

## Практична робота №7

**Тема:** найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги Маркова

**Мета:** набути практичних навичок у розв'язанні задач щодо випадкових процесів, СМО та ланцюгів Маркова.

### Хід роботи

7. Побудувати граф станів СМО « $n$ -клієнтів –Web-сервер» (система M/M/1) і систему рівнянь Колмогорова для  $n = 4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ .  
 $P_{зах}, P_0, A, w, T_{обс}, T_{відг}$ .

Побудова графів станів

$$S_0 \rightarrow S_1: \lambda_0 = (4 - 0) \cdot 1 = 4$$

$$S_1 \rightarrow S_2: \lambda_1 = (4 - 1) \cdot 1 = 3$$

$$S_2 \rightarrow S_3: \lambda_2 = (4 - 2) \cdot 1 = 2$$

$$S_3 \rightarrow S_4: \lambda_3 = (4 - 3) \cdot 1 = 1$$

Зворотні переходи ( $S_k \rightarrow S_{k-1}$ ) відбуваються з інтенсивністю  $\mu = 2$

Система рівнянь Колмогорова (підставимо значення  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ ):

$$\begin{cases} 4\lambda P_0 = \mu P_1 \\ (3\lambda + \mu)P_1 = 4\lambda P_0 + \mu P_2 \\ (2\lambda + \mu)P_2 = 3\lambda P_1 + \mu P_3 \\ (1\lambda + \mu)P_3 = 2\lambda P_2 + \mu P_4 \\ \mu P_4 = 1\lambda P_3 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4P_0 = 2P_2 \\ 5P_1 = 4P_0 + 2P_2 \\ 4P_2 = 3P_1 + 2P_3 \\ 3P_3 = 2P_2 + 2P_4 \\ 2P_4 = 1P_3 \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \end{cases}$$

Розрахунок ймовірностей станів  $P_k$

$$2P_1 = 4P_0 \Rightarrow P_1 = 2P_0$$

$$P_1 = \frac{2}{4} P_0 = 2P_0$$

$$P_2 = \frac{3}{2} P_1 = 1.5 \cdot (2P_0) = 3P_0$$

$$P_3 = \frac{2}{2} P_2 = 1 \cdot (3P_0) = 3P_0$$

$$P_4 = \frac{1}{2} P_3 = 0.5 \cdot (3P_0) = 1.5P_0$$

$$P_0 + 2P_0 + 3P_0 + 3P_0 + 1.5P_0 = 1$$

$$P_0 \approx 0.095$$

$$P_1 = 2 \cdot 0.0952 \approx 0.190$$

$$P_2 = 3 \cdot 0.0952 \approx 0.286$$

$$P_3 = 3 \cdot 0.0952 \approx 0.286$$

$$P_4 = 1.5 \cdot 0.0952 \approx 0.143$$

Розрахунок характеристик СМО

Ймовірність простою ( $P_0$ ):

$$P_0 \approx 0.0952$$

Ймовірність зайнятості каналу ( $P_{\text{зан}}$ ):

$$P_{\text{зан}} = 1 - P_0 = 1 - 0.0952 = 0.9048$$

Абсолютна пропускна спроможність ( $A$ ): Сервер обробляє  $\mu$  заявок, коли він зайнятий.

$$A = \mu \cdot P_{\text{зан}} = 2 \cdot 0.9048 = 1.8096 \text{ (заявок за од. часу)}$$

Середня кількість вимог у системі:

$$w = \sum_{k=1}^4 k \cdot P_k = 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4$$

$$w = 1(0.1905) + 2(0.2857) + 3(0.2857) + 4(0.1429)$$

$$w = 0.1905 + 0.5714 + 0.8571 + 0.5716 = 2.1906 \text{ (клієнтів)}$$

Середній час обслуговування ( $T_{\text{обс}}$ ):

$$T_{\text{обс}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ (од. часу)}$$

Середній час відгуку ( $T_{\text{відг}}$ ):

$$T_{\text{відг}} = \frac{w}{A} = \frac{2.1906}{1.8096} \approx 1.21 \text{ (од. часу)}$$

8. Задано матрицю переходу  $P_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ . Знайти матрицю переходу  $P_2$ .

$$P_2 = P_1 * P_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(1,1): 0.3 \cdot 0.3 + 0.7 \cdot 0.5 = 0.09 + 0.35 = 0.44$$

$$(1,2): 0.3 \cdot 0.7 + 0.7 \cdot 0.5 = 0.21 + 0.35 = 0.56$$

$$(2,1): 0.5 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.15 + 0.25 = 0.40$$

$$(2,2): 0.5 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.35 + 0.25 = 0.60$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.40 & 0.60 \end{pmatrix}$$

### Контрольні питання

1. Що таке СМО і які основні елементи входять у її структуру?

Система масового обслуговування (СМО) — це математична модель, що описує процеси надходження, очікування та обслуговування заявок. Основні елементи: джерело заявок, потік заявок, черга, канал(и) обслуговування, вихідна система.

2. Які властивості має найпростіший потік подій, і які його характеристики можна виміряти?

Найпростіший потік подій — це пуассонівський потік. Його властивості: стаціонарність, відсутність післядії, ординарність. Основні характеристики: інтенсивність  $\lambda$ , інтервали між подіями (експоненційний розподіл).

3. Які основні характеристики СМО визначають її продуктивність?

До основних характеристик належать: середній час очікування, середня довжина черги, інтенсивність надходження  $\lambda$ , інтенсивність обслуговування  $\mu$ , імовірність відмови, коефіцієнт завантаження  $\rho$ .

4. Які фактори впливають на інтенсивність потоку подій в СМО?

Фактори: особливості джерела заявок, умови функціонування системи, зовнішнє середовище, час доби, сезонність, поведінка користувачів.

**5. Як визначається інтенсивність обслуговування в СМО?**

Інтенсивність обслуговування  $\mu$  — це середня кількість заявок, яку система може обробити за одиницю часу. Залежить від швидкодії каналу та характеристик обслуговування.

**6. Які властивості мають ланцюги Маркова, і як вони застосовуються в теорії СМО?**

Ланцюги Маркова мають властивість відсутності пам'яті: майбутній стан залежить лише від поточного. У СМО використовуються для моделювання переходів між станами системи (кількість заявок у системі).

**7. Що таке стаціонарний режим роботи СМО і чому він важливий для аналізу?**

Стаціонарний режим — це стан, коли характеристики системи стабільні в часі. Він важливий, бо дозволяє визначати середні показники роботи та забезпечує можливість довгострокових прогнозів.

**8. Як визначається ймовірність втрати заявки в системі масового обслуговування?**

Ймовірність втрати залежить від типу СМО. Наприклад, у системі  $M/M/1/K$  вона визначається як імовірність того, що система перебуває у максимальному стані (черга повна).