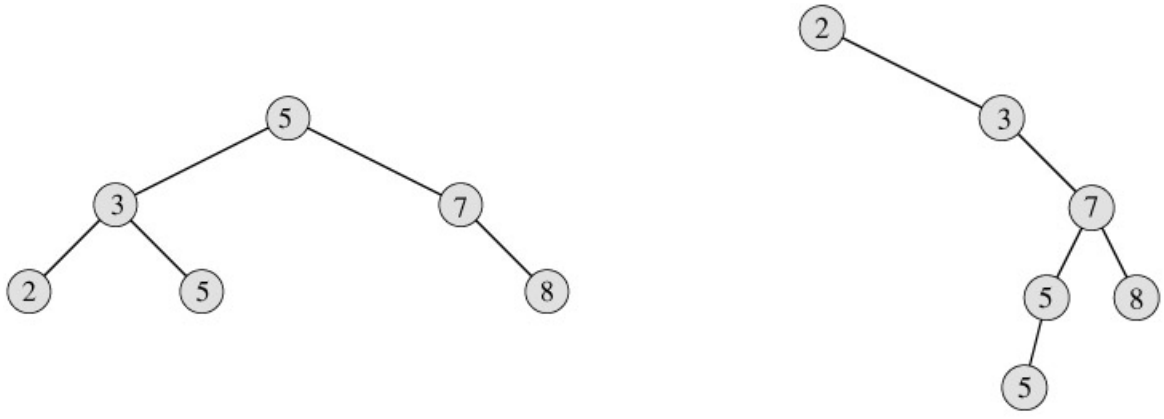
ЛЕКЦІЯ 3. БІНАРНІ ДЕРЕВА ПОШУКУ

3.1. Бінарні дерева пошуку

Бінарні дерева пошуку (англ. *binary search tree*) представляють собою структури даних, які підтримують більшість операцій з динамічними множинами: пошук елементів, мінімального та максимального значення, попереднього та наступного елементу, вставку та видалення. Таким чином, бінарне дерево пошуку може використовуватись як словник, так і як черга з пріоритетами.

Як слідує з назви, бінарне дерево пошуку в першу чергу є бінарним деревом (рис. 3.1) Таке дерево може бути представлене за допомогою зв'язаної структури даних, в якій кожний вузол є об'єктом. Ключі у бінарному дереві пошуку зберігаються таким чином, щоб в будь-який момент задовольняти наступній умові бінарного дерева пошуку: якщо x – вузол бінарного дерева пошуку, а вузол y знаходиться у лівому піддереві x, то $key[y] \le key[x]$; якщо y знаходиться у правому піддереві x, то $key[y] > key[x]$.

На рис. 3.1, *а)* ключ кореня дорівнює 5, ключі 2, 3 та 5, які не більші значення ключа в корені, знаходяться в його лівому піддереві, а ключі 7 та 8, які не менші кореня, – в правому піддереві. Та сама властивість виконується й для кожного внутрішнього вузла дерева. На рис. 3.1, *б)* показане дерево з тими самим вузлами та яке має ту саму властивість, проте менш ефективне в роботі, адже його висота дорівнює 4, на відміну від дерева на рис. 3.1, *а*, висота якого дорівнює 2.



а) *б)*

Рис. 3.1. Приклад бінарного дерева пошуку.

Властивість бінарного дерева пошуку дозволяє вивести всі ключі, які знаходяться у дереві, у відсортованому порядку за допомогою простого рекурсивного алгоритму, який називається *обходом дерева у внутрішньому порядку* (англ. *inorder*). Цей алгоритм обходить вершини дерева таким чином, що корінь піддерева обходиться після свого лівого піддерева та перед правим піддеревом. Є й інші способи обходу дерева: *обхід у прямому порядку* (англ. *preorder*), коли спочатку обходиться корінь, а потім його нащадки зліва направо, та *обхід у зворотному порядку* (англ. *postorder*), коли спочатку обходяться нащадки зліва направо, а потім корінь піддерева. Обхід дерева T у внутрішньому порядку реалізується процедурою `InorderTreeWalk()`.

```
InorderTreeWalk(x)
1    if x ≠ NULL
2         then InorderTreeWalk(left[x])
3              print key[x]
4              InorderTreeWalk(right[x])
```

Лістинг 3.1. Процедура `InorderTreeWalk()` обходу дерева у внутрішньому порядку.

Головний виклик даної процедури для дерева T має вигляд: `InorderTreeWalk(root[T])`. Для дерев з рис. 3.1 ми отримуємо в обох випадках один й той самий вивід: 2, 3, 5, 5, 7, 8. Коректність описаного алгоритму слідує безпосередньо з властивостей бінарного дерева пошуку.

Для обходу дерева необхідний час $\Theta(n)$, оскільки після початкового виклику процедура викликається рівно два рази для кожного вузла дерева: один раз для його лівого дочірнього вузла, та інший раз – для правого.

3.2. Робота з бінарними деревами пошуку

Найбільш розповсюдженою операцією, яка виконується з бінарним деревом пошуку, є пошук в ньому певного ключа. Окрім того, бінарні дерева пошуку підтримують такі запити, як пошук мінімального та максимального елементів, а також наступного та попереднього. Всі ці операції можуть бути виконані за час $O(h)$, де h – висота дерева.

Для пошуку вузла із заданим ключем у бінарному дереві пошуку

використовується наступна процедура `TreeSearch()`, яка отримує в якості параметрів вказівник на корінь бінарного дерева та ключ *k*, а повертає вказівник на вузол з цим ключем (якщо такий існує, або значення NULL у протилежному випадку).

```
TreeSearch(x, k)
1     if x = NIL або k = key[x]
2           then return x
3     if k < key[x]
4           then return TreeSearch(left[x], k)
5           else return TreeSearch(right[x], k)
```

Лістинг 3.2. Процедура пошуку ключа `TreeSearch()`.

Процедура пошуку починається з кореня дерева та переходить униз по дереву. Для кожного вузла *x* на шляху вниз його ключ *key*[*x*] порівнюється з ключем *k*, який був переданий у якості параметру. Якщо ключі однакові, то пошук завершений – ми знайшли елемент. Якщо *k* менше *key*[*x*], то пошук продовжується у лівому піддереві *x*; якщо більше – то у правому піддереві. На рис. 3.2 для пошуку ключа 13 ми повинні пройти наступний шлях від кореня: $15 \to 6 \to 7 \to 13$. Вузли, які відвідуються при рекурсивному виклику, утворюють низхідний шлях від кореня дерева, так що час роботи процедури `TreeSearch()` дорівнює O(*h*), де *h* – висота дерева.

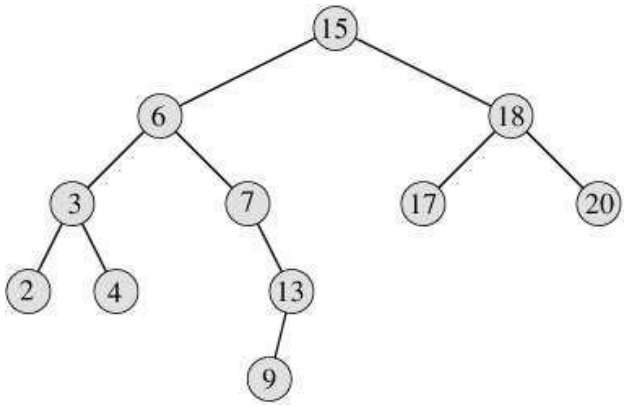


Рис. 3.2. Приклад бінарного дерева пошуку.

Ту саму процедуру можна записати ітеративно, якщо розгорнути рекурсію у цикл **while**. На більшості ком'ютерів така версія виявляється більш ефективною за рахунок того, що не потрібно витрачати процесорний час на дочірні виклики

функції.

```
IterativeTreeSearch(x, k)
1    while x ≠ NULL та k ≠ key[x]
2         do if k < key[x]
3              then x = left[x]
4              else x = right[x]
5    return x
```

Лістинг 3.3. Ітеративна реалізація процедури пошуку `IterativeTreeSearch()`.

Елемент з мінімальним значенням ключа легко знайти, якщо рухатись за покажчиками `left` від кореневого вузла допоки не зустрінеться значення NULL. Так, на рис. 3.2, слідуючи таким чином, буде пройдений шлях $15 \to 6 \to 3 \to 2$ до мінімального ключа в дереві, який дорівнює 2. Нижче наведений псевдокод цього алгоритму.

```
TreeMinimum(x)
1    while left[x] ≠ NULL
2         do x = left[x]
3    return x
```

Лістинг 3.4. Процедура `TreeMinimum()` пошуку мінімального елементу в дереві.

Властивість бінарного дерева пошуку гарантує коректність процедури `TreeMinimum`. Якщо у вузла *x* немає лівого піддерева, то оскільки всі ключі в правому піддереві *x* не менші за *key*[*x*], мінімальний ключ піддерева з коренем у вузлі *x* знаходиться в цьому вузлі. Якщо ж у вузла є ліве піддерево, то, оскільки, в правому піддереві не може бути вузла з ключем, який менший за *key*[*x*], а всі ключі у вузлах лівого піддерева не більші за *key*[*x*], то вузол з мінімальним значенням ключа знаходиться у піддереві, коренем якого є вузол *left*[*x*].

Алгоритм пошуку максимального елементу дерева симетричний алгоритму пошуку мінімального елементу:

```
TreeMaximum(x)
1    while right[x] ≠ NULL
2         do x = right[x]
3    return x
```

Лістинг 3.5. Процедура `TreeMaximum()` пошуку максимального елементу в дереві.

Обидві представлені процедури знаходять мінімальний (максимальний) елементи дерева за час O(*h*), де *h* – висота дерева, оскільки, як і в процедурі `TreeSearch()`, послідовність досліджуваних вузлів утворює низхідний шлях від кореня дерева.

Іноді, маючи вузол у бінарному дереві пошуку, необхідно визначити вузол, який йде наступним або попереднім у відсортованій послідовності. Якщо всі ключі різні, то наступним по відношенню до вузла *x* є вузол із найменшим ключем, який більший за *key*[*x*]. Структура бінарного дерева пошуку дозволяє знайти такий вузол навіть не виконуючи порівняння ключів. Наведена нижче процедура повертає вузол, який є наступним за *x* у бінарному дереві пошуку (якщо такий існує) та NULL, якщо *x* має найменше значення ключа у дереві.

```
TreeSuccessor(x)
1     if right[x] ≠ NULL
2           then return TreeMinimum(right[x])
3     y = parent[x]
4     while y ≠ NULL та x = right[y]
5           do x = y
6              y = parent[y]
7     return y
```

Лістинг 3.6. Процедура `TreeSuccessor()` визначення вузла наступника.

Код процедури `TreeSuccessor()` розбитий на дві частини. Якщо праве піддерево вузла *x* не порожнє, то наступний за *x* елемент є крайнім лівим вузлом у правому піддереві. Цей елемент визначається викликом процедури `TreeMinimum()` у рядку 2. Наприклад, на рис. 3.2 наступний за вузлом з ключем 15 є вузол з ключем 7.

З іншого боку, якщо праве піддерево вузла *x* порожнє та в *x* є наступний за ним елемент *y*, то *y* є найменшим предком *x*, чий лівий нащадок також є предком *x*. На рис. 3.2 наступний за вузлом з ключем 13 є вузол з ключем 15. Для того щоб знайти *y*, необхідно просто підніматись вгору деревом допоки не зустрінемо вузол, який є лівим дочірнім вузлом свого батька. Це виконується у рядках 3 - 7

алгоритму.

Час роботи процедури `TreeSuccessor()` у дереві висотою h складає $O(h)$, оскільки ми або рухаємось униз за деревом від початкового вузла, або вгору. Процедура пошуку наступного вузла в дереві `TreePredecessor()` симетрична процедурі `TreeSuccessor()` і так само працює за час $O(h)$.

Якщо в дереві є вузли з однаковими ключами, то можна просто визначити наступний та попередній вузли як такі, що повертаються процедурами `TreeSuccessor()` та `TreePredecessor()`, відповідно.

3.3. Вставка та видалення

Операції вставки та видалення призводять до внесення змін у динамічну множину, яка представлена бінарним деревом. Структура даних повинна бути змінена таким чином, щоб відображати ці зміни, але при цьому зберігати властивість бінарних дерев пошуку.

Для вставки нового значення v у бінарне дерево пошуку T скористаємось процедурою `TreeInsert()`. Процедура отримує в якості параметру вузол z, у якого $key[z] = v$, $left[z] = NULL$ та $right[z] = NULL$, після чого вона таким чином змінює T та деякі поля z, що z виявляється вставленим у відповідну позицію з дереві.

```
TreeInsert(T, z)
1     y = NULL
2     x = root[T]
3     while x ≠ NULL
4           do y = x
5                 if key[z] < key[x]
6                       then x = left[x]
7                       else x = right[x]
8     parent[z] = y
9     if y = NULL
10          then root[T] = z
11          else if key[z] < key[y]
12                then left[y] = z
13                else right[y] = z
```

Лістинг 3.7. Процедура `TreeInsert()` вставки нового елементу в дерево.

На рис. 3.3 наведена робота процедури `TreeInsert()`. Подібно до процедур `TreeSearch()` та `IterativeTreeSearch()`, процедура `TreeInsert()` починає роботу з кореневого вузла дерева та проходить низхідним шляхом. Вказівник *x* відмічає пройдений шлях, а вказівник *y* вказує на батьківський по відношенню до *x* вузол. Після ініціалізації цикл **while** у рядках 3 - 7 переміщує вказівники вниз деревом, пересуваючись ліворуч чи праворуч залежно від результату порівняння ключів *key*[*x*] та *key*[*z*] допоки *x* не стане рівним NULL. Це значення знаходиться саме в тій позиції, куди слід помістити елемент *z*. У рядках 8 - 13 виконується приписування значень вказівникам для вставки *z*.

Як й інші базові операції над бінарними деревами пошуку, процедура `TreeInsert()` виконується за час O(*h*), де *h* – висота дерева.

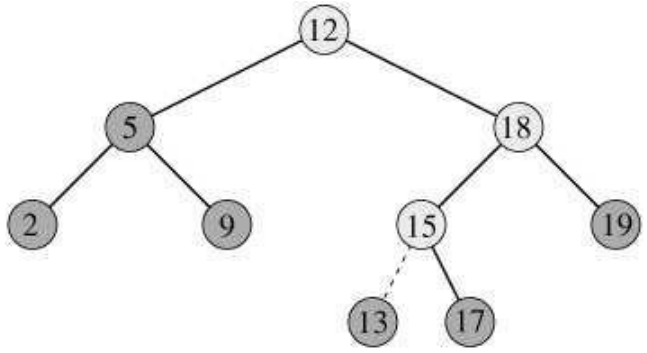
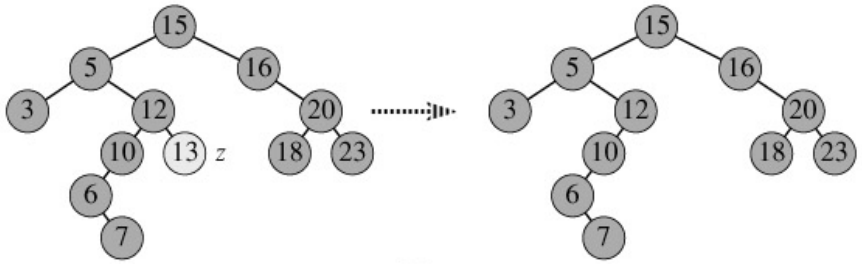
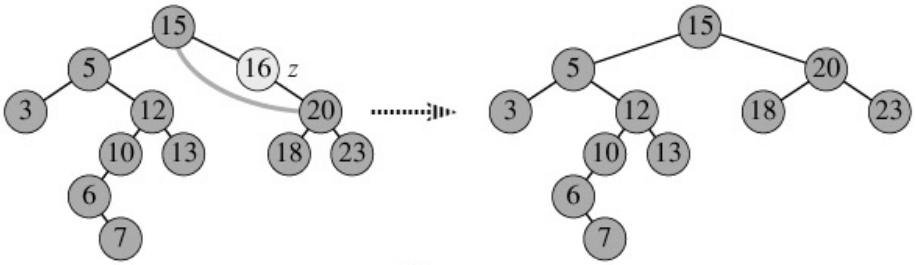


Рис. 3.3. Вставка елементу з ключем 13 у бінарне дерево пошуку.

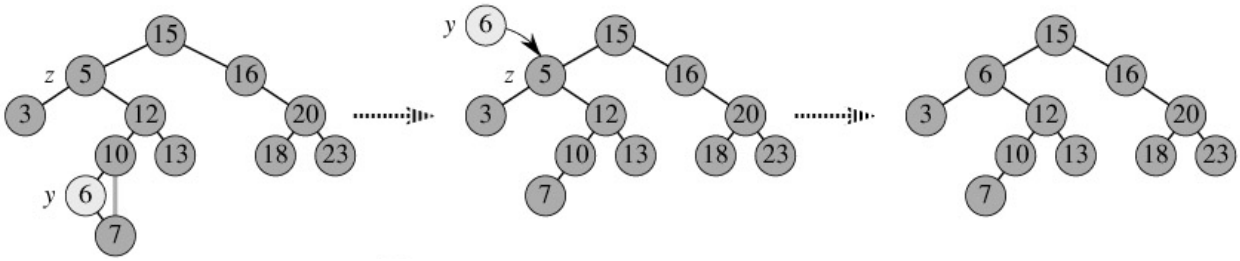
Процедура видалення даного вузла *z* з бінарного дерева пошуку отримує в якості аргументу вказівник на *z*. Процедура переглядає три можливі ситуації, які наведені на рис. 3.4. Якщо у вузла *z* немає дочірніх вузлів (рис. 3.4, *а*), то ми просто змінюємо батьківський вузол *parent*[*z*], замінюючи в ньому вказівник на *z* значенням NULL. Якщо у вузла *z* тільки один дочірній вузол (рис. 3.4, *б*), то ми видаляємо *z*, створюючи новий зв'язок між батьківським та дочірнім вузлом вузла *z*. Нарешті, якщо у вузла *z* два дочірніх вузла (рис. 3.4, *в*), то ми шукаємо наступний за ним вузол *y*, в якого немає лівого дочірнього вузла, видаляємо його з позиції, де він знаходився раніше, шляхом створення нового зв'язку між його батьком та нащадком, і замінюємо ним вузол *z*.



а)



б)



в)

Рис. 3.4. Різні варіанти видалення елементу з бінарного дерева пошуку.

Код процедури `TreeDelete()` реалізує ці дії трохи по-інакшому, ніж вони описані.

```
TreeDelete(T, z)
1     if left[z] = NULL або right[z] = NULL
2           then y = z
3           else y = TreeSuccessor(z)
4     if left[y] ≠ NULL
5           then x = left[y]
6           else x = right[y]
7     if x ≠ NULL
8           then parent[x] = parent[y]
9     if parent[y] = NULL
10          then root[T] = x
```

```
11        else if y = left[parent[y]]
12             then left[parent[y]] = x
13             else right[parent[y]] = x
14   if y ≠ z
15        then key[z] = key[y] //Копіювання допоміжних даних з y в z
16   return y
```

Лістинг 3.8. Процедура TreeDeleteвидалення елементу з дерева.

У рядках 1 - 3 алгоритм визначає вузол *y*, який видаляється шляхом „склеювання" батька та нащадка. Цей вузол є або вузлом *z* (якщо у вузла *z* не більше одного дочірнього вузла), або вузол, який є наступним за *z* (якщо у вузла *z* два дочірніх вузла). Потім у рядках 4 - 6 *x* приписується вказівник на дочірній вузол вузла *y* або значення NULL, якщо в *y* немає дочірніх вузлів. Далі вузол *y* видаляється у рядках 7 - 13 шляхом зміни вказівників у *parent*[*y*] та *x*. Це видалення ускладнюється необхідністю коректної обробки граничних умов (коли *x* дорівнює NULL або коли *y* – кореневий вузол). Нарешті, у рядках 14 - 15, якщо видалений вузол *y* був наступним за *z*, ми переписуємо ключ *z* та допоміжні дані ключем та допоміжними даними *y*. Видалений вузол *y* повертається у рядку 16, з тим щоб процедура, яка викликала видалення, могла за необхідністю звільнити використану ним пам'ять. Час роботи описаної процедури становить O(*h*), де *h* – висота дерева.

Отже, ми отримали, що всі базові операції у бінарному дереві пошуку виконуються за один й той самий час – O(*h*), де *h* – висота дерева. Як було наведено вище, недоліком бінарних дерев пошуку є те, що вони для однакових значень ключів можуть мати різну висоту *h*. Зрозуміло, що оптимальне значення висоти буде дорівнювати $\log_2 n$, де *n* – кількість елементів у дереві. Дерева, які мають таку висоту називаються *збалансованими*. У загальному випадку бінарні дерева пошуку не є збалансованими, адже додавання або вилучення елементів з дерева призводить до його розбалансування. Підтримка збалансованості дерева досить трудомістка операція. Тож замість постійного відновлення збалансованості, рекомендується використання інших деревоподібних структур (*червоно-чорні дерева, AVL-дерева*), які гарантують збереження властивості збалансованості під

час роботи з ними.

Література

1. Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. : Пер. с англ. – М. : Изд. дом "Вильямс", 2011. – 1296 с. (Глава 12)