Практична робота №5

Тема: закони розподілу та числові характеристики випадкових величин

Мета: набути практичних навичок у розв’язанні задач на знаходження законів розподілу та числових характеристик дискретних та неперервних випадкових величин, зокрема нормального закону, та розв’язання типових задач по цій темі.

Хід роботи

1. НВВ X має рівномірний розподіл з параметрами a, b. Функція щільності рівномірного розподілу $f(x)$ = 1 $b-a$, $a \leq x \leq b$. Вивести формулу функції рівномірного розподілу $F(x)$, формулу для математичного сподівання $M(x)$, дисперсії $D(x)$, асиметрії As, ексцесу Ek, ймовірності події $\alpha \leq X \leq b$.

Функція розподілу: F(x) = P(X < x) = $\begin{cases} 0, x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x < b \\ 1, x \geq b \end{cases}$

Математичне сподівання: M(x) = $\frac{a+b}{2}$

Дисперсія: D(x) = $\frac{(b-a)^2}{12}$

Асиметрія: A_s=0

Ексцес: E_k=$-\frac{6}{5} = -1.2$

Ймовірності події $\alpha \leq X \leq b$: P(a≤X≤b)=$\int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-a}{b-a}$

2. Відомо, що середня кількість пакетів, яку генерує один з терміналів локальної мережі підприємства протягом години має нормальний розподіл з параметрами (10; 2). Знайти:

− ймовірність того, що за годину кількість пакетів відхилиться від середнього менше, ніж на δ = 0.01;

− ймовірність того, що за годину кількість пакетів буде від 9 до 11;

− ймовірність того, що за годину кількість пакетів буде < 9 або > 11

A. P(x-μ < δ), δ = 0.01

P(|X−10|<0.01) = 2F($\frac{0.01}{\sigma}$)-1 = 2F($\frac{0,01}{\sqrt{2}}$)-1

$$\frac{0,01}{\sqrt{2}} = 0.00707$$

F(0.00707) = 0.502

P=2*0.502 – 1= 0.0056 = 0.564%

Б. $z_1 \frac{9-10}{\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0.707$, $z_2 = \frac{11-10}{\sigma} = 0.707$

P(9≤X≤11)=Φ(0.7071068)−Φ(−0.7071068)=2Φ(0.7071068)−1.

Φ(0.7071068)≈0.76024994

P≈2·0.76024994−1=0.520 = 52.05%

В. **P(X<9 or X>11)=1−P(9≤X≤11)=1−0.52049988=0.4795 = 47.95%**

3. Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, що має нормальний розподіл з математичним сподіванням $\mu = 50$ мм (проектна довжина). Фактична довжина виготовлених деталей не менше 32 та не більше 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина наугад взятої деталі: а) більше 55 мм; б) менше 40 мм.

А. P(X>55)

$z = \frac{55-50}{6} = \frac{5}{6} = 0.83$, P(x>55) = 1-F(0.83)

F(0.83) = 0.797 -> P = 0.2023 = 20.23%

Б. P(X<40)

$z = \frac{40-50}{6} = -\frac{10}{6} = -1.66$, P(X<40) = F(-1.66)

F(-1.66) = 0.047 = 4.78%

4. Випадкові похибки вимірювань мають нормальний розподіл із СКВ $\sigma = 20$ мм та математичним сподіванням $\mu = 0$. Знайти ймовірність того, що з трьох незалежних вимірювань похибка хоча б одного не перевищить за абсолютною величиною 4 мм.

P_1=P(X<4) = 2F($\frac{4}{20}$) $- 1 = 2F(0.2) - 1$

F(0.2)≈0.57925934 -> p1≈2·0.57925934−1=0.1585

$P=1-(1-p_1)^3=1-(1-0.15851868)^3$ = 0.404 = 40.42%

5. Автомат виготовляє кульки. Кулька вважається стандартною, якщо відхилення X діаметра кульки від проектного розміру за абсолютною величиною менша ніж 0.7 мм.

Вважається, що НВВ X має нормальний розподіл з СКВ σ = 0.4 мм. Знайти, скільки в середньому буде стандартних кульок серед 100 виготовлених

$p=P(X<0.7) = 2F(\frac{0.7}{0.4}) - 1 = 2F(1.75) - 1$

$F(1.75) \approx 0.95994084$ -> $p \approx 2 \cdot 0.95994084 - 1 = 0.9198$

Відповідь: p = 0.92, очікується 92 стандартних кульок

Контрольні питання

1. Навести декілька прикладів дискретної випадкової величини.

Дискретна випадкова величина (ДВВ) може набувати лише окремих значень з деякої множини. Приклади:

– кількість дефектних деталей у партії продукції;

– число влучань у мішень із n пострілів;

– кількість відвідувачів магазину за годину;

– кількість успіхів у схемі Бернуллі (біноміальна ВВ).

2. Навести декілька прикладів неперервної випадкової величини.

Неперервна випадкова величина (НВВ) може набувати будь-якого значення на певному інтервалі. Приклади:

– температура тіла або повітря;

– час до відмови приладу;

– довжина чи маса виробу;

– напруга в електричному колі.

3. Чи для всіх розподілів існують математичне сподівання і дисперсія?

Ні, не для всіх. Наприклад, розподіл Коші не має ні математичного сподівання, ні дисперсії, оскільки відповідні інтеграли не збігаються. Також деякі розподіли мають сподівання, але не мають дисперсії (наприклад, деякі важкохвостові степеневі розподіли).

4. Як виправдати використання математичного сподівання як числової характеристики для розподілу, який не має скінченного математичного сподівання?

Якщо математичне сподівання не існує або нескінченне, можна:

– використовувати *усічене сподівання* (truncated mean), яке стабільне;

– переходити до *медіани* або *квантилів*, що завжди існують;

– застосовувати *закони великих чисел* для усічених або перетворених величин;

– інтерпретувати середнє як формальну характеристику, що описує тенденцію, навіть якщо воно не є числом (так роблять у теорії важких хвостів).

5. Яка форма закону розподілу є універсальною і може бути застосовна як для ДВВ, так і для НВВ?

Універсальною формою є *функція розподілу (CDF)* — $F(x) = P(X \le x)$.

Вона існує й коректно описує як дискретні, так і неперервні, і навіть змішані розподіли.

6. Які альтернативні числові характеристики можна використовувати, якщо математичне сподівання не відображає розподіл повністю?

Можна використовувати:

– медіану — центральну точку розподілу;

– моду — найбільш імовірне значення;

– квантілі (наприклад, 25%, 75%);

– інтерквартильний розмах;

– медіанне абсолютне відхилення (MAD);

– характеристики форми: асиметрію, ексцес.

7. У чому полягає ймовірнісний та статистичний сенс математичного сподівання?

Ймовірнісний сенс: математичне сподівання — це середнє значення, яке отримали б при нескінченному числі повторень експерименту.

Статистичний сенс: вибіркове середнє є незміщеною оцінкою математичного сподівання, тобто за великої вибірки воно наближає істинне середнє.

8. Чому важливо враховувати асиметрію та ексцес при аналізі розподілу величин?
Асиметрія показує, у який бік “зміщений” розподіл, а ексцес —
наскільки він гостроверхий або плаский порівняно з нормальним.
Ці характеристики дозволяють:
– краще оцінювати ризики (важкі хвости, крайні події);
– правильно підбирати моделі;
– оцінювати відхилення від нормальності.

9. Чому, якщо для певної ВВ не існую математичного сподівання, то не існує дисперсія, асиметрія і ексцес?
Бо дисперсія, асиметрія та ексцес визначаються через *центральні моменти*:
– дисперсія — це другий центральний момент;
– асиметрія — третій;
– ексцес — четвертий.

Ці моменти розраховуються відносно математичного сподівання.
Якщо сподівання не існує, то неможливо визначити й усі центральні моменти,
тобто не існує дисперсія, асиметрія й ексцес.

10. Чому на практиці часто можна апріорі вважати розподіл ВВ нормальним?
Завдяки *центральній граничній теоремі (ЦГТ)*: сума великої кількості
незалежних випадкових чинників із кінцевими дисперсіями наближається
до нормального розподілу. Багато вимірювань у техніці, економіці, фізиці
залежать саме від суми багатьох малих факторів, тому їх розподіл часто близький
до нормального.