Теми практичних занять з курсу
«Диференціальні рівняння» на 2020 – 2021 н.р.
для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики
(спеціальність «Системний аналіз» – напрям підготовки 6.040303
бакалавр, 56 год. лекцій, 56 год. практичних)

I семестр

Заняття 1. Тема: *Диференціальні рівняння 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Рівняння з відокремлюваними змінними.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $(y^2-1)(x+2)dx - x^2 y dy = 0$.

2. $\sec^2 x \, tg\, y \, dx + \sec^2 y \, tg\, x \, dy = 0$.

3. $xy - (x^2+1)y' = 0$; $M(0;1)$.

4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^3(y-1)^3}{(x+1)y} = 0$.

5. $x^2 dx + y^3 e^{x+y} dy = 0$.

6. $y^{-3} \ln\ln x dx + x e^{y^2} dy = 0$.

7. $\dfrac{e^x - 1}{e^y} = e^{e^y}(1+e^x)y'$.

8. $y' - y = 2x - 3$.

9. $x^2 y' - \cos 2y = 1$; $y(+\infty) = 9\pi/4$.

10. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $2x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$; $M(1;0)$.

2. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$; $M(0;0)$.

3. $ydx + (\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy = 0$; $M(1;1)$.

4. $y' = \dfrac{\sin(\ln x)}{\cos(\ln y)}$.

5. $\left(\dfrac{\cos x}{\ln y}\right)^2 dx + \dfrac{y}{x^2} dy = 0$.

6. $\dfrac{1-\ln^2 y}{x \ln y} dx + \dfrac{\sqrt{3-\ln^2 x}}{y} dy = 0$.

7. $3y^2 y' + 16x = 2xy^3$; $y(x)$ обмежене при $x \to \infty$.

8. $y' = \cos(y-x)$.

Заняття 2, 3. Тема*: Інтегровані типи диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Однорідні рівняння та зведені до них.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - xdy = 0$.

2. $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$; $M(1;1)$

3. $(2x+3y)dx + (x+2y)dy = 0$.

4. $xy' - x\cos\dfrac{y}{x} - y = 0$.

5. $(y^3 + 2x^2 y)dx - (2x^3 + 2xy^2)dy = 0$.

6. $(6x+y-1)dx + (4x+y-2)dy = 0$.

7. $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$.

8. $\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

9. $y(x^2y^2+1)dx + (x^2y^2-1)xdy = 0$.

10. $xydx + (y^4 - x^2)dy = 0$.

11. $(xy^2 - y)dx - (x^3y^2 - 3x^2y + 3x)dy = 0$.

12. $\left(y + y\sqrt{x^2y^4 - 1}\right)dx + 2xdy = 0$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.

2. $xdy - (\sqrt{x^2+y^2} + y)dx = 0$.

3. $(xye^{\frac{x}{y}}+y^2)dx-x^2e^{\frac{x}{y}}dy=0$.

4. $(6xy+5y^2)dx+(3x^2+10xy-y^2)dy=0$.

5. $(x^3+3xy^2)dx+(2y^3+3x^2y)dy=0$.

6. $(x-2)dx+(y-2x+1)dy=0$.

7. $(x+2y+1)dx+(2x+4y+3)dy=0$.

8. $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$.

9. $(xy^2-y)dx-(x^3y^2-3x^2y+3x)dy=0$.

10. $2\left(\sqrt{x^4y^2+1}-x^2y\right)dx-x^3dy=0$.

Заняття 4. Тема*: Інтегровані типи диференціальних рівнянь 1-го порядку, розв'язані відносно похідної. Лінійні неоднорідні рівняння. Метод варіації довільної сталої. Рівняння Бернуллі.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $\frac{dy}{dx}-2xy=1$.

2. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x^2}$.

3. $\frac{dy}{dx}-y=2x-x^2$.

4. $xy'+y=x\cos x;\ \ M(\pi/2;1)$.

5. $y'\sin x-y=2\sin^2\frac{x}{2}$.

6. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\sin x\cos x$.

7. $x\cos x\frac{dy}{dx}+y(x\sin x+\cos x)=1$.

8. $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+(2-x)\ln y=x(e^{-2x}+e^{\frac{x^2}{2}})$.

9. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

10. $y'(x+ctgy)=1$.

11. $\cos x\frac{dy}{dx}-y\sin x=y^4$.

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $\frac{dy}{dx}-y=x-1;\ \ M(0;1)$.

2. $x\ln x\frac{dy}{dx}-y=x(\ln x-1)$.

3. $y'+ytgx=x\cos^2 x; M(0;1)$.

4. $y'+y=\sin x+\cos x$.

5. $(y^2-6x)y'+2y=0;\ \ M(0;-1)$.

6. $(y-y^3)dx+(2xy^2-x-y^2)dy=0$.

7. $dx+(x-e^{-y}\sec^2 y)dy=0;\ \ M(2;0)$.

8. $y'(x+\ln y)=1$.

9. $\sec^2 y\frac{dy}{dx}+xtgy=x$.

10. 7. $y'+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$.

11. $3\frac{dy}{dx}-y\sin x+3y^4\sin x=0$.

12. $xy'+y=xy^2\ln x$.

Заняття 5. Тема: *Рівняння Ріккаті.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти загальні розв'язки рівнянь:

1. $(x-x^4)y'-x^2-y+2xy^2=0,\ y_1(x)=x^2$.

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+x\cos x-1+\cos 2x,\ \ y_1=x\sin x.$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}+\left(2+\frac{1}{x}\right)y-e^{4x}, \quad y_1=xe^{2x}.$

4. $x^2y'+(xy-2)^2=0, \quad y_1(x)$ є функція вигляду $\frac{a}{x}$.

Знайти розв'язки рівнянь, підібравши спочатку частинні розв'язки:

5. $x^2\frac{dy}{dx}-x^2y^2+5xy-3=0.$

6. $\frac{dy}{dx}+xy^2+\frac{y}{x}-x^3-2=0.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти загальні розв'язки рівнянь:

1. $y'=y^2+\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}, \; y_1(x)=-\frac{1}{x}.$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}-x\sin x-\cos^2 x, \; y_1=x\cos x.$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{-x}}{\sin x}y^2+y+e^x(\cos x-\sin x), \quad y_1=e^x\sin x.$

4. $y'=\frac{y^2-x^2y-2x}{1-x^3}, \quad y_1(x)$ є функція вигляду ax^2.

Знайти розв'язки рівнянь, підібравши спочатку частинні розв'язки:

5. $x^3\frac{dy}{dx}-y^2-x^2y+x^2=0.$

6. $\frac{dy}{dx}=y^2-x^2+1.$

Заняття 6. Тема: *Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник. Випадки знаходження інтегрувального множника.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти розв'язки рівнянь в повних диференціалах:

1. $\left(2x\ln(x+y)+\frac{x^2+y}{x+y}\right)dx+\left(\ln(x+y)+\frac{x^2+y}{x+y}\right)dy=0.$

2. $\left(2x+x^2-y^2x\right)dx-\left(2y+x^2y-y^2\right)dy=0.$

3. $(6xy+x^2+3)y'+3y^2+2xy+2x=0.$

4. $(2x\sin y-y^2\sin x)dx+(x^2\cos y+2y\cos x+1)dy=0.$

5. $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx-2\frac{y}{x}dy=0.$

6. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0.$

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що вони мають вигляд $\mu=f(x)$ *або* $\mu=f(y)$*:*

7. $(2y+xy^3)dx+(x+x^2y^2)dy=0.$

8. $y^2(x-3y)dx+(1-3xy^2)dy=0.$

9. $2ydx+(y^2-6x)dy=0.$

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників $\mu(x+y)$, $\mu(xy)$ *або* $\mu(x-y)$*:*

10. $\left(y-\frac{ay}{x}+x\right)dx+ady=0.$

11. $y^2dx+(xy-1)dy=0.$

12. $(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти розв'язки рівнянь в повних диференціалах:

1. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$

2. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\frac{2x^3}{y^3}dy=0.$

3. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0.$

4. $\frac{2x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{2y+x}{x^2+y^2}dy=0.$

5. $(x\ln y-x^2+\cos y)dy+(x^2+y\ln y-y-2xy)dx=0.$

6. $(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy=0.$

Розв'язати диференціальні рівняння методом інтегрувального множника, знаючи, що вони мають вигляд $\mu=f(x)$ *або* $\mu=f(y)$*:*

7. $(1+x^2y)dx+x^2(x+y)dy=0.$

8. $(2xy+ax)dx+dy=0.$

9. $dx+(x+e^{-y}y^2)dy=0.$

Зінтегрувати рівняння за допомогою множників $\mu=(x+y)$, $\mu=f(xy)$ *або* $\mu=(x-y)$*:*

10. $dx+xctg(x+y)(dx+dy)=0.$

11. $(2x^2y+x)dy+(y+2xy^2-x^2y^3)dx=0.$

Заняття 7. Тема: *Диференціальні рівняння 1-го порядку, не розв'язані відносно похідної. Метод параметризації*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти загальні розв'язки та загальні інтеграли рівнянь:

1. $y'^3-1=0.$

2. $(\frac{dy}{dx})^2+5\frac{dy}{dx}+6=0.$

3. $y'^2+2xy'-3x^2=0.$

4. $y=y'\ln y'.$

5. $x(2+y'^2)=1.$

6. $x=y'\sin y'$

7. $x\sqrt{1+y'^2}-y'=0.$

8. $3y'^5-yy'+1=0.$

9. $xy'^2-2y'-y=0.$

10. $y=2xy'+\sqrt{1+y'^2}.$

11. $x^3y'^2+x^2yy'+a=0.$

12. $x^3+y'^3-3xy'=0.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти загальні розв'язки і загальні інтеграли рівнянь:

1. $y'^2+2y'+1=0.$

2. $y'^2+y'-2=0.$

3. $y'^2+xy'-x^2=0.$

4. $y=xy'+\sin y'.$

5. $y=y'\sin y'+\cos y'.$

6. $y-y'=\sqrt{1+y'^2}.$

7. $x=ay'+b\sqrt{1+y'^2}.$

8. $x(1+y'^2)=1.$

9. $x=y\left(\frac{1}{\sqrt{y'}}-\frac{1}{y'}\right).$

10. $xy'^2+yy'+a=0.$

11. $9yy'^2+4x^3y'-4x^2y=0.$

Контрольна робота № 1 (на лекції).

Диференціальні рівняння першого порядку.

Заняття 8, 9. Тема: *Інтегрування і пониження порядку диференціальних рівнянь із вищими похідними*

Зінтегрувати диференціальні рівняння та відшукати частинні розв'язки там, де задані початкові умови:

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $y''' = 0$, при $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0,\ y_0'' = 2.$

2. $y''' = x + \cos x$.

3. $y'' = xe^x$, при $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$

4. $y'' + y^{-3} = 0,$ при $x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$

5. $y''' - y''^2 = 0$.

6. $xy^{IV} + y''' = e^{2x}$.

7. $y''^3 - 2y'' - x = 0.$

8. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

9. $x^2 y''' - y''^2 = 0$.

10. $2yy'' - y'^2 = 1$.

11. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

12. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

13. $xyy'' - xy'^2 - yy' + \frac{xy'^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$

14. $yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $y^V = x - 1$.

2. $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

3. $y'' + \ln y'' - x = 0$.

4. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0$.

5. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$.

6. $y'''y' - 3y''^2 = 0.$

7. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

8. $yy'' - y'^2 = y'$.

9. $xyy'' - xy'^2 = 2yy'.$

10. $y'' - 3yy' = 0$.

11. $yy''' - y'y'' = 0.$

12. $(x^2 + y^2)y'' - yy'^2 + xy'^3 + xy' - y = 0.$

Заняття 10. Тема: *Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь, а також частинні там, де задані початкові умови:

1. $y'' + 5y' + 4y = 0$.

2. $y'' - 5y' + 4y = 0$, при $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ y_0' = 0.$

3. $y'' - a^2 y = 0.$

4. $y'' + y = 0$, при $y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

5. $y''' + 8y = 0.$

6. $y^{(IV)} + 2y'' + y = 0.$

7. $y^V - 10y''' + 9y' = 0.$

8. $y^{(IV)} + a^4 y = 0.$

9. $y^{(6)} + 64y = 0.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $y'' - 7y' + 10y = 0$.

2. $y'' + 9y = 0$.

3. $y'' + 3y' = 0$.

4. $y'' + 4y' + 13y = 0$.

5. $2y'' + y' - y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$.

6. $y^{IV} - a^4 y = 0$.

7. $y^V - 4y^{IV} = 0$.

8. $y^{VI} + 2y^V = 0$.

9 $y'' - 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 7$. **10.** $y^{IV} - 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0$.

Заняття 11, 12. Тема: *Методи Лагранжа, Коші і невизначених коефіцієнтів для розв'язування неоднорідних рівнянь вищих порядків*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $y'' - y = x^2 + 1$ (НК). **2.** $y''' - 4y' = x^2$ (НК). **3.** $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$ (НК).
4. $y'' + 2y' - 3y = 2x - e^{3x}$ (НК). **5.** $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$ (НК).
6. $y''' - 7y'' + 6y = x^2$ (Л). **7.** $y'' + 4y = 4x\cos 2x$ (Л).
8. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2+6x+2}{x^3}$ (Л). **9.** $y'' + y = ctgx$ (К).
10. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ (К). **11.** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$ (К).

Рекомендовані варіанти домашнього завдання

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ (НК). **2.** $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$ (НК).
3. $y^{V} + y''' = x^2 - 1$ (НК). **4.** $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$ (НК).
5. $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$ (НК). **6.** $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ (Л).
7. $y'' + 4y = \sec 2x$ (Л). **8.** $y'' + y' = x^2 + \cos^2 x$ (Л).
9. $y'' + y = tgx$ (К). **10.** $y'' - y = \dfrac{1}{x}$ (К). **11.** $y'' + \omega^2 y = \dfrac{1}{x+1}$; $y(1) = 2,\ y'(1) = -3$ (К).

Заняття 13. Тема: *Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків зі змінними коефіцієнтами. Рівняння, що зводяться до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. Функції $x,\ x^2,\ x^3$ справджують деяке однорідне лінійне диференціальне рівняння. Переконатися, що вони утворюють фундаментальну систему, та скласти згадане рівняння.

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами:
2. $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y_1(x) = x$.
3. $y'' - (x^2 + 1)y = 0,\quad y_1(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
4. $xy'' + 2y' + xy = 0,\quad y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$.

Скласти лінійне однорідне диференціальне рівняння (найменшого можливого порядку), яке має такі частинні розв'язки:
5. $y_1 = 1,\ y_2 = \cos x$. **6.** $y_1 = xe^{-x},\ y_2 = e^{-x}$.
Розв'язати рівняння:
7. $x^3 y''' + xy' - y = 0$. **8.** $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$.
9. $x^2 y'' + xy' + y = 0$. **10.** $(2x+3)^2 y'' + (2x+3)y' - y = 0$.

11. $2(2x+1)^2y'' - (2x+1)y' + 2y = 0.$

12. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x.$ **13.** $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6y'}{x^2} - \frac{6y}{x^3} = \sqrt{x}.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. Побудувати диференціальне рівняння, що має таку фундаментальну систему функцій: **1**, $\cos 2x$.

Розв'язати лінійні рівняння зі змінними коефіцієнтами:

2. $(1-x)y'' + xy' - y = 0; y_1(x) = e^x$. **3.** $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0;\ y_1(x) = \sqrt{1+x^2}$.

4. $y'' - xy' + 2y = 0;\ y_1(x) = x^2 - 1.$ **5.** $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$.

6. $x^2y''' - 2y' = 0$. **7.** $x^3y''' - xy' - 3y = 0$.

8. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$ **9.** $(x+1)^3y''' - 3(x+1)^2y'' + 4(x+1)y' - 4y = 0$.

10. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$. **11.** $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$. **12.** $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$.

Заняття 14. Контрольна робота № 2.

Диференціальні рівняння вищих порядків.

II семестр

Заняття 15. Тема: *Крайові задачі. Задача Штурма – Ліувілля. Побудова функції Гріна.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Яка з крайових задач має розв'язки:

1. $y'' - y = 0; \ \ y(0) = 0, \ y'(\pi/2) = 1.$ **2.** $y'' + y = 0; \ \ y(0) = 0, \ \ y'(2\pi) = 1.$

3. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$ **4.** $y'' - y' - 2y = 0, \ \ y'(0) = 2, \ y(\infty) = 0.$

Знайти власні значення і власні функції:

5. $y'' = \lambda y; \ \ y(0) = 0, \ y(b) = 0.$ **6.** $y'' = \lambda y; \ \ y(0) = y'(b) = 0.$

7. $x^2 y'' + \frac{1}{4} y = \lambda y, \ \ y(1) = y(b) = 0.$

Побудувати функції Гріна для крайових задач:

8. $y'' = f(x); \ y(0) = 0, \ y(1) = 0.$ **9.** $y'' + y = f(x); \ y(0) = y(\pi), \ \ y'(0) = y'(\pi).$

10. $x^3 y'' + 3x^2 y' + xy = f(x); \quad y(1) = 0, \ \ y(2) + 2y'(2) = 0.$

11. $xy'' + y' = f(x); \quad y(1) = 0, \ \ y(x)$ обмежене при $x \to \infty.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Розв'язати крайову задачу:

1. $y'' + y = 1; \ y'(0) = 0, \ y(1) = 1.$ **2.** $y'' + y = 1; \ y(0) = 0, \ y(\pi/2) = 0.$

Знайти власні значення і власні функції:

3. $y'' = \lambda y \ ; \ y'(0) = 0, \ y'(l) = 0.$ **4.** $x^2 y'' = \lambda y \ ; \ y(1) = 0, \ y(a) = 0.$

Побудувати функції Гріна для крайових задач:

5. $y'' + y = f(x); \ y'(0) = 0, \ y(\pi) = 0.$ **6.** $xy'' - y' = f(x); \quad y'(1) = 0, \ \ y(2) = 0.$

7. $\cos^2 x \, y'' - \sin 2x \, y' = f(x); \quad y(0) = y'(0), \ \ y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Заняття 16, 17. Тема: *Розв'язування однорідних лінійних систем з постійними коефіцієнтами.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Розв'язати системи, використовуючи матричний метод.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - 3y. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$

Розв'язати системи, використовуючи метод Ейлера.

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y, \ \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y - z, \ \lambda_2 = 2, \\ \dot{z} = 2x - y, \ \lambda_3 = -1. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \ \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = x + y, \ \lambda_2 = 1 + 2i \\ \dot{z} = 3x + z, \ \lambda_3 = 1 - 2i \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \ \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \ \lambda_2 = 3, \\ \dot{z} = x - y + 2z, \ \lambda_3 = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, & \lambda_1 = 1 \\ \dot{y} = x + y - z, & \lambda_2 = 1 \\ \dot{z} = 2z - y, & \lambda_3 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = 2x - y - 2z, & \lambda_2 = 1, \\ \dot{z} = 2z - x + y, & \lambda_3 = 1. \end{cases}$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Розв'язати системи, використовуючи матричний метод.

1. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0, \\ \dot{y} + 3x + y = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2z - x - 2y, \\ \dot{y} = 2z - 2x - y, \\ \dot{z} = 3z - 3x - 2y. \end{cases}$

Розв'язати системи, використовуючи метод Ейлера.

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y - 4x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0, \\ \dot{y} - x - y = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, & \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = y - x + z, & \lambda_2 = 2, \\ \dot{z} = x - z, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, & \lambda_1 = 2, \\ \dot{y} = x + 3y - z, & \lambda_2 = 3 + i \\ \dot{z} = 2y + 3z - x, & \lambda_3 = 3 - i. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z, & \lambda_1 = 0, \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z, & \lambda_2 = 1, \\ \dot{z} = y + 2z - x, & \lambda_3 = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x, & \lambda_1 = 1, \\ \dot{y} = 4x + y, & \lambda_2 = -1, \\ \dot{z} = 2x + y - z, & \lambda_3 = -1. \end{cases}$

Заняття 18, 19. Тема: *Методи розв'язування неоднорідних систем з постійним коефіцієнтами.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t, \\ \dot{y} = 5x - y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = y - 2x + 18. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t}, \\ \dot{y} = y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^{t}, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = y + \mathrm{tg}^2\, t - 1, \\ \dot{y} = -x + \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + \frac{1}{t} - 4\ln t, \\ \dot{y} = -x + y + \frac{1}{t}. \end{cases}$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1, \\ \dot{y} = 3y - 2x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^{t}, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^{t}\sin t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + \frac{1}{\sin t}, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

Заняття 20. Тема: *Розв'язування лінійних рівнянь першого порядку з частинними похідними. Задача Коші.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$ **2.** $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$ **3.** $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y.$

4. $(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$ **5.** $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}+\cos x\frac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cos y.$

Знайти розв'язки рівняння, що задовольняє вказаним умовам.

6. $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=2x$ при $y=1.$ **7.** $(1+x^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ x=0,\ \ z=y^2.$

8. $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+xy=0,\ y=x^2,\ z=x^3.$ **9.** $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=x;\ \ x=0,\ \ z=y^2.$

10. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy,\ \ x=2,\ z=y^2+1.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$ **2.** $(x-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

3. $e^x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=ye^x.$ **4.** $xy\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}=yz.$

Знайти розв'язок рівняння, що задовольняє вказаним умовам.

5. $\frac{\partial z}{\partial x}-(2e^x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \ z=y$ при $x=0.$ **6.** $x\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2;\ \ y=1,\ \ z=x^2.$

7. $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y),\ \ x=1,\ \ yz+1=0.$

8. $z\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz,\ \ x+y=2,\ \ yz=1.$

Заняття 21. Контрольна робота № 3.
Крайова задача. Інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь.

Заняття 22. Тема: *Поле напрямів. Інтегральні криві.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Побудувати поле напрямів та накреслити схематично поведінку інтегральних кривих таких диференціальних рівнянь:

1. $\frac{dy}{dx}=2x+1.$ **2.** $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$ **3.** $\frac{dy}{dx}=y-x^2.$

4. $\frac{dy}{dx}=2y-x.$ **5.** $\frac{dy}{dx}=x^2+2x-y.$

6. $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2.$ Побудувати ізокліни $y'=0,\ y'=\frac{1}{\sqrt{3}},\ y'=1,\ y'=\sqrt{3}.$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+y}.$ **8.** $\dfrac{dy}{dx} = -2xy.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Побудувати поле напрямів та накреслити схематично поведінку інтегральних кривих таких диференціальних рівнянь:

1. $\dfrac{dy}{dx} = y + x.$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}.$ **3.** $\dfrac{dy}{dx} = y + x^2.$

4. $\dfrac{dy}{dx} = y - 3x.$ **5.** $\dfrac{dy}{dx} = (y-1)^2.$

6. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2.$ Побудувати ізокліни $y' = 0,\ y' = \pm 1,\ y' = \pm 2,\ y' = \pm 3.$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-3x}{x+3y}.$ **8.** $y\left(\dfrac{dy}{dx} + x\right) = 1.$

Заняття 23. Тема: *Особливі точки диференціальних рівнянь на площині.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем. Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині $(x,\ y)$.

1. $y' = \dfrac{y}{x}.$ **2.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 5y. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y. \end{cases}$ **4.** $y' = \dfrac{2x+y}{3x+4y}.$ **5.** $y' = \dfrac{y-2x}{2y-3x}.$

Знайти та дослідити особливі точки систем.

6. $y' = \dfrac{2y-x}{3x+6}.$ **7.** $y' = \dfrac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Дослідити особливі точки для поданих нижче рівнянь та систем. Дати схематичний малюнок розміщення інтегральних кривих на площині $(x,\ y)$.

1. $y' = \dfrac{4x-y}{3x-2y}.$ **2.** $y' = \dfrac{x-4y}{2y-3x}.$ **3.** $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$ **4.** $y' = \dfrac{4y-2x}{x+y}.$ **5.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = y - x. \end{cases}$

Знайти та дослідити особливі точки систем.

6. $y' = \dfrac{2x+y}{x-2y-5}.$ **7.** $y' = \dfrac{2y}{x^2 - y^2 - 1}.$

Заняття 24, 25. Тема: *Стійкість за Ляпуновим. Методи Ляпунова. Критерій Гурвіца. Побудова функції Ляпунова.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

1. Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами: $\dot{x} = 4x - t^2 x, \ \ x(0) = 0.$

2. Дослідити стійкість нульового розв'язку, якщо відомо загальний розв'язок системи:

$$x_1(t) = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2.$$

3. Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 - x, \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y. \end{cases}$$

4. Дослідити, при яких значеннях параметра a буде асимптотично стійким нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x^2, \\ \dot{y} = x + y + xy. \end{cases}$$

При яких значеннях параметрів a і b є асимптотично стійким нульовий розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь

5. $\begin{cases} \dot{x} = y + \sin x\,, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(e + ax) - e^y, \\ \dot{y} = bx + \operatorname{tg} y\,. \end{cases}$

7. Знайти всі положення рівноваги системи звичайних диференціальних рівнянь та дослідити їх на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(y^2 - x)\,, \\ \dot{y} = x - y - 1. \end{cases}$$

8. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$

Дослідити стійкість нульового розв'язку, користуючись відомими критеріями.

9. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$ **10.** $y^{IV} + 3{,}1y''' + 5{,}2y'' + 9{,}8y' + 5{,}8y = 0.$

11. Дослідити, при яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок буде асимптотично стійким

$$y''' + ay'' + by' + 2y = 0.$$

12. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми: $V(x) = x^T B x$, $x = (x_1, x_2)^T$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad (*)$$

таким чином, щоб $\left(\dfrac{dV}{dt}\right)_{(*)} = -x_1^2 - x_2^2$.

Дослідити стійкість нульового розв'язку, побудувавши функцію Ляпунова.

13. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy, \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

1. Дослідити стійкість розв'язків з вказаними початковими умовами $3(t-1)\dot{x} = x$, $x(2) = 0$.

2. Знайти стан рівноваги даної системи і дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = (x-1)(y-1), \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$$

За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за першим наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок

3. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x}. \end{cases}$

5. Знайти всі стани рівноваги системи звичайних диференціальних рівнянь та дослідити їх на стійкість

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x+y). \end{cases}$$

6. Дослідити, при яких значеннях параметра a буде асимптотично стійким нульовий розв'язок

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

Дослідити стійкість нульового розв'язку, користуючись відомими критеріями.

7. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$. **8.** $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$.

При яких значеннях параметрів a і b нульовий розв'язок є асимптотично стійким?

9. $y''' + 3y'' + ay' + by = 0$. **10.** $y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0$.

11. Побудувати функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми: $V(x) = x^T Bx$, $x = (x_1, x_2)^T$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2 \end{cases} \qquad (**)$$

таким чином, щоб $\left(\dfrac{dV}{dt}\right)_{(**)} = -x_1^2 - x_2^2$.

12. Дослідити стійкість нульового розв'язку, побудувавши функцію Ляпунова.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$$

Заняття 26, 27. Тема: *Варіаційне числення.*

Рекомендовані приклади для аудиторної роботи

Знайти екстремалі таких функціоналів:

1. $I[y(x)] = \int_{-1}^{0} (12xy - y'^2)dx;\ y(-1) = 1,\ y(0) = 0$.

2. $I[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2)dx$, $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

3. $I[y(x)] = \int_0^1 yy'^2 dx$, $y(0) = 1,\ y(1) = \sqrt[3]{4}$.

5. $I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y''^2) dx$, $y(0) = 0,\ y(1) = sh1,\ y'(0) = 1,\ y'(1) = ch1$.

4. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (y^2 + 2y'^2 + y''^2)dx;\quad y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(0) = 1,\ y'(1) = -sh1$.

7. $I[y(x), z(x)] = \int\limits_o^{\pi/4} (2z - 4y^2 + y'^2 - z'^2)dx;\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ z(0) = 0, z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

8. $I[y(x), z(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 - 2yz)dx;\ y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\quad z(0) = 0, z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Дослідити на екстремум функціонали:

9. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (y'^3 + y')dx;\ y(0) = 0,\ y(1) = 2.$

10. $I[y(x)] = \int_0^1 (1 + x)y'^2 dx$, $y(0) = 0,\ y(1) = 1$.

11. $I[y(x), z(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + z'^2)dx;\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 1,\ z(0) = 0,\ z(1) = 2.$

Рекомендовані приклади для домашнього завдання

Знайти екстремалі таких функціоналів:

1. $I[y(x)] = \int\limits_{-1}^1 (y'^2 - 2xy)dx;\ y(-1) = -1,\ y(1) = 1.$

2. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 \sqrt{y(1 + y'^2)}dx;\ y(0) = y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

3. $I[y(x)] = \int_0^1 (240y - y'''^2) dx$, $y(-1) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(-1) = -4.5$, $y'(0) = 0$, $y''(-1) = 16$, $y''(0) = 0$.

5. $I[y(x)] = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (y'')^2 dx;\ y(0) = 0, y(1) = 1,\ y'(0) = 0,\ y'(1) = 1.$

6. $I[y(x), z(x)] = \int_{-1}^1 (2xy - y'^2 + \frac{z'^3}{3}) dx$, $y(1) = 0$, $y(-1) = 2$, $z(1) = 1$, $z(-1) = -1$.

7. $I[y(x), z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2y) dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = \frac{3}{2}$, $z(0) = 0$, $z(1) = 1$.

Дослідити на екстремум функціонали:

8. $I[y(x)] = \int\limits_0^1 (x + 2y + \frac{1}{2}y'^2)dx,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

9. $I[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx$, $y(1) = 1,\ y(2) = 4$.

10. $I[y(x), z(x)] = \int\limits_0^1 (y'^2 + z'^2 + 4z)dx;\quad y(0) = 0,\quad y(1) = 1,\ z(0) = 0,\ z(1) = 0.$

Заняття 28. Контрольна робота № 4.

Якісні методи дослідження розв'язків диференціальних рівнянь. Варіаційне числення.