Теория вероятности

Храбров Александр Игоревич

29 января 2023 г.

Содержание

1. Элементарная теория вероятностей

1.1. Основные понятия

***Определение* 1.1.** $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пространство элементарных событий (исходов).

1. равновозможные
2. несовместные
3. одно всегда реализуется

***Определение* 1.2.** Событие $A \subset \Omega$

$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

Свойства. вероятности

1. $P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1,\ P(A) \in [0, 1]$
2. Если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $\underbrace{P(A \cup B)}_{=P(A)+P(B\setminus(A\cap B))} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, где $\overline{A} = \Omega \setminus A$
5. $P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_m) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j,\ i \neq k,\ j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{m-1} \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_m)$ – формула включений-исключений.

   Доказательство. Индукция по m.

   База $m = 2$.

   Переход $m \to m + 1$:

   $B_j = A_j \cup A_{m+1}$

   $P(\underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_m}_{=:B} \cup A_{m+1}) = P(B \cup A_{m+1}) = \underbrace{P(B)}_{\text{это умеем расписывать по инд. предп.}} + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1}) =$

   $= \sum_{j=1}^{m+1} P(A_j) - sum_{i \neq j}^{m} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k}^{m} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \underbrace{P(A_{m+1} \cap B)}_{=P(B_1 \cup B_2 \dots \cup B_m)}$, где $B_i := A_i \cap A_{m+1}$. □

6. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

   $P(A_1 \cup \dots \cup A_m) \leq \sum_{j=1}^{m} P(A_j)$

***Определение* 1.3. Условная вероятность.**

$B \neq \varnothing,\ P(B) > 0$.

Знаем, что выполнилось событие B, хотим узнать вероятность наступления A.

$P(A|B) = \frac{\#(A \cap B)}{\#B} = \frac{\frac{\#(A\cap B)}{\#\Omega}}{\frac{\#B}{\#\Omega}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Свойства.

1. $P(A|A) = 1$, если $B \subset A$, то $P(A|B) = 1$
2. Если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

   В частности: $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$

`Замечание.` $P(A|B) + P(A|\overline{B})$ не обязана быть 1.

Пример: игральный кубик, B – выпало четное число, A – выпало кратное трем.

$P(A|B) = \frac{1}{3},\ P(A|\overline{B}) = \frac{1}{3}$

Теорема 1.1. Формула полной вероятности.

Пусть $\Omega = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j,\ P(B_j) > 0$.

Тогда $P(A) = \sum_{j=1}^{m} P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

Доказательство. $\sum_{j=1}^{m} \underbrace{P(A|B_j)}_{=\frac{P(A\cap B_j)}{P(B_j)}} \cdot P(B_j) = \sum_{j=1}^{m} P(A \cap B_j) = P(A \cap \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j) = P(A)$ □

Пример. I. 3 белых шара, 5 черных шаров

II. 5 белых, 5 черных

2 шара из I положили в II, затем вынули 1 шар из II, $P(\text{вынули белый}) = ?$

A – вынули из II белый шар.

$B_0,\ B_1,\ B_2$, где B_j – переложили j белых шаров из I в II.

Тогда $P(A|B_0) = \frac{5}{12},\ P(A|B_1) = \frac{1}{2},\ P(A|B_2) = \frac{7}{12}$.

$P(B_0) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$

$P(B_1) = \frac{15}{C_8^2} = \frac{15}{28}$

$P(B_2) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$

Подставляем в формулу:

$P(A) = \frac{331}{336}$

Теорема 1.2. Формула Байеса.

Пусть $P(A) > 0,\ P(B) > 0$, тогда $P(B|A) = \frac{P(A|B)\cdot P(B)}{P(A)}$

Доказательство. Расписываем $P(A|B)$, получаем в правой части: $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \cdot P(B) \cdot \frac{1}{P(A)}$. □

Теорема 1.3. Байеса.

Пусть $P(A) > 0,\ P(B_j) > 0,\ \Omega = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j$, тогда

$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\cdot P(B_j)}{P(A|B_1)P(B_1)+\cdots+P(A|B_m)P(B_m)}$

Пример. Есть 2 монеты (одна симметричная, вторая $P(\text{орла}) = \frac{1}{3},\ P(\text{решка}) = \frac{2}{3}$). Взялу наугад монету, побросили и выпал орел. Какова вероятность, что мы взяли симметричную монету?

A – выпал орел, B – монета симметричная ($\overline{B}$ – монета кривая).

$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$

***Определение* 1.4. Независимые события**.

Рассуждения: A не зависит от B, если $P(A) = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

Опр. $A,\ B$ независимые события, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

***Определение* 1.5.** События $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – независимы в совокупности, если

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k})$ – для любых индексов i_j.

`Замечание.` Независимость в совокупности $\implies$ попарная независимость.

Наоборот неверно.

Пример. Есть два игральных кубика.

A – на первом кубике выпало четное число.

B – на втором выпало четное число.

C – сумма на кубиках четная.

Пространство элементарных исходов это все пары (i, j), где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\#\Omega = 36$.

$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{2}$.

$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$, остальные равенства тоже выполняются $\implies$ попарная независимость.

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \implies$ нет независимости в совокупности.

Упражнение. Д-ть, что $A_1, \dots A_m$ независимы в совокупности $\Leftrightarrow P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_m) = P(B_1) \dots P(B_m)$, где $B_j = A_j$ или $\overline{A_j}$ (все 2^m равенств).

`Замечание.` Небольшое обобщение.

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – пр-во элементарных исходов.

Также у нас есть $p_1, \dots p_n :\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ \forall i :\ p_i \geq 0$.

$P(A) = \sum_{j:\ \omega_j \in A} p_j$.

Теорема 1.4. Схема Бернулли.

орел = успех = 1.

решка = неудача = 0.

$P(\text{орел}) = p,\ 0 \leq p \leq 1$

$P(\text{решка}) = 1 - p$

Бросаем монету n раз, получаем последовательность исходов:

$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} :\ x_j = 0$ или 1.

$\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n),\ P(\{\omega\}) = p^{\#i:\ x_i=1} \cdot q^{\#i:\ x_i=0} = p^{\sum x_i} \cdot q^{n-\sum x_i}$

Хотим узнать:

$P(\text{выпало ровно } k \text{ орлов}) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$P(i\text{-ое подбрасывание} = \text{орел})$ – независимые в совокупности по $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 1.5. Полиномиальная схема.

$p_1, p_2, \dots, p_m : \sum p_i = 1$.

$P(x_i = k) = p_k$, где $x_i \in \{1, 2, \dots, m\}$

$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\},\ \omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$P(\{\omega\}) = p_1^{\#\{i:x_i=1\}} \cdot \dots \cdot p_m^{\#\{i:x_i=m\}}$

$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

$P(k \text{ раз выпало } 1,\ k_2 \text{ раз выпало } 2,\ \dots) = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!}$

Теорема 1.6. Эрдёша-Мозера

Рассмотрим турнир на n команд. При каком наибольшем k можно всегда выбрать команды

$A_1, A_2 \dots A_k$, так, что A_i выиграла у A_j, если $i < j$? При $k \leqslant 1 + [2\log_2 n]$

Доказательство. Рассмотрим случайный турнир(Всего $\binom{n}{2}$, тогда Всего $2^{\binom{n}{2}}$ разных турниров. Случайный - берём из этой кучи наугад).

P(A выиграла у B) $= \frac{1}{2}$. Рассмотрим $A_1, A_2, \dots A_k$ команды.

$P(A_1, A_2 \dots A_k$ подходят$) = (\frac{1}{2})^{\binom{k}{2}}$.

$P(A_1, A_2 \dots A_k$ можно переименовать, так, что они подошли$) \leqslant \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$

P(какие-то k команд подошли) $\leqslant \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}}$

Нужно понять, что если $k \geqslant [2+2\log_2 n]$, то $\binom{n}{k}\frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} < 1$. $\binom{n}{k}\frac{k!}{2^{\binom{k}{2}}} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{(2^{\frac{k-1}{2}})^k} = (\frac{n}{2^{\frac{k-1}{2}}})^k$

Надо понять, что $2^{\frac{k-1}{2}} \geqslant n \Leftrightarrow \frac{k-1}{2} \geqslant \log_2 n$ □

1.2. Предельные теоремы для схем Бернулли

***Определение* 1.6.** Схема Бернулли с вероятностью успеха $p \in (0,1)$. S_n - число успехов при n испытаниях. $P(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

Что будет больше $P(S_{1000} = 220)$ при $p = \frac{1}{5}$ или $P(S_{2000}) = 360$ при $p = \frac{1}{6}$. Точные вычисления дают 0.008984 и 0.006625 соответственно.

Теорема 1.7. Пуассона

Схема Бернулли с n испытаниями и вероятностью успеха p_n - зависит от n. Если $np_n \to \lambda > 0$. Тогда $P(S_n = k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

`Замечание.` Если $np_n = \lambda$, то теорема верна при $k = o(\sqrt{n})$

Доказательство. $P(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}p_n^k(1-p_n)^{n-k}$. $\sim \frac{n^k}{k!}p_n^k(1-p)^{n-k} \sim \frac{\lambda^k}{k!}(1-p_n)^n$. Прологарифмируем: $\ln(1-p_n)^n = n\ln(1-p_n) \sim -np_n \sim -\lambda$

Доказательство замечания:

$\ln(1-p_n)^k = k\ln(1-p_n) \sim -kp_n \to 0$

Осталось понять, что $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \to 1$ при $k = o(\sqrt{n})$.

$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot (1-\frac{1}{n}) \dots \cdot (1-\frac{k-1}{n}) \geqslant 1 - \frac{1}{n} - \dots - \frac{k-1}{n} = 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \to 1$

Неравенство $(1-x_1)\dots(1-x_k) \geqslant 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k$ при $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ - индукция. □

Теорема 1.8. Прохорова

Если $\lambda = np$, то $\sum_{i=0}^{+\infty} |P(S_n = k) - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}| \leqslant \frac{2\lambda}{n} \cdot \min(2, \lambda)$

Пример. Игра в рулетку: 36 чисел и ноль.

$p = \frac{1}{37}, n = 111, np = 3\lambda$.

$P(S_111 = 3) = \binom{111}{3}(\frac{1}{37})^3(1-\frac{1}{37})^{111-3} = 0.227127$

Из Пуассона $\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 0.224$

Видим, что приближение хорошее.

P(выигрыш) $= 1 - P(S_{111} = 0) - P(S_{111} = 1) - P(S_{111} = 2) - P(S_{111} = 3) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 0.352754$

А по формулам 0.352768

Теорема 1.9. Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа

Схема Бернулии с вероятностью успеха $p \in (0,1)$. $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

$P(S_n = k) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

Если $|x| \leqslant T$, то есть равномерность.

Доказательство. $k = np + x\sqrt{npq} \geqslant np - T\sqrt{npq} \to +\infty$

$n - k = nq - -x\sqrt{npq} \geqslant nq - T\sqrt{npq} \to +\infty$

$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$

Напишем формулу Стирлинга:

$\frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi n}(n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi(n-k)}} = \frac{p^k q^{n-k}}{(\frac{k}{n})^k \cdot (\frac{n-k}{n})^{n-k} \cdot \sqrt{2\pi \frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})n}}$

$\frac{k}{n} \to p, \frac{n-k}{n} \to q$

Поэтому остаётся доказать, что $\frac{p^k q^{n-k}}{(\frac{k}{n})^k \cdot (\frac{n-k}{n})^{n-k}} \to e^{\frac{-x^2}{2}}$

$k \ln\frac{k}{n} + (n-k)\ln\frac{n-k}{n} - k\ln p - (n-k)\ln q \to \frac{x^2}{2}$

$\alpha = \frac{k}{n} \to p, \beta = \frac{n-k}{n} \to q$

$n\alpha \ln\alpha + n\beta\ln\beta - n\alpha\ln p - n\beta \ln q \to \frac{x^2}{2} = n\alpha \ln\frac{\alpha}{p} + n\beta\ln\frac{\beta}{q}$

Напишем Тейлора:

$\frac{\alpha}{p} = 1 + x\sqrt{\frac{q}{p}}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\frac{\beta}{q} = 1 - x\sqrt{\frac{p}{q}}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\ln\frac{\alpha}{p} = \ln(1 + x\sqrt{\frac{q}{p}\frac{1}{\sqrt{n}}}) = x\sqrt{\frac{q}{p}} - \frac{1}{2}x^2\frac{q}{p}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

$\ln\frac{\beta}{q} = \ln(1 - x\sqrt{\frac{p}{q}\frac{1}{\sqrt{n}}}) = -x\sqrt{\frac{p}{q}}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}x^2\frac{p}{q}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

Сумма равна: $x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2q - \frac{1}{2}x^2q + o(\frac{1}{n}) - x\sqrt{pq}\sqrt{n} + x^2p - \frac{1}{2}x^2p + o(\frac{1}{n}) = x^2(\frac{q}{2}+\frac{p}{2}) + o(1) = \frac{x^2}{2} + o(1)$

Извините, это было очень больно... □

`Замечание.` Если $\varphi(n) = o(n^{\frac{2}{3}})$ и $|k - np| \leqslant \varphi(n)$, то теорема тоже верна

Пример. Всё та же рулетка. $n = 222, k = 111$. Пытаемся ставить на на четное/нечётное(кроме 0). $p = \frac{18}{37}$

$P(S_{222} = 111) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{\frac{-x^2}{2}} \approx 0.049395\ldots$

Если считать точно, то получим $0.0493228\ldots$

Теорема 1.10. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

$0 < p < 1$. $P(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b) \to_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

Равномерно по a и b