Семінар 7

Формула повної ймовірності та формула Байєса.

Т е о р е м а 1 (формула повної ймовірності). Нехай для події A існує послідовність подій B_i, $i = 1,2,...$ таких, що $B_i \bigcap B_j = \varnothing$ для $i \neq j$, $P(B_i) > 0$ для $i = 1,2,\ldots$, і крім того $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Тоді

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) P(A/B_i) .$$

Повна група подій. Будемо говорити, що події $H_1,...,H_n,...$ утворюють повну групу подій, якщо є виконаними наступні умови:

1) $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$; 2) $H_i \bigcap H_j = \varnothing$ для $i \neq j$; 3) $P(H_i) > 0, \quad i = 1, 2, ...,$

Зазвичай події $H_i, \quad i = 1, 2,...$ називають гіпотезами.

Тоді формула повної ймовірності буде мати вигляд у випадку повної групи подій:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A/H_i) P\left(H_i\right)$$

Т е о р е м а 2 (ф о р м у л а Б а й є с а).

Нехай $H_1,...,H_n,...$ - повна група подій (гіпотез) і B – деяка подія така, що $P(B) > 0.$ Тоді

$$P\left(H_i / B\right) == \frac{P(B / H_i) P(H_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(B / H_k) P(H_k)} .$$

Задача 1 Серед N екзаменаційних білетів є n "щасливих". За білетами студенти підходять один за одним. У кого більша ймовірність узяти щасливий білет: у того, хто підійшов першим, чи у того, хто підійшов другим?

Розв'язок. Введемо до розгяду дві гіпотези:

H_1- перший студент витягнув « щасливий » білет, H_2- перший студент витягнув « нещасливий » білет. Нехай A є подією, яка означає, що другий студент витягнув « щасливий » білет. Тоді

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2).$$

Підрахуємо: $P(H_1) = \frac{n}{N}$, $P(H_2) = \frac{N-n}{N}$, $P(A/H_1) = \frac{n-1}{N-1}$, $P(A/H_2) = \frac{n}{N-1}$.

Зрештою отримаємо: $P(A) = \frac{n-1}{N-1}\frac{n}{N} + \frac{n}{N-1}\frac{N-n}{N} = \frac{n^2 - n + nN - n^2}{N(N-1)} = \frac{n(N-1)}{N(N-1)} = \frac{n}{N}$

Задача 2 В урні n куль, білі або чорні. Усі припущення про число білих куль в урні рівноможливі. З урни навмання беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що вона біла?

Розв'язок. Введемо до розгляду гіпотези: H_i - в урні є i білих куль $i = 0,1,\dots,n$

Нехай A є подією, яка означає, що взята куля є білою. Тоді будемо мати:

$$P(H_i) = \frac{1}{n+1}, \quad P(A/H_i) = \frac{i}{n}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=0}^{n} i = \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$$

Задача 3. Авто експлуатується двома особами: чоловіком і жінкою. Ймовірність дорожньо-транспортної пригоди при керуванні авто чоловіком дорівнює 0,1, а ймовірність дорожньо-транспортної пригоди при керуванні авто жінкою дорівнює 0,03. Відомо, що чоловік користується транспортним засобом удвічі більше ніж жінка. Треба: а) підрахувати ймовірність дорожньо-транспортної пригоди для даного авто;

б) при умові, що сталася дорожня пригода, підрахувати ймовірність того, що за кермом був чоловік.

Розв'язання: Нехай є наступні події: A - сталася дорожня пригода, H_1 - за кермом авто чоловік, H_2 - за кермом авто жінка.

Нехай x - число випадків, коли за кермом дружина, тоді $2x$ - число випадків, коли за кермом є чоловік. Тоді

$$P(H_1) = \frac{2x}{x+2x} = \frac{2}{3}, \; P(H_2) = \frac{x}{x+2x} = \frac{1}{3}, \; P(A/H_1) = 0{,}1, \quad P(A/H_2) = 0.03.$$

Для пункту а) на підставі формули повної ймовірності знаходимо

$$P(A) = P(H_1)P\left(A/H_1\right) + P(H_2)P\left(A/H_2\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{100} = \frac{23}{300}.$$

Для пункту б) за формулою Байєса маємо:

$$P\left(H_1/A\right) = \frac{P(H_1)P\left(A/H_1\right)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}}{\frac{23}{300}} = \frac{20}{23}.$$