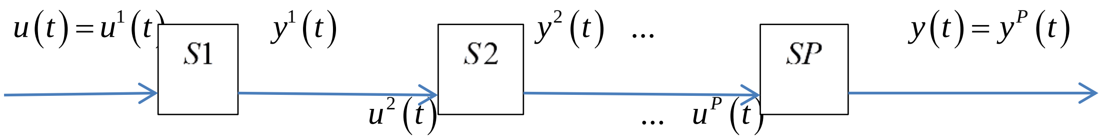
Тема № 9. Математичні моделі типових з'єднань лінійних динамічних систем.

Розглянемо чотири основні типи з'єднань лінійних динамічних систем:

- Системи з послідовним з'єднанням;
- Системи з паралельним з'єднанням;
- Системи зі зворотним зв'язком;
- Системи з довільною комбінацією трьох попередніх типів (змішані системи).

9.1. Послідовне з'єднання.

Зобразимо схему системи, яка складається із P підсистем $S1, S2, \ldots, SP$, з'єднаних послідовно:



Послідовне з'єднання характеризується такими умовами:

$$u^{i+1}(t) = y^i(t), \; i = \overline{1, P-1}.$$

Наша мета побудувати математичну модель такої системи на основі відомих математичних моделей усіх P підсистем. Входом у систему є вхід у першу підсистему а виходом із системи є вихід із P-ї підсистеми. Алгоритм побудови математичної моделі системи такий:

Крок 1. Будується математична модель підсистеми $S2'$, яка утворена першою $S1$ та другою $S2$ підсистемами, які послідовно з'єднані між собою;

Крок 2. Будується математична модель підсистеми $S3'$, яка утворена отриманою на попередньому кроці підсистемою $S2'$ та третьою $S3$ підсистемами, які послідовно з'єднані між собою;

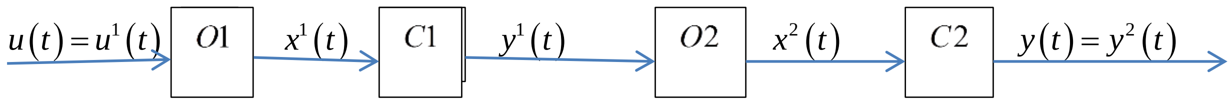
. . .

Крок $P-1$. Будується математична модель підсистеми SP', яка утворена отриманою на попередньому кроці підсистемою $S(P-1)'$ та останньою SP підсистемами, які послідовно з'єднані між собою.

Зрозуміло, що математична модель отриманої підсистеми SP' і є агрегованою моделлю P послідовно з'єднаних підсистем.

Таким чином наведений алгоритм базується на алгоритмі побудови математичної моделі системи, яка складається із двох підсистем: $S1$ та $S2$.

Тепер зобразимо детальну схему такої системи:



Математичні моделі першої та другої підсистем наступні:

$$S1:\begin{cases}\dot{x}^1(t)=A^1(t)x^1(t)+B^1(t)u^1(t),\ x^1\in R^{n_1},\ u^1\in R^{m_1},\\ y^1(t)=C^1(t)x^1(t),\ y^1\in R^{k_1};\end{cases}$$

$$S2:\begin{cases}\dot{x}^2(t)=A^2(t)x^2(t)+B^2(t)u^2(t),\ x^2\in R^{n_2},\ u^2\in R^{k_1},\\ y^2(t)=C^2(t)x^2(t),\ y^2\in R^{k_2}.\end{cases}$$

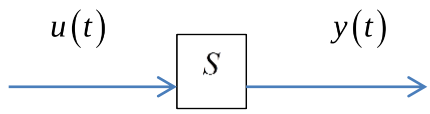
Така система задається шістьма матрицями $A^i(t),B^i(t),C^i(t),\ i=\overline{1,2}$ відповідних розмірностей. Оскільки підсистеми з’єднані послідовно, то виконується умова:

$$u^2(t)=y^1(t)=C^1(t)x^1(t).$$

Таким чином векторне диференціальне рівняння підсистеми $S2$ приймає такий вигляд:

$$\dot{x}^2(t)=B^2(t)C^1(t)x^1(t)+A^2(t)x^2(t).$$

Зобразимо схему такої системи у вигляді:



Таким чином справедливі такі співвідношення:

$$u(t)=u^1(t),\quad y(t)=y^2(t).$$

Для останньої схеми вводимо розширений вектор стану:

$$x(t)=\begin{pmatrix}x^1(t)\\ x^2(t)\end{pmatrix},\quad x\in R^{n_1+n_2},$$

для якого можна записати перехідне відображення та відображення виходу у такій формі:

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}^1(t)\\ \dot{x}^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^1(t) & 0\\ B^2(t)C^1(t) & A^2(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1(t)\\ x^2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B^1(t)\\ 0\end{pmatrix}u^1(t),$$
$$y^2(t)=\begin{pmatrix}0 & C^2(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1(t)\\ x^2(t)\end{pmatrix}.$$

Враховуючи рівності $u(t)=u^1(t),\quad y(t)=y^2(t)$ та ввівши позначення:

$$A(t)=\begin{pmatrix}A^1(t) & 0\\ B^2(t)C^1(t) & A^2(t)\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}B^1(t)\\ 0\end{pmatrix},\quad C(t)=\begin{pmatrix}0 & C^2(t)\end{pmatrix},$$

приходимо до стандартного представлення лінійної динамічної системи у диференціально-алгебраїчній формі:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),$$
$$y(t)=C(t)x(t).$$

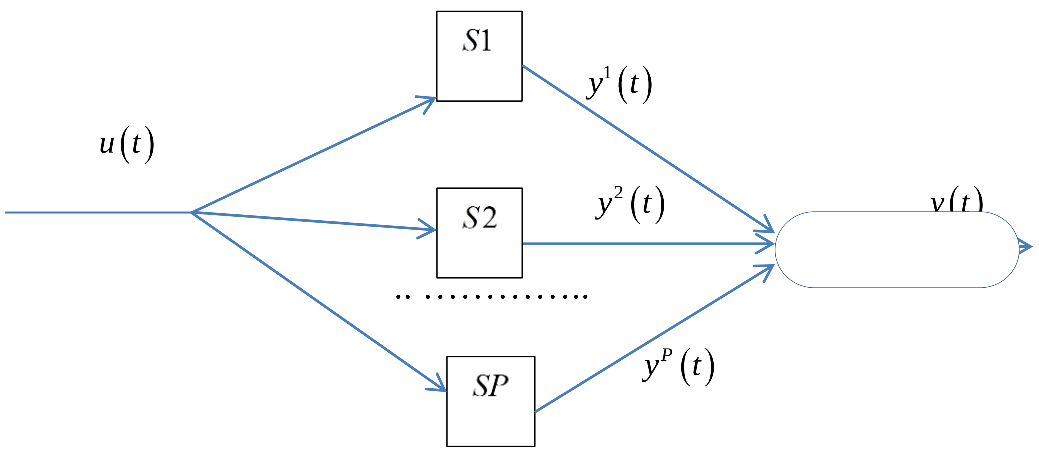
Відмітимо, що якщо система складається із стаціонарних підсистем, тобто $A^i(t)=A,\ B^i(t)=B,\ C^i(t)=C,\ i=\overline{1,2}$, то передавальна матриця $Z(p)$ агрегованої системи обчислюється за формулою:

$$Z(p)=Z1(p)Z2(p),$$

де $Z1(p)$ та $Z2(p)$ – передавальні матриці, відповідно, першої та другої підсистем.

9.2. Паралельне з’єднання.

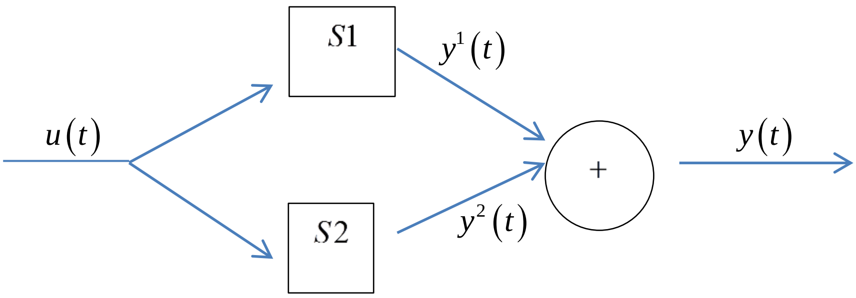
Зобразимо схему системи, яка складається із P паралельно з’єднаних між собою підсистем $S1, S2, \ldots, SP$



Паралельне з'єднання характеризується тим, що входи у всі підсистеми однакові а вихід є сумою виходів усіх підсистем:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{P} y^i(t).$$

За аналогією із послідовним з'єднанням алгоритм побудови агрегованої математичної моделі системи базується на побудові математичної моделі системи, яка складається із двох підсистем $S1$ та $S2$:



Диференціальні рівняння, які описують функціонування обох підсистем такі:

$$S1:\begin{cases}\dot{x}^1(t)=A^1(t)x^1(t)+B^1(t)u\ \ (t),\ x^1\in R^{n_1},\ u\ \ \in R^m\ ,\\ y^1(t)=C^1(t)x^1(t),\ y^1\in R^k\ ;\end{cases}$$

$$S2:\begin{cases}\dot{x}^2(t)=A^2(t)x^2(t)+B^2(t)u\ \ (t),\ x^2\in R^{n_2},\ u\ \ \in R^m,\\ y^2(t)=C^2(t)x^2(t),\ y^2\in R^k\ .\end{cases}$$

Вихід агрегованої системи наступний:

$$y(t)=y^1(t)+y^2(t)=C^1(t)x^1(t)+C^2(t)x^2(t).$$

Вводимо вектор стану $x(t)$ агрегованої системи

$$x(t)=\begin{pmatrix}x^1(t)\\ x^2(t)\end{pmatrix},\quad x\in R^{n_1+n_2}\ ,$$

для якого можна записати перехідне відображення та відображення виходу у такій формі:

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}\dot{x}^1(t)\\ \dot{x}^2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^1(t) & 0\\ 0 & A^2(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1(t)\\ x^2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}B^1(t)\\ B^2(t)\end{pmatrix}u\ (t),$$

$$y\ (t)=\begin{pmatrix}C^1(t) & C^2(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1(t)\\ x^2(t)\end{pmatrix}.$$

Позначивши

$$A(t)=\begin{pmatrix}A^1(t) & 0\\ 0 & A^2(t)\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}B^1(t)\\ B^2(t)\end{pmatrix},\ C(t)=\begin{pmatrix}C^1(t) & C^2(t)\end{pmatrix},$$

отримаємо стандартне представлення лінійної динамічної системи у диференціально-алгебраїчній формі:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),$$
$$y(t)=C(t)x(t).$$

Аналогічно відмітимо, що якщо система складається із стаціонарних підсистем, тобто $A^i(t)=A,\ B^i(t)=B,\ C^i(t)=C,\ i=\overline{1,2}$, то передавальна матриця $Z(p)$ агрегованої системи обчислюється за такою формулою:

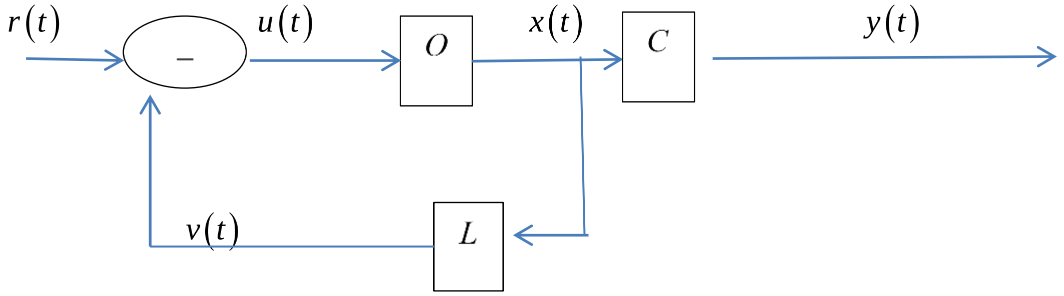
$$Z(p)=Z1(p)+Z2(p),$$

де $Z1(p)$ та $Z2(p)$– передавальні матриці, відповідно, першої та другої підсистем.

9.3. З’єднання з оберненим зв’язком.

9.3. 1. Системи з оберненим зв’язком за станом.

Спочатку зобразимо схему функціонування системи з оберненим зв’язком за станом:



На систему подається вхідний сигнал $r(t)\in R^m$. Перехідне відображення задається у диференціальній формі матрицями $A(t)$ та $B(t)$ відповідної розмірності:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t),\ x\in R^n,\ u\in R^m. \qquad (1)$$

Відображення виходу задається матрицею $C(t)$ таким алгебраїчним співвідношенням:

$$y(t)=C(t)x(t),\ \ y\in R^k. \qquad (2)$$

Вихід $v(t)$ з оберненого блоку задається матрицею $L(t)$ відповідної розмірності за такою формулою:

$$v(t)=L(t)x(t),\ v\in R^m. \qquad (3)$$

Вхід на об'єкт формується таким чином:

$$u(t)=r(t)-v(t),\ u\in R^m. \qquad (4)$$

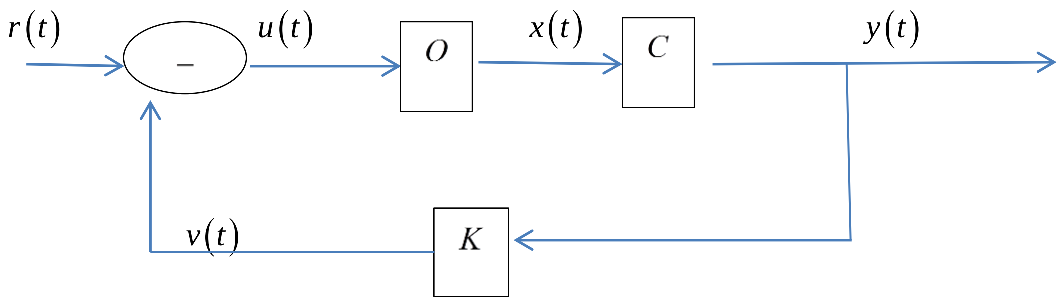
Математичну модель системи з оберненим зв'язком за станом отримаємо із формули (1) з урахуванням (3), (4):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=A(t)x(t)+B(t)r(t)-B(t)L(t)x(t)=\\&=\left[A(t)-B(t)L(t)\right]x(t)+B(t)r(t).\end{aligned} \qquad (5)$$

Вибір тої чи іншої матриці $L(t)$ у представлені (5) дозволяє отримувати систему з оберненим зв'язком за станом із потрібними властивостями.

9.3. 2. Системи з оберненим зв'язком за виходом.

Зобразимо схему функціонування системи з оберненим зв'язком за виходом:



Як і у попередньому пункті на систему подається вхідний сигнал $r(t) \in R^m$. Перехідне відображення задається у диференціальній формі матрицями $A(t)$ та $B(t)$ відповідної розмірності згідно формули (1).

Відображення виходу задається матрицею $C(t)$ алгебраїчним співвідношенням (2).

Вихід $v(t)$ з оберненого блоку задається матрицею $K(t)$ відповідної розмірності за такою формулою:

$$v(t) = K(t)y(t), \; v \in R^m. \tag{6}$$

Вхід на об'єкт формується таким чином:

$$u(t) = r(t) - v(t) = r(t) - K(t)y(t), \; u \in R^m. \tag{7}$$

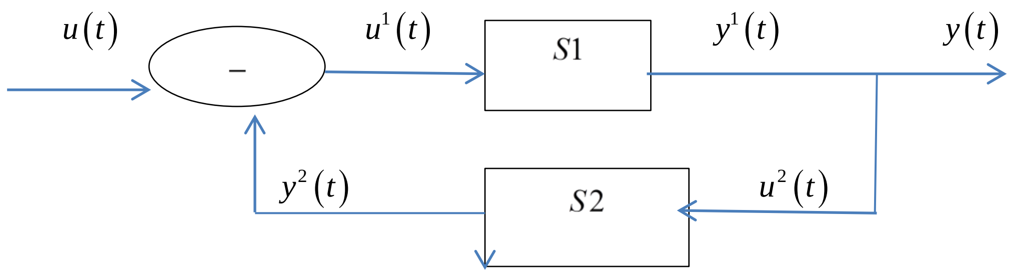
Агреговану математичну модель системи з оберненим зв'язком за виходом отримаємо із формули (1) з урахуванням (2),(6), (7):

$$\dot{x}(t) = \left[A(t) - B(t)K(t)C(t)\right]x(t) + B(t)r(t). \tag{8}$$

Вибір тої чи іншої матриці $K(t)$ у представлені (8) дозволяє отримувати систему з оберненим зв'язком за виходом із потрібними властивостями.

9.3. 3. Системи з оберненим зв'язком за підсистемою.

Зобразимо схему функціонування системи з оберненим зв'язком за підсистемою:



Як і у попередніх пунктах на систему подається вхідний сигнал $u(t) \in R^m$. Перехідне відображення обох підсистем задається у диференціальній формі матрицями $A^i(t)$ та $B^i(t)$, $i = \overline{1,2}$ відповідної розмірності згідно формул:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= A^1(t)x^1(t) + B^1(t)u^1(t), \; x^1 \in R^{n_1}, \; u^1 \in R^m, \\ \dot{x}^2(t) &= A^2(t)x^2(t) + B^2(t)u^2(t), \; x^2 \in R^{n_2}, \; u^2 \in R^{k_1} \end{aligned}. \tag{9}$$

Відображення виходу задається матрицями $C^1(t)$ та $C^2(t)$ такими алгебраїчними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &y^1(t)=C^1(t)x^1(t), \quad y^1 \in R^{k_1}, \\ &y^2(t)=C^2(t)x^2(t), \quad y^2 \in R^m. \end{aligned} \tag{10}$$

Вихід першої підсистеми $y^1(t)$ являється виходом $y(t)$ системи та входом у другу підсистему, тобто :

$$y(t)=y^1(t), \; u^2(t)=y^1(t). \tag{11}$$

Вхід у першу підсистему являється різницею між входом $u(t)$ в систему та виходом $y^2(t)$ другої підсистеми:

$$u^1(t)=u(t)-y^2(t). \tag{12}$$

Знову уведемо розширений вектор

$$x(t)=\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix}.$$

Тоді представлення (9) з врахуванням формул (10),(11), (12) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \dot{x}^1(t)=A^1(t)x^1(t)-B^1(t)C^2(t)x^2(t)+B^1(t)u(t), \\ \dot{x}^2(t)=B^2(t)C^1(t)x^1(t)+A^2(t)x^2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{x}(t)=\begin{pmatrix} \dot{x}^1(t) \\ \dot{x}^2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^1(t) & -B^1(t)C^2(t) \\ B^2(t)C^1(t) & A^2(t) \end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix} B^1(t) \\ 0 \end{pmatrix}u(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Із формули (11) випливає таке алгебраїчне співвідношення для відображення виходу системи:

$$y(t)=\begin{pmatrix} C^1(t) & 0 \end{pmatrix}x(t). \tag{14}$$

Увівши матриці $A(t), B(t), C(t)$:

$$A(t)=\begin{pmatrix} A^1(t) & -B^1(t)C^2(t) \\ B^2(t)C^1(t) & A^2(t) \end{pmatrix}, \; B(t)=\begin{pmatrix} B^1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \; C(t)=\begin{pmatrix} C^1(t) & 0 \end{pmatrix},$$

отримуємо стандартне представлення в диференціально-алгебраїчній формі лінійної динамічної системи з оберненим зв’язком за підсистемою:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$
$$y(t) = C(t)x(t).$$

Наостанок відмітимо, що якщо система складається із стаціонарних підсистем, тобто $A^i(t) = A,\ B^i(t) = B,\ C^i(t) = C,\ i = \overline{1,2}$, то передавальна матриця $Z(p)$ агрегованої системи обчислюється за такою формулою:

$$Z(p) = [I - Z_1(p) \cdot Z_2(p)]^{-1} Z_1(p).,$$

де $Z_1(p)$ та $Z_2(p)$ – передавальні матриці, відповідно, першої та другої підсистем.