epsilon \subset E \subset B_\epsilon$ и $\lambda_m(B_\epsilon \setminus A_\epsilon) < \epsilon$, тогда $E \in \mathcal{L}^m$

Доказательство. $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$ и $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{L}^m$.

$A \subset E \subset B$, $B \setminus A \subset B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}$.

$\lambda_m(B \setminus A) \leq \lambda_m(B_{\frac{1}{n}} \setminus A_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \implies \lambda_m(B \setminus A) = 0$.

$E \setminus A \subset B \setminus A \implies E \setminus A \in \mathcal{L}^m \implies E = E \setminus A \sqcup A \in \mathcal{L}^m$. \square

6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, такое что $\forall \epsilon > 0 : \exists B_\epsilon \in \mathcal{L}^m$, такое что $\lambda_m B_\epsilon < \epsilon$ и $E \subset B_\epsilon$.

Тогда $E \in \mathcal{L}^m$ и $\lambda_m E = 0$.

Доказательство. $A_\epsilon := \emptyset \xRightarrow[\text{свойство (5)}]{} E$ – измеримое.

$\lambda E \leq \lambda B_\epsilon < \epsilon \implies \lambda E = 0$. \square

7. Счетное объединение мн-в нулевой меры – мн-во нулевой меры.

8. Счетное мн-во имеет меру 0.

9. Мн-во нулевой меры не имеет внутренних точек.

Доказательство. Пусть $x \in \text{Int} E \implies \underbrace{B_r(x)}_{\text{непустое и открытое}} \subset E \implies 0 < \lambda B_r(x) \leq \lambda E$. \square

10. Если $\lambda e = 0$, то существуют кубические ячейки Q_j , такие что $\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset e$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$.

Доказательство. $0 = \lambda_m e = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}^m} \wedge \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \supset e\}$, нарезаем P_j на кубические ячейки. \square

11. Если $m \geq 2$, то гиперплоскость $H_k(c) := \{x \in \mathbb{R}^m : x_k = c\}$ имеет нулевую меру.

Доказательство. $E_n := H_k(c) \cap (-n, n]^m$, $H_k(c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Достаточно доказать, что $\lambda E_n = 0$. $E_n \subset Y := (-n, n] \times \dots \times (-n, n] \times (c - \epsilon, c] \times (-n, n] \times \dots$

$\lambda E_n \leq \lambda Y = (2n)^{m-1} \cdot \epsilon$, так как n фиксированное, а ϵ – произвольное $\implies \lambda E_n = 0$. \square

Любое мн-во, содержащееся в не более чем счетном объединении таких гиперплоскостей, имеет нулевую меру.

12. $\lambda(a, b] = \lambda[a, b] = \lambda(a, b)$ – по предыдущему свойству.

Замечание. Свойства (5) и (6) – справедливы для любой полной меры.

Замечание. 1. Существуют несчетные множества нулевой меры.

Если $m \geq 2$, то пример это гиперплоскость $H_1(c)$ подходит.

Если $m = 1$, то подходит [Канторово множество](#).

$$\lambda K = \underbrace{\lambda[0, 1] - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda I_k}_{1 - \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{27} \dots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0}$$

K – несчетно, $K = \{x \in [0, 1] : \text{в троичной записи нет цифр } 1\}$, а у таких чисел есть биекция между $[0, 1]$, просто троичную переводим в двоичную, где просто все двойки заменяем на единички.

2. Существует неизмеримые мн-ва. Более того, любое мн-во положительной меры содержит неизмеримые подмножества.

Теорема 1.19. (Регулярность меры Лебега).

Если E – измеримое, то найдется G – открытое, такое что оно покрывает E и мера зазора $< \epsilon$, то есть $E \subset G \wedge \lambda(G \setminus E) < \epsilon$.

Доказательство. $\lambda E = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda P_j : P_j \text{ – ячейка и } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\}$.

(1): Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем покрытие, для которого $\sum \lambda P_j < \lambda E + \epsilon$.

$(a_j, b_j] \subset (a_j, b'_j)$, хотим $\lambda(a_j, b'_j) < \lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}$.

Тогда $G := \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b'_j)$ – открытое и $E \subset G$.

$\lambda G \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(a_j, b_j] + \frac{\epsilon}{2^j}) = \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(a_j, b_j] < \lambda E + 2\epsilon \implies \lambda(G \setminus E) < 2\epsilon$

(2): Пусть $\lambda E = +\infty$. $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$, такие что $\lambda E_n < +\infty$.

Возьмем G_n – открытое $\supset E_n$, такое что $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$.

$G := \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ – открытое $G \supset E$.

$$G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus E_n \implies \lambda(G \setminus E) \leq \sum \lambda(G_n \setminus E_n) < \underbrace{\sum \frac{\epsilon}{2^n}}_{=\epsilon}. \quad \square$$

Следствие. 1. Если E – измеримо, то найдется $F \subset E$ – замкнутое, такое что $\lambda(E \setminus F) < \epsilon$.

Доказательство. $G \supset \mathbb{R}^m \setminus E$, такое что $\lambda(\underbrace{G \setminus (\mathbb{R}^m \setminus E)}_{=E \setminus (\mathbb{R}^m \setminus G)=E \setminus F}) < \epsilon$, где $F := \mathbb{R}^m \setminus G$ – замкнутое и $F \subset E$. \square

2. Если E – измеримо, то

$$\lambda E = \inf\{\lambda G : G \text{ – открытое и } G \supset E\}.$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda F : F \text{ – замкнуто и } F \subset E\}$$

$$\lambda E = \sup\{\lambda K : K \text{ – компакт и } K \subset E\}$$

Доказательство. $\lambda(G \setminus E) < \epsilon \implies \lambda E \leq \lambda G < \lambda E + \epsilon$

$$\lambda(E \setminus F) < \epsilon \implies \lambda E \geq \lambda F > \lambda E - \epsilon$$

Возьмем F – замкнутое из второго вывода и $K_n := [-n, n]^m \cap F$ – компакт. $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F$ и $K_n \subset K_{n+1} \implies \lambda F = \lim \lambda K_n$

Если $\lambda F = +\infty$, то есть K_n со сколь угодно большой мерой.

Если $\lambda F < +\infty$, то есть K_n , такие что $\lambda F < \lambda K_n + \epsilon$ \square

3. Если E – измеримо, то существует последовательность компактов K_n , такая что компакты $K_n \subset K_{n+1}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, где $\lambda e = 0$.

Доказательство. (1) Пусть $\lambda E < +\infty$. Возьмем $\tilde{K}_n \subset E \wedge \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n}$

$$K_n := \bigcup_{j=1}^n \tilde{K}_j \subset E, \lambda E < \lambda \tilde{K}_n + \frac{1}{n} \leq \lambda K_n + \frac{1}{n}.$$

$$e := E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \lambda e = \lambda E - \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) < \lambda E - \lambda K_n < \frac{1}{n} \implies \lambda e = 0.$$

(2) Пусть $\lambda E = +\infty$. Берем $E = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} E_j : \lambda E_j < +\infty$.

$$E_j = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{K_{jn}}_{\text{компакт}} \cup e_j (\lambda e_j = 0) \implies E = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{jn} \cup e, \text{ где } e = \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j \wedge \lambda e = 0.$$

Нам не хватает вложенности, давайте просто пообъединяем их и получим новые компакты (вроде так, поправьте, если нет). \square

Упражнение. E – измеримое. Д-ть, что $\exists G_n$ – открытое $\supset E$, $G_n \supset G_{n+1}$, т.ч. $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \setminus e$, где $\lambda e = 0$.

Теорема 1.20. При сдвиге мн-ва на вектор \vec{v} измеримость сохраняется и мера не изменяется.

Доказательство. $\mu E := \lambda(E + \vec{v})$, μ , λ заданы на ячейках и на них совпадают $\implies \mu = \lambda$ по единственности продолжения. \square

Теорема 1.21. μ -мера на \mathcal{L}^m , т.ч.

1. μ – инвариантна относительно сдвигов.

2. μ конечна на ячейках = μ конечна на огр. измер. мн-вах.

Тогда $\exists k \in [0; +\infty)$, т.ч. $\mu = k \cdot \lambda$ (т.е. $\mu E = k\lambda E \forall E \in \mathcal{L}^m$)

Доказательство. $Q := (0, 1]^m$, $k := \mu Q$, $k \in [0, +\infty)$

Рассмотрим случаи:

1. $k = 1$. Надо доказать, что $\mu = \lambda$, достаточно доказать, что $\mu = \lambda$ на $\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}^m \implies$ достаточно доказать на $(0, \frac{1}{n}]^m$.
 Q можно сложить из n^m сдвигов $(0, \frac{1}{n}]^m$.
 $\mu(0, \frac{1}{n}]^m = \frac{1}{n^m} \mu Q = \frac{1}{n^m} \lambda Q = \lambda(0, \frac{1}{n}]^m$.
2. $k > 0$. $\nu E := \frac{1}{k} \mu E$. Тогда $\nu Q = \lambda Q \implies \nu = \lambda$.
3. $k = 0$. Покажем, что $\mu \equiv 0$.
 $\mu Q = 0$, \mathbb{R}^m – счетное объединение сдвигов $Q \implies \mu \mathbb{R}^m = 0$.

□

Теорема 1.22. $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируема. Тогда

1. Если $e \subset G$, т.ч. $\lambda e = 0$, то $\Phi(e)$ – мн-во нулевой меры.
2. Если E – измеримое, то $\Phi(E)$ – измеримое.

Замечание. Для Φ – непрер. или даже дифф. это неверно.

Доказательство. Пункт (1):

Случаи:

1. $e \subset P \subset CLP \subset G$, P – ячейка $\implies \|\Phi'\|$ непрерывно на $G \supset Cl P$ – компакт $\implies \|\Phi'\| \leq M$ на $Cl P$ (норма ограничена на замыкании P).
 $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \|\Phi'(c)\| \cdot \|x - y\|$, где $x, y \in P$; $c \in P \implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M\|x - y\|$
Существуют кубические ячейки, такие что Q_j , т.ч. $e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ и $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < \epsilon$
Рассмотрим $\Phi(Q_j)$
Пусть a_j – сторона кубика Q_j . $x, y \in Q_j \implies \|x - y\| < \sqrt{m} \cdot a_j$ (расстояние между точками меньше, чем главная диагональ, так как у нас ячейка) $\implies \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq M\sqrt{m}a_j$.
Зафиксируем x и меняем $y \implies \Phi(Q_j)$ содержится в шаре с центром в $\Phi(x)$ и радиусом $M\sqrt{m}a_j \implies \Phi(Q_j)$ содержатся в ячейке R_j со стороной $2M\sqrt{m}a_j$.
 $\Phi(Q_j) \subset R_j \implies \Phi(e) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$
 $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda R_j = \sum_{j=1}^{\infty} (2M\sqrt{m})^m a_j^m = (2M\sqrt{m})^m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda Q_j < (2M\sqrt{m})^m \cdot \epsilon \implies \Phi(e)$ измеримо и $\lambda(\Phi(e)) = 0$.
2. e – произвольное $\subset G$, $\lambda e = 0$. Представим G как $\bigsqcup_{j=1}^{\infty} P_j$, где P_j – ячейка $Cl P_j \subset G$.
 $e = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (e \cap P_j) \implies \Phi(e) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Phi(e \cap P_j)$ – мн-ва нулевой меры $\implies \lambda(\Phi(e)) = 0$.

Пункт (2):

E – измеримое $\implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup e$, $\lambda e = 0$, K_n – компакт $\implies \Phi(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi(K_n) \cup \Phi(e)$.
 $\lambda(\Phi(e)) = 0$ и $\Phi(K_n)$ – компакт \implies измеримое. □

Теорема 1.23. λ – инвариантна относительно движения.

Доказательство. Движение – это сдвиг и поворот.

Про сдвиг уже знаем, что λ не меняется. Проверим поворот:

пусть $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (считаем, что крутим относительно нуля, так как можно в ноль сдвинуть).

$\mu E := \lambda \underbrace{(UE)}_{\text{измеримое, так как } U - \text{линейное отображение}}, \mu, \lambda - \text{заданы на } \mathcal{L}^m.$

μ – инварианта относительно сдвига. $\mu(E + \vec{v}) = \lambda(U(E + \vec{v})) = \lambda(UE + U\vec{v}) = \lambda(UE) = \mu E$. μ конечна на ограниченных измеримых мн-вах. Тогда $\mu = k\lambda$.

Хотим показать, что $k = 1$. Но на единичном шаре B , $\lambda B = \mu B \implies k = 1 \implies \mu = \lambda \implies \lambda E = \lambda(UE)$. \square

Теорема 1.24. (Об изменении меры Лебега при линейном отображении).

$T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линейное, E – измеримое. Тогда $\lambda(TE) = |\det T| \cdot \lambda E$

Доказательство. $\mu E := \lambda \underbrace{(TE)}_{\text{измеримое, так как } T - \text{лин. отображ.}}, \mu \text{ инвариантно относительно сдвига и}$

конечно на огр. мн-вах. $\implies \mu k \cdot \lambda$, где $k = \lambda(T[0, 1]^m) = |\det T|$

\square

Пример. неизмеримое мн-во в \mathbb{R} .

$x \sim y$ если $(x - y) \in \mathbb{Q}$ – отношение эквивалентности.

Разобьем \mathbb{R} на классы эквивалентности и в каждом классе выберем своего представителя, сдвинем их всех в ячейку $(0, 1]$.

A – получившееся мн-во. Докажем, что A не может быть измеримым.

От противного. Если $\lambda A = 0$, то $(0, 1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (A + r) = \mathbb{R}$. Но тогда $\lambda A = 0 \implies \lambda(A + r) = 0 \implies \lambda \mathbb{R} = 0$ – противоречие.

Если $\lambda A > 0$. $\bigsqcup_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} (A + r) \subset (0, 2] \implies \sum_{r \in \mathbb{Q}, 0 \leq r \leq 1} \lambda(A + r) \leq 2 \implies$ противоречие (так как сумма, на самом деле, должна быть бесконечна и никак не меньше 2).

То есть мы построили пример неизмеримого множества.

2. Интеграл Лебега

2.1. Измеримые функции

Определение 2.1. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, лебеговы мн-ва функции f :

$$E\{f \leq a\} := \{x \in E : f(x) \leq a\} = f^{-1}([-\infty, a])$$

$$E\{f < a\} := \{x \in E : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a))$$

$$E\{f \geq a\} := \{x \in E : f(x) \geq a\}$$

$$E\{f > a\} := \{x \in E : f(x) > a\}$$

Теорема 2.1. E – измеримое, $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, тогда равносильны:

1. $E\{f \leq a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $E\{f < a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
3. $E\{f \geq a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$
4. $E\{f > a\}$ измеримы $\forall a \in \mathbb{R}$

Доказательство. 1. $(1) \Leftrightarrow (4) : E\{f > a\} = E \setminus E\{f \leq a\}$

$$2. (2) \Leftrightarrow (3) : E\{f < a\} = E \setminus E\{f \geq a\}$$

$$3. (1) \Rightarrow (2) : E\{f < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \leq a - \frac{1}{n}\}$$

$$4. (3) \Rightarrow (4) : E\{f > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{f \geq a + \frac{1}{n}\}$$

□

Определение 2.2. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\forall a \in \mathbb{R}$ все ее лебеговы мн-ва измер.

Замечание. E – должно быть измеримое и достаточно измеримости любого множества одного типа.

Пример. 1. $f = \text{const}$, лебеговы множества: \emptyset, X .

$$2. E \subset X \text{ – измеримое, } f = 1_E(x) = 1, \text{ если } x \in E, \text{ иначе } 0.$$

Лебеговы множества: $\emptyset, X, E, X \setminus E$.

$$3. \mathcal{L}^m \text{ – лебеговская } \sigma\text{-алгебра на } \mathbb{R}^m$$

$f \in C(\mathbb{R}^m)$ – измеримая.

$$\underbrace{f^{-1}((-\infty, a))}_{\text{измеримое}} \text{ – открытое} \implies \text{измеримое.}$$

Свойства. 1. $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая $\implies E$ – измеримое.

$$2. \text{ Если } f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ измеримая и } E_0 \subset E \implies g := f|_{E_0} \text{ – измеримое.}$$

$$\text{Доказательство. } E_0\{g \leq c\} = E\{\underbrace{f \leq c}_{\text{измеримое}}\} \cap \underbrace{E_0}_{\text{измеримое}}.$$

□

$$3. \text{ Если } f \text{ – измеримая, то прообраз любого промежутка – измеримое мн-во.}$$

$$\text{Доказательство. } E\{a \leq f \leq b\} = E\{\underbrace{a \leq f}_{\text{измеримое}}\} \cap E\{\underbrace{f \leq b}_{\text{измеримое}}\}.$$

□

4. Если f – измеримая, то прообраз любого открытого мн-ва – измеримое.

Доказательство. $U \subset \mathbb{R}$ – открытое мн-во $\implies U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n] \implies f^{-1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(\underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{измеримое}})$. \square

5. Если f – измеримая, то $|f|$ и $-f$ – измеримы.

Доказательство. $E\{-f \leq c\} = E\{f \geq -c\}$, $E\{|f| \leq c\} = E\{-c \leq f \leq c\}$. \square

6. Если $f, g : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ измеримы, то $\max\{f, g\}$ и $\min\{f, g\}$ – измеримы.

В частности, $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ – измеримы.

Доказательство. $E\{\max\{f, g\} \leq c\} = E\{f \leq c\} \cap E\{g \leq c\}$ \square

7. Если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $f|_{E_n}$ – измерима $\forall n \implies f$ – измеримая.
 $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

Доказательство. $E\{f \leq c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\{f \leq c\}$. \square

8. Если $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ измерима, то найдется $g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, такая что $f = g|_E$

Доказательство. $g(x) := 0$, если $x \notin E$, $f(x)$, иначе. \square

Теорема 2.2. Пусть $f_n : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – последовательность измеримых функций. Тогда:

1. $\sup f_n$, $\inf f_n$ – измеримые.
2. $\underline{\lim} f_n$ и $\overline{\lim} f_n$ – измеримые.
3. Если существуют $\lim f_n$, то он измеримый.

Доказательство. 1. $E\{\sup f_n \leq c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{f_n \leq c\}$

2. $\underline{\lim} f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$ и $\overline{\lim} f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$

3. Если существует $\lim f_n$, то $\lim f_n = \underline{\lim} f_n$. \square

Теорема 2.3. Пусть $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow H \subset \mathbb{R}$ – измеримые, $\phi \in C(H)$, тогда $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \phi(f_1(x), \dots, f_m(x))$ – измеримая.

Доказательство. $E\{g < c\} = g^{-1}(-\infty, c) = \vec{f}^{-1}(U) = \vec{f}^{-1}(G)$

$U := \phi^{-1}(-\infty, c)$ – открытое в $H \implies \exists G$ – открытое в \mathbb{R}^m , т.ч. $U = H \cap G$
 $\implies G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n]}_{\text{ячейки в } \mathbb{R}^m}$

Достаточно понять для ячейки $(\alpha, \beta]$, что $\vec{f}^{-1}(\alpha, \beta]$ – измерима, $\bigcup_{k=1}^n E\{\alpha_k < f_k \leq \beta_k\}$ \square

Следствие. Если в теореме ϕ – поточечный предел непрерывных, то g – измерима.

Доказательство. $\phi = \lim \phi_n$, $\phi_n \vec{f}$ – измер. и поточечно стремится к $\phi_0 \vec{f}$ □

Арифметические операции в \mathbb{R} :

1. Если $x \in \mathbb{R}$, то $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$ и т.д.
2. $(+\infty) + (-\infty) = 0$, $(+\infty) - (+\infty) = 0$, $(-\infty) - (-\infty) = 0$
3. Если $0 \neq x \in \bar{\mathbb{R}}$, то $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, где знак \pm : $\pm : \pm = +$, $\pm : \mp = -$
4. $0 \cdot \pm\infty = 0$ и $\frac{x}{\pm\infty} = 0$, $\forall x \in \bar{\mathbb{R}}$, т.е. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$.
5. Делить на 0 не умеем.

Теорема 2.4. 1. Произведение и сумма измеримых функций – измеримая.

2. Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримая и $\phi \in C(\mathbb{R})$, то $\phi \circ f$ – измеримая.
3. Если $f \geq 0$ – измеримая, то f^p ($p > 0$) – измеримая, $(+\infty)^p = +\infty$
4. Если $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – измеримая, $\tilde{E} := E\{f \neq 0\}$, то $\frac{1}{f}$ – измерима на \tilde{E} .

Доказательство. 1. $f + g$. Для каждой функции рассмотрим три множества:

$$\begin{aligned} &E\{f \neq \pm\infty\}, E\{f = +\infty\}, E\{f = -\infty\} \\ &E\{g \neq \pm\infty\}, \underbrace{E\{g = +\infty\}, E\{g = -\infty\}}_{=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\{g \geq n\}} \end{aligned}$$

Для конечного случая $(E\{f \neq \pm\infty\} \cap E\{g \neq \pm\infty\})$ можем сослаться на предыдущую теорему, взяв в качестве непрерывной $\phi(f, g) = f + g$.

На остальных случаях тоже рассматриваем $f + g$: измеримость будет, т.к. $f + g = \text{const.}$

2. Частный случай предыдущей теоремы.

3. $E\{f^p \leq c\} = E\{f \leq c^{\frac{1}{p}}\}$
4. $f|_{\tilde{E}}$ – измерима и $\neq 0$

$$\tilde{E} \left\{ \frac{1}{f} \leq c \right\} = \begin{cases} \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cup \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c > 0 \\ \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c = 0 \\ \tilde{E}\{f \geq \frac{1}{c}\} \cap \tilde{E}\{f < 0\}, & \text{при } c < 0 \end{cases} \quad (3)$$

□

Следствие. 1. Произведение конечного числа измер. – измер.

2. Натуральная степень измер. функции – измер.
3. Линейная комбинация измер. функций – измер.

Теорема 2.5. $E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое, $f \in C(E)$. Тогда f – измер. относительно меры Лебега.

Доказательство. $U := f^{-1}(-\infty, c)$ – открытое мн-во в $E \implies \exists G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое, т.ч. $U = \underbrace{G}_{\text{измер.}} \cap \underbrace{E}_{\text{измер.}}$ (E измеримо по условию, а G измеримо в σ -алгебре) □

Определение 2.3. Измеримая функция – простая, если она принимает лишь конечное число значений.

Допустимое разбиение X – разбиение X на конечное число измеримых множеств, таких что на каждом множестве простая функция константна.

Следствие. 1. Если X разбито на конечное число измер. мн-в и f постоянна (то есть сужение на каждом кусочке X это какая-та константа) на каждом из них, то f – простая.

2. Если f и g – простые функции, то у них существует общее допустимое разбиение.

Доказательство. $X = \underbrace{\bigsqcup_{k=1}^m A_k}_{\text{допуст. для } f} = \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^n B_j}_{\text{допуст. для } g} \implies X = \bigsqcup_{k=1}^m \bigsqcup_{j=1}^n (A_k \cap B_j)$ – допустимое для f и g . □

3. Сумма и произведение простых функций – простая функция.

4. Линейная комбинация простых функций – простая функция.

5. \max и \min конечного числа простых функций – простая функция.

Теорема 2.6. (О приближении измеримых функций простыми)

$f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ – неотрицательная измеримая функция, тогда \exists последовательность простых функций ϕ_1, ϕ_2, \dots , такие что $\phi_i \leq \phi_{i+1} : \forall i$ в каждой точке и $\lim \phi_n = f$. Более того, если f – ограничена сверху, то можно выбрать ϕ_n так, что $\phi_n \rightrightarrows f$ на X .

Доказательство. $\Delta_k^{(n)} := [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ при $k = 0, \dots, (n^2 - 1)$ и $\Delta_{n^2}^{(n)} := [n, +\infty]$.

$[0, +\infty) = \bigsqcup_{k=0}^{n^2} \Delta_k$, $A_k^{(n)} := f^{-1}(\Delta_k^{(n)})$ – измер. мн-во.

ϕ_n на A_k равно $\frac{k}{n} \implies 0 \leq \phi_n(x) \leq f(x) \forall x$ и $f(x) \leq \phi_n(x) + \frac{1}{n}$ при $x \notin A_{n^2}$.

$\phi_n(x) \rightarrow f(x)$:

1. если $f(x) = +\infty$, то $x \in A_{n^2}^{(n)} \forall n \implies \phi_n(x) = n \rightarrow +\infty = f(x)$

2. если $f(x) \neq +\infty$, то $x \notin A_{n^2}^{(n)}$ при больших $n \implies f(x) - \frac{1}{n} \leq \phi_n(x) \leq f(x)$

Для добавления монотонности берем не каждое n , а только степени двойки, тогда нам нужно взять $\psi_n = \max\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ (тут должна быть картинка)

Равномерность: если f ограничена, начиная с некоторого момента A_{n^2} пусто \implies все $x \notin A_{n^2} \implies \forall x \in E \ f(x) - \frac{1}{n} < \phi_n(x) \leq f(x) \implies |\phi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \implies$ есть равномерная сходимость. □

2.2. Последовательности измеримых функций

Напоминание. $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Поточечная сходимость: $f_n \rightarrow f, \forall x \in E : f_n(x) \rightarrow f(x)$

Равномерная сходимость: $f_n \rightrightarrows f$ на $E, \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$

Определение 2.4. $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые.

f_n сходится к f **почти везде**, если $\exists e \subset E, \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$

Замечание. Обозначение: $\mathcal{L}(E, \mu) = \{f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} - \text{измеримые}, \mu E\{f = \pm\infty\} = 0\}$

Пусть $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, f_n сходится к f почти везде.

$\exists e \subset E, \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$

Определение 2.5. $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, f_n сходится по мере μ к f , если $\forall \varepsilon > 0$, $\mu E\{|f_n - f| > \varepsilon\} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$, $f_n \Rightarrow_\mu f$

Замечание. Зависимость: равномерная \implies (поточечная \implies почти везде) | (сходимость по мере).

Равномерная \implies поточечная – знаем.

Поточечная \implies почти везде – у нас уже есть сходимость во всех точках, поэтому для “почти везде” ничего не надо выкидывать.

Равномерная \implies сходимость по мере – начиная с некоторого момента $E\{|f_n - f| > \varepsilon\}$ будет пустым множеством по определению равномерной сходимости.

Утверждение 2.7. 1. Если f_n сходится к f п.в. (почти везде) и f_n сходится к g п.в., то $f = g$ (за исключением мн-ва нулевой меры)

2. Если $f_n \Rightarrow_\mu f$ и $f_n \Rightarrow_\mu g$, то $f = g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство. 1. Берем $e \subset E, \mu e = 0$ и $\lim f_n(x) = f(x), \forall x \in E \setminus e$

$\tilde{e} \subset E, \mu \tilde{e} = 0$ и $\lim f_n(x) = g(x), \forall x \in E \setminus \tilde{e}$

Тогда на $E \setminus (e \cup \tilde{e})$ $\lim f_n(x) = g(x)$ и $\lim f_n(x) = f(x) \implies f(x) = g(x) \forall x \in E \setminus (e \cup \tilde{e})$

2. $\mu E\{f \neq g\} \underset{?}{=} 0, E\{f \neq g\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E\{|f - g| > \frac{1}{k}\}.$

Достаточно доказать, что $\mu E\{|f - g| \geq \epsilon\} = 0$.

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

$E\{|f - g| \geq \epsilon\} \subset \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}}_{\mu=0 \text{ ?}} \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} E\{|f_n - g| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$

Знаем, что $\mu E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \rightarrow 0$

$\bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$ вложены по убыванию

$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \dots = \lim_N \left(\mu \bigcap_{n=1}^N E\{|f_n - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \right) \leq \lim_N (\mu E\{|f_N - f| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) = 0$

□

Теорема 2.8. Лебега.

$f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$

Пусть $\mu E < +\infty$ и f_n сходится к f почти везде.

Тогда f_n сходится к f по мере μ .

Доказательство. Найдется $e \subset E, \mu e = 0$, т.ч. $\forall x \in E \setminus e, f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Выкинем e и будем говорить про поточечную сходимость.

Надо доказать, что $A_n := E\{|f_n - f| > \epsilon\}, \mu A_n \rightarrow 0$.

1. Частный случай $(f_n \searrow 0)$: $A_n = E\{f_n > \epsilon\} \supset A_{n+1}$.

$$\lim \mu A_n = \mu \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \mu \emptyset = 0.$$

Пусть $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \implies 0 \leftarrow f_n(x) > \epsilon \forall n \in \mathbb{N} \implies$ таких x не существует.

2. Общий случай: $g_n(x) := \sup_{k \geq n} \{|f_k(x) - f(x)|\}$. $g_n(x) \searrow$, т.к. множество уменьшается.

$$\lim g_n(x) = \lim_n \sup_{k \geq n} \{\dots\} = \overline{\lim_n |f_n(x) - f(x)|} = \lim |f_n - f| = 0$$

$$\implies \underbrace{\mu E\{g_n > \epsilon\}}_{\rightarrow 0} \geq \mu E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

$$E\{g_n > \epsilon\} \supset E\{|f_n - f| > \epsilon\}$$

□

Замечание. 1. Условие $\mu E < +\infty$ существенно.

$$E = \mathbb{R}, \mu = \lambda, f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)} \xrightarrow[\text{поточечно}]{} f \equiv 0$$

$$\lambda E\{f_n > \epsilon\} = +\infty \not\rightarrow 0.$$

2. Обратное неверно. Более того, может быть сходимость по мере и расходимость во всех точках вообще: $E = [0, 1)$, $\mu = \lambda$

$$\mathbb{1}_{[0,1)} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)} \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{3})} \mathbb{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})} \mathbb{1}_{[\frac{2}{3}, 1)} - \text{ни для какого аргумента нет предела: } [0, \frac{1}{n}) [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \dots [\frac{n-1}{n}, 1)$$

Теорема 2.9. Рисса.

$f, f_n \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Если $f_n \Rightarrow_{\mu} f$, то существует подпоследовательность f_{n_k} , т.ч. f_{n_k} сходится к f почти везде.

Доказательство. $\mu E\{|f_n - f| > \frac{1}{k}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Выберем n_k так, что $n_k > n_{k-1}$, и $\underbrace{\mu E\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\}}_{=: A_k} < \frac{1}{2^k}$

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \mu B_n \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0$$

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \implies \underbrace{\mu B_n}_{\rightarrow 0} = 0, \text{ проверим, что если } x \notin B, \text{ то } f_{n_k}(x) \rightarrow f(x), \text{ где } B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$x \notin B \implies \exists m, \text{ т.ч. } x \notin B_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$$

$$\implies x \notin A_k \forall k \geq m \implies \forall k \geq m \underbrace{|f_{n_k}(x) - f(x)|}_{\rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0} \leq \frac{1}{k}$$

□

Следствие. Если $f_n \leq g$ и $f_n \Rightarrow_{\mu} f$, то $f \leq g$ за исключением мн-ва нулевой меры.

Доказательство. Выберем f_{n_k} сходится к f почти везде. Пусть e – исключ. мн-во $\mu e = 0$.

$$\lim_{\substack{f_{n_k} \\ \leq g(x)}} = f(x) : \forall x \in E \setminus e \implies f(x) \leq g(x) \text{ при } x \in E \setminus e$$

□

Теорема 2.10. Фреше.

Если $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ измерима относительно λ_m (мера Лебега), то $\exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, т.ч. f_n сходится к f почти везде.

Теорема 2.11. Егорова.

Пусть $\mu E < +\infty$, $f_n, f \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Если f_n сходится к f почти везде, то найдется $e \subset E$, $\mu e < \epsilon$, т.ч. $f_n \Rightarrow f$ на $E \setminus e$.

Теорема 2.12. Лузина.

$E \subset \mathbb{R}^m$ – измеримо, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – измерима (относительно λ_m – мера Лебега). Тогда найдется $e \subset E$, $\mu e < \epsilon$, т.ч. $f|_{E \setminus e}$ – непрерывна.

Фреше + Егоров \Rightarrow Лузин:

$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримое $\xRightarrow{\text{Фреше}} \exists f_n \in C(\mathbb{R}^m)$, f_n сходится к f почти везде $\xRightarrow{\text{Егоров}} \exists e : \lambda_m e < \epsilon$, т.ч. $f_n \xRightarrow{\mathbb{R}^m \setminus e} f$, равномерный предел непрерывной функции – непрерывная функция.

2.3. Определение интеграла

Лемма. Пусть $f \geq 0$ простая функция A_1, \dots, A_n и B_1, \dots, B_m – допустимые разбиения.

a_1, \dots, a_n и b_1, \dots, b_m значения f на соответственных мн-вах.

Тогда $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j)$.

Доказательство. $\sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = (1)$

$\sum_{j=1}^m b_j \mu(E \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n b_j \mu(E \cap B_j \cap A_k) = (2)$

$(1) \stackrel{?}{=} (2)$.

$a_k \mu(E \cap A_k \cap B_j) = b_j \mu(E \cap A_k \cap B_j)$

если $A_k \cap B_j \neq \emptyset$, то $a_k = b_j$, если $A_k \cap B_j = \emptyset$, то $\mu(\dots) = 0$.

Условие $f \geq 0$ важно, т.к. в ином случае могли бы получиться ∞ разных знаков и равенство зависело бы от порядка сложения. \square

Определение 2.6. $f \geq 0$ простая, $\int_E f d\mu := \sum_{k=1}^n a_k \mu(E \cap A_k)$, где A_1, \dots, A_n – допустимые разбиения ($\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$), a_1, \dots, a_n – соответст. значения.

Свойства. 1. $\int_E c d\mu = c \mu E$, $c \geq 0$

2. Если f, g – простые и $0 \leq f \leq g$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

3. Если $f, g \geq 0$ – простые, то $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

4. Если $c \geq 0$ и $f \geq 0$ – простая, то $\int_E c f d\mu = c \cdot \int_E f d\mu$

Доказательство. $\bigsqcup_{k=1}^n A_k = X$ – общее допустимое разбиение, a_k, b_k – значения на A_k .

3. $\int_E (f + g) d\mu = \sum (a_k + b_k) \mu(E \cap A_k) = \sum a_k \mu(A_k \cap E) + \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

2. $\int_E f d\mu = \sum a_k \mu(A_k \cap E) \leq \sum b_k \mu(A_k \cap E) = \int_E g d\mu$ \square

Определение 2.7. Интеграл от неотриц. измеримой ф-ции $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, f \geq 0$.

$\int_E f d\mu := \sup \{ \int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая и } 0 \leq \phi \leq f \}$

Определение 2.8. Интеграл от измеримой функции

$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu$ (если тут $+\infty - (+\infty)$, то интеграл не определен)

Замечание. Новое определение на простых функциях совпадает со старым.

Доказательство. $f \geq 0$ – простая \implies

(1): $\phi = f$ подходит (новое \geq старое, т.к. берем супремум).

(2): $\phi \leq f \implies \int_E \phi d\mu \leq \int_E f d\mu$ (sup \leq старое, т.к. задали $\phi : 0 \leq \phi \leq f$).

(3): В определении для произвольных измеримых: $\int_E (f)_- d\mu = 0$ □

Свойства. 1. Если $0 \leq f \leq g \implies \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

2. Если $\mu E = 0 \implies \int_E f d\mu = 0$

3. f – измеримая $\implies \int_E f d\mu = \int_X \mathbb{1}_E f d\mu$

Доказательство. Проверим для f_{\pm} :

$\int_E f_+ d\mu = \sup\{\int_E \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq f_+\} = \sup\{\int_X \phi d\mu : \phi \text{ – простая } 0 \leq \phi \leq \mathbb{1}_E f_+\} = \int_X \mathbb{1}_E f_+ d\mu$ (в одном случае сужаем ϕ на множество E , в другом – дополняем нулями на $X \setminus E$) □

4. Если $f \geq 0$ – измеримая, $A \subset B$, то $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$.

Доказательство. $\int_A f d\mu = \int_X \mathbb{1}_A f d\mu \leq \int_X \mathbb{1}_B f d\mu = \int_B f d\mu$. □
т.к. $\mathbb{1}_A f \leq \mathbb{1}_B f$

Упражнение. Доказать, что $\int_{[1;+\infty)} \frac{\sin x}{x} d\lambda_1$ не определен.

Теорема 2.13. Беппо Леви.

Пусть $f_n \geq 0$ – измеримые функции, $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, последовательность поточечно возрастающая $f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ $f(x) := \lim f_n(x)$ – поточечный предел.

Тогда $\int_E f d\mu = \lim \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. (1): $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

(2): $f_n \leq f_{n+1} \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu$

(1) и (2) $\implies \exists L := \lim \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

Осталось проверить, что $L \geq \int_E f d\mu$ (можно считать, что $L < +\infty$ т.е. конечна, иначе утверждение очевидно).

$\int_E f d\mu = \sup\{\int_E \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ – простая}\}$

Достаточно доказать, что $L \geq \int_E \phi d\mu$ для ϕ – простая и $0 \leq \phi \leq f$.

Возьмем $0 < \theta < 1$ и докажем, что $L \geq \int_E \theta \phi d\mu$:

$E_n := E\{f_n \geq \theta \phi\}, f_n \nearrow \implies E_n \subset E_{n+1}$. Покажем, что $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Пусть $x \in E$:

1. если $\phi(x) = 0$, то $\forall n : x \in E_n$

2. если $\phi(x) > 0$, то $\lim f_n(x) = f(x) \geq \phi(x) > \theta \phi(x) \xRightarrow{\text{при больших } n} f_n(x) > \theta \phi(x) \xRightarrow{\text{при больших } n} x \in E_n$

Посмотрим на $\underbrace{\int_E f_n d\mu}_{(*)} \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \underbrace{\int_{E_n} \theta \phi d\mu}_{(**)}$.

Переходим к пределу $n \rightarrow \infty$: $\underbrace{L}_{\text{получили из (*)}} \geq \underbrace{\int_E \theta \phi d\mu}_{\text{это нужно понять для (**)}}$

Осталось понять, что $\underbrace{\int_{E_n} \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(E_n \cap A_k)} \rightarrow \underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k=1}^m \mu(E \cap A_k)}$.

Поймем, что $\mu(E_n \cap A_k) \rightarrow \mu(E \cap A_k)$ – непрерывность меры снизу, $E_n \cap A_k \subset E_{n+1} \cap A_k$ и $\bigcup_{k=1}^\infty (E_n \cap A_k) = E \cap A_k$. \square

Свойства. Продолжаем писать свойства:

5. $f, g \geq 0$ – измеримые $\implies \int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ – аддитивность.

6. $f \geq 0, \alpha \geq 0 \implies \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$ – однородность.

7. $\alpha, \beta \geq 0, f, g \geq 0$ – измеримые, тогда $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$

Доказательство. 5. $f \geq 0$ измеримая $\implies \exists 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ – простые, причем $\phi_n \rightarrow f$ поточечно.

$g \geq 0$ измеримая $\implies \exists 0 \leq \psi_1 \leq \psi_2 \leq \dots$ – причем $\psi_n \rightarrow g$ поточечно.

$\implies 0 \leq \phi_1 + \psi_1 \leq \dots$ простые и $\phi_n + \psi_n \rightarrow f + g$.

$$\underbrace{\int_E (\phi_n + \psi_n) d\mu}_{\rightarrow \int_E (f+g) d\mu} = \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{\substack{\rightarrow \int_E f d\mu \\ \text{по Леви}}} + \underbrace{\int_E \psi_n d\mu}_{\rightarrow \int_E g d\mu}$$

 \square

Свойства. Продолжаем свойства.

8. Аддитивность по мн-ву. Если $A \cap B = \emptyset$, $f \geq 0$ измеримая, то $\underbrace{\int_{A \cup B} f d\mu}_{(*)} = \underbrace{\int_A f d\mu}_{(**)} + \underbrace{\int_B f d\mu}_{(***)}$

Доказательство. $(*) = \int_X \mathbf{1}_{A \cup B} f d\mu$

$(**) = \int_X \mathbf{1}_A f d\mu$

$(***) = \int_X \mathbf{1}_B f d\mu$

$\mathbf{1}_{A \cup B} f = \mathbf{1}_A f + \mathbf{1}_B f$

 \square

9. Если $\mu E > 0$ и $f > 0$ измерим., то $\int_E f d\mu > 0$.

Доказательство. $E_n := E \{f \geq \frac{1}{n}\}$, $E_n \subset E_{n+1}$, $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$

$\implies \lim \mu E_n = \mu E > 0 \implies \mu E_n > 0$ для больших n

$\implies \int_E f d\mu \geq \int_{E_n} f d\mu \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \cdot \mu E_n > 0$.

 \square

Пример. $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ – не более чем счетное, $w_1, w_2, \dots \geq 0$.

$\mu A := \sum_{k: t_k \in A} w_k$ – мера.

$\int_E f d\mu = \sum_{k: t_k \in E} w_k = (*)$.

Пусть $f = \mathbf{1}_A$, тогда $\int_E f d\mu = \int_E \mathbf{1}_A d\mu = \mu(E \cap A) = \sum_{k: t_k \in E \cap A} w_k = \sum_{k: t_k \in E} \mathbf{1}(t_k) w_k = (*)$.

\implies равенство есть и на простых функциях

Пусть $f \geq 0$ измерим. $\phi_n = f \cdot \mathbf{1}_{\{t_1, t_2, \dots, t_n\}}$, $0 \leq \phi_1 \leq \dots \leq f$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_E \phi_n d\mu}_{=\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k: t_k \in E} f(t_k)w_k = \sum_{k: t_k \in E} f(t_k)w_k} = \int_E \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n}_{\leq f} d\mu \leq \int_E f d\mu$$

Проверим, что $\underbrace{\int_E f d\mu}_{\sup\{\dots\}} \leq \sum_{k: t_k \in E} f(t_k)w_k$. Берем $0 \leq \underbrace{\phi}_{\text{простая}} \leq f$ и проверяем, что $\underbrace{\int_E \phi d\mu}_{\sum_{k: t_k \in E} \phi(t_k)w_k} \leq$

$$\sum_{k: t_k \in E} f(t_k)w_k$$

Замечание. $T = \mathbb{N}$, $w_n \equiv 1$.

$$\mu A = \#\{A \cap \mathbb{N}\}$$

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Определение 2.9. $P(x)$ – св-во, зависящее от точки. $P(x)$ выполняется **почти везде**, если на E (для **почти всех** точек из E), если $\exists e \subset E$, $\mu e = 0$ и $P(x)$ выполнено $\forall x \in E \setminus e$.

Замечание. P_1, P_2, \dots последовательность св-в, каждое из которых верно почти везде на E , то они все вместе верны почти везде на E .

Теорема 2.14. (Неравенство Чебышева).

$$f \geq 0 \text{ измер.}, t, p > 0. \text{ Тогда } \mu E\{f \geq t\} \leq \frac{1}{t^p} \cdot \int_E f^p d\mu.$$

Доказательство. $\int_E f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} f^p d\mu \geq \int_{E\{f \geq t\}} t^p d\mu = t^p \cdot \mu E\{f \geq t\}$. □

Свойства. Свойства интеграла, связанные с понятием ”почти везде”.

1. Если $\int_E |f| d\mu < +\infty$, то f почти везде конечна.
2. Если $\int_E |f| d\mu = 0$, то $f = 0$ почти везде.
3. Если $A \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$, то $\int_A f d\mu$ и $\int_B f d\mu$ либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.
4. Если $f = g$ почти везде на E , тогда $\int_E f$ и $\int_E g$ либо определены, либо нет одновременно. И если определены, то равны.

Доказательство. 1. $E\{|f| = +\infty\} \subset E\{|f| \geq t\}$

$$\mu E\{|f| = +\infty\} \leq \mu E\{|f| \geq t\} \leq \frac{\int_E |f| d\mu}{t} \underbrace{\rightarrow}_{t \rightarrow +\infty} 0$$

2. Если $\mu E\{f > 0\} > 0$, то $\int_E f d\mu = \int_{E\{f > 0\}} f d\mu > 0$ (св-во. 9 из уже доказанных выше).

$$3. \int_B f_{\pm} d\mu = \int_{B \setminus A} f_{\pm} d\mu + \int_A f_{\pm} d\mu = \int_A f_{\pm} d\mu$$

$$4. A := E\{f = g\}, \mu(E \setminus A) = 0 \quad \int_E f d\mu = \int_A f d\mu = \int_A g d\mu = \int_E g d\mu$$

□

2.4. Суммируемые функции

Определение 2.10. f – суммируема на мн-ве E , если f измерима и $\int_E f_{\pm} d\mu < +\infty$.

Замечание. В этом случае $\int_E f d\mu$ конечен.

Свойства. 1. f – суммируема на $E \Leftrightarrow \int_E |f| d\mu < +\infty$ и f – измерима.

В этом случае $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $0 \leq f_{\pm} \leq |f| = f_+ + f_-$

" \Rightarrow ": $\int_E |f| d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu < +\infty$

" \Leftarrow ": $\int_E f_{\pm} d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty$

Нер-во: $-\int_E |f| d\mu = -\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \leq \underbrace{\int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu}_{\int_E f d\mu} \leq \int_E f_+ d\mu + \int_E f_- d\mu = \int_E |f| d\mu$

□

2. f суммируема на $E \Rightarrow f$ почти везде конечна на E .

3. Если $A \subset B$ и f суммируема на B , то f суммируема на A .

Доказательство. $\int_A |f| d\mu \leq \int_B |f| d\mu < +\infty$

□

4. Ограниченная функция суммируема на мн-ве конечной меры.

Доказательство. $|f| \leq M \Rightarrow \int_E |f| d\mu \leq \int_E M d\mu = M \cdot \mu E < +\infty$

□

5. Если f и g суммируемы и $f \leq g$, то $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

Доказательство. $f_+ - f_- = f \leq g = g_+ - g_- \Rightarrow 0 \leq f_+ + g_- \leq f_- + g_+ \Rightarrow \int_E f_+ d\mu + \int_E g_- d\mu \leq \int_E f_- d\mu + \int_E g_+ d\mu$ – переносим слагаемые в нужные стороны и чтд.

□

6. f и g – суммируемы $\Rightarrow f + g$ суммируема и $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$

Доказательство. $|f + g| \leq |f| + |g| \Rightarrow f + g$ суммируема.

$h := f + g, h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$

$\Rightarrow h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_- \geq 0$

$\Rightarrow \int_E h_+ d\mu + \int_E f_- d\mu + \int_E g_- d\mu = \int_E f_+ d\mu + \int_E g_+ d\mu + \int_E h_- d\mu$ – далее просто переносим нужные слагаемые через равно.

□

7. f – суммируема, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f$ суммируема и $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$

Доказательство. $|\alpha f| = |\alpha| \cdot |f| \Rightarrow |\alpha f|$ – суммируема.

Если $\alpha > 0$, то $(\alpha f)_+ = \alpha \cdot f_+$ и $(\alpha f)_- = \alpha \cdot f_-$ и $\int_E (\alpha f)_{\pm} d\mu = \alpha \cdot \int_E f_{\pm} d\mu$

Если $\alpha = -1$, то $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+ \Rightarrow \int_E (-f) d\mu = \int_E f_- d\mu - \int_E f_+ d\mu = -\int_E f d\mu$

□

8. Линейность.

Если f, g – суммируемы, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то $\alpha f + \beta g$ – суммируема и $\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu$.

9. Пусть $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$. Тогда f – суммируема на $E \Leftrightarrow f$ – суммируема на $E_k : \forall k = 1, \dots, n$. А если f суммируема на $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$, то $\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu$

Доказательство. $\mathbb{1}_{E_k}|f| \leq \mathbb{1}_E|f| \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}|f| \implies \int_{E_k}|f|d\mu \leq \sum_{k=1}^n \int_{E_k}|f|d\mu$.

Если $E = \bigsqcup_{k=1}^n E_k$, то $\mathbb{1}_E = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} \implies \mathbb{1}_E f_{\pm} = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k} f_{\pm} \implies \int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f_{\pm} d\mu$ \square

10. Интегрирование по сумме мер. Пусть μ_1 и μ_2 – меры, заданные на одной σ -алгебре, $\mu := \mu_1 + \mu_2$.

Если $f \geq 0$ измерима, то $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$ (*).

f – суммируема относительно $\mu \Leftrightarrow f$ – суммируема относительно μ_1 и μ_2 и в этом случае есть равенство (*).

Доказательство. (*) для $f \geq 0$:

(*) есть для простых $\phi \geq 0$, $\int_E \phi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\mu(E \cap A_k)}_{\mu_1(E \cap A_k) + \mu_2(E \cap A_k)} = \int_E \phi d\mu_1 + \int_E \phi d\mu_2$.

$f \geq 0$ – измеримая \implies возьмем $0 \leq \phi \leq \dots \leq \phi_n$ – простые, $\phi_n \rightarrow f$.

$\int_E \phi_n d\mu = \int_E \phi_n d\mu_1 + \int_E \phi_n d\mu_2$ по т. Леви получаем (предельный переход) $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$ \square

Определение 2.11. Интеграл от комплекснозначной функции $f : E \rightarrow \mathbb{C}$.

$Re(f)$ и $Im(f)$ – измеримые функции.

$$\int_E f d\mu := \int_E Re(f) d\mu + i \cdot \int_E Im(f) d\mu$$

Замечание. Все св-ва, связанные с равенствами, сохраняются:

Доказательство. $Re(if) = -Im(f)$, $Im(if) = Re(f)$

$$\int_E if d\mu = i \int_E f d\mu$$

Замечание. $|\int_E f d\mu| \leq \int_E |f| d\mu$

Доказательство. $|\int_E f d\mu| = e^{i\alpha} \cdot \int_E f d\mu = \int_E e^{i\alpha} f d\mu =$

$$= \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu + i \cdot \underbrace{\int_E Im(e^{i\alpha} f) d\mu}_{=0, \text{ т.к. слева от равенства вещ. число}} = \int_E Re(e^{i\alpha} f) d\mu \leq \int_E |Re(e^{i\alpha} f)| d\mu \leq \int_E |e^{i\alpha}| d\mu =$$

$$\int_E |f| d\mu.$$

$$|Re(f)|, |Im(f)| \leq |f|$$

$$|f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$$

Теорема 2.15. (О счетной аддитивности интеграла).

Пусть $f \geq 0$ – измеримая и $E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Тогда $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$

Доказательство. $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f d\mu = \lim \int_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f d\mu = \lim \int_E \left(\underbrace{\mathbb{1}_{\bigsqcup_{k=1}^n E_k} f}_{:=g_n} d\mu \right) =$

$$\lim \int_E g_n d\mu \underbrace{=}_{\text{т. Леви}} \int_E f d\mu$$

$$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots, \lim g_n = f, g_n(x) = f(x) \text{ если } x \in \bigsqcup_{k=1}^n E_k.$$

\square

Следствие. 1. Если $f \geq 0$ – измеримая, то $\nu E := \int_E f d\mu$ – мера, заданная на той же σ -алгебре, что и μ .

2. Если $f \geq 0$ и $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$

3. Если f – суммируема и $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, то $\int_E f d\mu = \lim \int_{E_n} f d\mu$

4. Если f – суммируема на E , $\epsilon > 0$, то $\exists A \subset E : \mu A < +\infty \wedge \int_{E \setminus A} |f| d\mu < \epsilon$

Доказательство. 1. $\nu \emptyset = \int_{\emptyset} f d\mu = 0$ + счетная аддитивность из теоремы: $\int_E f_{\pm} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$ все конечно, поэтому можно вычитать.

2. $\nu A := \int_A f d\mu$ – мера $\implies \nu A$ непрерывна снизу.

$$\underbrace{\int_E f d\mu}_{\nu E} = \underbrace{\lim \int_{E_n} f d\mu}_{\lim \nu E_n}$$

3. $\nu_{\pm} A := \int_A f_{\pm} d\mu$, $\nu_{\pm} A$ – конечные меры $\implies \nu_{\pm}$ – непрерывна сверху.

$$\implies \int_E f_{\pm} d\mu = \nu_{\pm} E = \lim \nu_{\pm} E_n = \lim \int_{E_n} f_{\pm} d\mu$$

4. $E_n := E\{|f| \leq \frac{1}{n}\} \implies E_n \supset E_{n+1}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E\{f = 0\} \implies \lim \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{E\{f=0\}} |f| d\mu = 0 \implies \exists n : \epsilon > \int_{E_n} |f| d\mu \geq \left| \int_{E_n} f d\mu \right|$$

$$A := E \setminus E_n = E\{|f| > \frac{1}{n}\}$$

$$\underbrace{\mu A}_{\text{Чебышев}} \leq \frac{\int_E |f| d\mu}{\frac{1}{n}} < +\infty$$

□

Теорема 2.16. (Абсолютная непрерывность интеграла).

f – суммируема на E , тогда $\forall \epsilon : \exists \delta > 0$, т.ч. $\forall e$ – измер. $\mu e < \delta \implies \left| \int_e f d\mu \right| < \epsilon$

Доказательство. $\int_E |f| d\mu < +\infty \implies \exists \underbrace{\phi}_{\leq f}$ – неотрицательная простая, т.ч.

$$\int_E |f| d\mu < \int_E \phi d\mu + \epsilon.$$

Пусть C – наибольшее значение ϕ . Возьмем $\delta = \frac{\epsilon}{C}$.

Если $\mu e < \delta$, то $\int_e |f| d\mu < \underbrace{\int_e \phi d\mu + \epsilon}_{\leq \int_e C d\mu + \epsilon \leq \epsilon + \epsilon}$ – это следует из того, что $|f| - \phi \geq 0$,

$$\int_e (|f| - \phi) d\mu \leq \int_E (|f| - \phi) d\mu < \epsilon.$$

□

Следствие. Если f суммируема на E и $\mu A_n \rightarrow 0$, $A_n \subset E$, то $\int_{A_n} f d\mu \rightarrow 0$.

Доказательство. Берем $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$ для него из теоремы, тогда если $\mu A_n < \delta$, то $\left| \int_{A_n} f d\mu \right| < \epsilon$

□

Определение 2.12. Пусть μ и ν меры на одной σ -алгебре \mathcal{A} . Если существует измеримая функция $w \geq 0$, т.ч. $\forall A \in \mathcal{A}$, $\nu A = \int_A w d\mu$.

Тогда w плотность меры ν относительно меры μ .

Замечание. Если w существует, то ν обладает свойством: если $\mu e = 0$, то $\nu e = 0$.

Теорема 2.17. Пусть f, g – суммируемые функции. Если $\forall A$ – измерим. $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, то $f = g$ почти везде.

Доказательство. $h := f - g$, $E_+ := E\{f \geq g\}$, $E_- := E\{f < g\}$

$$\int_E |h| d\mu = \underbrace{\int_{E_+} h d\mu}_{=0} - \underbrace{\int_{E_-} h d\mu}_{=0} = 0 \implies h = 0 \text{ почти везде.}$$

□

Теорема 2.18. (Единственность плотности).

Если ν – σ -конечная мера (на σ -алгебре \mathcal{A}) и w – плотность ν относительно μ , то w – единственна с точностью до **почти везде**.

Доказательство. Так как наша мера – σ -конечна, то все пространство представляется как $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$, т.ч. $\nu X_n < +\infty \implies$ т.к. w – плотность $\nu|_{X_n}$ относительно $\mu|_{X_n} \implies w$ – суммируема на X_n .

Пусть w_1, w_2 – плотности ν относительно μ на сужении одного кусочка, тогда по определению плотности верно, что $\forall A \in \mathcal{A} : \nu A = \int_A w_1 d\mu = \int_A w_2 d\mu \implies w_1 = w_2$ почти везде.

по пред. теореме

Ну если две плотности на каждом из кусочков отличаются на множество нулевой меры, тогда и на объединении кусочков тоже будут отличаться на множество нулевой меры, тогда плотность единственна почти везде и на всей σ -алгебре. □

Определение 2.13. ν, μ – меры, заданные на одной σ -алгебре. ν абсолютно непрерывна относительно μ , если $\forall e$ – измер., т.ч. $\mu e = 0 \implies \nu e = 0$.

Обозначение $\nu \prec \mu$ или $\nu \ll \mu$.

Теорема 2.19. (Радона-Никодима).

Пусть меры μ и ν заданы на одной σ -алгебре. Тогда $\nu \prec \mu \Leftrightarrow$ существует плотность меры ν относительно μ .

Теорема 2.20. w – плотность ν относительно μ . Тогда

1. Если $f \geq 0$, то $\int_E f d\nu = \int_E f w d\mu : (*)$
2. $f w$ – суммируема, относительно $\mu \Leftrightarrow f$ – суммируема относительно ν , и в этом случае есть формула $(*)$

Доказательство. 1. Пусть $f = \mathbb{1}_A$, тогда $\int_E f d\nu = \nu(A \cap E) = \int_{A \cap E} w d\mu = \int_E \mathbb{1}_A w d\mu$. По линейности $(*)$ верна для неотрицательных простых.

Пусть $f \geq 0$ – измер. Тогда найдутся простые $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$ ($0 \leq w\phi_1 \leq w\phi_2 \leq \dots$) и

$$\phi_n \rightarrow f \text{ поточечно. } \underbrace{\int_E \phi_n d\nu}_{\rightarrow \int_E f d\nu} = \underbrace{\int_E \phi_n w d\mu}_{\rightarrow \int_E f w d\mu} \text{ – по т. Леви.}$$

2. $\int_E |f| d\nu = \int_E |f| w d\mu \implies f$ – суммируема относительно $\nu \Leftrightarrow f w$ суммируема относительно μ

$$\int_E f_{\pm} d\nu = \int_E f_{\pm} w d\mu \text{ и вычитаем.}$$

□

Свойства. Неравенство Гельдера.

Пусть $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда $\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = A \cdot B$

Доказательство. Пусть $f, g \geq 0$ (просто чтобы не писать модули), $A^p := \int_E f^p d\mu$, $B^q := \int_E g^q d\mu$.

Случай $A = 0$. $\implies f^p = 0$ почти везде $\implies f = 0$ почти везде $\implies fg = 0$ почти везде $\implies \int_E fg d\mu = 0$.

Можно считать, что $A, B > 0$.

Случай $A = +\infty$. Очевидно.

Можно считать $0 < A, B < +\infty$.

$$u := \frac{f}{A}, \quad v := \frac{g}{B}$$

$\int_E u^p d\mu = 1 = \int_E v^q d\mu$, $uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ верно (Упражнение, ну конечно. Фиксируем одну из переменных как параметр и исследуем нер-во по второй переменной).

$$\text{Интегрируем полученное нер-во: } \frac{1}{AB} \int_E fg d\mu = \int_E uv d\mu \leq \underbrace{\frac{1}{p} \int_E u^p d\mu}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \int_E v^q d\mu}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \square$$

Свойства. Неравенство Минковского.

$$p \geq 1, \text{ тогда } \left(\int_E |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. Можно считать, что $f, g \geq 0$, также можно считать, что $\int_E f^p d\mu$ и $\int_E g^p d\mu < +\infty$.

Проверим, что $\int_E (f + g)^p d\mu < +\infty$:

$$f + g \leq 2 \max\{f, g\} \implies (f + g)^p \leq 2^p \max\{f^p, g^p\} \leq 2^p (f^p + g^p)$$

$$\underbrace{\int_E (f + g)^p d\mu}_{=: C^p} \leq 2^p \left(\int_E f^p d\mu + \int_E g^p d\mu \right) < +\infty - \text{показали, что левая часть конечна.}$$

Можем считать, что $0 < C < +\infty$:

$$C^p = \int_E (f + g)^p d\mu = \int_E (f + g)(f + g)^{p-1} d\mu = \int_E f(f + g)^{p-1} d\mu + \int_E g(f + g)^{p-1} d\mu$$

Пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $q = \frac{p}{p-1}$, $(p-1)q = p$, тогда:

$$\int_E f \cdot (f + g)^{p-1} d\mu \leq \underbrace{\left(\int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_E ((f + g)^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{нер-во Гельдера}} = \left(\int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \underbrace{(C^p)^{\frac{1}{q}}}_{=: C^{p-1}} \leq \left(\int_E f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} C^{p-1} +$$

$$\left(\int_E g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot C^{p-1} - \text{сокращаем на } C^{p-1}. \quad \square$$

2.5. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 2.21. Леви.

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \text{ и } f = \lim f_n, \text{ тогда } \lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Следствие. Пусть $u_n \geq 0$. Тогда $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} u_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n d\mu$

Доказательство. $s_n := \sum_{k=1}^n u_k$, $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots$ и $s_n \rightarrow s := \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$$\int_E s d\mu = \lim \int_E s_n d\mu = \lim \int_E \sum_{k=1}^n u_k d\mu = \lim \sum_{k=1}^n \int_E u_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k d\mu \quad \square$$

Следствие. Если $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится при почти всех $x \in E$.

Доказательство. $+\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu \implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ — суммируемо.

$\implies \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ почти везде конечна $\implies \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ абс. сходится при почти всех $x \in E \implies$ сходится при почти всех $x \in E$. \square

Лемма. Фату.

Если $f_n \geq 0$, то $\int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$.

Доказательство. $\underline{\lim} f_n = \liminf \underbrace{\{f_n, f_{n+1}, \dots\}}_{=: g_n}$

$0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$ и $g_n \rightarrow \underline{\lim} f_n$

$$\underbrace{\implies}_{\text{теорема Леви}} \quad \lim_{\int_E g_n d\mu} = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu$$

$$= \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$$

$$g_n \leq f_n \implies \int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu \implies \underline{\lim} \int_E g_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu$$

□

Замечание. Равенства может и не быть:

$$\mu = \lambda, \quad E = \mathbb{R}, \quad f_n = \mathbb{1}_{[n, +\infty)}$$

$$\int_E f_n d\mu = +\infty, \text{ но } f_n \rightarrow 0$$

$$\text{Из этих двух условий следует, что } \int_E \underline{\lim} f_n d\mu = \int_E 0 d\mu = 0$$

Следствие. (Усиленный вариант теоремы Леви).

Пусть $0 \leq f_n \leq f$ и $f = \lim f_n$. Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$

Доказательство. $f_n \leq f \implies \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \implies \int_E f d\mu = \int_E \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \overline{\lim} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$

$$\implies \underline{\lim} = \overline{\lim} = \int_E f d\mu \implies \lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

□

Теорема 2.22. Лебега о предельном переходе (о мажорируемой сходимости).

Пусть $f = \lim f_n$ и $|f_n| \leq \underbrace{F}_{\text{суммируемая мажоранта}}$ – суммируема на E .

Тогда $\lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$, более того $\lim \int_E |f_n - f| d\mu = 0$

Доказательство. $g_n := 2F - |f_n - f| \leq 2F$ и $g_n \rightarrow 2F$.

$$g_n \geq 2F - |f_n| - |f| \geq 0.$$

Тогда предел $\lim \int_E g_n d\mu = 2 \int_E F d\mu$

$$\int_E g_n d\mu = \int_E 2F d\mu - \int_E |f_n - f| d\mu$$

$$\text{Из двух строчек выше делаем вывод, что } \underbrace{\int_E |f_n - f| d\mu}_{\geq |\int_E (f_n - f) d\mu| = |\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu|} \rightarrow 0$$

□

Замечание. 1. Без суммирования мажоранты неверно:

$$f_n = n \cdot \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]} \rightarrow f = \begin{cases} +\infty, & \text{в точке } 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = 0, \quad \int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1, \quad F := \sup f_n, \quad F(x) = n \text{ при } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

2. Поточечную сходимость можно заменить на сходимость почти везде, можно заменить и на сходимость по мере.

Теорема 2.23. Пусть $f \in C[a, b]$. Тогда $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f d\lambda$.

Доказательство. $a = x_0$

$$b = x_n$$

$$S_* := \sum_{k=1}^n \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$S^* := \sum_{k=1}^n \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Если мелкость дробления $\rightarrow 0$, то $S_*, S^* \rightarrow \int_a^b f$.

$$g_*(x) := \min_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$g^*(x) := \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} f(t) \text{ при } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

$$\int_{[a,b]} g_* d\lambda = S_*, \quad \int_{[a,b]} g^* d\lambda = S^*$$

$g_* \leq f \leq g^*$ почти везде.

$$\underbrace{S_*}_{\rightarrow \int_a^b f} = \int_{[a,b]} g_* d\lambda \leq \int_{[a,b]} f d\lambda \leq \int_{[a,b]} g^* d\lambda = \underbrace{S^*}_{\rightarrow \int_a^b f} \implies \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f \quad \square$$

Замечание. На самом деле это верно для любой функции, интегрируемой по Риману на $[a, b]$.

Теорема 2.24. (Критерий Лебега интегрируемости по Риману).

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, тогда f – интегрируема по Риману \Leftrightarrow множество точек разрыва f имеет нулевую меру Лебега.

Пример. Возьмем $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \mathbf{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$.

$f = 0$ почти везде $\implies \int_{[0,1]} f d\lambda = 0$, но точки разрыва – весь отрезок $[0, 1]$.

2.6. Произведение мер

Определение 2.14. (X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с σ -конечными мерами.

$$\mathcal{P} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, \mu A < +\infty \wedge \nu B < +\infty\}$$

$m_0(A \times B) = \mu A \cdot \nu B < +\infty$, $A \times B$ – измеримый прямоугольник.

Теорема 2.25. \mathcal{P} – полукольцо, а m_0 – σ -конечная мера на нем.

Доказательство. $\{A \in \mathcal{A} : \mu A < +\infty\}$ и $\{B \in \mathcal{B} : \nu B < +\infty\}$ – полукольца (проверяем определение полукольца для обоих множеств).

\mathcal{P} – декартово произведение полуколец, то есть тоже полукольцо (эта по теореме, которая была выше).

Проверяем, что m_0 – мера. Пусть $A \times B = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k \times B_k$.

$$\mathbf{1}_A(x) \times \mathbf{1}_B(y) = \mathbf{1}_{A \times B}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k \times B_k}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \times \mathbf{1}_{B_k}(y)$$

$$\int_Y \mathbf{1}_A(x) \cdot \mathbf{1}_B(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_Y \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \mathbf{1}_{B_k}(y) d\nu(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k$$

$$\int_X \mathbf{1}_A(x) \nu B d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \mathbf{1}_{A_k}(x) \cdot \nu B_k d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k \cdot \nu B_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_0(A_k \times B_k)$$

σ -конечность m_0 : $X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} X_j$, $Y = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} Y_j$, $\mu X_j < +\infty$, $\nu Y_j < +\infty$

$$X \times Y = \bigsqcup_{k,j=1}^{\infty} X_j \times Y_k$$

$$m_0(X_j \times Y_k) < +\infty. \quad \square$$

Определение 2.15. (X, \mathcal{A}, μ) и (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с σ -конечными мерами. Произведения мер μ и ν – стандартное продолжение меры m_0 .

Обозначение: $\mu \times \nu$, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ – σ -алгебра, на которую продолжили. $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$

Свойства. 1. Декартово произведение измеримых множеств – измеримо.

2. Если $\mu e = 0$, то $(\mu \times \nu)(e \times Y) = 0$.

Доказательство. 1. $A \in \mathcal{A} \implies A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\mu A_n < +\infty$

$$B \in \mathcal{B} \implies B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \nu B_n < +\infty$$

$$A \times B = \bigcup_{k,n=1}^{\infty} \underbrace{A_k \times B_k}_{\in \mathcal{P}} - \text{измер.}$$

$$2. Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k, \nu Y_k < +\infty$$

$$e \times Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} e \times Y_k, (\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \mu e \cdot \nu Y_k = 0$$

□

Замечание. Обозначения: $C \subset X \times Y$, $x \in X$.

$$C_x := \{y \in Y : (x, y) \in C\} - \text{сечения мн-ва } C.$$

$$C^y := \{x \in X : (x, y) \in C\}$$

Следствие. 1. $(\bigcup_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcup_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$

$$2. (\bigcap_{\alpha \in I} C_{\alpha})_x = \bigcap_{\alpha \in I} (C_{\alpha})_x$$

Определение 2.16. Пусть функция f задана на мн-ве E , за исключением некоторого мн-ва e , $\mu e = 0$. Если f измерима на $E \setminus e$, то f измерима на E в **широком смысле**.

Определение 2.17. Система множеств – **монотонный класс**, если

$$1. E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$$

$$2. E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots, E_n \in \epsilon \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \epsilon$$

Теорема 2.26. Если монотонный класс содержит алгебру \mathcal{A} , то он содержит и $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Докажем, что минимальный монотонный класс \mathcal{M} , содержащий \mathcal{A} – σ -алгебра.

Рассмотрим $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{M} : A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}\}$ – монотонный класс, содержащий \mathcal{A} .

$$\text{Если } B \in \mathcal{A}, \text{ то } B \cap A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \text{ и } A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M} \implies \mathcal{M}_A \supset \mathcal{A}$$

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots, E_n \in \mathcal{M}_A \implies E_n \cap A \in \mathcal{M} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap A = \bigcup (E_n \cap A) \in \mathcal{M}$$

$$\text{Следовательно } \mathcal{M}_A = \mathcal{M} \implies \forall B \in \mathcal{M}, A \cap B \in \mathcal{M} \wedge A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{M}$$

$$\implies \mathcal{M} - \text{симметричная структура.}$$

Рассмотрим $B \in \mathcal{M}$: $\mathcal{N}_B := \{C \in \mathcal{M} : B \cap C \in \mathcal{M}\}$ – монотонный класс, содержащий \mathcal{A} (проверка по аналогии с предыдущим случаем).

$$\implies \mathcal{N}_B = \mathcal{M} \implies \forall C \in \mathcal{M}, B \cap C \in \mathcal{M} \implies \mathcal{M} - \text{алгебра.}$$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}, E_1 \subset E_2 \subset \dots$$

$$\implies \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}_{=A} \in \mathcal{M}, \text{ так как } \mathcal{M} - \text{монотонный класс.}$$

□

Теорема 2.27. Принцип Кавальери.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $m = \mu \times \nu$. Тогда

1. $C_x \in \mathcal{B}$ при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \nu C_x$ измеримая в широком смысле.
3. $mC = \int_X \nu C_x d\mu(x)$

Доказательство. Меры конечны и $C \in \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{борелевская оболочка (см. определение 1.7)}} (\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

\mathcal{E} – система мн-в, в $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, такая что, если $E \in \mathcal{E}$, то $E_x \in \mathcal{B} \forall x \in X$ и $\phi(x) = \nu E_x$ – измеримая функция.

Шаг 1. $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$

а. \mathcal{E} – измеримая система.

$(X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B}$, $\nu(Y \setminus E_x) = \nu Y - \phi(x)$ – измеримая.

б. $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ из $\mathcal{E} \implies \bigcup E_n \in \mathcal{E}$.

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(E_n)_x}_{\in \mathcal{B}}$$

$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x) = \lim \nu(E_n)_x$ – измеримая функция.

в. $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ из $\mathcal{E} \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$ (можно переходить к дополнениям).

г. (б) + (в) $\implies \mathcal{E}$ – монотонный класс.

д. $\mathcal{E} \supset$ измеримый прямоугольник $E = \mathcal{A} \times \mathcal{B} \implies E_x = \begin{cases} \mathcal{B}, & \text{если } x \in \mathcal{A} \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$,

$$\nu E_x = \begin{cases} 0 \\ \nu \mathcal{B} \end{cases} \quad \text{– измеримая функция.}$$

е. Если E и $\tilde{E} \in \mathcal{E}$, то $E \sqcup \tilde{E} \in \mathcal{E}$.

$$(E \sqcup \tilde{E})_x = \underbrace{E_x}_{\in \mathcal{B}} \sqcup \underbrace{\tilde{E}_x}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

$\nu((E \sqcup \tilde{E})_x) = \nu E_x + \nu \tilde{E}_x$ – сумма измеримых функций.

ж. \mathcal{E} содержит дизъюнктивное объединение всевозможных изм. прямоугольников $\implies \mathcal{E}$ содержит кольцо $\implies \mathcal{E}$ содержит алгебру $\implies \mathcal{E} \supset \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

по т. о монотонном классе

Мы сейчас проверили, что если $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, то первые два пункта теоремы выполнены. Давайте для этой же упрощенной ситуации проверять 3-ий пункт.

Шаг 2. Формула (3) для $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Рассмотрим $\int_X \nu E_x d\mu(x) =: \tilde{m}E$ – хотим сказать, что это мера на $\mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$.

Пусть E_n – дизъюнкты $\implies \tilde{m}(\bigcup E_n) = \int_X \nu(\bigcup (E_n)_x) d\mu(x) = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu(E_n)_x d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}E_n$.

$m = \tilde{m}$ на измеримых прямоугольниках \implies они совпадают. Получили, что хотели.

Шаг 3. $mC = 0$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies$ найдется $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, т.ч. $C \subset \tilde{C}$ и $m\tilde{C} = 0$.

$0 = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) \implies \nu \tilde{C}_x = 0$ при почти всех $x \in X$.

$C_x \subset \tilde{C}_x \implies C_x \in \mathcal{B}$ при почти всех $x \in X$ и $\nu C_x = 0$ при почти всех $x \in X$.

$$mC = 0 = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

Шаг 4. $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies C = \tilde{C} \sqcup e$, $\tilde{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$, $me = 0$.

$$C_x = \underbrace{\tilde{C}_x}_{\text{изм. } \forall x \in X} \sqcup \underbrace{e_x}_{\text{изм. при почти всех } x}, \quad \nu C_x = \nu \tilde{C}_x + \nu e_x = \nu \tilde{C}_x.$$

$$mC = m\tilde{C} + me = m\tilde{C} = \int_X \nu \tilde{C}_x d\mu(x) = \int_X \nu C_x d\mu(x).$$

Шаг 5. $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, $\mu X_n < +\infty$.

$$X \times Y = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} X_n \times Y_k$$

$C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $C_{nk} = C \cap X_n \times Y_k \implies C_{nk}$ удовлетворяет теореме.

$$C_x = \bigsqcup_{n,k=1}^{\infty} (C_{nk})_x$$

$$mC = \sum_{n,k=1}^{\infty} mC_{nk} = \sum_{n,k=1}^{\infty} \int_X \nu (C_{nk})_x d\mu(x) = \int \sum \cdots = \int_X \nu C_x d\mu. \quad \square$$

Замечание. 1. Нужна лишь полнота ν .

2. Измеримость всех C_x не гарантирует измеримость C .

Доказательство. \mathbb{R}^2 , $E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримое, $E \times [0, 1]$ \square

3. Среди C_x могут попадаться неизмеримые.

Доказательство. \mathbb{R}^2 , $E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримые, $\{0\} \times E$ \square

4. Хочется интегрировать не по X , а по проекции, то есть $P := \{x \in X : C_x \neq \emptyset\}$. Но P может быть неизмеримо.

Доказательство. $E \subset \mathbb{R}$ – неизмеримое, решение проблемы, это взять $\tilde{P} := \{x \in X : \nu C_x > 0\}$ – измеримое. \square

Определение 2.18. (X, \mathcal{A}, μ) – пр-во с σ -конечной мерой.

$$f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad f \geq 0, \quad E \in \mathcal{A}, \quad m = \mu \times \underbrace{\lambda_1}_{\text{одномерная мера Лебега}}.$$

График функции над мн-вом E :

$$\Gamma_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

Подграфик функции над мн-вом E :

$$\mathcal{P}_f(E) := \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Лемма. (Лемма 1).

Если f – измеримая, то $m\Gamma_f = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu X < +\infty$. Возьмем $\epsilon > 0$ и $A_n := X\{\epsilon \cdot n \leq f < \epsilon \cdot (n+1)\}$

$$\Gamma_f \subset \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) =: A.$$

$$mA = \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(A_n \times [\epsilon \cdot n, \epsilon \cdot (n+1)]) = \epsilon \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu A_n = \epsilon \cdot \mu X - \text{сколь угодно маленькое.}$$

Пусть μ – σ -конечна. $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $\mu X_n < +\infty$,

$$\Gamma_f = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_f(X_n) - \text{нулевой меры.} \quad \square$$

Лемма. (Лемма 2).

$f \geq 0$ – измерима в широком смысле $\implies \mathcal{P}_f$ – измеримое мн-во.

Доказательство. 1. Пусть f – простая $\implies f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k} \implies \mathcal{P}_f = \bigsqcup_{k=1}^n A_k \times [0, a_k]$ – измеримое.

2. Пусть f – измеримая $\implies 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_n \rightarrow f$ – простые ϕ_i , $\mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f$.

$$\mathcal{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\phi_n} \subset \mathcal{P}_f.$$

Берем $x \in X$.

Если

(а) $f(x) = +\infty$, то $\phi_n(x) \rightarrow +\infty$, над точкой x , $[0, \phi_n(x)]$ их объединение будет луч.

(б) $f(x) < +\infty$, то $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$, $\bigcup [0, \phi_n(x)] \supset [0, f(x)]$

□

Теорема 2.28. (О мере подграфика).

(X, \mathcal{A}, μ) – пространство с σ -конечной мерой, $f \geq 0$, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $m = \mu \times \lambda_1$.

Тогда f – измеримая в широком смысле $\Leftrightarrow \mathcal{P}_f$ – измер. и в этом случае $\int_X f d\mu = m\mathcal{P}_f$.

Доказательство. " \Rightarrow ": Лемма 2.

" \Leftarrow ": принцип Кавальери для \mathcal{P}_f :

$$(\mathcal{P}_f)_x = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{при } f(x) = +\infty \\ [0, f(x)), & \text{при } f(x) < +\infty \end{cases} \quad (5)$$

$$\phi(x) := \lambda_1(\mathcal{P}_f)_x = \underbrace{f(x)}_{\text{измеримая в широком смысле}}$$

$$m\mathcal{P}_f = \int_X \underbrace{\lambda((\mathcal{P}_f)_x)}_{=f(x)} d\mu(x) \text{ – получили, что хотели.}$$

□

Теорема 2.29. Тонелли.

(X, \mathcal{A}, μ) , (Y, \mathcal{B}, ν) – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, измеримая, $m = \mu \times \nu$.

Тогда:

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – измерима, относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$.

2. $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ – измерима относительно μ .

$$3. \int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Доказательство. 1. Пусть $f = \mathbb{1}_C$ (характеристическая функция мн-ва C), тогда $f_x(y) = \mathbb{1}_{C_x}(y)$.

$$\int_Y f_x(y) d\nu(y) = \int_Y \mathbb{1}_{C_x}(y) d\nu(y) = \nu C_x$$

$$\int_{X \times Y} f dm = \int_{X \times Y} \mathbb{1}_C dm = mC = \int_X \nu C_x d\mu(x) = \int_X \phi d\mu.$$

2. Пусть $f \geq 0$ – простая, тогда $f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$

3. Пусть $f \geq 0$ – измеримая, тогда берем последовательность простых функций $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, $\lim f_n = f$.

$(f_n)_x(y)$ – измерим. при почти всех x .

$(f_n)_x \nearrow f_x$ – измерим. при почти всех x .

$$\phi_n(x) = \int_Y f_n(x, y) d\nu(y) \text{ – измерим. и } 0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots$$

$$\lim \phi_n(x) = \int_Y \lim f_n(x, y) d\nu(y) = \int_Y f(x, y) d\nu(y) = \phi(x) - \text{измерим.}$$

$$\int_{X \times Y} f dm \underset{\text{т. Леви}}{\underbrace{=}} \int_{X \times Y} f_n dm = \int_X \phi_n d\mu \rightarrow \int_X \phi d\mu.$$

□

Теорема 2.30. Фубини.

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \geq 0$, суммируема, $m = \mu \times \nu$.

Тогда:

1. $f_x(y) := f(x, y)$ – суммируема, относительно ν в широком смысле при почти всех $x \in X$.
2. $\phi(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ – суммируема относительно μ .
3. $\int_{X \times Y} f dm = \int_X \phi d\mu = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$

Доказательство. $(*) : \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty$ – следует из суммируемости f .

$$(*) \underset{\text{т. Тонелли}}{\underbrace{=}} \int_X \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{:=\alpha(x)} d\mu(x)$$

$$\Rightarrow \alpha(x) = \underbrace{\int_Y |f(x, y)| d\nu(y)}_{\Rightarrow f_x - \text{суммируема при почти всех } x \in X} - \text{конечна при почти всех } x \in X.$$

$$\int_X |\phi| d\mu = \int_X \left| \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right| d\mu(x) \leq \int_X \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| dm < +\infty$$

$$\Rightarrow \phi - \text{суммируема.}$$

$$\int_{X \times Y} f_{\pm} dm = \int_X \left(\int_Y f_{\pm}(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ и вычтем } f = f_+ - f_-.$$

□

Следствие. Если $f \geq 0$ и измеримая или f – суммируемая, то

$$(**): \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Следствие. $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ – пространства с полными σ -конечными мерами.

$f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – суммируема по μ , $g: Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – суммируема по ν .

Тогда $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ суммируема по $m = \mu \times \nu$ и $\int_{X \times Y} h dm = \int_X f d\mu \cdot \int_Y g d\nu$.

$$\text{Доказательство. } \int_{X \times Y} |h| dm \underset{\text{т. Тонелли}}{\underbrace{=}} \int_X \left(\int_Y |f(x)| |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) =$$

$$= \int_X |f(x)| \cdot \int_Y |g(y)| d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y |g| d\nu \cdot \int_X |f| d\mu < +\infty \Rightarrow h - \text{суммируема.}$$

По Фубини пишем все без модулей.

□

Замечание. 1. Суммируемости $f_x(y) = f(x, y)$, $f^y(x) = f(x, y)$, $\phi(x) = \int_X f_x d\nu$, $\psi(y) = \int_X f^y d\mu$ не хватает для суммируемости f по мере m .

2. Без суммируемости f по m равенства **(**)** может не быть.

$$\text{Пример. } \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, g(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Первообразные:

$$1. \int f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$2. \int g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Подставляем:

$$1. \int_{[-1,1]} f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{-2}{y^2+1}$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x, y) dx dy = -2 \int_{[-1,1]} \frac{dy}{y^2+1} = -2 \cdot \arctan(y) \Big|_{-1}^1 = -\pi$$

$$\int_{[-1,1]} \int_{[-1,1]} f(x, y) dy dx = \pi - \text{не совпали из-за отсутствия суммируемости.}$$

$$2. \int_{[-1,1]} g(x, y) dx = -\frac{y}{x^2+y^2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0$$

Теорема 2.31. (X, \mathcal{A}, μ) – пространство с σ -конечной мерой, $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – измерим.

$$\int_X |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t\} dt \text{ (в скобках записана функция распределения).}$$

Доказательство. $m = \mu \times \lambda_1$.

$$\int_X |f| d\mu = m\mathcal{P}_{|f|} = \int_{[0,+\infty]} \left(\int_X \underbrace{\mathbb{1}_{\mathcal{P}_{|f|}}(x, t)}_{=1 \Leftrightarrow |f(x)| \geq t} d\mu(x) \right) d\lambda_1(t) = \int_{[0,+\infty]} \mu X\{|f| \geq t\} d\lambda_1(t).$$

□

Следствие. 1. В условии теоремы $\int_X |f| d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| > t\} dt$

Доказательство. $g(t) := \mu X\{|f| \geq t\}$ – монотонно возраст., не более чем счетное число точек разрыва.

$$\mu X\{|f| > t\} = \lim \mu X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \frac{1}{n}) = \lim_{s \rightarrow t+} g(s) = g(t) \text{ при почти всех } t.$$

$$X\{|f| > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X\{|f| \geq t + \frac{1}{n}\}$$

□

$$2. \int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \mu X\{|f| \geq t\} dt \text{ при } p > 0.$$

$$\text{Доказательство. } \int_X |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f|^p \geq t\} dt = \int_0^{+\infty} \mu X\{|f| \geq t^{\frac{1}{p}}\} dt = \int_0^{+\infty} g(t^{\frac{1}{p}}) dt = \int_0^{+\infty} p s^{p-1} g(s) ds$$

$$\text{Где } t = s^p, s = t^{\frac{1}{p}}, dt = p s^{p-1} ds.$$

□

2.7. Замена переменной

Определение 2.19. Ω и $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые.

$$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}.$$

Φ – диффеоморфизм, если

1. Φ – биекция.

2. Φ – непр. дифф.

3. Φ^{-1} – непр. дифф.

Замечание. $Id = \Phi^{-1} \circ \Phi \implies x = (\Phi(x)^{-1})' \cdot (\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) \implies 1 = \det(\Phi^{-1})'(\Phi(x)) \cdot \det(\Phi'(x)).$

Замечание. Обозначение.

$$J_{\Phi} := \det \Phi'$$

якобиан = определитель матрицы Якоби.

Теорема 2.32. (о замене переменной).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ диффеоморфизм. $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ откр., $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ измеримая. Тогда

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) |J_{\Phi}(x)| d\lambda_m(x).$$

Такая же формула есть и для суммируемых функций f .

Частные случаи:

1. Сдвиг: $\Phi(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}^m$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x + a) d\lambda_m(x)$$

2. $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ обратимое линейное отображение.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = \int_{\mathbb{R}^m} f(Lx) |\det L| d\lambda_m(x)$$

3. Гомотетия: $Lx = c \cdot x$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda_m = c^m \cdot \int_{\mathbb{R}^m} f(c \cdot x) d\lambda_m(x).$$

Лемма. (о расщеплении).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые, $a \in \Omega$, $1 \leq k \leq m - 1$.

Тогда существует U_a и $\Phi_2 : U_a \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi_1 : \Phi_2(U_a) \rightarrow \mathbb{R}^m$, т.ч. $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$.

Φ_1 – оставляет на месте k координат, а Φ_2 – оставляет на месте $m - k$ координат.

Доказательство. $x, u \in \mathbb{R}^m$, $y, v \in \mathbb{R}^{m-k}$, $\Phi(x, y) = \left(\underbrace{\phi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, \underbrace{\psi(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}} \right)$.

$$\Phi_1(x, y) = (x, \underbrace{f(x, y)}_{\in \mathbb{R}^{m-k}})$$

$$\Phi_2(x, y) = (\underbrace{g(x, y)}_{\in \mathbb{R}^k}, y)$$

$$\Phi_1(\Phi_2(x, y)) = (*)$$

$$(*) = \Phi_1(g(x, y), y) = (g(x, y), f(g(x, y), y))$$

$$(*) = (\phi(x, y), \psi(x, y)) \implies g(x, y) := \phi(x, y)$$

$$\implies f(u, v) = \psi(\Phi_2^{-1}(u, v))$$

$$f(\phi_2(x, y)) = f(\phi(x, y), y) = \psi(x, y)$$

Нужна локальная обратимость Φ_2 , а для этого нужна обратимость $\Phi'_2(a)$, то есть $\det(\Phi'_2(a)) \neq 0$.

$$\Phi_2(x, y) = (\phi(x, y), y), \quad \Phi'_2(x, y) = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \det(\Phi'_2) = \det(\Phi'_x).$$

$$\Phi(x, y) = (\phi(x, y), \psi(x, y))$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \phi'_x & \phi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{pmatrix}$$

блок $k \times k$, ненулевой минор найдется. □

Следствие. $\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $a \in \Omega$, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые.

Тогда существует U_a , т.ч. $\Phi|_{U_a} = \Phi_1 \circ \Phi_2 \circ \dots \circ \Phi_m$, где Φ_j – диффеоморфизм, оставляющие на месте все координаты, кроме одной (но их перенумерующие).

Доказательство. Индукция + предыдущая лемма. □

Теорема 2.33. Линделефа.

$A \subset \mathbb{R}^m$, A – покрыто открытыми мн-вами.

Тогда из него можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

Доказательство. $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} \left(\underbrace{G_\alpha}_{\text{открытое}} \right)$.

Берем $a \in A$, рисуем картинку, которую кто-нибудь *обязательно* добавит.

Пусть U_a – шарик с рациональным центром и рациональным радиусом. $a \in U_a$ и U_a содержатся в каком-то элементе покрытия. Очевидно, что $a \in U_a \subset G_{\alpha_i}$, тогда выкинем все лишние G_α , а остальных останется не более чем счетное кол-во (так как U_a с рациональным центром и радиусом, а таких счетное кол-во), при этом они покрывают A . \square

Теорема 2.34. (об изменении меры множества при диффеоморфизме).

$\Phi : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ – диффеоморфизм, $\Omega, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ – открытые, $A \subset \Omega$ – измеримое.

Тогда $\lambda_m \Phi(A) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m$.

Замечание. Если теорема верна для конкретного Φ и произвольного A , то для того же Φ верна формула замена переменной.

Формула замены переменной:

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\Omega} f \circ \Phi |J_\Phi| d\lambda_m.$$

Доказательство. Замечания.

$$f = \mathbb{1}_{\Phi(A)}, \quad A \subset \Omega.$$

$$\int_{\tilde{\Omega}} f d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{1}_{\Phi(A)} d\lambda_m = \lambda_m(\Phi(A)) = \int_A |J_\Phi| d\lambda_m = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A |J_\Phi| d\lambda_m.$$

$$\mathbb{1}_{\Phi(A)}(\Phi(x)) = \mathbb{1}_A(x).$$

Нужно проверить для простых, а дальше для измеримых, в общем, все раскручивается (так говорил Храбров...). \square

Доказательство. Теоремы.

Шаг 1. Пусть $\Omega \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Если т. верна для каждого G_α , то она верна и для Ω .

Выбираем нбчс подпокрытие $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

$$\lambda_m \Phi(A \cap G_k) = \int_{A \cap G_k} |J_\Phi| d\lambda_m \text{ и просуммируем } A \cap \left(G_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} G_j \right).$$

Шаг 2. Если т. верна для диффеоморфизмов Φ и Ψ , то она верна и для $\Psi \circ \Phi$.

$$\lambda_m \Psi(\Phi(A)) = \int_{\Phi(A)} |J_\Psi| d\lambda_m = \int_{\tilde{\Omega}} \underbrace{\mathbb{1}_{\Phi(A)} \cdot |J_\Psi|}_{=: f} d\lambda_m =$$

$$= \int_{\Omega} \underbrace{\mathbb{1}_{\Phi(A)} \circ \Phi}_{=: \mathbb{1}_A} \cdot |J_\Psi \circ \Phi| \cdot |J_\Phi| d\lambda_m =$$

$$= \int_A |J_\Psi(\Phi(x))| |J_\Phi(x)| d\lambda_m(x).$$

$$\det(\Psi'(\Phi(x))) \cdot \det(\Phi'(x)) = \det(\Psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x)) = \det(\Psi \circ \Phi)' = J_{\Psi \circ \Phi}.$$

Шаг 3. $m = 1$. $\Phi(x)$ – строго монот. и непр. дифф.

$$\nu A := \lambda_1(\Phi(A)) \text{ – мера.}$$

$\mu A := \int_A |\phi'| d\lambda_1$ – мера.

Хотим проверить, что $\nu = \mu$, тогда проверим, что они совпадают на ячейках $(a, b]$ (а по единственности продолжения получим, что нужно).

$$\lambda(\phi(a, b]) = \int_{(a, b]} |\phi'| d\lambda.$$

Эти значения стремятся к тем, что выше, соответственно. $\lambda(\phi[a + \frac{1}{n}, b]) = \int_{[a + \frac{1}{n}, b]} |\phi'| d\lambda$

Эти равны тем, что выше, соответственно. $\phi(b) - \phi(a + \frac{1}{n}) = \int_{a + \frac{1}{n}}^b \phi' d\lambda$, если ϕ – возрастает, $\phi[a + \frac{1}{n}, b] = [\phi(a + \frac{1}{n}), \phi(b)]$

Шаг 4. Φ оставляет на месте $m - 1$ коорд. $x = (\underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^{m-1}}, \underbrace{t}_{\in \mathbb{R}})$.

$$\Phi(y, t) = (y, \phi(y, t)).$$

$$\lambda_m \Phi(A) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} (\lambda_1 \Phi(A))_y d\lambda_{m-1}(y) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \lambda_1(\phi(y, A_y)) d\lambda_{m-1}(y) \stackrel{(*)}{=}$$

$$\underbrace{t \in (\Phi(A))_y}_{t' \in A_y} \Leftrightarrow (y, t) \in \Phi(A) \Leftrightarrow \exists (y', t') \in A, \text{ т.ч. } (y, t) = \Phi(y', t') = (y', \phi(y', t')) \Leftrightarrow \exists t' : \underbrace{(y, t') \in A}_{t = \phi(y, t')} \text{ и } \underbrace{(y, t) = (y, \phi(y, t'))}_{t = \phi(y, t')} \Leftrightarrow t \in \phi(y, A_y).$$

$$\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left(\int_{A_y} |\phi'(y, t)| d\lambda_1(t) d\lambda_{m-1}(y) \right) = \int_A |J_\Phi| \lambda_m.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \phi'_y & \phi'_t \end{pmatrix}$$

Дальше были какие-то умные слова. Я не успел записать...

□

Пример. Полярная замена. \mathbb{R}^2 .

$$(r, \phi) \rightarrow (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$$

$$r \in (0, +\infty)$$

$$\phi \in (0, 2\pi)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda_2 = \int_{[0, 2\pi] \times [0, +\infty)} (f(r \cos(\phi), r \sin(\phi)) \cdot r) dr d\phi.$$

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

$$\det = r$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx, \quad f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Полярная замена:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\phi dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi \cdot (-e^{-t})|_0^{+\infty} = \pi.$$

$$t = r^2, \quad df = 2r dr$$

3. Интегралы с параметром и криволинейные интегралы

3.1. Собственные интегралы с параметрами

Утверждение 3.1. (X, \mathcal{A}, μ) – пр-во с мерой, T – метрическое пр-во, $f : X \times T \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}, \forall t \in T, E_t \in \mathcal{A}, f(\cdot, t)$ – измеримая.

$$F(t) := \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x).$$

1. t_0 – предельная точка.

$$\forall x \underbrace{f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0}} \dots \underbrace{\implies}_{?} F(t) \underbrace{\xrightarrow{t \rightarrow t_0}}$$

2. $f(x, t)$ непрер. в точке $t_0, \forall x \implies F$ непрер. в t_0 .

3. $f(x, t)$ дифф. по $t, \forall x \implies F$ дифф., какая формула для производной?

4. Если ν – мера на $T, \int_T F(t) d\nu(t) = \int_T \int_{E_t} f(x, t) d\mu(x) d\nu(t) = \int_T \int_X \mathbf{1}_{E_t}(x) \cdot f(x, t) d\mu(x) d\nu(t)$

Теорема 3.2. t_0 – предельная точка $T, f(\cdot, t)$ – суммируема $\forall t \in T, g(x) := \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t)$.

Локальное условие Лебега:

Пусть найдется окр-ть U_{t_0} и суммир. ф-я $\Phi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}},$ т.ч. $|f(x, t)| \leq \Phi(x) \forall t \in U_{t_0}.$

Тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\int_X f(x, t) d\mu(x) \right) = \int_X g(x) d\mu(x).$

Доказательство. Проверяем по Гейне. Берем $t_n \rightarrow t_0, f_n(x) := f(x, t_n), \Phi(x) \geq |f(x, t_n)| = |f_n(x)|$ при больших n .

$$\underbrace{\implies}_{\text{т. Лебега}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)}_{=g(x)} d\mu(x) \quad \square$$

Определение 3.1. $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}, g : X \rightarrow \mathbb{R}, t_0$ – предельная точка $T, f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} g(x),$ если

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall t \in T : \rho_T(t, t_0) < \delta, \forall x \in X : |f(x, t) - g(x)| < \epsilon.$$

Замечание. $f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} g(x) \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x, t) - g(x)| \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} 0$

Следствие. Если $\mu X < +\infty, f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} g(x),$ то $\int_X f(x, t) d\mu(x) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \int_X g d\mu$ и g – суммируемая ф-я.

Доказательство. При t близких к $t_0: |f(x, t) - g(x)| \leq 1 \implies$ берем $t_1,$ для которого верно $|f(x, t_1) - g(x)| \leq 1 \implies |g(x)| \leq 1 + |f(x, t_1)|$ – суммируема \implies при t близких к $t_0 : |f(x, t)| \leq 1 + |g(x)|$ – суммир. \square

Замечание. Условие $\mu X < +\infty$ существенно.

$$X = [0, +\infty), \mu = \lambda_1, f_n(x) = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, n]}(x) \xrightarrow{} 0,$$

$$\int_{[0, +\infty)} f_n d\lambda_1 = 1.$$

Следствие. $f(x, t)$ непрер. в точке $t_0, \forall x \in X$ и существует суммир. $\Phi(x),$ т.ч. $|f(x, t)| \leq \Phi(x)$ при t близких к $t_0, \forall x \in X.$

Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x)$ непрер. в точке $t_0.$

Доказательство. $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ и подставляем в теорему. \square

Лемма. Декартово произведение компактов – компакт.

$(X, \rho), (Y, d)$ – метрические про-ва. $A \subset X, B \subset Y$ – компакты.

Тогда $A \times B$ – компакт в $(X \times Y, r), r((x, y), (x', y')) = \rho(x, x') + d(y, y')$

Доказательство. Проверяем секвенциальную компактность.

$x_n \in A, y_n \in B, (x_n, y_n)$

хотим выбрать сх-ся подпол. Выбираем x_{n_k} , т.ч. она сходится, а затем из y_{n_k} подпол $y_{n_{k_j}}$, которая сх-ся.

Тогда $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ сх-ся покоординатно \implies сх-ся по метрике r . \square

Теорема 3.3. $\mu X < +\infty, X$ и T – компакты, $f \in C(X \times T)$. Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(T)$.

Доказательство. f – непр-на на компакте \implies ограничена $\implies |f(x, t)| \leq M$ – суммир. мажоранта. \square

Следствие. Если $\mu X < +\infty, X$ – компакт, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ открытое, $f \in C(X \times \Omega)$.

Тогда $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x) \in C(\Omega)$.

Доказательство. Берем $a \in \Omega$. Хотим проверить непрер. в точке a .

Возьмем $\overline{B}_r(a) \subset \Omega$ – компакт $\implies f \in C(X \times \overline{B}_r(a))$

$\implies F \in C(\overline{B}_r(a)) \implies F$ непрер. в точке a . \square

Теорема 3.4. $T \subset \mathbb{R}$ промежуток, $f : X \times T \rightarrow \mathbb{R}, f'_t(x, t)$ существ. $\forall x \in X, \forall t \in T$ и $f'_t(x, t)$ удовлетворяет **локальным условиям Лебега** в точке t_0 .

Тогда F – дифф. в точке t_0 и $F'(t_0) = \int_X f'_t(x, t_0) d\mu(x)$.

Доказательство. $\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \int_X \underbrace{\frac{f(x, t_0+h) - f(x, t_0)}{h}}_{=:g(x, h)} d\mu(x)$.

Нужно локальное условие Лебега для $g(x, h)$.

$f(x, t_0+h) - f(x, t_0) = h \cdot f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$

$g(x, h) = f'_t(x, t_0 + \theta_h \cdot h)$

Знаем, что $\exists U_{t_0}$, т.ч. $|f'_t(x, t)| \leq \Phi(x)$ – суммир. $\forall x, \forall t \in U_{t_0}$.

Рассмотрим $\|h\| < \epsilon$, т.ч. $t_0 + h \in U_{t_0}$

$\implies t_0 + \theta_h \cdot h \in U_{t_0} \implies |f'_t(x, t_0 + \theta_h h)| = |g(x, h)| \leq \Phi(x) \implies$ можно переходить к пределу под знаком интеграла, а предел $\lim_{h \rightarrow 0} g(x, h) = f'_t(x, t_0)$. \square

Следствие. $T \subset \mathbb{R}$ – отрезок, X – компакт, $\mu X < +\infty, f, f'_t \in C(X \times T)$.

Тогда $F \in C^1(T)$ и $F'(t) = \int_X f'_t(x, t) d\mu(x)$.

Доказательство. f'_t – непр. на компакте \implies ограничена $\implies |f'_t(x, t)| \leq M$ – сумм. мажоранта. \square

Теорема 3.5. Формула Лейбница.

$f : \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_t \rightarrow \mathbb{R}$, $f, f'_t \in C([a, b] \times [c, d])$, $\phi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ непр. дифф.

$$F(t) := \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f(x, t) dx.$$

Тогда F – дифф. и $F'(t) = \int_{\phi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x, t) dx + f(\psi(t), t) \cdot \psi'(t) - f(\phi(t), t) \cdot \phi'(t)$.

Доказательство. $\Phi(\alpha, \beta, t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx$.

$$\frac{d\Phi}{d\beta} = f(\beta, t) - \text{непр. по условию}$$

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = -f(\alpha, t) - \text{непр.}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} f'_t(x, t) dx - \text{непр.}$$

Так как все частные производные непр., то Φ – дифф.

$$F(t) = \Phi(\phi(t), \psi(t), t) \implies F'(t) = \frac{d\Phi}{d\alpha} \phi'(t) + \frac{d\Phi}{d\beta} \psi'(t) + \frac{d\Phi}{dt}.$$

□

Пример. $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \cos(tx) dx$

Так как есть локальное условие Лебега (на самом деле $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx < +\infty$):

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(tx) \cdot x dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} \sin(tx) \cdot d(e^{-x^2}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} \sin(tx) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} t \cos tx e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

$$F'(t) = -\frac{1}{2} t F(t).$$

$$\underbrace{\frac{F'}{F}}_{= (\ln F)'} = -\frac{t}{2} \implies \ln F = -\frac{t^2}{4} + C_0 \implies F(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

$$F(t) e^{\frac{t^2}{4}} = C.$$

Более строго:

$$\left(F(t) e^{\frac{t^2}{4}} \right)' = F' e^{\frac{t^2}{4}} + F \cdot \frac{t}{2} e^{\frac{t^2}{4}} = e^{\frac{t^2}{4}} \cdot \underbrace{\left(F' + \frac{t}{2} \cdot F \right)}_{=0} = 0.$$

Хотим узнать константу:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

3.2. Несобственные интегралы с параметрами

$$F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx : \forall t \in T \text{ интеграл сх-ся.}$$

Определение 3.2. $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ – равномерно сх-ся, если $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : \left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \epsilon$

Замечание. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx$.

$$\int_a^{+\infty} \dots - \text{равном сх-ся} \Leftrightarrow F_b \underset{b \rightarrow +\infty}{\rightrightarrows} F \text{ равном. по } t \in T.$$

Доказательство. $\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F(t)|}_{= - \int_b^{+\infty} f(x, t) dx} < \epsilon$

□

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx, t > 0$

$$\int_b^{+\infty} e^{-tx} dx = -\frac{e^{-tx}}{t} \Big|_{x=b}^{x=+\infty} = \frac{e^{-bt}}{t}.$$

1. $t \geq t_0 > 0$:

$$\frac{e^{-bt}}{t} \leq \frac{e^{-bt_0}}{t_0} < \epsilon$$

2. $t > 0$:

$$\frac{e^{-bt}}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0+]{} +\infty \implies \text{нет равномерной сх-ти.}$$

Теорема 3.6. Критерий Коши.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ равн. сх-ся} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

Доказательство. $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равн. сх-ся \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow F_b \rightrightarrows F \text{ (где } F_b(t) = \int_a^b f(x, t) dx, F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T : \underbrace{|F_b(t) - F_c(t)|}_{\int_b^c f(x, t) dx} < \epsilon. \quad \square$$

Следствие. $f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная.

$$F(t) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dx \text{ сх-ся } \forall t \in (c, d) \text{ и расх-ся при } t = c \text{ или } t = d.$$

Тогда сходимость неравномерная.

Доказательство. Пусть $\int_a^{+\infty}$ сх-ся равномерно \implies :

по Критерию Коши и тому, что f непр. на $[b, b'] \times [c, d]$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \forall t \in (c, d) : \underbrace{\left| \int_b^{b'} f(x, t) dx \right|}_{\rightarrow \int_b^{b'} f(x, c) dx, \text{ при } t \rightarrow c} < \epsilon \implies$$

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists B > a \forall b, b' > B \left| \int_b^{b'} f(x, c) dx \right| \leq \epsilon \quad \underbrace{\implies}_{\text{критерий Коши}} \int_a^{+\infty} f(x, c) dx \text{ сх-ся} \implies \text{противо-}$$

речие. □

Пример. $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx, t > 0$ сх-ся неравномерно, так как при $t = 0$ расходится.

Теорема 3.7. Признак Вейерштрасса.

$$f, g : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R} \text{ и } |f(x, t)| \leq g(x, t) : \forall x \geq a, \forall t \in T.$$

Если $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$ равном. сх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равн. сх-ся.

Доказательство. Пишем критерий Коши для $\int_a^{+\infty} g(x, t) dx$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B : \underbrace{\int_b^c g(x, t) dx}_{< \epsilon} \geq \int_b^c |f(x, t)| dx \geq \left| \int_b^c f(x, t) dx \right| \quad \square$$

Следствие. Если $|f(x, t)| \leq g(x) \forall x \geq a, \forall t \in T$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сх-ся, то $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ сх-ся равномерно.

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x^2+1} dx$ равн. сх-ся при $t \in \mathbb{R}$.

$$\left| \frac{\cos(xt)}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1} \text{ и } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} < +\infty.$$

Теорема 3.8. Признак Дирихле.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx.$$

Пусть

1. $\exists M : \forall b > a, \forall t \in T : \left| \int_a^b f(x, t)dx \right| \leq M$
2. g монотонна по $x : \forall t \in T$.
3. $g \underset{x \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$ равномерно сх-ся.

Доказательство. Для дифф. ф-й g :

$$F(y, t) = \int_a^y f(x, t)dx.$$

$$(1) \Rightarrow |F(y, t)| \leq M : \forall y, \forall t.$$

$$\int_a^y f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F(x, t)g(x, t)|_{x=a}^{x=y}}_{=F(y, t)g(y, t)} - \int_a^y F(x, t)g'_x(x, t)dx$$

$$|F(y, t)g(y, t)| \leq M|g(y, t)| \underset{y \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0$$

$$\int_a^{+\infty} F(x, t)g'_x(x, t)dx - \text{равном. сх-ся.}$$

$$|F(x, t)g'_x(x, t)| \leq M|g'_x(x, t)|.$$

Надо доказать, что $\int_a^{+\infty} |g'_x(x, t)|dx$ равн. сх-ся.

$$\int_a^y |g'_x(x, t)|dx = \left| \int_a^y g'_x(x, t)dx \right| = |g(x, t)|_{x=a}^{x=y} = \underbrace{|g(y, t) - g(a, t)|}_{\Rightarrow 0 \text{ по усл.}} \Rightarrow |g(a, t)|.$$

□

Теорема 3.9. Признак Абеля.

$$\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx. \text{ Пусть}$$

1. $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$ равн. сх-ся.
2. g монотонна по $x : \forall t \in T$.
3. $|g(x, t)| \leq M, \forall x \geq a, \forall t \in T$

Тогда $\int_a^{+\infty} f(x, t)g(x, t)dx$ равном. сх-ся.

Доказательство. Для дифф. ф-й g :

$$F_b(y, t) = \int_b^y f(x, t)dx$$

$$\int_b^c f(x, t)g(x, t)dx = \underbrace{F_b(x, t)g(x, t)|_{x=b}^{x=c}}_{=F_b(c, t)g(c, t)} - \int_b^c F_b(x, t)g'_x(x, t)dx$$

Применим крит. Коши для $\int_a^{+\infty} f(x, t)dx$:

$$\exists B : \forall y, b > B \forall t \in T : |F_b(y, t)| < \epsilon, \text{ смотрим на } b > B \Rightarrow |F_b(x, t)| < \epsilon.$$

$$|F_b(c, t)g(c, t)| < \epsilon \cdot M.$$

$$\begin{aligned} \left| \int_b^c F_b(x, t) g'_x(x, t) dx \right| &\leq \int_b^c \underbrace{|F_b(x, t)|}_{< \epsilon} |g'_x(x, t)| dx < \epsilon \cdot \int_b^c g'_x(x, t) dx = \epsilon \left| \int_b^c g'_x(x, t) dx \right| = \\ &= \epsilon |g(x, t)|_{x=b}^{x=c} \leq \epsilon \cdot 2M. \end{aligned}$$

Получается, что оценили $\int_b^c f(x, t) g(x, t) dx < 3\epsilon M$, то есть проверили критерий Коши для исходного интеграла. \square

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^t} dx$, $t > 0$.

1. $t \geq t_0 > 0$. Дирихле: $f(x, t) = \sin(x)$, $g(x, t) = \frac{1}{x^t}$ — вторая монотонно убывает.

$$\left| \int_1^b \sin(x) dx \right| \leq 2.$$

$$g(x, t) \Rightarrow 0: |g(x, t)| = \frac{1}{x^t} \leq \frac{1}{x^{t_0}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Есть равн. сх-ть.

2. $t > 0$. Нет равн. сх-ти, так как расх-ся при $t = 0$.

Теорема 3.10. $f : [a, +\infty) \times T \rightarrow \mathbb{R}$, t_0 — предельная точка T .

Если

- $\int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равномерно сх-ся (по $t \in T$).
- $f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} \phi(x)$ равномер. по x на любом конечном отрезке.

Тогда $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^{+\infty} f(x, t) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx$ и второй интеграл сх-ся.

Доказательство. (1) $\xRightarrow[\text{кр. Коши для } f]{} \forall \epsilon > 0 \exists B \forall b, c > B \forall t \in T: \underbrace{\left| \int_b^c f(x, t) dx \right|}_{\rightarrow \left| \int_b^c \phi(x) dx \right| \text{ при } t \rightarrow t_0}} < \epsilon.$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, t) dx - \int_a^{+\infty} \phi(x) dx \right| \leq \underbrace{\left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right|}_{< \epsilon} + \underbrace{\left| \int_b^{+\infty} \phi(x) dx \right|}_{< \epsilon} + \left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right|.$$

$$(1) \Rightarrow \exists B_1 \forall b > B_1 \text{ и } \forall t \in T: \left| \int_b^{+\infty} f(x, t) dx \right| < \epsilon.$$

$$\int_a^{+\infty} \phi(x) dx - \text{сх-ся} \Rightarrow \exists B_2 \forall b > B_2: \left| \int_b^{+\infty} \phi(x) dx \right| < \epsilon.$$

Фиксируем $b \geq \max\{B_1, B_2\}$.

$$\left| \int_a^b (f(x, t) - \phi(x)) dx \right| \leq (b - a) \underbrace{\sup_{x \in [a, b]} \{|f(x, t) - \phi(x)|\}}_{\rightarrow 0} < \epsilon \text{ при } t \text{ близких к } t_0. \quad \square$$

Замечание. Равн. сх-ть интеграла существенна:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{при } 0 \leq x \leq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \int_0^t \frac{1}{t} dx = 1 \not\rightarrow 0.$$

Теорема 3.11. $f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$, $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ равном. сх-ся.

Тогда $F \in C[c, d]$.

Доказательство. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} F(t)$.

Достаточно понять, что $F_b \in C[c, d]$, а это знаем. □

Замечание. Без равном. сх-ти неверно.

$$f(x, t) = te^{-t^2x}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$F(t) := \int_0^{+\infty} te^{-t^2x} dx - \text{сх-ся.}$$

$$F(0) = 0$$

$$F(t) = \frac{1}{t} \text{ при } t \neq 0 \text{ нег непрер.}$$

Теорема 3.12. (Интегральный аналог теоремы Абеля для степенных рядов).

Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится и $f \in C[a, +\infty)$. Тогда $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x) e^{-tx} dx \in C[0, +\infty)$

Доказательство. Признак Абеля.

$g(x, t) = e^{-tx}$: монотонно убывает при фиксированном t .

$|g(x, t)| \leq 1$: равномерно ограничена. □

Пример. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ - сх-ся $\implies F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$ непрер. при $t \geq 0$.

Теорема 3.13. $f'_t, f \in C([a, +\infty) \times [c, d])$

1. $\Phi(t) := \int_a^{+\infty} f'_t(x, t) dx$ равномерно сх-ся.

2. $F(t) := \int_a^{+\infty} f(x, t) dx$ сх-ся при $t = t_0$.

Тогда F равномерно сх-ся, $F \in C^1[c, d]$ и $F' = \Phi$.

Доказательство. $F_b(t) := \int_a^b f(x, t) dx \implies F'_b(t) = \int_a^b f'_t(x, t) dx \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} \Phi(t)$.

$$F_b(t) = \left(\underbrace{\int_{t_0}^t F'_b(u) du}_{\implies \int_{t_0}^t \Phi(u) du} \right) + \underbrace{F_b(t_0)}_{\rightarrow F(t_0)} \implies \underbrace{F_b(t)}_{\rightarrow F(t)} \implies \int_{t_0}^t \Phi(u) du + F(t_0)$$

$$\implies \text{равномерная сх-ть и } F(t) = F(t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t \Phi(u) du}_{\text{непр. ф-я}} \implies F \in C^1[c, d] \text{ и } F'(t) = \Phi(t). \quad \square$$

Пример. $F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx$. Знаем, что $F \in C[0, +\infty)$

$$\Phi(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \cdot e^{-tx} \cdot (-x) dx = \underbrace{- \int_0^{+\infty} \sin(x) \cdot e^{-tx} dx}_{= -\frac{1}{1+t^2} \text{ два раза инт. по частям}}$$

$$\implies F'(t) = \Phi(t) \implies F(t) = C - \arctan(t).$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx \stackrel{\text{по предыдущим теоремам...}}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} dx = 0.$$

$$\left| e^{-tx} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq e^{-x} \cdot \frac{|\sin(x)|}{x} \leq e^{-x} - \text{суммируемая мажоранта.}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C - \arctan(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0 \implies C = \frac{\pi}{2} \implies C[0, +\infty) \ni F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) \in C[0, +\infty) \text{ при } t > 0$$

$$\implies F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) \text{ при } t \geq 0 \implies F(0) = \frac{\pi}{2}, \text{ то есть } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

3.3. В- и Г-функции Эйлера

Определение 3.3. $\Gamma(p) := \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$, $p > 0$ – гамма-функция.

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0 \text{ – бета-функция.}$$

Свойства. Г-фнкции.

1. Интеграл сходится в нуле эквивалентно тому, что $\frac{1}{x^{1-p}}$ сх-ся в $+\infty$

Доказательство. $x^{p-1} \leq e^{\frac{x}{2}}$ при больших x , $x^{p-1} \cdot e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}} \implies$ сх-ся. □

2. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Доказательство. $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x^p d(e^{-x}) =$
 $= -x^p e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$. □

3. $\Gamma(n+1) = n!$

Доказательство. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

Далее индукция. □

4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Доказательство. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2y dy = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$, где $y^2 = x$, $dx = 2y dy$. □

5. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$.

Доказательство. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) = \dots = (n - \frac{1}{2}) \cdot (n - \frac{3}{2}) \cdot \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$ – получилось ровно то, что хотели. □

6. Γ бесконечно дифф. ф-я и $\Gamma^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln(x))^n e^{-x} dx$

Доказательство. Надо обосновать дифф. под знаком интеграла. Для этого надо потребовать равномерную сх-ть полученного интеграла.

$$0 < a \leq p \leq b < +\infty$$

- (a) $0 \leq x \leq 1$:

$$x^{a-1} |\ln(x)|^n e^{-x}$$

- (b) $1 \leq x$:

$$x^{b-1} |\ln(x)|^n e^{-x} \leq x^{n+b} e^{-x}$$

□

7. Γ – строго выпуклая.

Доказательство. $\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln(x))^2 e^{-x} dx > 0$ □

Свойства. B -функции.

1. Интеграл сх-ся

(а) В нуле $\Leftrightarrow \frac{1}{x^{1-p}} - \text{сх-ся}$.

(б) В единице $\Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^{1-q}} - \text{сх-ся}$.

2. $B(p, q) = B(q, p)$.

Доказательство. $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = -\int_1^0 (1-y)^{p-1} y^{q-1} dy = B(q, p)$, где $y = 1-x$, $dy = -dx$. □

3. $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$.

Доказательство. $B(p, q) = \int_0^1 y_{p-1}(1-y)^{q-1} dy = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^{q-1} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} dx$, где $y = \frac{x}{1+x}$, $y = 1 - \frac{1}{1+x}$, $dy = \frac{dx}{(1+x)^2}$. □

Теорема 3.14. $B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

Доказательство. $\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \cdot \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dx dy =$
 $= \int_0^{+\infty} \int_0^u x^{p-1} (u-x)^{q-1} e^{-u} dx du \quad \underbrace{\quad}_{\text{замена } x=uv, \quad dx=u \cdot dv} \quad \int_0^{+\infty} \int_0^1 (uv)^{p-1} (u-uv)^{q-1} e^{-u} u dv du =$
 $= \int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} \cdot \underbrace{\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv}_{=B(p,q)} du = B(p, q) \Gamma(p+q)$. □

Следствие. (формула дополнения)

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad p \in (0, 1).$$

Доказательство. $\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \Gamma(1) B(p, 1-p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \quad \underbrace{\quad}_{\text{просто верим в это}} \quad \frac{\pi}{\sin(\pi p)}$. □

Следствие. (формула удвоения)

$$\Gamma(p) \Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p)$$

Доказательство. $\frac{\Gamma(p) \Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx =$
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx \quad \underbrace{\quad}_{x=\frac{1}{2}-t} \quad 2 \cdot \int_{\frac{1}{2}}^0 \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} d(-t) =$
 $= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4} - t^2\right)^{p-1} dt \quad \underbrace{\quad}_{t=\frac{\sqrt{u}}{2}} \quad 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{u}{4}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du =$
 $= \frac{1}{2^{2p-1}} \cdot \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{B(p, \frac{1}{2})}{2^{2p-1}} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \cdot \frac{1}{2^{2p-1}} =$
 $= \frac{\Gamma(p) \sqrt{\pi}}{\Gamma(p+\frac{1}{2}) \cdot 2^{2p-1}}$ □

Теорема 3.15. $\Gamma(t+a) \sim t^a \Gamma(t)$ при $t \rightarrow +\infty$

Доказательство. $\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(t+a)}$ при больших t

$$\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(a)}{\Gamma(t+1+a)} = B(t+1, a) = \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx$$

$$t^a \int_0^1 (1-x)^t x^{a-1} dx \underbrace{=}_{y=xt} t^a \int_0^t \left(\frac{y}{t}\right)^{a-1} \underbrace{\left(1 - \frac{y}{t}\right)^t}_{\rightarrow e^{-y}} \frac{1}{t} dy \rightarrow \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)$$

На самом деле интегрируем $\mathbb{1}_{[0,t]} y^{a-1} (1 - \frac{y}{t})^t \leq y^{a-1} e^{-y}$ — это суммируемая мажоранта, поэтому можем перейти к пределу по т. Лебега. \square

Следствие. При $a = \frac{1}{2}$ это формула Валлиса.

Доказательство. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) \sim n^{\frac{1}{2}} \Gamma(n)$ \square

Теорема 3.16. формула Эйлера-Гаусса

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}$$

Доказательство. $\Gamma(n+p) = (p+n-1) \cdot (p+n-2) \cdot \dots \cdot (p+1) \cdot p \cdot \Gamma(p)$

$$n^p \cdot \frac{n!}{p(p+1)\dots(p+n)} = \frac{n^p}{p+n} \cdot \frac{n! \cdot \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \underbrace{\frac{n}{p+n}}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left(n^p \cdot \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}\right)}_{\rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow +\infty} \cdot \Gamma(p) \quad \square$$

Пример. $1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 16 \cdot \dots \cdot (5n+1) = 5^n \cdot \frac{1}{5} \cdot (\frac{1}{5} + 1) \cdot (\frac{1}{5} + 2) \cdot \dots \cdot (\frac{1}{5} + n) \sim 5^{n+1} \frac{n^{\frac{1}{5}} n!}{\Gamma(\frac{1}{5})}$

Пример. 1. $\int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right)$ при $p > 0$.

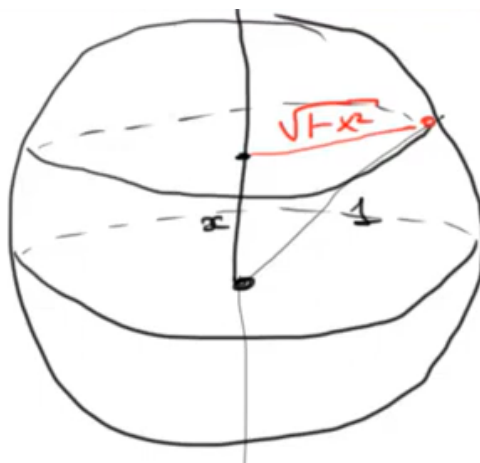
$$\text{Док-во: } \int_0^{+\infty} e^{-t^p} dt \underbrace{=}_{x=t^p} \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1} dx = \frac{1}{p} \cdot \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{p}-1} e^{-x} dx = \frac{1}{p} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{p} + 1\right).$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right).$$

$$\text{В частности, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p-1}(\phi) d\phi = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}.$$

$$\begin{aligned} \text{Док-во: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1}(\phi) \cdot \cos^{q-1}(\phi) d\phi &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\phi))^{\frac{p-2}{2}} \cdot (\cos^2(\phi))^{\frac{q-2}{2}} \cdot 2 \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \underbrace{=}_{t=\sin^2(\phi)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 t^{\frac{p}{2}-1} (1-t)^{\frac{q}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right). \end{aligned}$$

3. Объем n -мерного шара $V_n(r) = C_n \cdot r^n$, где $C_n = V_n(1)$ – объем n -мерного шара, радиуса 1.



$$V_n(1) = \int_{-1}^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 V_{n-1}(\sqrt{1-x^2}) dx = 2 \cdot \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot C_{n-1} dx \stackrel{x=\sin(\phi)}{=} \\ = 2 \cdot C_{n-1} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\phi))^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(\phi) d\phi = 2C_{n-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}.$$

Получили, что $C_n = C_{n-1} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi}$.

$$C_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \sqrt{\pi} \cdot C_{n-1} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \dots \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})} C_1 = \\ = 2 \cdot \frac{(\sqrt{\pi})^{n-1} \cdot \Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

3.4. Криволинейные интегралы

Определение 3.4. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая кривая

f – функция, заданная на $\gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$

Криволинейный интеграл (I рода (интеграл по длине дуги)):

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt, \text{ где } \|\gamma'(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2}$$

Теорема 3.17. 1. Не зависит от параметризации кривой

2. Не зависит от направления

3. $\int_{\gamma} ds = l(\gamma)$ – длина кривой

4. Линейность по функции

5. Аддитивность по кривой: если $\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$, то $\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds$

6. Если $f \leq g$, то $\int_{\gamma} f \leq \int_{\gamma} g$

7. $|\int_{\gamma} f ds| \leq \int_{\gamma} |f| ds$

8. $\int_{\gamma} f ds \leq \max f \cdot l(\gamma)$

Доказательство. 1-2 $\tilde{\gamma}$ – другая параметризация. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, где $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ – гладкая строго монотонная биекция

$$\int_{\tilde{\gamma}} f ds = \int_c^d f(\gamma(\tau(u))) \|\tilde{\gamma}'(u)\| du$$

$$\tilde{\gamma}'(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}'_1(u) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 \circ \tau, \tilde{\gamma}'_1(u) = \gamma'_1(\tau(u))\tau'(u)$$

$\|\tilde{\gamma}'(u)\| = |\tau'(u)| \cdot \|\gamma'(\tau(u))\|$ – если бы не было модуля, могли бы просто сделать замену переменной, но надо что-то умнее

Если $\tau \uparrow$, тогда $\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} f ds$, где $t = \tau(u)$

А если $\tau \downarrow$, то лишний минус появится, когда поменяем местами концы

В итоге не зависим от убывания/возрастания

3 Формула для длины кривой

$$4 \int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) ds = \int_a^b (\alpha f(\gamma(t)) + \beta g(\gamma(t))) \|\gamma'(t)\| dt = \alpha \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt + \dots = \alpha \int_{\gamma} f ds + \beta \int_{\gamma} g ds$$

5 $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, $\gamma_1 = \gamma|_{[a, c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c, b]}$ и по аналогии

6 $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$ и если заменим на g , станем только больше

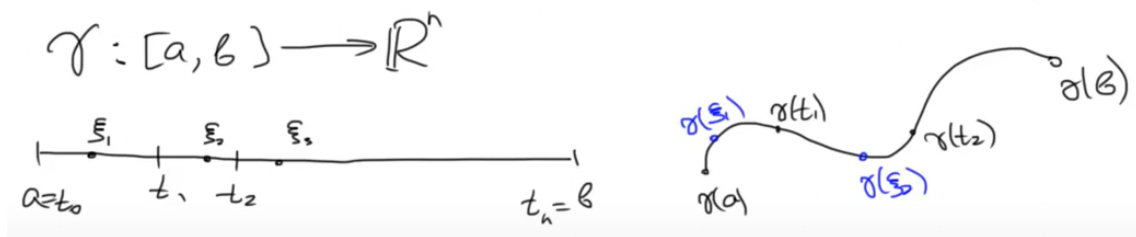
$$7 \left| \int_{\gamma} f ds \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \right| = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} |f| ds$$

$$8 f \leq \max f \implies \int_{\gamma} f ds \leq \int_{\gamma} \max f ds = l(\gamma) \cdot \max f$$

□

Замечание. Можно определить $\int_{\gamma} f ds$ для кусочно-гладких γ . Содержательная тут только проверка на корректность, но она проверится с помощью аддитивности по кривой

Упражнение. $\int_{\gamma} f ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f(\gamma(\xi_k)) \cdot l(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]})$, где $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, при мелкости дробления $\rightarrow 0$.



Определение 3.5. Дифференциальная форма (1-го порядка) в \mathbb{R}^n .

$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$, где

$f_k : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\omega(x)$ – линейное отображение: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$dx_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – проекция на k -ую координату, то есть $dx_k(\underbrace{h}_{\text{вектор}=(h_1, \dots, h_n)}) = h_k$.

Пример записи: $\omega(x, h) = f_1(x)h_1 + \dots + f_n(x)h_n$.

Определение 3.6. Криволинейный интеграл II рода (интеграл от дифференциальной формы)

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – гладкая кривая

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b (f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma'_1(t) + \cdots + f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'_n(t)) dt$$

Если коротко: $\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

Свойства. 1. Не зависит от параметризации

2. Смена направления меняет знак интеграла

3. (Связь с интегралом по длине дуги). $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds$, где $\bar{\sigma}$ – единичный касательный вектор к кривой

4. Линейность по \bar{f}

5. Аддитивность по кривой

6. $|\int_{\gamma} \omega| \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| ds \leq \max \|\bar{f}\| \cdot l(\gamma)$

Доказательство. 1. $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, $\tau : [c, d] \rightarrow [a, b]$ – строго возрастает, гладкая, $\tau(c) = a$, $\tau(d) = b$.

$$\int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\tilde{\gamma}'(u)) du = \int_c^d \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\tau(u))) \gamma'_k(\tau(u)) \tau'(u) du = (*)$$

$$\text{Делаем замену } t = \tau(u) : (*) = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_{\gamma} \omega$$

2. Доказали вместе с первым: если меняется направление, то $\tau(c) = b$, $\tau(d) = a$, $\int_b^a = -\int_a^b$

3. $\bar{\sigma}(\gamma(t)) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$. Тогда $\int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \bar{\sigma}(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt =$
 $= \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \bar{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$

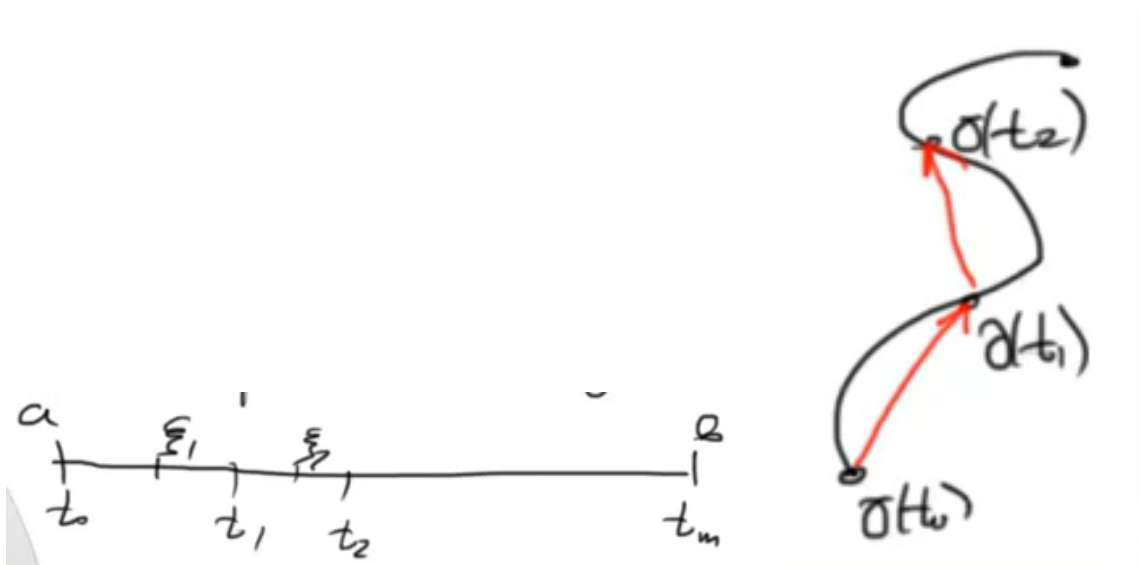
4, 5. следуют из 3 (по линейности интеграла I рода и линейности скалярного произведения).

6. $|\int_{\gamma} \omega| = |\int_{\gamma} \langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle ds| \leq \int_{\gamma} |\langle \bar{f}, \bar{\sigma} \rangle| ds \leq \int_{\gamma} \|\bar{f}\| \cdot \|\bar{\sigma}\| ds$

□

Упражнение. Доказать формулу: $\int_{\gamma} \omega = \lim \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(\xi_j))(\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}))$, если мелкость дробления $\rightarrow 0$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$



Определение 3.7. ω – дифференциальная форма, заданная в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытом множестве

$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная для ω , если $dF = \omega$

$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n$, т.е. нужно, чтобы $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$ при $k = 1, 2, \dots, n$

Теорема 3.18. Пусть F – первообразная, ω, γ – кривая, соединяющая точки A, B

Тогда $\int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A)$

Доказательство. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, f_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t)) \gamma'_k(t) dt = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_k(t)}_{(F \circ \gamma)'(t)} dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F \circ \gamma(b) - F \circ \gamma(a) =$$

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(B) - F(A). \quad \square$$

Определение 3.8. Ω – область, если Ω – открытое линейно связанное множество

Линейная связность – любая пара точек может быть соединена какой-либо кривой $\in \Omega$

Следствие. 1. Если у ω есть первообразная, то $\int_{\gamma} \omega$ зависит только от концов кривой, но не зависит от самой кривой

2. Если Ω – область, то все первообразные отличаются друг от друга на const

Доказательство.

2. F и G – первообразные ω , возьмем точки A, B из Ω и соединим кривой $\gamma \implies G(B) - G(A) = \int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A) \implies G(B) = F(B) + \underbrace{G(A) - F(A)}_{=\text{const, при фикс. } A}$ (фиксируем A и меняем B). \square

Лемма. Ω – область \implies между любыми двумя её точками можно провести ломанную, все звенья которой параллельны осям координат

Доказательство. $A, B \in \Omega \implies \exists \gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ такая что $\gamma(a) = A, \gamma(b) = B$. Для $t \in [a, b]$ рассмотрим шар $B_{r(t)}(\gamma(t)) \in \Omega$

$\gamma([a, b])$ – компакт \implies выберем конечное подпокрытие. Тогда можем перемещаться между центрами шариков по звеньям, параллельным осям координат

□

Теорема 3.19. Пусть Ω – область, $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ – дифференциальная форма в Ω и $f_1, f_2, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные функции. Тогда следующие условия равносильны

1. ω имеет первообразную $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
2. $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любой замкнутой кривой γ
3. $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любой замкнутой ломаной γ со звеньями, параллельными осям координат

Доказательство. 1) \implies 2) \implies 3) очевидны

3) \implies 1):

Соединим s и $x \in \Omega$ ломаной со звеньями, параллельными осям координат.

$F(x) := \int_{\gamma} \omega$. Поймем, что результат не зависит от выбора ломаной γ

$0 = \int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\tilde{\gamma}^{-1}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\tilde{\gamma}} \omega$, где $\tilde{\gamma}^{-1}$ – инвертированная по направлению вторая ломаная

Осталось проверить, что $\frac{\partial F}{\partial x_k} = f_k$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma \sqcup [x, x+h]} \omega}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \omega =$$

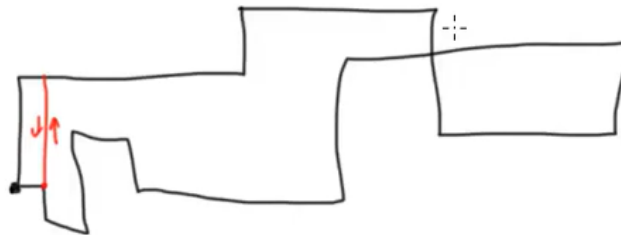
$$\underbrace{=}_{[0, h] = [x, x+h] \text{ (сдвиг на } x)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{f_1(\gamma(t))}_{x+e_1 t} \underbrace{\gamma'_1(t)}_{=1} dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{\int_0^h f_1(x + e_1 t) dt}_{=h \cdot f_1(x + e_1 h \cdot \theta), \theta \in (0, 1)} =$$

$$= f_1(x), \text{ т.к. } \gamma(t) = x + e_1 \cdot t, \gamma'_1(t) = 1, \gamma'_2(t) = \dots = \gamma'_n(t) = 0$$

□

Замечание. Для \mathbb{R}^2 3) можно заменить на 3'): $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любого прямоугольного γ со сторонами, параллельными осям координат

Доказательство. Индукция по числу звеньев. Когда отсекаем новый прямоугольник, то по его ребру мы считаем интеграл в разные стороны, то есть с остатком фигуры значение сократится, поэтому такой индукционный переход сделать можно:



□

Замечание. ω в $\Omega \in \mathbb{R}^n$. В каждой точке Ω своё линейное отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$$

dx_1 - функция $g_1(x) = x_1$

$$dg_1$$

$g_1(x+h) = g_1(x) + dg_1(g) = o(h)$, поэтому dx_i в определении ω – проекции на соотв. координаты

Определение 3.9. Живём в \mathbb{R}^2 . Назовём элементарной область в \mathbb{R}^2 , если

$\Omega = \{(x, y) : a < x < b \wedge \phi(x) < y < \psi(x)\} = \{(x, y) : c < y < d \wedge \alpha(y) < x < \beta(y)\}$, причем ограничивающие функции непрерывны.

Может показаться, что такого не бывает, но вот пример:



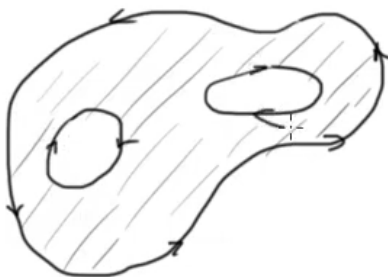
Теорема 3.20. Формула Грина

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ область, граница которой состоит из конечного числа кусочно гладких простых замкнутых кривых, ориентированных положительно.

$P, Q : Cl(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны.

Тогда $\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Omega} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) d\lambda_2$, где γ – граница Ω .

Заметим, что направление на кусочках границ такое, что область слева. То есть ориентация устроена так:



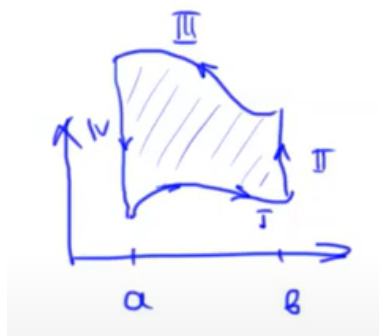
Область всегда по левую руку
при обходе

Доказательство. Хотим доказывать это: $\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Qdy$ и $-\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_{\gamma} Pdx$, при этом формулы никак не связаны, то есть можно и по-отдельности доказывать. Проверим вторую формулу:

1. $\Omega = \{(x, y) : x \in (a, b), \phi(x) < y < \psi(x)\}$ – элементарная область.

Левая часть: $\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\lambda_2 = \int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \int_a^b P(x, \psi(x)) dx - \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$

Правая часть: $\int_{\gamma} Pdx = \int_I + \int_{II} + \int_{III} + \int_{IV}$



$x \rightarrow (x, \phi(x)) : (I) = \int_a^b P(x, \phi(x)) dx$

$y \rightarrow (b, y) : (II) = \int_{\phi(b)}^{\psi(b)} P(b, y) b' dy = 0$

$x \rightarrow (x, \psi(x)) : (III) = - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx$

$y \rightarrow (a, y) : (IV) = - \int_{\phi(a)}^{\psi(a)} P(a, y) a' dy = 0$

Записывая сумму $(I) + (II) + (III) + (IV)$, получим ровно то, что записано в левой части со знаком минус.

2. $\Omega = \Omega_1 \cup l \cup \Omega_2$. Пусть формула верна для Ω_1, Ω_2 , выведем ее для Ω .



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\lambda_2 &= \int_{\Omega_1} + \underbrace{\int_l}_{=0, \text{ т.к. мера } l \text{ это } 0} + \int_{\Omega_2} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} = \\ &= \int_{\gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int_{\gamma_2} (Pdx + Qdy) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy \text{ (обходя } l \text{ с разных сторон, слагаемое сократится)}. \end{aligned}$$

3. Формула верна для конечного объединения элементарных областей.
4. Формула верна для области из условия, так как та нарезается на конечное число элементарных областей (без док-ва).

□

Следствие. Формулы площади.

$$\lambda_2 \Omega = \int_{\gamma} xdy = - \int_{\gamma} ydx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} xdy - ydx$$

Доказательство. Просто подставляем в формулу Грина подходящие P и Q (кто-то из них 0, а кто-то x , либо y). □

3.5. Точные и замкнутые формы

Определение 3.10. Ω – область, ω – дифф. форма в Ω . ω – точная форма, если у нее существует первообразная.

Определение 3.11. ω – локально точная форма, если $\forall a \in \Omega$ найдется U_a , такая что в U_a есть первообразная ω .

Определение 3.12. $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$ – замкнутая, если $\forall i, j : \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Замечание. Точность \implies локальная точность (но не наоборот).

Возьмем $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и покажем, что она замкнутая, локально точная, но не точная.

Проверим на замкнутость, то есть на равенство частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\frac{1}{y}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{-\frac{x}{y^2}}{1 + (\frac{x}{y})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Проверим на локальную точность: везде, кроме оси Ox , есть первообразная $F(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ (можно честно продифференцировать и проверить)

А теперь покажем, что точности нет: для этого нужно, чтобы интеграл любой замкнутой кривой был равен нулю. Возьмем тогда интеграл по единичной окружности с параметризацией $(x, y) \rightarrow (\cos t, \sin t)$:

$$\int_{\text{един. окр.}} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)(\sin(t))' - \sin(t)(\cos(t))'}{\cos^2(x) + \sin^2(x)} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Теорема 3.21. Если коэфф. формы f_i из C^1 , тогда локальная точность \implies замкнутость.

Доказательство. Берем $a \in \Omega$ и U_a , где есть первообразная $F \implies f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i} \quad \underbrace{\quad}_{\text{т.к. непрер. слева и справа от равенства}} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \implies \text{замкнутость}$$

w .

□

Лемма. Пуанкаре.

Если Ω – выпуклая область и коэфф. формы из C^1 , то замкнутость \implies точность.

Доказательство. Только для \mathbb{R}^2 .

Для существования первообр. достаточно чтобы интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат был равен 0.

$$\omega = Pdx + Qdy : \int_{\text{обход контура}} \omega = \int_{\text{заполненные прямоуг.}} \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)}_{\text{этот интеграл = 0 из-за замкнутости}} d\lambda_2 = 0.$$

Выпуклость Ω важна, чтобы внутри заполненного прямоугольника не было дырок.

□

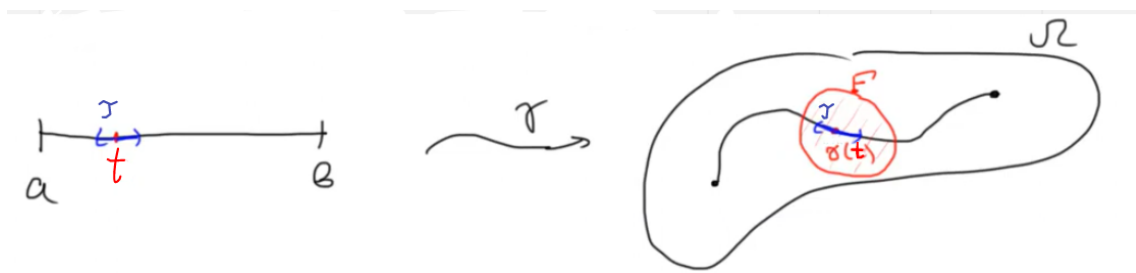
Следствие. 1. Замкнутая форма с коэфф. из C^1 в любом открытом шаре из Ω имеет первообразную.

2. Замкнутая форма с коэфф. из C^1 лок. точная.

Определение 3.13. ω – лок. точная форма в Ω .

$\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ путь.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ первообразная ω вдоль пути γ , если $\forall t \in [a, b]$ у $\gamma(t)$ найдется окр. $U_{\gamma(t)}$, а в ней первообразная F формы ω , т.ч. $f(\tau) = F(\gamma(\tau))$ при τ близких к t .



Теорема 3.22. Первообразная вдоль пути существует и единственная с точностью до константы.

Лемма. Локально постоянная функция (в каждой точке есть окрестность, что функция на ней постоянная) – константа.

Доказательство. Док-во теоремы.

Единственность: f_1, f_2 – первообр. вдоль пути γ .

$f_1 - f_2$ – лок. постоянная, покажем это:

Берем $t \in [a, b]$, есть $U_{\gamma(t)}$ и в ней первообр. F_1 и F_2 , т.ч. $f_1(\tau) = F_1(\gamma(\tau))$ и $f_2(\tau) = F_2(\gamma(\tau))$ при τ близких к t , но $F_1 - F_2 = \text{const} \implies f_1 - f_2 = \text{const}$ при τ близких к t .

Существование: берем $t \in [a, b]$, у $\gamma(t)$ есть окр-ть $U_{\gamma(t)}$, в которой существ. первообр.

$\bigcup_{t \in [a, b]} U_{\gamma(t)}$ – покрытие $\gamma[a, b]$ – компакт.

Выберем конечные подпокрытия U_1, \dots, U_m и F_1, \dots, F_m – первообр. в соответствующем U_j .

Из леммы Лебега $\exists r > 0 : \forall t \in [a, b] : B_r(\gamma(t))$ целиком содержится в каком-то элементе покрытия.

Нарежем $[a, b]$ на кусочки длины $< \delta$, где $\delta > 0$ выбрано по $\epsilon = r$ из равномерной непрерывности γ .

$a =: t_0, t_1, \dots, t_n := b$ – нарезка.

Тогда образы маленьких отрезков целиком содержатся в своих элементах покрытия.

$\gamma[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$, так занумеруем F_i — первообр. в U_i .

$f|_{[t_0, t_1]} = F_1 \circ \gamma, f|_{[t_1, t_2]} = F_2 \circ \gamma$.

В $\underbrace{U_1}_{\ni \gamma(t_1)} \cap U_2 \neq \emptyset \implies F_1, F_2$ – первообр. \implies они отличаются на $const \implies F_2 = F_1 + c$,

подменяем c так, что в $U_1 \cap U_2$ они совпали. И так далее для всех остальных кусочков. \square

Следствие. f – первообраз. ω вдоль пути $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Тогда $\int_{\gamma} \omega = f(b) - f(a)$

Доказательство. Смотрим на нарезку из предыдущей теоремы. Тогда $\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}} \omega = \sum_{i=1}^n (F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))) = F_n(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)) = f(b) - f(a)$.

$F_i(\gamma(t_i)) = F_{i+1}(\gamma(t_i))$ так согласованы F_j . \square

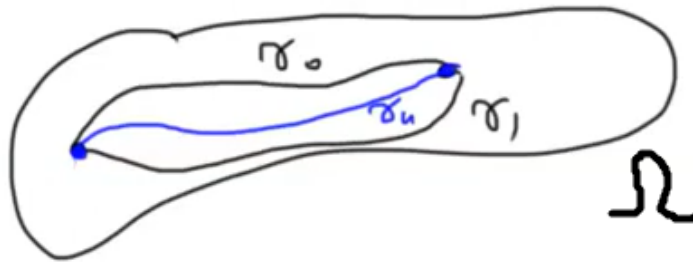
Определение 3.14. Ω – область в \mathbb{R}^2 .

$\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ пути в Ω .

1. $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

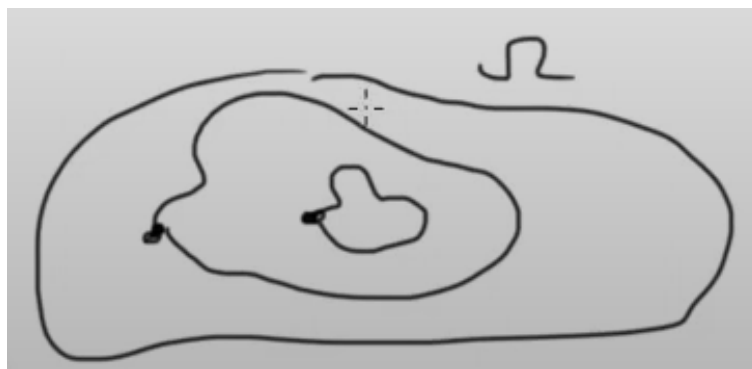
γ_0, γ_1 – гомотопные пути с неподвижными концами, если $\exists \gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ непрерывное, т.ч. $\forall t : \gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$ и $\forall u : \gamma(a, u) = \gamma_0(a), \gamma(b, u) = \gamma_0(b)$.

$\gamma_u(t) := \gamma(t, u)$ путь, соединяющий точки $\gamma_0(a)$ и $\gamma_0(b)$.



2. $\gamma_0(a) = \gamma_0(b), \gamma_1(a) = \gamma_1(b)$.

γ_0, γ_1 – гомотопны замкнутые пути, если $\exists \gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ непрерывное, т.ч. $\forall t : \gamma(t, 0) = \gamma_0(t), \gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$ и $\forall u : \gamma(a, u) = \gamma(b, u)$.



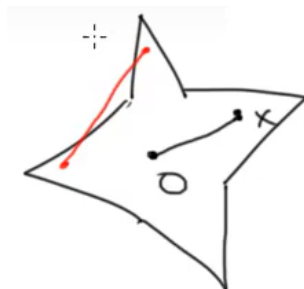
Определение 3.15. γ – стягиваемый замкнутый путь в Ω , если он гомотопен точке.

Определение 3.16. Ω – односвязная область, если любой замкнутый путь в ней – стягиваемый.

Пример. 1. Выпуклая область односвязна (для любых двух точек верно, что отрезок, соединяющий их лежит в области).

2. Звездная область односвязна (одна точка фиксированна и верно, что отрезок, соединяющий ее и любую другую, лежит в области)

PS. Напомним, что для обычной выпуклости нужно было, чтобы отрезок для двух произвольных точек из области целиком содержался в ней.



Доказательство. Ω – звездная, O – фикс. точка.

$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ – замк. путь.

$\gamma_u(t) := u \cdot \gamma_1(t) \in \Omega$.

$\gamma_0(t) = 0$.

Хз, что это доказывает, но вот оно есть :/

□

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ не явл. односвязной.

Упражнение. Ω – односвязна, $f : \underbrace{\mathbb{T}}_{\text{окр. единичного радиуса}} \rightarrow \Omega$ непрер. отображ.

Доказать, что существует $g : \text{замк. круг. един. радиуса} \rightarrow \Omega$ – непрер.

Определение 3.17. $\gamma : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \Omega$ непрер. отображ.

ω – лок. точная форма в Ω .

$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообразная ω относительно отображения γ , если $\forall (t, u) \in [a, b] \times [c, d]$ существует окр-ть $U_{\gamma(t, u)}$ и первообр F в этой окр-ти, т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ для (τ, ν) близких к (t, u) .

Теорема 3.23. Первообразная отн-но отображения существует и единственна с точностью до константы.

Доказательство. Единственность: f, g – первообразные отн-но отображения γ , то $(f - g)$ – локально постоянная функция двух переменных $\implies (f - g) = \text{const}$.

То что $(f - g)$ – локально постоянная следует отсюда:

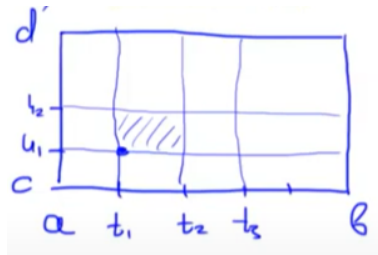
Берем $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$, в окр-ти $U_{\gamma(t, u)}$: $\exists F_1, F_2$ – первообразные, т.ч. $f(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu))$ и $g(\tau, \nu) = F_2(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (t, u) .

Знаем, что $F_1 = F_2 + \text{const} \implies f(\tau, \nu) - g(\tau, \nu) = F_1(\gamma(\tau, \nu)) - F_2(\gamma(\tau, \nu)) = \text{const}$.

Существование: берем $(t, u) \in [a, b] \times [c, d]$, у $\gamma(t, u)$ есть окр-ть $U_{\gamma(t, u)}$ в которой существует первообразная $\implies [a, b] \times [c, d] \subset \bigcup_{(t, u) \in [a, b] \times [c, d]} U_{\gamma(t, u)}$.

Выбираем конечное подпокрытие, по нему $r > 0$ из леммы Лебега $\implies B_r(\gamma(t, u))$ целиком содержится в эл-те подпокрытия.

$\gamma \in C([a, b] \times [c, d]) \implies$ равном. непрер. Берем по $\epsilon = r$ такое $\delta > 0$ из равн. непрерывности \implies если (t, u) и (t', u') на расстоянии $< \delta$, то $\gamma(t, u)$ и $\gamma(t', u')$ на расстоянии $< r$.



$\gamma([t_{i-1}, t_i] \times [u_{j-1}, u_j]) \subset U_{ij}$ и F_{ij} первообразная в U_{ij} .

$f|_{[t_0, t_1] \times [u_0, u_1]} = F_{11} \circ \gamma$

$f|_{[t_1, t_2] \times [u_0, u_1]} = F_{21} \circ \gamma$

$\gamma(\{t_1\} \times [u_0, u_1]) \subset U_{11} \cap U_{21} \leftarrow$ тут F_{11}, F_{21} – первообраз. \implies они отличаются на const .

Подправим F_{21} так, что в $U_{11} \cap U_{21}$ они совпадают.

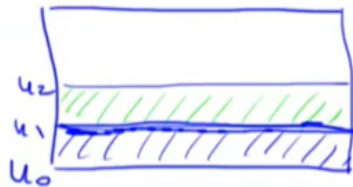
В итоге построим $f_1 : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообр. отн-но $\gamma|_{[a, b] \times [u_0, u_1]}$.

Аналогично $f_j : [a, b] \times [u_{j-1}, u_j] \rightarrow \mathbb{R}$ – первообр. отн-но $\gamma|_{[a, b] \times [u_{j-1}, u_j]}$.

осталось склеить их в f .

Рассмотрим f_1, f_2 . $f_1(\cdot, u_1), f_2(\cdot, u_1)$ – первообр. вдоль пути $\gamma_{u_1} \implies$ они отличаются на константу.

Подправим f_2 так, что $f_1(\cdot, u_1) = f_2(\cdot, u_1)$.



□

Теорема 3.24. γ_0, γ_1 – гомотопные пути с неподвижными концами в Ω . ω – локально точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Доказательство. $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ гомотопия между γ_0, γ_1 .

f – первообразная ω относительно отображения γ , $f(\cdot, 0), f(\cdot, 1)$ – первообразные вдоль путей γ_0, γ_1 , соответственно.

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0).$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1).$$

Докажем, что $f(a, \cdot)$ – лок. постоянная. Рассмотрим (a, u) : у $\gamma(a, u)$ есть окр-ть U и в ней первообразная F , т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (a, u) .

$f(a, \nu) = F(\gamma(a, \nu)) = F(\gamma_0(a))$ не зависит от ν (по аналогии делаем с другим концом, то есть доказываем, что $f(b, \cdot)$ – локальная постоянная, тогда получили, что $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$). \square

Теорема 3.25. γ_0, γ_1 – замкнутые гомотопные пути в Ω . ω – лок. точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$.

Доказательство. $\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ – гомотопия, f – первообразная ω относительно γ .

$$\int_{\gamma_0} \omega = f(b, 0) - f(a, 0)$$

$$\int_{\gamma_1} \omega = f(b, 1) - f(a, 1)$$

Докажем, что $(f(b, \cdot) - f(a, \cdot))$ лок. постоянна.

Рассмотрим (a, u) , у $\gamma(a, u)$ есть окр-ть U и в ней первообраз. F , т.ч. $f(\tau, \nu) = F(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (a, u) .

Рассмотрим (b, u) , у $\gamma(b, u)$ есть окр-ть \tilde{U} и в ней первообраз. \tilde{F} , т.ч. $f(\tau, \nu) = \tilde{F}(\gamma(\tau, \nu))$ при (τ, ν) близких к (b, u) .

$$\gamma(a, u) = \gamma(b, u) \in U \cap \tilde{U}$$

$$F \text{ и } \tilde{F} \text{ – первообразные в } U \cap \tilde{U} \implies \tilde{F} = F + C \text{ в } U \cap \tilde{U}.$$

$$f(b, \nu) - f(a, \nu) = \tilde{F}(\gamma(b, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = \tilde{F}(\gamma(a, \nu)) - F(\gamma(a, \nu)) = C. \quad \square$$

Следствие. Если γ_1 – стягиваемый путь в Ω , ω – лок. точная форма в Ω . Тогда $\int_{\gamma_1} \omega = 0$.

Теорема 3.26. Если Ω – односвязна, а ω – лок. точная, то ω – точная.

Доказательство. γ_1 – замкнутая кривая $\implies \gamma_1$ – стягиваемая $\implies \int_{\gamma_1} \omega = 0 \implies$ существует первообр. \square

Замечание. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ не односвязна, т.к. там есть лок. точная форма, не являющаяся точной.

4. ТФКП

4.1. Голоморфные функции

Если доказательство не указано, то оно повторяет то, что было в \mathbb{R} (смотреть 1 семестр).

Определение 4.1. Ω – область в \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.

f – голоморфна в точке z_0 , если существует $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$.

Определение 4.2. f комплексно дифф. в точке z_0 , если $\exists k \in \mathbb{C}$:

$f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$ при $z \rightarrow z_0$.

Утверждение 4.1. f – голоморфна в точке $z_0 \Leftrightarrow f$ комплексно дифф. в точке z_0 и $k = f'(z_0)$.

Следствие. f и g голоморфны в точке z_0 . Тогда

1. $f \pm g$ голом. в точке z_0
2. $f \cdot g$ голом. в точке z_0
3. Если $g(z_0 \neq 0)$, то $\frac{f}{g}$ голом. в точке z_0 .
4. Если h голом. в точке $f(z_0)$, то $h \circ f$ голом. в точке z_0 .

Замечание. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$z = x + iy$, $f(z) = f(x + iy) = g(x + iy) + ih(x + iy) : g, h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0)$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \in \mathbb{R}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} = \frac{f'(z_0)}{i} = i \cdot f'(z_0)$.

Замечание. $\begin{pmatrix} g(x+iy) \\ h(x+iy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_0+iy_0) \\ h(x_0+iy_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + o(\|(x-x_0, y-y_0)\|)$.

$k = \alpha + i\beta$

$k \cdot (z - z_0) = (\alpha + i\beta)((x - x_0) + i(y - y_0)) = \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + i(\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0))$

Вещественная линейность + $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ комплексная линейность.

Замечание. Комплексная дифференцируемость \Leftrightarrow вещественная дифференцируемость + матрица Якоби $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Комплексная дифференцируемость \Leftrightarrow вещественная дифференцируемость + условия Коши-Римана $\begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \end{cases}$

Замечание. $f(z) = f(z_0) + \underbrace{k}_{\in \mathbb{C}}(z - z_0) + o(z - z_0)$

$k(z - z_0) = kw = |k| \cdot e^{i\phi} \cdot w$, $\phi = \arg(k)$

Замечание. Обозначения.

$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$dz = dx + idy$

$d\bar{z} = dx - idy$

$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$

Теорема 4.2. Условия Коши-Римана.

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad a \in \Omega$$

f – дифф. в точке a как функция из \mathbb{R}^2 в \mathbb{R}^2 . Следующие условия равносильны:

1. f – голоморфна в точке a .
2. $d_a f$ – комплексно линейен
3. условия Коши-Римана
4. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$

Доказательство. Мы выяснили все, кроме (3) \Leftrightarrow (4):

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(Re(f)+iIm(f))}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial(Re(f)+iIm(f))}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial Re(f)}{\partial x} - \frac{\partial Im(f)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Im(f)}{\partial x} + \frac{\partial Re(f)}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad - \text{ а это}$$

и есть условия Коши-Римана. □

Замечание. Обозначения.

$f \in H(\Omega) \Leftrightarrow f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ и голоморфна во всех точках из Ω .

Следствие. Ω – область, $f \in H(\Omega)$ и $Im(f) = const \implies f = const$

Доказательство. $\frac{\partial Im(f)}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial Re(f)}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial Im(f)}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial Re(f)}{\partial y} = 0$$

$$\implies Re(f) = const \quad \square$$

Теорема 4.3. Коши (ah, shit, here we go again...)

$f \in H(\Omega) \implies$ форма $f(z)dz$ локально точная.

Доказательство. Будет два разных док-ва.

1. Для случая непрерывно-дифф. $\frac{\partial Re(f)}{\partial x}, \dots$ (имеются в виду все частные производные).

Тогда замкнутость \implies локальная точность.

$$f(z)dz = f(z)(dx + idy) = (Re(f) + i \cdot Im(f)) \cdot (dx + idy) = Re(f)dx - Im(f)dy + i(Im(f)dx + Re(f)dy).$$

$$Pdx + Qdy - \text{замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

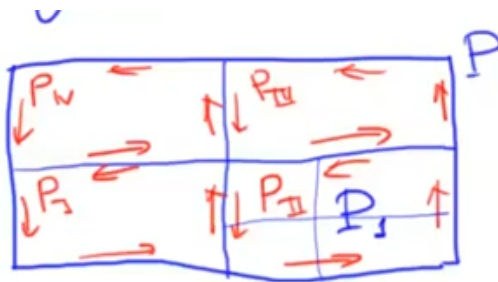
$$Re(f)dx - Im(f)dy - \text{замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial Re(f)}{\partial y} = -\frac{\partial Im(f)}{\partial x}$$

$$Im(f)dx + Re(f)dy - \text{замкн.} \Leftrightarrow \frac{\partial Im(f)}{\partial y} = \frac{\partial Re(f)}{\partial x}$$

2. Общий случай.

Надо доказать, что интеграл по любому прямоугольнику со сторонами параллельными осям координат из шарика $U \subset \Omega$, содержащего произвольную точку, равен 0.

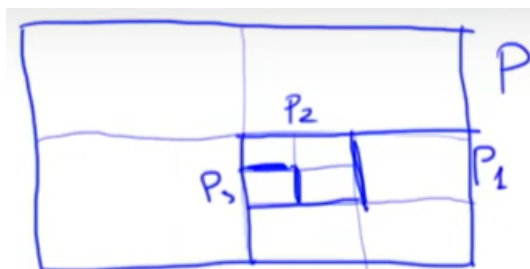
От противного: пусть нашелся прямоугольник P , т.ч. $\alpha(P) := \int_P f(z)dz \neq 0$.



Режем прямоугольник на 4 части, индексируем как P^1, P^2, P^3, P^4 , строим обходы каждого (против часовой стрелки). Тогда $\alpha(P) = \alpha(P^1) + \alpha(P^2) + \alpha(P^3) + \alpha(P^4)$, $|\alpha(P)| \leq |\alpha(P^1)| + |\alpha(P^2)| + |\alpha(P^3)| + |\alpha(P^4)|$.

Хотя бы одно из слагаемых $\geq \frac{1}{4}|\alpha(P)|$, назовем такое P_1 (индекс уже снизу!). Разрежем его на 4 равные части. Пусть P_2 такой, что $|\alpha(P_2)| \geq \frac{1}{4}|\alpha(P_1)|$ и т.д.

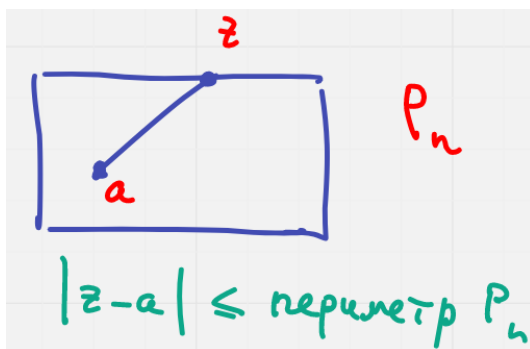
$$|\alpha(P_n)| \geq \frac{1}{4^n} |\alpha(P)|.$$



Берем a из P_n :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + o(z - a)$$

$$\alpha(P_n) = \int_{P_n} f(z) dz = \underbrace{\int_{P_n} f(a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \underbrace{\int_{P_n} f'(a)(z - a) dz}_{=0, \text{ по 1-ому док-ву}} + \int_{P_n} o(z - a) dz$$



$$o(z - a) = (z - a) \cdot \beta(z - a), \text{ где } \beta(z - a) \xrightarrow{z \rightarrow a} 0$$

$$\left| \int_{P_n} (z - a) \beta(z - a) dz \right| \leq \max_{z \in P_n} |z - a| \cdot \underbrace{|\beta(z - a)|}_{\text{периметр}} \cdot l(P_n) \leq \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \cdot \frac{l(P)}{2^n} \cdot \frac{l(P)}{2^n} \implies$$

$$\implies \frac{|\alpha(P)|}{4^n} \leq |\alpha(P_n)| \leq \frac{l(P) \cdot l(P)}{4^n} \cdot \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \implies \max_{z \in P_n} |\beta(z - a)| \geq \frac{|\alpha(P)|}{l(P) \cdot l(P)} > 0 - \text{противоречие, т.к. } \beta(z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow a.$$

□

Следствие. 1. Если $f \in H(\Omega)$, то у каждой точки $a \in \Omega$ есть окрестность, в которой существует ф-я F , т.ч. $F' = f$ в этой окрестности.

Доказательство. Пусть F первообразная формы $f(z)dz$. Поймем, что $F' = f$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = i \cdot f(z) \implies \frac{\partial F}{\partial x} + i \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

□

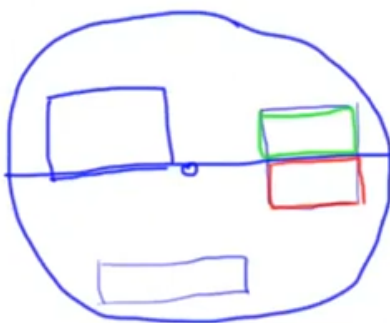
$$2. f \in H(\Omega), \gamma \text{ стягиваемый в } \Omega \text{ путь} \implies \int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Теорема 4.4. $f \in C(\Omega)$, Δ – прямая параллельная оси координат.

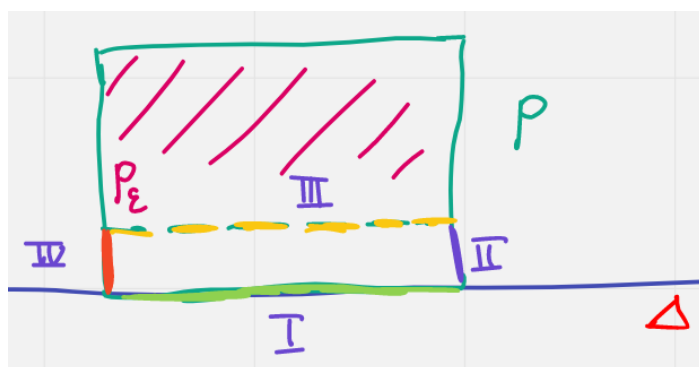
$$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$$

Тогда $f(z)dz$ локально точная.

Доказательство. Надо проверять, что интеграл по довольно маленькому прямоугольнику (со сторонами паралл. осям) это 0.



Очевидно, что если прямоугольник не пересекает Δ , то там все очевидно. Хотим рассматривать только те, что задевают. Те, что пересекают Δ , можно разбить на две части (верхнюю и нижнюю). По каждой из частей будет 0, тогда и в сумме тоже будет 0. То есть нас вообще интересуют только те прямоугольники, у которых Δ это одна из сторон. Рассмотрим их:



$$\int_{P_\epsilon} f(z)dz = 0 \rightarrow_{\epsilon \rightarrow 0} \int_P f(z)dz$$

$$\left| \int_P f(z)dz - \int_{P_\epsilon} f(z)dz \right| \leq |\int_1 + \int_3| + |\int_2| + |\int_4|$$

$$|\int_2 f(z)dz| \leq M \cdot (\text{длина } 2) = M\epsilon$$

$$|\int_1 + \int_3| = \left| \int_a^b (f(x + iy_0) - f(x + i(y_0 + \epsilon))) dx \right| \leq \int_a^b |\dots| dx = (*)$$

f непрер. на компакте \implies равномерно непрер.

$\forall \gamma > 0 : \exists \epsilon > 0$ если $\rho(\text{аргумент}) < \epsilon \implies |f(\dots) - f(\dots)| < \gamma$, тогда

$$(*) \leq (b - a) \cdot \gamma$$

□

Следствие. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$f \in C(\Omega)$ и f голоморфна в Ω за исключением мн-ва изолированных точек, тогда форма $f(z)dz$ все равно лок. точная.

Доказательство. Рассмотрим окр-ть, в которой ровно одна плохая точка.

Давайте проведем прямую через эту точку, тогда работает теорема.

□

Определение 4.3. Индекс кривой отн-но точки $Ind(\gamma, z_0)$.

γ – замкнутая кривая, не проходящая через точку z_0 .

$$Ind(\gamma, 0) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z} - \text{кол-во оборотов } \gamma \text{ вокруг } 0.$$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, \phi - \text{непрерывна (полярная замена)}.$$

Теорема 4.5. Пусть γ – замкнутая кривая, не проходящая через 0. Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i Ind(\gamma, 0).$$

Доказательство. Берем параметризацию $r, \phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$z(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, dz = (r'e^{i\phi} + ri\phi'e^{i\phi}) dt$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{r'}{r} + i\phi'$$

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_a^b \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\phi'(t) \right) dt = (\ln(r(t)) + i\phi(t)) \Big|_{t=a}^{t=b} = i(\phi(b) - \phi(a)) = 2\pi i Ind(\gamma, 0)$$

□

Следствие. Пусть γ – замкнутая кривая, не проходящая через точку a . Тогда

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i Ind(\gamma, a).$$

Теорема 4.6. (интегральная формула Коши).

$$f \in H(\Omega)$$

γ – стягиваемая в Ω кривая, не проходящая через $a \in \Omega$.

$$\text{Тогда } \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a) Ind(\gamma, a)$$

$$\text{Доказательство. } g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}, & \text{при } z \neq a, \\ f'(a), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$g \in C(\Omega)$$

$$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$$

$$\implies g(z)dz - \text{локально точная форма} \implies \int_{\gamma} g(z)dz = 0, \text{ так как } \gamma - \text{стягиваемая}$$

$$\implies 0 = \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} - \int_{\gamma} \frac{f(a)dz}{z-a} \implies \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{z-a} = f(a) \cdot \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = f(a) \cdot 2\pi i \cdot Ind(\gamma, a)$$

□

Пример. Берем круг. f – голоморфна в окр-ти этого круга.

$$\int_{\text{окр.}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} 0, & \text{если } a \text{ вне круга} \\ f(a) \cdot 2\pi i, & \text{если } a \text{ внутри круга} \end{cases}$$

Замечание. Обозначение.

$$\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\} - \text{единичный круг.}$$

$$\mathbb{T} = \{|z| = 1\} - \text{единичная окружность, обход против часовой стрелки.}$$

$$r\mathbb{T} + a = \{|z - a| = r\}$$

Теорема 4.7. $f \in H(r\mathbb{D}) \implies f$ аналитична (= функция раскладывается в ряд) в этом круге.

Доказательство. В нашем круге радиуса r берем еще два круга с тем же центром, но меньшими радиусами ($r > r_1 > r_2 > 0$). Берем $z : |z| < r_2$ – точка внутри наименьшего круга. Хотим интегрировать по средней окружности.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} = (*) \text{ равномерно сх-ся, так как } \left| \frac{z}{\zeta} \right| \leq \frac{r_2}{r_1} < 1$$

$$(*) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} z^n d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=: a_n \cdot 2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \square$$

Следствие. 1. Если $f \in H(r\mathbb{D})$ и $0 < r_1 < r$, то

$$\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = f^{(n)}(0)$$

$$2. f \in H(r\mathbb{D} + a), 0 < r_1 < r \implies \frac{n!}{2\pi i} \int_{r_1\mathbb{T}+a} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = f^{(n)}(a)$$

$$z = w + a$$

$$g(w) = f(w + a)$$

$$g^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{r_1\mathbb{T}} \frac{g(w)}{w^{n+1}} dw$$

$$3. f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

Тогда f – голоморфна в $\Omega \Leftrightarrow f$ – аналитична в Ω .

$$4. f \in H(\Omega) \implies f \text{ – бесконечно дифференцируема.}$$

$$5. f \in H(\Omega) \implies f' \in H(\Omega)$$

6.

Определение 4.4. $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гармоническая, если $\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} = 0$.

Продолжаем свойство:

$f \in H(\Omega) \implies \operatorname{Re}(f)$ и $\operatorname{Im}(f)$ – гармонические функции.

$$\text{Доказательство. } \frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 \operatorname{Re}(f)}{\partial y^2}$$

про $\operatorname{Im}(f)$ аналогично доказывается. \square

Замечание. Если $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ гармоническая ф-я, то существует единств. (с точностью до прибавления $\operatorname{const} \in \mathbb{R}$) гармоническая ф-я $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, т.ч. $g + ih \in H(\Omega)$

Теорема 4.8. Мореры.

$f \in C(\Omega)$. Если $f(z)dz$ локально точная, то $f \in H(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем $a \in \Omega$. Существует окр-ть a , что для f в ней есть первообразная F (т.е. $F' = f$ в U).

Тогда $F \in H(U) \implies F' = f \in H(U)$ – это локальное свойство, поэтому на всей Ω тоже будет голоморфность. \square

Следствие. $f \in C(\Omega)$, Δ – прямая, параллельная оси координат.

$f \in H(\Omega \setminus \Delta)$. Тогда $f \in H(\Omega)$.

Доказательство. $f \in C(\Omega)$ и $f \in H(\Omega \setminus \Delta) \implies f(z)dz$ локально точная в $\Omega \xRightarrow{\text{т. Мореры}} f \in H(\Omega)$. \square

Теорема 4.9. (интегральная формула Коши).

$f \in H(\Omega)$

$K \subset \Omega$ – компакт, граница которого – конечное число кусочно-гладких замкнутых кривых. Тогда

1. $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$
2. Если $a \in \text{Int}(K)$, то $\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$.

Доказательство. 1. Пишем **формулу Грина**.

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z)dz &= \int_{\partial K} f(z)dx + i \cdot f(z)dy \underbrace{=}_{\text{Грин}} \int_K \left(i \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \\ &= i \cdot \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

2. Берем круг, содержащий a , не выходящий за границу формы $B_r(a)$.

$\tilde{K} = K \setminus B_r(a)$ – компакт.

$\frac{f(z)}{z-a} \in H(\Omega \setminus \{a\})$, $\tilde{K} \subset \Omega \setminus \{a\}$.

$$0 = \int_{\partial \tilde{K}} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz - \underbrace{\int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-a} dz}_{=2\pi i f(a)}.$$

\square

Упражнение. $f \in H(r\mathbb{D})$ и $f \in C(Cl(r\mathbb{D}))$

$a \in \mathbb{D}$.

Доказать, что $\int_{r\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$

Теорема 4.10. $f \in C(\Omega)$. Следующие условия равносильны (равносильность всех утверждений, так или иначе, уже доказывалась ранее):

1. $f \in H(\Omega)$
2. $f(z)dz$ – локально точная в Ω
3. В окр-ти каждой точки y f есть первообразная
4. f аналитична в Ω
5. $\int f(z)dz = 0$ по любому достаточно малому прямоугольнику со сторонами параллельными осям
6. $f(z)dz$ – замкнутая и частн. производные по x и y непрерывны.

Теорема 4.11. Неравенство Коши.

$f \in H(R\mathbb{D}), 0 < r < R.$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$ Тогда $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n},$ где $M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$

Теорема 4.12. $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \cdot 2\pi r = \frac{M(r)}{r^{n+1}} \cdot r = \frac{M(r)}{r^n}$$

Теорема 4.13. Луивилля.

Если $f \in H(\mathbb{C})$ и f – ограничена, то $f = \text{const}.$

Доказательство. f – ограничена $\implies |f| \leq M.$

$$f \in H(\mathbb{C}) \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ и ряд сходится } \forall z \in \mathbb{C} \quad \underbrace{\implies}_{\text{нер-во Коши}} |a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \implies$$

$$a_n = 0 : \forall n \geq 1 \quad \square$$

Замечание. \sin и \cos неограничены в $\mathbb{C}.$

Определение 4.5. Целая функция – функция, голоморфная в $\mathbb{C}.$

Теорема 4.14. Основная теорема алгебры.

P – многочлен степени $\geq 1.$ Тогда у P есть хотя бы один корень.

Следствие. Если $\deg P = n,$ то $P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$ для некоторых $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}.$

Доказательство. Если z_1 – корень $P,$ то $P(z) = (z - z_1) \cdot Q(z),$ где $\deg Q = n - 1.$ \square

Доказательство. Основной теоремы алгебры.

От противного:

пусть $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}.$ Тогда $f(z) = \frac{1}{P(z)} \in H(\mathbb{C}).$

Докажем, что f – ограниченная функция.

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

$$R := 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0|. \text{ Пусть } |z| \geq R, |P(z)| \geq |z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_1||z| - |a_0| \geq |z|^n - |z|^{n-1}(|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_0|) = \underbrace{|z|^{n-1}}_{\geq 1} \underbrace{(|z| - |a_0| - |a_1| - \dots - |a_{n-1}|)}_{\geq 1} \implies |P(z)| \geq 1$$

при $|z| \geq R \implies |f(z)| \leq 1$ при $|z| \geq R.$

Докажем, что при $|z| \leq R, |f(z)|$ – ограничена.

$f \in H(\mathbb{C}) \implies f$ непрер. в $\mathbb{C} \implies f$ непрер. в $\{|z| \leq R\}$ – компакт $\implies |f|$ огр. в $\{|z| \leq R\}.$

Тогда по т. Луивилля $f(z) = \text{const} \implies P(z) = \frac{1}{\text{const}},$ что противоречит условию, что $P(z)$ – многочлен степени $\geq 1.$ \square

4.2. Теоремы единственности

Теорема 4.15. $f \in H(\Omega), \Omega$ – область, $z_0 \in \Omega.$ След. условия равносильны:

1. $f^{(n)}(z_0) = 0 \forall n = 0, 1, 2, \dots$
2. $f = 0$ в некоторой окр-ти точки $z_0.$

3. $f \equiv 0$ в Ω

Лемма. Ω – область в метрическом пространстве, $E \subset \Omega$, т.ч. $E \neq \emptyset$, E – открыто в Ω , E – замкнуто в Ω . Тогда $E = \Omega$.

Доказательство. Леммы.

Пусть $\Omega \setminus E \neq \emptyset$, берем $a \in E$ и $b \in \Omega \setminus E$. Возьмем путь γ , соединяющий эти точки.

$\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$, т.ч. $\gamma(\alpha) = a$, $\gamma(\beta) = b$. γ – непрер. $\implies \gamma^{-1}(E)$ – открыто, $\gamma^{-1}(\Omega \setminus E)$ – открыто $\implies \gamma^{-1}(E)$ – открыт. и замкнут. подмн-во $[\alpha, \beta]$, $\alpha \in \gamma^{-1}(E)$, $\beta \notin \gamma^{-1}(E)$.

$s := \sup \gamma^{-1}(E)$ из замкн. $s \in \gamma^{-1}(E) \implies s < \beta$.

Возьмем окр-ть s , т.ч. $(s - \delta, s + \delta) \subset \gamma^{-1}(E) \cap (\alpha, \beta) \implies$ в $\gamma^{-1}(E)$ есть точки $> s \implies s$ не \sup . Противоречие. \square

Доказательство. Теоремы.

(3) \implies (2) \implies (1) – очевидно.

(1) \implies (2) – почти очевидно:

Берем $z_0 \in \Omega$ и $B_r(z_0) \subset \Omega$, тогда в круге $|z - z_0| < r$: f раскл. в свой ряд Тейлора \implies в нем $f \equiv 0$.

(2) \implies (3):

$E := \{z \in \Omega : \text{в некоторой окр-ти точки } z, f = 0\}$

$z_0 \in E$ по условию $\implies E \neq \emptyset$.

E – открыто. Если $w \in E$, то в круге $|z - w| < r$, $f = 0$.

$\forall z$ из этого круга есть круг меньшего радиуса, содерж. $\{|z - w| < r\}$, в нем $f = 0$.

E – замкнуто. Пусть z_* – предельная точка E , то есть $z_n \in E$ и $\lim z_n = z_*$. $f^{(m)}(z_n) = 0 \forall m, \forall n$ (так как есть (2) \implies (1)). По непрерывности $f^{(m)}(z_*) = \lim f^{(m)}(z_n) = 0 \xRightarrow{(1) \implies (2)} z_* \in E$.

Тогда по лемме $E = \Omega$. \square

Следствие. $f, g \in H(\mathbb{C})$, т.ч. $f(z) = g(z)$ в окр-ти точки $z_0 \in \Omega \implies f \equiv g$.

Теорема 4.16. О среднем.

$f \in H(\Omega)$ и $a \in \Omega$, причем $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$, тогда $f(a) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi$ (т.е. среднее значение на окружности радиуса r с центром в a равно $f(a)$).

Доказательство. $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\phi})}{re^{i\phi}} re^{i\phi} i d\phi$, где $z = a + re^{i\phi}$, $dz = re^{i\phi} i d\phi$. \square

Следствие. $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, $\{|z - a| \leq r\} \subset \Omega$. Тогда $f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z-a| \leq r} f(z) d\lambda_2$.

Доказательство. $\int_{|z-a| \leq r} f(z) d\lambda_2 = \int_0^r \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\phi}) \rho d\phi d\rho = \int_0^r 2\pi f(a) \rho d\rho = 2\pi f(a) \frac{r^2}{2} = \pi r^2 f(a)$. \square

Теорема 4.17. Принцип максимума.

$f \in H(\mathbb{C})$, $a \in \Omega$. Если $|f(a)| \geq |f(z)| \forall z$ из окр-ти точки a , то $f \equiv \text{const}$.

Доказательство. Пусть $|f(a)| =: M$. Домножим f на $e^{i\alpha}$ так, что $f(a) = M > 0$.

$$|f(a)| = M = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\phi}) d\phi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\phi = M.$$

Все нер-ва обращаются в равенства $\implies |f(a + re^{i\phi})| = M \forall \phi \forall$ маленьких r .

$Re(f(a)) = M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(f(a + re^{i\phi})) d\phi \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\phi})| d\phi \leq M$. Это все равенства $\implies Re(f(a + re^{i\phi})) = |f(a + re^{i\phi})| = M \implies f(z) = M$ в окр-ти точки a $\implies f(z) \equiv const$. \square
т. о единственности

Следствие. $f \in H(\Omega)$, Ω – огранич. область, $f \in C(Cl(\Omega))$. Тогда $|f|$ достигает своего тах на границе Ω .

Доказательство. $Cl(\Omega)$ – компакт, $|f|$ непрер. на компакте \implies в какой-то точке $a \in Cl(\Omega)$ достигает тах.

Если $a \in \Omega$, то по принципу максимума $f \equiv const$, значит на границе то же самое значение.

Если $a \notin \Omega$, то это точка на границе. \square

Определение 4.6. $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, a – ноль функции f , если $f(a) = 0$.

Теорема 4.18. $f \not\equiv 0$, $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$, $f(a) = 0$. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ и $g \in H(\Omega)$, т.ч. $g(a) \neq 0$ и $f(z) = (z - a)^m \cdot g(z)$.

Доказательство. Разложим f в ряд Тейлора в окр-ти точки a .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z - a)^n, \quad m := \min\{n : f^{(n)}(a) \neq 0\}.$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-a)^m}, & z \neq a \\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!}, & z = a \end{cases}$$

$g \in H(\Omega \setminus \{a\})$, g – непрерывная в точке a , $\implies g \in H(\Omega)$.

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^{n-m} \xrightarrow{z \rightarrow a} \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

\square

Следствие. 1. Если $f \in H(\Omega)$ и $a \in \Omega$ – ноль функции f , то $\exists U_a$ – кор-ть точки a , т.ч. $f(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$ (проколота окр-ть).

Доказательство. $f(z) = (z - a)^m g(z)$, $g(a) \neq 0$ из теоремы.

g – непрер. в точке $a \implies g(z) \neq 0$ в окр-ти точки $a \implies f(z) = (z - a)^m g(z) \neq 0$ в прокол. окр-ти точки a . \square

2. Если $f, g \in H(\Omega)$ и $fg \equiv 0$, то либо $f \equiv 0$, либо $g \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $f \not\equiv 0$. Если $f(z) \neq 0 \forall z$, то $g \equiv 0$. Иначе найдется $a \in \Omega$, т.ч. $f(a) = 0 \implies f(z) \neq 0, \forall z \in U_a^\circ \implies g(z) = 0 \forall z \in U_a^\circ \implies g \equiv 0$. \square

Теорема 4.19. Единственности.

$f, g \in H(\Omega)$ и $z_n \in \Omega$, z_n – различные, т.ч. $f(z_n) = g(z_n)$. Если $\lim z_n \in \Omega$, то $f \equiv g$.

Следствие. $f, g \in H(\Omega)$, $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. Если какая-то предельная точка мн-ва A лежит в Ω , то $f \equiv g$.

Доказательство. Теоремы.

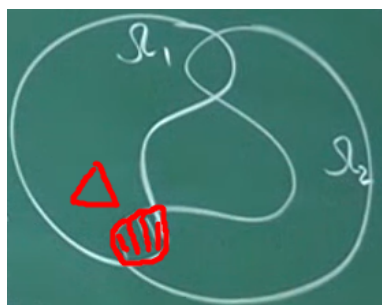
$h(z) = f(z) - g(z)$. По условию $h \in H(\Omega)$ и $h(z_n) = 0$. $a := \lim z_n$, по непрерывности $h(a) = 0 \implies \exists U_a$, т.ч. $h(z) \neq 0 \forall z \in U_a^\circ$, но z_n начиная с некоторого места лежат в U_a . \square
по следствию 1

Следствие. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

4.3. Аналитическое продолжение

Определение 4.7. $f_1 \in H(\Omega_1), f_2 \in H(\Omega_2)$.

Δ – компонента связности $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.



f_2 непосредственное аналитическое продолжение f_1 через Δ , если $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Delta$.

Замечание. 1. При фиксации $\Omega_1, \Omega_2, \Delta, f_1$, функция f_2 определена однозначно.

Доказательство. g – непоср. аналитическое продолжение f_1 :

$$g(z) = f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Delta$$

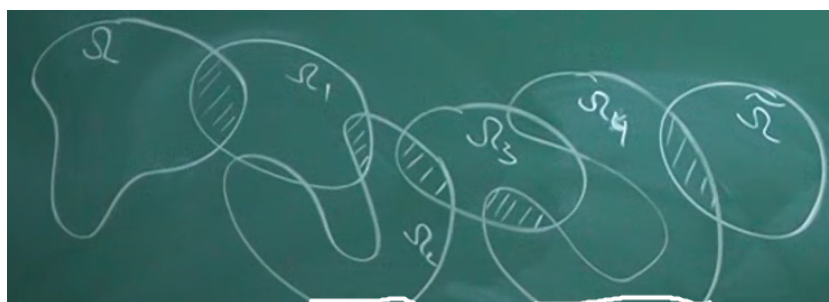
$$g, f_2 \in H(\Omega_2) \quad \underbrace{\implies}_{\text{по т. единственности}} \quad f_2 \equiv g.$$

□

2. Для другой компоненты продолжение может быть другим (тут понятнее на картинке, добавьте, плиз).

Определение 4.8. $f \in H(\Omega), \tilde{f} \in H(\tilde{\Omega})$.

\tilde{f} – аналитическое продолжение f на цепочке областей, если $\exists \Omega_1, \dots, \Omega_n$ и $f_1 \in H(\Omega_1), \dots, f_n \in H(\Omega_n)$, т.ч. f_1 – непосредственное аналитическое продолжение f , f_2 – непосредственное аналитическое продолжение f_1, \dots, \tilde{f} – непосредственное аналитическое продолжение f_n .



Замечание. Рассмотрим всевозможные пары (f, Ω) , т.ч. $f \in H(\Omega)$, тогда существование аналитического продолжения по цепочке областей – отношение эквивалентности на мн-ве таких пар.

Определение 4.9. Полная аналитическая функция – класс эквивалентности.

F – полная аналитическая ф-я. $M := \bigcup_{(f, \Omega) \in F} \Omega$ – область определения (существования) F .

Утверждение 4.20. M – область.

Доказательство. Открытость: объединения открытых – открытое.

Линейная связность: $a, b \in M \implies a \in \Omega, b \in \tilde{\Omega}$. (f, Ω) , $(\tilde{f}, \tilde{\Omega})$ связана аналитическим продолжением по цепочке, будем переходить по соответствующим областям и дойдем из a в b . \square

Определение 4.10. F – полная аналитическая функция, M – область определения F , $z \in M$.

$$F(z) := \{f(z) : (f, \Omega) \in F \wedge z \in \Omega\}.$$

Теорема 4.21. Пуанкаре-Вольтерры.

$F(z)$ – не более чем счетное мн-во.

Пример. $\underbrace{f(z)}_{\frac{1}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ – ряд сх-ся при $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$$

$\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$ – круг сходимости ряда.

$$|z-a| < |1-a|$$

Определение 4.11. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-z_0)^n$, R – радиус сх-ти ряда.

Берем точку w на границе круга ($|w-z_0| = R$). w – правильная точка, если найдется U_w – окр-ть точки w и $g \in H(U_w)$ являющаяся непосредственным продолжением f .

Определение 4.12. Особая точка – точка, не являющаяся правильной.

Теорема 4.22. На границе круга сх-ти лежит хотя бы одна особая точка.

Доказательство. От противного.

Пусть все точки правильные $|z| = R$ – правильные.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, R – радиус сх-ти.

$\forall w : |w| = R$ – правильная, тогда найдется $B_{r_w}(w)$ и $g \in H(B_{r_w}(w))$, т.ч. $f = g$ на пересечении $\{|z| < R\} \cap \{|z-w| < r_w\}$.

То есть круги $B_{r_w}(w)$ покрывают окр-ть $|w| = R$. Это компакт, выберем конечное подпокрытие.

По лемме Лебега $\exists \epsilon > 0 : B_{\epsilon}(w)$ целиком содержится в элементе подпокрытия.

$\{|z| < R + \epsilon\} \subset \{|z| < R\} \cup$ конечное подпокрытие.

$$h(z) := \begin{cases} f(z), & |z| < R \\ g_{w_j}(z), & |z - w_j| < r_{w_j} \end{cases} \in H(\{|z| < R + \epsilon\}).$$

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ – ряд Тейлора для g , он сх-ся в круге $|z| < R + \epsilon$.

Противоречие тому, что радиус сходимости был R . \square

Пример. 1. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ сх-ся при $|z| \leq 1$.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

$$(zf'(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ – сх-ся при $|z| < 1$, все точки $|z| = 1$ – особые.

Начало 4-ого семестра.

Теорема 4.23. $f \in H(\Omega)$, Ω – односвязная, $f \neq 0$ в Ω .

Тогда существует $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = f(z)$ и g – единственна с точностью до аддит. константы $2\pi ik$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Существование:

$$\frac{f'}{f} \in H(\Omega) \implies \text{есть первообразная } g \in H(\Omega).$$

Подберем константу так, что $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ для некоторого $z_0 \in \Omega$.

Покажем, что g подходит: $h(z) := e^{-g(z)} \cdot f(z)$.

Хотим доказать, что $h \equiv 1$. Знаем, что $h(z_0) = 1$ и

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} + f(z)e^{-g(z)}(-g'(z)) = e^{-g(z)} \left(f'(z) - f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \equiv 0.$$

Единственность:

$$\text{Пусть } e^{g(z)} = f(z) = e^{\tilde{g}(z)} \implies e^{g(z)-\tilde{g}(z)} \equiv 1 \implies \underbrace{g(z) - \tilde{g}(z)}_{\in H(\Omega) \subset C(\Omega)} = 2\pi ik_z : k_z \in \mathbb{Z} \implies g(z) - \tilde{g}(z) =$$

$2\pi ik$

□

Следствие. Пусть $0 \notin \Omega$ – односвязна, тогда существует единственный с точностью до $+2\pi ik$ функция $g \in H(\Omega)$, т.ч. $e^{g(z)} = z$.

Замечание. $g(z) = \ln |z| + i \arg z$

Замечание. Обозначение:

$$Ln(z) = \ln |z| + i Arg(z)$$

ветви логарифма

Свойства. 1. $e^{Ln(z)} = z : \forall z \neq 0$

$$2. Ln(zw) = Ln(z) + Ln(w)$$

$$3. Ln(z) = \ln |z| + i Arg(z), \text{ где } Arg(z) = \{\arg z + 2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$$

Замечание. Св-во 2 для ветви может быть неверно.

Берем конкретную ветку и точку: $0 < \arg < 2\pi$

$$Ln(-i) = \underbrace{\ln |-i|}_{=0} + i Arg(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

$$Ln((-i)^2) = Ln(-1) = \ln |-1| + i Arg(-1) = \pi i$$

$$\text{Но } \pi i \neq \frac{3\pi i}{2} + \frac{3\pi i}{2}$$

Замечание. $z^p := e^{pLn(z)}$ – полная аналит. функция.

Если $p \in \mathbb{Z}$, то все однозначно, т.к. $e^{p(2\pi ik)} = 1$.

Если $p \in \mathbb{Q}$, $p = \underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{несократимая}}$, то $e^{\frac{m}{n}(2\pi ik)}$ – принимает n значений.

Если $p \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, то $e^{p(2\pi ik)}$ – принимает счетное кол-во значений.

Упражнение. 1. Найти i^i

$$2. \text{ Д-ть, что } (z^p)' = \frac{pz^p}{z} \text{ при } z \neq 0$$

$$3. (zw)^p = z^p w^p \text{ как полные аналитические функции, но это неверно для ветвей.}$$

4.4. Ряды Лорана

Определение 4.13. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ – ряд Лорана.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ – правильная часть.

$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ – главная часть.

Ряд Лорана сходится \Leftrightarrow правильная и главная части сходятся.

Ниже будем считать, что $z_0 = 0$ для простоты записи.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – сх-ся в круге сх-ти $|z| < R$ – радиус сх-ти $[0, +\infty]$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$, где $w = \frac{1}{z}$ – сх-ся в круге сх-ти $|w| < \tilde{R} \Rightarrow |z| > \frac{1}{\tilde{R}} =: r$.

То есть ряд Лорана сх-ся в кольце $r < |z| < R$ – кольцо сх-ти ряда Лорана.

Свойства. 1. Ряд Лорана абс. сх-ся в кольце $r < |z| < R$, где $r, R \in [0, +\infty]$

2. В кольце, лежащем строго внутри кольца сх-ти, ряда Лорана сх-ся равномерно.

3. В кольце сх-ти ряд Лорана можно почленно дифференцировать.

4. Ряд Лорана в кольце сх-ти – голоморфная функция.

Теорема 4.24. Пусть $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ в кольце $r < |z| < R$.

Тогда $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, где $r < \rho < R$.

Доказательство. $\int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \int_{|z|=\rho} \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k}{z^{n+1}} dz =$

$$= \int_{|z|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^{k-n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{|z|=\rho} z^{k-n-1} dz = 2\pi i a_n$$

$$\int_{|z|=\rho} z^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i \rho e^{it} dt = \rho^{m+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{при } m = -1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad \square$$

Замечание. Нер-во Коши тут тоже выполняется:

$$|a_n| \leq \frac{M_\rho}{\rho^n}, \text{ где } M_\rho = \max_{|z|=\rho} \{|f(z)|\}.$$

Теорема 4.25. Пусть $f \in H(r < |z| < R)$. Тогда $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, для некоторых $a_n \in \mathbb{C}$.

Доказательство. $r < r_1 < r_2 < R_2 < R_1 < R$.

Берем $r_2 < |z| < R_2$: пишем для него и компакта $K = \{r_1 \leq |z| \leq R_2\}$ интегральную теорему Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\eta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$|\zeta| = R_1, |z| < R_2, |\frac{z}{\zeta}| < \frac{R_2}{R_1} < 1$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}}$$

$$\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=R_1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{\int_{|\zeta|=R_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta}_{=: a_n}$$

$$|\zeta| = r_1, |z| > r_2, \left|\frac{\zeta}{z}\right| < \frac{r_1}{r_2} < 1, \frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$$

$$- \int_{|\zeta|=r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta|=r_1} \frac{1}{z^{n+1}} f(\zeta) \zeta^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \underbrace{\int_{|\zeta|=r_1} f(\zeta) \zeta^n d\zeta}_{=: a_{n-1}}$$

□

Теорема 4.26. Пусть $f \in H(r < |z| < R)$. Тогда существует $g \in H(|z| < R)$ и $h \in H(|z| > r)$, т.ч. $f(z) = g(z) + h(z)$. А если добавить условие: $h \rightarrow_{z \rightarrow \infty} 0$, то такое представление единственно.

Доказательство. Существование:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Пусть $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – главная часть (сх-ся в $\{|z| < R\}$), $h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ – правильная часть (сх-ся в $\{|z| > r\}$).

Единственность:

Пусть $f(z) = g(z) + h(z)$, $f(z) = g_1(z) + h_1(z) \implies g(z) - g_1(z) = h_1(z) - h(z)$ при $r < |z| < R$.

$$F(z) := \begin{cases} g(z) - g_1(z), & \text{при } |z| < R \\ h_1(z) - h(z), & \text{при } |z| > r \end{cases} \in H(\mathbb{C})$$

Поймем, что F ограничена: $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0 \implies$

$$|F(z)| \leq 1 \text{ при } |z| \geq \rho$$

$|F(x)|$ – огр. при $|z| \leq \rho$ по т. Вейерштрасса.

□

Определение 4.14. $a \in \mathbb{C}$. Если f голоморфна в проколотовой окрестности точки a , но не голоморфна в a , то a – изолированная особая точка.

$$f \in H(0 < |z - a| < r)$$

Определение 4.15. Если существует $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$, то a – устранимая особая точка.

Если $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$, то a – полюс.

Если $\lim_{z \rightarrow a}$ не существует, то a существенно особая точка.

Пример. 1. $\frac{\sin z}{z}, \frac{e^z - 1}{z}$. $z = 0$ – устранимая особая точка. Из Тейлора.

2. $\frac{1}{z}, \frac{1}{\sin z}$. $z = 0$ – полюс.

3. $e^{\frac{1}{z}}$. $z = 0$ – существенно особая точка. Предела нет, т.к. $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n$, $\frac{1}{z_n} = 2\pi i n + \pi$. Разные последовательности точек.

Теорема 4.27. Характеристика устранимой особой точки

$$f \in H(0 < |z - a| < r)$$

Следующие условия равносильны:

1. a – устранимая особая точка
2. f ограничена в некоторой проколотовой окрестности a
3. $\exists g \in H(|z - a| < r)$, такая, что $f(z) = g(z) \forall z \neq a$
4. В главной части ряда Лорана в точке a все коэффициенты 0

Доказательство. 1. $4 \Rightarrow 3$ – очевидно

2. $3 \Rightarrow 1$ – очевидно. g непрерывна, предел $g(a)$

3. $1 \Rightarrow 2$ – очевидно

4. Докажем $2 \Rightarrow 4$. Пусть ограничена: $f(z) \leq M, \forall 0 < |z - a| < r$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, |c_n| \leq \frac{\max|f(z)|}{\rho^n}$ при $|z-a| = \rho, c_{-n} \leq \rho^n \max f(z) \leq M\rho^n$ и устремим $\rho \rightarrow 0, M\rho^n \rightarrow 0$

□

Теорема 4.28. Характеристика полюса

Пусть $f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны:

1. a - полюс
2. Существует $g \in H(|z - a| < r), g(a) \neq 0$, такая, что $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, m \in \mathbb{N}$
3. В главной части ряда Лорана в точке a лишь конечное число ненулевых коэффициентов. Но они есть.

Доказательство. 1. $2 \Rightarrow 3$. $g(z) = \sum c_n(z-a)^n, c_0 \neq 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^{n-m}$ - разложение в ряд Лорана

2. $3 \Rightarrow 1$. $f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} b_n(z-a)^n$. Все слагаемые $o((z-a)^{-m})$, а на $b_{-m}(z-a)^{-m} \rightarrow \infty$

3. $1 \Rightarrow 2$. $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. Значит в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - a| < \varepsilon, |f(z)| > 1$. Рассмотрим $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in H(0 < |z - a| < r), \lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0$. Доопределим $g(a) = 0$ и получим $g \in H(|z - a| < \varepsilon)$ (предыдущая теорема (?)). a - ноль функции g . Тогда $g(z) = (z-a)^m h(z)$, где $h(a) \neq 0$ и $h \in H(|z - a| < \varepsilon)$

$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z-a)^m h(z)$. Тогда $f(z) = (z-a)^{-m} \frac{1}{h(z)}$ и $\frac{1}{h(z)} \in H(|z - a| < \varepsilon)$, потому что h не обращается в 0

□

Определение 4.16. Это m называется порядком полюса.

Замечание. Это аналог кратности нуля

Замечание. f имеет в a полюс порядка $m \iff \frac{1}{f}$ имеет в точке a ноль кратности m (доопределяем $\frac{1}{f}$ в a пл непрерывности)

А также $\iff f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_m \neq 0$

Теорема 4.29. Характеристика существенной особой точки

$f \in H(0 < |z - a| < r)$

Следующие условия равносильны

1. a - существенно особая точка
2. В главной части ряда Лорана в точке a бесконечное число ненулевых коэфф.

Доказательство. Доказательство очевидно следует из предыдущего.

□

Определение 4.17. f - мероморфная в Ω , если $f \in H(\Omega \setminus E)$ и в точках из E у неё полюсы

Пример. $f = \operatorname{ctg} \frac{1}{z}$ - мероморфная в $\mathbb{C} \setminus 0$

Полюсы в точках $z = \frac{1}{\pi k}$.

Но при этом $\operatorname{ctg} \frac{1}{z}$ не будет мероморфной в \mathbb{C} . В точке $z = 0$ проблема. В любой окрестности 0, найдётся плохая точка, а значит она не изолированная особая.

Замечание. 1. E не имеет предельных точек в Ω .

2. E не более чем счётно.

Свойства. Пусть f и g мероморфные в Ω . Тогда:

1. $f \pm g, \frac{f}{g}, fg, f'$ - мероморфны в Ω и порядки полюсов у f' на 1 больше, чем у f

Док-во: fg и $\frac{f}{g}$. Если не полюсы и не нули, то голоморфность сохранится.

$f(z) = \varphi(z)(z-a)^n$, a - полюс или 0.

$g(z) = \Psi(z)(z-a)^m$, a - полюс или 0.

Тогда $f(z)g(z) = \varphi(z)\Psi(z)(z-a)^{n+m}$

Для $f \pm g$ складываем ряды Лорана в a . В главной части $f \pm g$ конечное число ненулевых.

Для f' . $f'(z) = \varphi'(z)(z-a)^{-n} - n\varphi(z)(z-a)^{-n-1} = (z-a)^{-n-1}(z-a) - n\varphi(z) = \Psi(z)$

$\Psi(z) = -n\varphi(a) \neq 0$

Утверждение 4.30. Если f мероморфна в \mathbb{C} , то существует $g, h \in H(\mathbb{C})$, т.ч. $f = \frac{g}{h}$

Теорема 4.31. Сохоцкого

Пусть a - существенно особая точка функции f . Тогда $\operatorname{Clf}(0 < |z-a| < \varepsilon) = \mathbb{C}$

Более того, $\forall b \in \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$ найдётся такая последовательность $z_n \rightarrow a$, т.ч. $f(z_n) \rightarrow b$

Доказательство. 1. Случай $b = \infty$. f не ограничена в $0 < |z-a| < \frac{1}{n}$. Иначе a была бы устранимой особой точкой. Значит найдётся z_n , такое что $0 < |z_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(z_n)| \geq n$
 $z_n \rightarrow a$ и $f(z_n) \rightarrow \infty$

2. $b \in \mathbb{C}$. Если найдётся последовательность $z_n \rightarrow a$, т.ч. $f(z_n) = b$, то всё ясно. Если не найдётся, то в некоторой проколотой окрестности $0 < |z-a| < \varepsilon$ $f(z) \neq b$. Тогда рассмотрим $g(z) = \frac{1}{f(z)-b} \in H(0 < |z-a| < \varepsilon)$. a - изолированная особая точка для g .

$f(z) = b + \frac{1}{g(z)}$

Если a - полюс у g , то a - устранимая особая точка f - не подходит

Если a - устранимая особая точка g , то a - устранимая особая точка f или полюс - не подходит

Значит a - существенно особая точка g . Воспользуемся уже доказанным случаем для g . Найдётся $z_n \rightarrow a$, такая, что $g(z_n) \rightarrow \infty$. А тогда $\lim f(z_n) = b$.

□

Теорема 4.32. Пикара

Пусть a - существенно особая точка f и $\varepsilon > 0$. Тогда $f(0 < |z-a| < \varepsilon) = \mathbb{C}$ или \mathbb{C} без одной точки.

Пример. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ не обращается в ноль, хотя $z = 0$ - существенно особая точка.

Определение 4.18. Бесконечные пределы. $\lim z_n = \infty \iff \lim |z_n| = +\infty$

Свойства.

Если $\lim z_n = \infty$, w_n ограничена. Тогда $\lim(z_n \pm w_n) = \infty$

$$\lim z_n = 0 \iff \lim \frac{1}{z_n} = \infty$$

Если $\lim z_n = \infty$ и $|w_n| \geq c > 0$, то $\lim z_n w_n = \infty$

Доказательства очевидны + с первого курса

Определение 4.19. $f \in H(|z| > R)$. f голоморфна в ∞ , если там устранимая особая точка. То есть $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$

Замечание. $g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$ - перешли от бесконечности к нулю.

Замечание. $f \in H(|z| > R), g(z) = f(\frac{1}{z}) \in H(0 < |z| < \frac{1}{R})$

1. ∞ - устранимая особая точка $f \iff 0$ - устранимая особая точка g
2. ∞ - полюс $f \iff 0$ - полюс g
3. ∞ - существенно особая точка $f \iff 0$ - существенно особая точка g
 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$
4. ∞ - устранимая особая точка $f \iff$ коэфф. при положительных степенях 0
5. ∞ - полюс $f \iff$ при положительных степенях лишь конечное число ненулевых коэффциентов.
6. ∞ - существенно особая точка $f \iff$ при положительных степенях беск. число ненулевых коэфф.

Теорема 4.33. Луивилля

Если $f \in H(\bar{\mathbb{C}})$, то $f \equiv \text{const}$

Доказательство. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in \mathbb{C}$, значит при больших $|z|$ ограничена. $|f(z)| \leq M$ для $|z| > R$. С другой стороны $f \in C(|z| \leq R)$. Значит $|f(z)| \leq \bar{M}$. По теореме Лиувилля(старой), $f \equiv \text{const}$ \square