ЛЕКЦІЯ 10. РЕКУРСИВНІ ФУНКЦІЇ

Історично першою алгоритмічною системою була система, що ґрунтується на використанні конструктивно визначених арифметичних (цілочислових) функцій, які назвали ***рекурсивними функціями***.

Зведення довільних алгоритмів до числових функцій. Обчислювані функції.

Нехай задано деякий алгоритм *A*, який можна застосувати до цілого класу задач, тобто до ряду допустимих вхідних даних - умов задач. Пронумеруємо ці умови цілими числами $n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots$. Результати роботи алгоритму також пронумеруємо цілими додатними числами $m_1, m_2, \ldots m_k, \ldots$. Тоді $m_i = A(n_j)$, та оскільки m_i та n_j - числа, то алгоритм *A* визначає деяку числову функцію φ

$$m_i = \varphi(n_j), (i, j = 1, 2, \ldots),$$

де $\varphi: N \to N$.

Отже, виконання довільного алгоритму *A* є еквівалентним обчисленню значень деякої числової функції φ.

Числові функції, значення яких можна обчислити за допомогою деякого (єдиного для заданої функції) алгоритму, називають ***обчислюваними функціями***.

Оскільки поняття алгоритму використане тут в інтуїтивному сенсі, то і поняття обчислюваної функції є інтуїтивним.

Формальним еквівалентом цього поняття є поняття ***рекурсивної функції***, введене в працях К. Геделя, А. Черча, С.-К. Кліні у 30-х роках XX ст.

Найпростіші функції.

Позначимо $N \equiv Z^+$ - множину всіх натуральних чисел, а $N^{(n)} = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_i \in N\}$ - множину усіх можливих *n* натуральних чисел.

Числову функцію $\varphi : N \to N$ називають ***функцією наступності***, якщо $\varphi(x) = x + 1$.

Числову функцію $\varphi : N^{(n)} \to N$ називають ***нуль-функцією***, якщо $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Числову функцію $\varphi : N^{(n)} \to N$ називають ***функцією вибору аргументів***, якщо вона повторює значення свого *і*-го аргументу: $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_i, (1 \le i \le n)$.

Позначимо функцію наступності через $S^1(x)$, нуль-функцію - $O^n(x_1, \ldots x_n)$ і функцію вибору аргументів - через $I_i^n(x_1, \ldots x_n)$:

Функції $S^1(x)$, $O^n(x_1, \ldots x_n)$, $I_i^n(x_1, \ldots x_n)$ називають ***найпростішими***. Найпростіші функції є всюди визначені.

Приклад. Найпростішими є такі функції: $S^1(5) = 6$, $O^4(3,6,2,1) = 0$, $I_2^3(4,3,8) = 3$.

Головні оператори.

Операції над функціями називають ***операторами***. Розглянемо три головні оператори, які використовують під час побудови частково-рекурсивних функцій.

1. ***Оператор суперпозиції***. Нехай *A, B, C* - довільні множини, на яких визначено *n* часткових функцій (тобто не обов'язково визначено для всіх значень аргументів) $f_i^m : A \to B, (i = \overline{1,n})$ від однієї й тієї ж кількості змінних *m*:

$$\begin{aligned} &f_1^m(x_1, x_2, \ldots x_m), \\ &f_2^m(x_1, x_2, \ldots x_m), \\ &\ldots \\ &f_n^m(x_1, x_2, \ldots x_m). \end{aligned}$$

Нехай також задана часткова *n*-місна функція $f^n : B \to C$.

Розглянемо часткову *m*-місну функцію $g^m : A \to C$, таку що

$$g^m(x_1,x_2,\dots,x_m)=f^n\left(f_1^m(x_1,x_2,\dots,x_m),\dots,f_n^m(x_1,x_2,\dots,x_m)\right)$$

для довільних $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ з *A*.

Оператор, за допомогою якого з функцій $f^n, f_1^m, f_2^m,\dots, f_n^m$ утворюється функція g^m, що задовольняє наведену вище рівність, називають ***оператором суперпозиції***.

Позначимо оператор суперпозиції S^{n+1} де *n* + 1 - кількість функцій.

Приклад. Нехай $h(x)=0, f(x)=x+1$, тоді

$S^2(f^1,h^1)=f\left(h(x)\right)=1;$

$S^2\left(f^1,f^1\right)=f\left(f(x)\right)=(x+1)+1=x+2\,.$

Приклад. Суперпозицією трьох функцій вибору аргументів I_2^2,I_1^3,I_2^3, є така функція: $S^3\left(I_2^2,I_1^3,I_2^3\right)=I_2^2\left(x_1,x_2\right)=x_2\,.$

Оператор S^{n+1} визначений тоді й тільки тоді, коли функції $f_1,\dots,f_n$ мають однакову кількість аргументів, а *f* є *n*-місною.

У разі суперпозиції функцій з різною кількістю аргументів за допомогою функції вибору аргументів уводять фіктивні змінні.

Наприклад, функцію двох змінних $\varphi\left(x_1,x_2\right)$ можна зобразити у вигляді функції трьох змінних, з яких одна фіктивна:

$$\varphi\left(x_1,x_2\right)=\varphi\left(I_1^3\left(x_1,x_2,x_3\right),I_1^3\left(x_2,x_2,x_3\right)\right)-\psi\left(x_1,x_2,x_3\right)$$

Нехай F^k - множина всіх часткових *k*-місних функцій $f^k:N^{(k)}\to N$. Тоді оператор S^{n+1} є всюди визначеною $n+1$-місною функцією

$$S^{n+1}:F^n\times\underbrace{F^m\times\ldots\times F^m}_{n}\to F^m\,.$$

Область визначення цієї функції є декартовий добуток:

$$F^n\times F^m\times\ldots\times F^m=\left\{\left\langle f^n,f_1^m,\dots,f_n^m\right\rangle \mid f^n\in F^n, f_i^m\in F^m; i=\overline{1,n}\right\}.$$

Якщо множину всіх часткових числових функцій від довільної кількості аргументів позначити через F, то оператор S^{n+1} можна розглядати як часткову функцію $S^{n+1}: F \to F$.

Тобто оператор суперпозиції не погіршує області допустимих значень, а в разі застосування до часткових функцій ($F_{ч.ф.}$) результатом є часткова функція: $S^{n+1}: F_{ч.ф.} \to F_{ч.ф.}$

Часткові функції, які можна отримати за допомогою оператора суперпозиції з функцій $f_1^{n_1}, \ldots, f_1^{n_k}$ і найпростіших функцій $I_m^n \ (m, n = 1, 2, \ldots)$, називають *елементарними відносно функцій* $f_1^{n_1}, \ldots, f_1^{n_k}$.

Приклад. Функція $x_1 + x_2 + x_3$ є елементарною відносно функцій $+$ та$\times$, оскільки $x_1 + x_2 + x_3 = S^3\left(+, S^3\left(\times, I_1^3, I_2^3\right), I_3^3\right)$.

2. ***Оператор примітивної рекурсії***. Нехай задані часткові числові функції

$$g^n : N^{(n)} \to N;$$

$$h^{n+2} : N^{(n+2)} \to N.$$

Розглянемо часткову функцію $f^{n+1} : N^{(n+1)} \to N$, визначену так:

$$\begin{cases} f\left(x_1, \ldots x_n, 0\right) = g\left(x_1, \ldots x_n\right), \\ f\left(x_1, \ldots x_n, y+1\right) = h\big(x_1, \ldots x_n, y, f\left(x_1, \ldots x_n, y\right)\big), \end{cases}$$

для довільних натуральних значень $\left(x_1, \ldots x_n, y\right)$.

У випадку одномісної функції $f^1 : N \to N$

$$\begin{cases} f(0) = a, \\ f\left(y+1\right) = h\big(y, f\left(y\right)\big), \end{cases}$$

де $a \in N$.

Оператор, який за вищенаведеними формулами з функцій g і h дає змогу побудувати функцію f називають ***оператором примітивної рекурсії*** і позначають R: $f = R\left(g, h\right)$.

Усі три функції g, h, f є числовими (з однією й тією ж областю визначення і значення), тому їхня суперпозиція завжди можлива, що зумовлює існування f^{n+1} для будь-якої пари g^n, h^{n+2}.

Так само, як і у випадку оператора суперпозиції, оператор примітивної рекурсії задає часткову функцію $R: F_{ч.р.} \to F_{ч.р.}$.

3. ***Оператор мінімізації***. Нехай задана часткова функція $f^n : N^{(n)} \to N$. Припустимо, що існує деяка механічна процедура для обчислення функції f^n, причому значення f^n невизначене лише в тому випадку, коли ця процедура працює безконечно довго і не видає жодного результату.

Зафіксуємо перші $n-1$ аргументів цієї функції і розглянемо рівняння

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n.$$

Щоб знайти розв'язок цього рівняння, будемо послідовно обчислювати значення $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$ при $y = 0, 1, 2, \ldots$ і порівнювати результати x_n.

Найменше значення $y = a$, для якого виконується рівність

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a) = x_n,$$

позначимо так:

$$\mu_y\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n \right).$$

Процес знаходження значення останнього виразу буде безмежним у таких трьох випадках:

1. значення $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ невизначене;
2. значення $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$ для $y = 0, 1, 2, \ldots, k$ визначені, але не дорівнюють x_n, а для $y = k+1$ функція *f* не визначена;
3. значення $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$ визначені для всіх $y = 0, 1, 2, \ldots,$, але відмінні від x_n (тобто рівняння натуральних розв'язків не має).

У цих трьох випадках значення виразу для μ_y вважають невизначеним. У всіх інших випадках процес буде скінченним і дає найменший розв'язок $y=a$ рівняння, який є значенням виразу μ_y.

Приклад. Розглянемо оператор мінімізації:

$$\mu_z(y+z=x)=x-y,$$
$$\mu_x(sg\,x=1)=1.$$

Значення виразу

$$\mu_y\big(y\big(y-(x+1)\big)=0\big)$$

є невизначеним через невизначеність на множині N виразу $0\big(0-(x+1)\big)$. Водночас рівняння $y\big(y-(x+1)\big)=0$ має розв'язок $y=x+1$, проте він не збігається зі значенням виразу для μ_y.

Цей приклад засвідчує таке: якщо функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)$ є частковою, то вираз $\mu_y\big(f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)=x_n\big)$, строго кажучи, не є найменшим розв'язком рівняння. Якщо ж функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)$ всюди визначена і рівняння має розв'язок, $\mu_y\big(f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)=x_n\big)$ є найменшим розв'язком цього рівняння.

Значення виразу для μ_y за заданої функції *f* залежить від вибору значень для параметрів $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$. Тому значення виразу $\mu_y\big(f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)=x_n\big)$ є частковою функцією від аргументів $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$.

Оператор, за допомогою якого з функції $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ утворюється функція $\mu_y\big(f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)=x_n\big)$, називають ***оператором мінімізації (або найменшого кореня)***.

Оператор мінімізації позначають *M*, тоді

$$\mu_y\big(f(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},y)=x_n\big)=Mf\,.$$

У загальному випадку функція Mf є частковою.

Примітивно-рекурсивні функції. Частково-рекурсивні функції. Теза Черча.

Нехай задана сукупність часткових функцій $\sigma = \left\{ f_1^{n_1}, \dots, f_k^{n_k} \right\}$.

Функції, які отримують з функцій системи σ і найпростіших функцій $S^1(x), O^1(x), I_m^n$ із застосуванням скінченної кількості операторів суперпозиції та примітивної рекурсії, називають ***примітивно-рекурсивними відносно системи*** σ:

$$\left\{ S^1, O^1, I_m^n, \sigma \right\} \xrightarrow{S^{n+1}, R} f.$$

Функцію *f* називають ***примітивно-рекурсивною***, якщо її можна отримати із застосуванням скінченної кількості операторів суперпозиції і примітивної рекурсії на підставі лише найпростіших функцій S^1, O^1, I_m^n:

$$\left\{ S^1, O^1, I_m^n \right\} \xrightarrow{S^{n+1}, R} f.$$

У цих двох означеннях передбачена можливість виконання всіх допустимих операцій $\left(S^1, O^1, I_m^n, S^{n+1}, R \right)$ у будь-якій послідовності та довільну скінченну кількість разів.

Усі примітивно-рекурсивні функції є всюди визначеними. Клас усіх примітивно-рекурсивних функцій позначимо $K_{п.р.}$

Часткову функцію *f* називають ***частково-рекурсивною відносно*** σ, якщо її можна отримати з функцій системи σ і найпростіших функцій із застосуванням скінченної кількості операторів суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації:

$$\left\{ S^1, O^1, I_m^n, \sigma \right\} \xrightarrow{S^{n+1}, R, M} f.$$

Часткову функцію *f* називають ***частково-рекурсивною***, якщо її можна отримати з найпростіших функцій із застосуванням скінченної кількості операторів суперпозиції, примітивної рекурсії та мінімізації:

$$\left\{S^1, O^1, I_m^n\right\} \xrightarrow{S^{n+1}, R, M} f.$$

Клас частково-рекурсивних функції ($K_{ч.ф.}$) - це найзагальніший клас конструктивно визначених арифметичних функцій.

Аналогічно, як і для примітивно-рекурсивних функцій, в останніх двох означеннях допустимі операції $\left(S^1, O^1, I_m^n, S^{n+1}, R, M\right)$ можна застосовувати в довільній послідовності та довільну скінченну кількість разів.

Поняття частково-рекурсивної функції - одне з головних понять теорії алгоритмів. Значення його полягає в такому.

1. Кожну задану частково-рекурсивну функцію можна обчислити за допомогою певної процедури механічного характеру (алгоритму).
2. Які б класи точно визначених алгоритмів не будували, у всіх випадках неодмінно виявляли, що числові функції, обчислювані за алгоритмами з цих класів, є частково-рекурсивними.

Ці факти відображені в гіпотезі Черча.

Теза Черча. *Клас алгоритмічно (або машинно) обчислюваних часткових числових функцій збігається з класом усіх частково-рекурсивних функцій:* $K_A \cong K_{ч.р.}$.

Ця теза у принципі нс може бути доведена, оскільки в її формулюванні використане інтуїтивне поняття алгоритму.

Водночас у теорії алгоритмів строго математично доведено таку теорему. *Алгоритм тоді і тільки тоді може бути нормалізований, коли він може бути реалізований за допомогою частково-рекурсивних функцій:* $K_A \cong K_{ч.р.}, K_H = K_{ч.р.}$. Тут K_H - клас нормальних алгоритмів.

Загальнорекурсивні функції. Теза Тьюрінга.

Розглянемо ***оператор слабкої мінімізації***, який ставить у відповідність довільній заданій функції *f* часткову функцію:

$$M^l f = \begin{cases} Mf\text{, якщо } Mf \text{ всюди визначна;} \\ \text{не визначена, якщо } Mf \text{ визначена не всюди.} \end{cases}$$

Функції, які можна отримати з найпростіших функцій S^1, O^1, I_m^n *за допомогою оператора примітивної рекурсії, суперпозиції та слабкої мінімізації, називають* ***загальнорекурсивними***. Клас усіх загальнорекурсивних функцій позначимо $K_{з.р.}$.

Якщо оператори S, R, M^1 застосовують до всюди визначених функцій, то вони в підсумку або нічого не дають, або знову дають функції, всюди визначені. Тому всі загальнорекурсивні функції є всюди визначені.

З іншого боку, якщо результат оператора M^1 визначений, то він збігається з результатом звичайного оператора M. Тому всі *загальнорекурсивні функції є всюди визначеними частково-рекурсивними функціями*.

У теорії алгоритмів доведено й обернене твердження: *кожна всюди визначена частково-рекурсивна функція є загальнорекурсивною*. Отже, клас всюди визначених частково-рекурсивних функцій збігається з класом загальнорекурсивних функцій. Клас примітивно-рекурсивних функцій вужчий, ніж клас загальнорекурсивних.

Практично поняттям частково-рекурсивних функцій користуються для доведення існування чи неіснування алгоритму розв'язку задачі. Використання ж частково-рекурсивних функцій для зображення того чи іншого конкретного алгоритму практично недоцільне через складність такого процесу алгоритмізації.

Теза Черча дає алгоритмічне пояснення поняттю частково-рекурсивної функції. Для поняття часткової рекурсивності функції відносно системи σ алгоритмічне пояснення вперше дав А. Тьюрінг.

Функцію f називають ***алгоритмічно обчислюваною відносно деякої системи функцій*** $\sigma = \{f_1, \ldots, f_k\}$, *якщо існує алгоритм, який дає змогу обчислити значення функції f за умови, що якимось чином можна знайти ті значення функцій* $f_1, \ldots, f_k$, *які потрібні для алгоритму.*

Тут уважають, що не існує алгоритмів обчислення функцій з σ і обчислити будь-яке значення кожної з них є математичною проблемою. Якщо ж значення всіх функцій з σ можуть бути обчислені за допомогою алгоритмів, то функція *f* з алгоритмічно обчислюваної відносно σ стає обчислюваною.

Поняття відносного алгоритму, як і поняття звичайного алгоритму, є інтуїтивним і його можна уточнювати різними способами. Проте за всіх фактично випробуваних уточнень виявилось, що відносно обчислювані функції є відносно частково-рекурсивними.

Узагальненням тези Черча є така теза.

Теза Тьюрінга. *Клас функцій, алгоритмічно обчислюваних відносно деякого класу функцій σ, збігається з класом частково-рекурсивних функцій відносно σ.*

Універсальні рекурсивні функції.

Як підсумок поняття класів примітивно-рекурсивних, частково-рекурсивних та загальнорекурсивних функцій можна записати таке співвідношення:

$$K_{п.р.} \subset K_{з.р.} \subset K_{ч.р.}.$$

У кожній універсальній алгоритмічній системі повинен існувати універсальний алгоритм, еквівалентний довільному, наперед заданому алгоритму. Як доведено раніше, для системи нормальних алгоритмів Маркова такий універсальний алгоритм існує. Розглянемо питання про існування універсальних функцій для класів $K_{п.р.}, K_{з.р.}, K_{ч.р.}$

Часткову $n+1$-місну функцію $U\left(x_0,\dots,x_n\right)$ називають універсальною для сім'ї σ всіх *n*-місних часткових функцій, якщо виконуються такі умови:

1) для кожного фіксованого числа *i* *n*-місна функція $U\left(i,x_1,\dots,x_n\right)$ належить σ;
2) для кожної функції $f\left(x_1,\dots,x_n\right)$ з σ існує таке число *i*, що для всіх $x_1,\dots,x_n$: $U\left(i,x_1,\dots,x_n\right)=f\left(x_1,\dots,x_n\right)$.

Іншими словами, функція *U* є універсальною для сім'ї σ, якщо всі функції з σ можна розташувати в такій послідовності:

$$U(0, x_1, \ldots, x_n), U(1, x_1, \ldots, x_n), \ldots, U(i, x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

Число i називають номером функції U.

У теорії рекурсивних функцій доведено такі три важливі теореми.

Теорема 1. *Система всіх* n*-місних примітивно-рекурсивних функцій не містить примітивно-рекурсивної універсальної функції* $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 2. *Система всіх* n*-місних загальнорекурсивних функцій не містить загальнорекурсивної універсальної функції* $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 3. *Для кожного* $(n = 1, 2, \ldots)$ *клас усіх* n*-місних примітивно-рекурсивних функцій містить* $(n+1)$*-місну загальнорекурсивну універсальну функцію.*

Наведена нижче теорема є головним результатом теорії частково-рекурсивних функцій і аналогом теореми Маркова про універсальний нормальний алгоритм.

Теорема 4. *Для кожного* $(n = 1, 2, \ldots)$ *існує частково-рекурсивна функція* $U^{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, *універсальна для класу всіх* n*-місних частково-рекурсивних функцій.*