Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Пензенский государственный университет"

Л. Н. Домнин

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Учебное пособие

Пенза
Издательство
Пензенского государственного
университета
2007

УДК 519.1
Д66

Р е ц е н з е н т ы :

Кафедра "Естественно-научные дисциплины"
ГОУВПО "Российский государственный университет
инновационных технологий и предпринимательства"
(Пензенский филиал)

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры "Высшая математика"
ГОУВПО "Всероссийский заочный финансово-экономический институт"
Ю. Н. Заваровский

Домнин, Л. Н.

Д66 Элементы теории графов: учеб. пособие / Л. Н. Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. – 144 с.: 75 ил., 13 табл., библиогр. 18 назв.

Книга посвящена теории графов и состоит из пяти разделов. В первом даны основные понятия и определения теории графов, рассмотрены виды графов и способы их описания. Второй раздел посвящен вопросу о связности ориентированных графов. Важнейший вид графов – деревья рассмотрен в третьем разделе. Разобраны задачи описания и пересчета деревьев, а также задача о кратчайшем остове. Четвертый раздел посвящен вопросам пересчета и перечисления путей в графах. Здесь же приведены различные варианты задачи о кратчайшем пути и алгоритмы ее решения. В пятом разделе рассматриваются фундаментальные, эйлеровы и гамильтоновы циклы. Разбираются условия существования и алгоритмы поиска таких циклов в графе.

Учебное пособие подготовлено на кафедре "Высшая и прикладная математика" по материалам курса лекций по теории графов, читаемого автором для студентов специальности "Прикладная математика" и может быть использовано студентами других специальностей при изучении соответствующих разделов дискретной математики.

УДК 519.1

Предисловие

Теория графов — раздел дискретной математики, рассматривающий множества с заданными на них отношениями между элементами. Объекты такого рода могут быть наглядно представлены ввиде рисунков, состоящих из точек, кружочков или иных фигур, соединенных линиями. При этом точки соответствуют элементам множества, а линии отражают связи (отношения) между ними. Подобные рисунки обычно и называют графами, хотя соответствующее понятие шире, а рисунок — лишь одна из форм представления графа.

Схемы различных коммуникаций, электрических цепей, химических соединений, блок-схемы компьютерных программ, схемы связей между людьми и группами людей фактически являются графами. С помощью графов легко и просто формулируется большинство задач, в которых фигурируют дискретные объекты и процессы.

Введение термина "граф" приписывается известному венгерскому математику Д. Кёнигу (1884–1944) автору одной из первых книг по теории графов (1936 г.). Однако имеются и более ранние работы (статьи как самого Кёнига, так и других авторов), где используется это название.

Появление ЭВМ, развитие математической логики, машинной математики, теории информации, исследования операций, биологии, математической лингвистики и других дисциплин, привело к росту числа задач, где, в отличие от классического анализа непрерывных величин, на первый план выходят рассуждения и построения дискретно-комбинаторного характера. Как результат теория графов стала одной из существенных частей математического аппарата многих научных дисциплин и вошла в учебные программы вузов.

В небольшой по объему книге невозможно охватить всю проблематику теории. В результате жесткого отбора были выбраны темы, касающиеся связности, поиска путей и циклов в графах, а также деревьев — одного из наиболее часто встречающихся в приложениях видов графов.

Как и в любой научной дисциплине, многие понятия, характеристики, теоремы и алгоритмы теории графов носят имена людей, внесших вклад в её становление и развитие. Полезно и справедливо, чтобы изучающий представлял, кто и когда положил свой "кирпичик" в здание науки. Ниже даны очень краткие сведения о тех, чьи имена есть на страницах пособия.

Л. Эйлер (1707–1783) — великий швейцарский, немецкий и российский математик.

У. Гамильтон (1805–1865) – ирландский математик, физик и механик.

А. Кэли (1821–1895) — английский математик который исследовал деревья в связи с химическими структурными формулами.

Г. Кирхгоф (1824–1887) — выдающийся немецкий физик. Разработал теорию деревьев для анализа электрических цепей.

Д. Пойа (1887–1985) — известный венгерский, швейцарский и американский математик. Предложил метод, позволяющий решать задачи подсчета различных видов графов.

Х. Прюфер (1896–1934) — немецкий математик.

О. Оре (1899–1968) — видный норвежский математик.

Х. Уитни (1907–1989) — известный американский математик, работавший в области теории графов и топологии.

Р. Прим (1921) — американский математик, чье имя носит один из алгоритмов построения кратчайшего остова графа.

Г. Дирак (1925–1984) — известный датский математик.

Д. Краскал (1928) — американский математик. Автор одноименного алгоритма построения кратчайшего остова графа.

Э. Дейкстра (1930–2002) — голландский учёный, внесший большой вклад в развитие теории и практики программирования. Автор алгоритма поиска кратчайшего пути в графе.

Для понимания и усвоения материала пособия достаточно владеть начальными сведениями из теории множеств, линейной алгебры и комбинаторики.

1. Введение

1.1. Определение графа

Теоретико-множественное определение графа. Пусть V — непустое множество, например $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Запишем множество всех его двухэлементных подмножеств $V^{(2)}$. Для нашего примера это множество

$$V^{(2)} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \\ \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \\ \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \\ \{v_4, v_5\}\}.$$

Возьмем произвольно некоторое $E \subseteq V^{(2)}$, например,

$$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \\ \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \\ \{v_3, v_4\}, \\ \{v_4, v_5\}\}.$$

Пару $\langle V, E\rangle$ называют *неориентированным графом* G, в котором V это множество *вершин*, а E – множество *ребер*, являющееся подмножеством множества $V^{(2)}$.

В более компактной форме это определение обычно формулируется так: пара $\langle V, E\rangle$ называется неориентированным графом, если V – непустое множество элементов, называемых вершинами, а E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V, называемых ребрами.

При записи различных соотношений в теории графов пользуются обозначениями VG или $V(G)$ для множества вершин и EG или $E(G)$ для множества ребер графа G.

Наглядным способом представления графа является рисунок (диаграмма), на котором вершины изображаются точками, кружочками или другими фигурками, а ребра – линиями, соединяющими изображения вершин реберной пары.[1] Форма

[1] Иногда графом называют именно такой рисунок (диаграмму).

и размеры изображения значения не имеют. Важно только, чтобы оно соответствовало множествам V и E. На рис. 1.1 даны варианты такого представления вышеописанного графа.

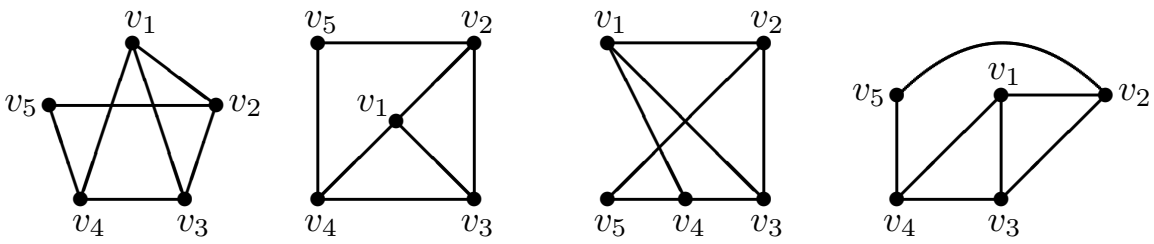


Рис. 1.1

Обратите внимание на существенное различие изображений и вместе с тем полное соответствие друг другу и описанию графа на стр. 5.

Основные характеристики графа и его элементов. Две вершины, образующие ребро $\{v_i, v_j\}$, называют его концами, а про ребро говорят, что оно соединяет v_i и v_j. Говорят также, что вершины v_i и v_j *смежны*. Смежными называют и ребра с общей вершиной. Про ребро и вершину, которая является его концом, говорят, что они *инцидентны*. Так, например, в графе на рис. 1.1 вершины v_1 и v_2 смежны, а вершины v_3 и v_5 не смежны. Ребра $\{v_1, v_2\}$ и $\{v_1, v_3\}$ смежны, а ребра $\{v_4, v_5\}$ и $\{v_2, v_3\}$ не смежны. Наконец, вершина v_3 и ребро $\{v_2, v_3\}$ инцидентны.

Число ребер, инцидентных вершине v, определяет *степень вершины*, которая обозначается $\deg v$. Так, в графе на рис. 1.1 $\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = \deg v_4 = 3$, а $\deg v_5 = 2$. Вершину v называют *изолированной*, если $\deg v = 0$, и *концевой*, если $\deg v = 1$. Ребро, инцидентное концевой вершине, также называют *концевым*. Список степеней всех вершин называют *степенной последовательностью* графа.

Множество вершин, смежных с вершиной v, обозначают как $\operatorname{adj} v$. Например, в графе на рис. 1.1 $\operatorname{adj} v_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$.

Важнейшими количественными характеристиками графа являются: число вершин $n = |V|$, определяющее *порядок* графа, и число ребер $m = |E|$. Граф с n вершинами и m ребрами называется (n, m)-*графом*.

Исторически первой теоремой теории графов является утверждение, принадлежащее Эйлеру и связывающее количество ребер, вершин и их степеней.

Теорема 1.1 *Сумма степеней вершин (n, m)-графа равна удвоенному числу его ребер:* $\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E| = 2m$.

$\triangleright$ Доказательство тривиально: поскольку любое ребро инцидентно двум вершинам, в сумме степеней всех вершин графа каждое ребро учитывается дважды. $\triangleleft$

С л е д с т в и е. *В любом графе число вершин нечетной степени четно.* $\triangleright$ Пусть V_1 и V_2 – множества вершин четной и нечетной степени соответственно. Очевидно,что

$$\sum_{v \in V_1} \deg v + \sum_{v \in V_2} \deg v = 2m\,.$$

Имеем два слагаемых, сумма которых четное число. Первое слагаемое четно (как сумма четных чисел). Значит, второе также должно быть четным, а это при суммировании нечетных чисел возможно, если только их количество четно. $\triangleleft$

Изоморфизм графов. Обратимся вновь к рис. 1.1, где представлены четыре различных изображения одного и того же графа. Задача рисунка – показать множественность образов при графической интерпретации графа. Можно поставить другую, в некотором смысле обратную задачу. Имеются изображения графов одного порядка с одинаковым числом ребер. Необходимо установить, разные это графы или один, только по-разному изображенный. Чтобы различать подобные ситуации, используют понятие *изоморфизма.*

Изоморфизмом называют взаимно-однозначное соответствие между множествами вершин двух графов G_1 и G_2, сохраняющее отношение смежности, а сами графы называют изоморфными. Отображая это, пишут: $G_1 \cong G_2$ или $G_1 = G_2$.

Изоморфность графов на рис. 1.1 установить довольно просто. Достаточно составить списки вершин всех графов, указав для каждой из них всех ее "соседок" (множество $\operatorname{adj} v$). Сравнив списки, легко убедиться в их идентичности – графы

изоморфны. В данном случае графы действительно изоморфны, причем их эквивалентные вершины обозначены (пронумерованы) одинаково. Задача усложняется, если эквивалентные вершины графов имеют разные номера. В качестве примера можно привести два изоморфных графа G_1 и G_2, изображенные на рис. 1.2. Для них описанную выше процедуру работы

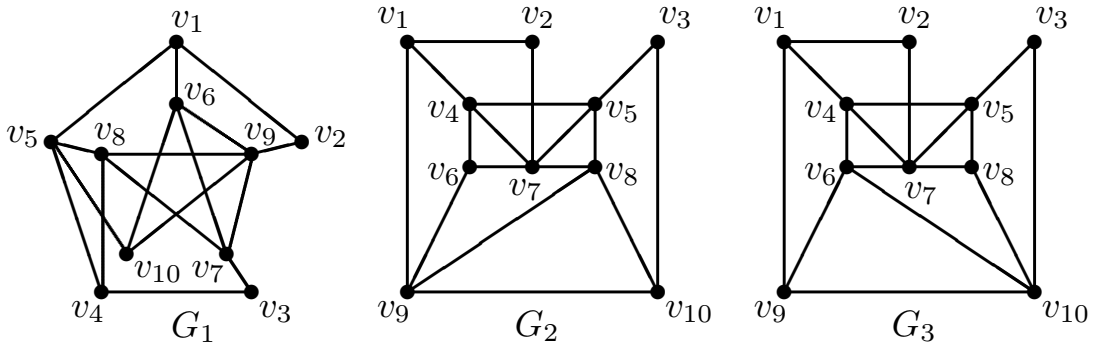


Рис. 1.2

со списками придется повторять неоднократно, каждый раз меняя нумерацию вершин одного из графов, пока не будет обнаружен изоморфизм, т. е. получены идентичные списки вершин. В лучшем случае факт изоморфности графов можно установить с первой попытки, в худшем потребуется проверить 10! вариантов нумерации вершин. Доказать неизоморфность графов G_1 и G_3 можно, только выполнив все проверки. Существенно сократить их количество можно, если использовать *инварианты*.

Инвариантом называют некоторую характеристику графа G, которая принимает одно и то же значение для любого графа, изоморфного G.

Инвариантами являются: число вершин и число ребер графа, число вершин четной и нечетной степени, степенная последовательность и другие числовые характеристики. В качестве инвариантов могут выступать свойства и особенности графа (связность, двудольность, наличие или отсутствие циклов и т. п.), рассматриваемые далее.

Анализ графов на изоморфность целесообразно начинать со сравнениия значений некоторого множества инвариантов, переходя от простых ко все более сложным и трудоемким.

И только если выбранная система инвариантов не позволила установить неизоморфность графов, следует приступать к перебору. При этом количество перебираемых вариантов нумерации вершин может оказаться существенно меньшим. Если, например, при совпадении степенных последовательностей двух графов в каждом из них есть одна вершина степени d, обозначенная в первом графе как v_5, то из всех возможных нумераций вершин второго графа следует рассмотреть только те, в которых вершина этой степени имеет тот же номер.

К сожалению, пока не известна (возможно и не существует) система инвариантов, позволяющая решать задачу изоморфизма для всех видов графов.

Количество графов. Определим число графов порядка n. Ясно, что на множестве из n вершин можно образовать C_n^2 различных неупорядоченных пар, соответствующих всем возможным ребрам графа. Поэтому любому n-вершинному графу можно сопоставить C_n^2-разрядный двоичный код, каждый разряд которого соответствует определенному ребру: если разряд равен 1, граф содержит это ребро, если 0 – не содержит. Следовательно, количество графов порядка n можно определить как $l_n{=}2^{C_n^2}$. При $n{=}10$ имеем $l_{10}{=}2^{C_{10}^2}$, что составляет внушительную величину 2^{45} или $\simeq 3,518 \cdot 10^{13}$. Однако, если не учитывать разметку вершин, которая принципиального значения не имеет, а лишь позволяет описать связи между вершинами, не все эти графы различны. Например, существует

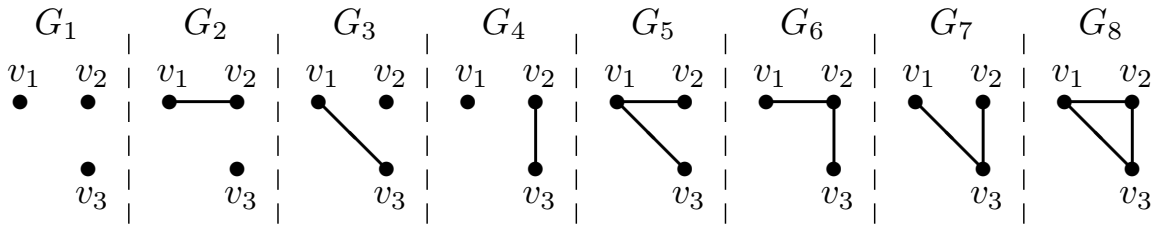


Рис. 1.3

$l_3{=}2^{C_3^2}{=}8$ трехвершинных графов. Все они представлены на рис. 1.3. Легко заметить, что фактически есть лишь четыре различных трехвершинных графа, поскольку $G_2{\cong}G_3{\cong}G_4$ и $G_5{\cong}G_6{\cong}G_7$ и, если убрать метки вершин, различия между

графами в этих тройках исчезнут. Поэтому естественно появление такого понятия как *непомеченный* (*абстрактный*) *граф*, в отличие от помеченного (имеющего метки вершин). Ясно, что любой непомеченный граф представляет множество изоморфных помеченных графов.

Задача определения количества непомеченных графов g_n существенно сложнее задачи о количестве помеченных. В [2] приведены данные о числе непомеченных графов до 24-го порядка включительно. Так, число графов с десятью вершинами g_{10}=12 005 168. Эта величина на шесть порядков меньше, чем l_{10}, но все еще весьма значительна.

Существует достаточно простая *формула Пойа*, дающая асимптотическую оценку числа непомеченных графов:

$$g_n \sim 2^{C_n^2}/n!$$

Согласно формуле количество непомеченных графов приблизительно в $n!$ раз меньше количества помеченных. Действительно, в большинстве случаев (но не всегда) разметку вершин непомеченного графа можно выполнить $n!$ способами. При малых n формула "не работает". Так, для n=4 получаем $2^{C_4^2}/4!$=8/3, тогда как имеется 11 четырехвершинных графов, т. е. налицо четырехкратное занижение их числа. При n=10 формула дает 9 696 000, что уже в 1,238 меньше фактического числа 12 005 168, но ошибка еще существенна. При n=12 получаем $\sim 1,54 \cdot 10^{11}$, вместо $\sim 1,65 \cdot 10^{11}$, т. е. в 1,072 раза меньше. Наконец, при n=15 разница сокращается до одного процента.

1.2. Подграфы

Граф $G'(V', E')$ называют *подграфом* графа $G(V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$, причем такие, что ребро $\{v, u\}$ содержится в E' только тогда, когда $v \in V'$ и $u \in V'$. В свою очередь, граф G по отношению к своему подграфу G' является *надграфом*.

Остовным называют подграф $G'(V, E')$, включающий в себя все вершины надграфа $G(V, E)$. В качестве примера на

рис. 1.4 показаны все остовные подграфы графа G. Как следует из рис. 1.4, любой остовный подграф $G(V, E')$ графа

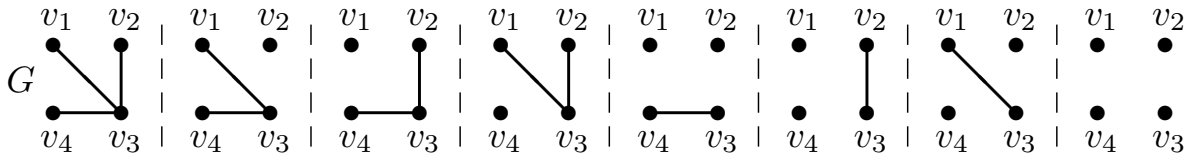


Рис. 1.4

$G(V, E)$ получается после удаления подмножества $E \backslash E'$ ребер надграфа. Количество остовных подграфов помеченного (n, m)-графа равно $\sum_{k=0}^{m} C_m^k = 2^m$, где слагаемые C_m^k определяют число различных остовных подграфов, имеющих k ребер каждый.

Подграфы другого типа получаются, если выбрать некоторое подмножество V' вершин надграфа и присоединить к ним все ребра, обе конечные вершины которых принадлежат V'. Это *вершинно-порожденные* подграфы. На рис. 1.5 изображены все подграфы этого типа для графа G. Легко убедиться,

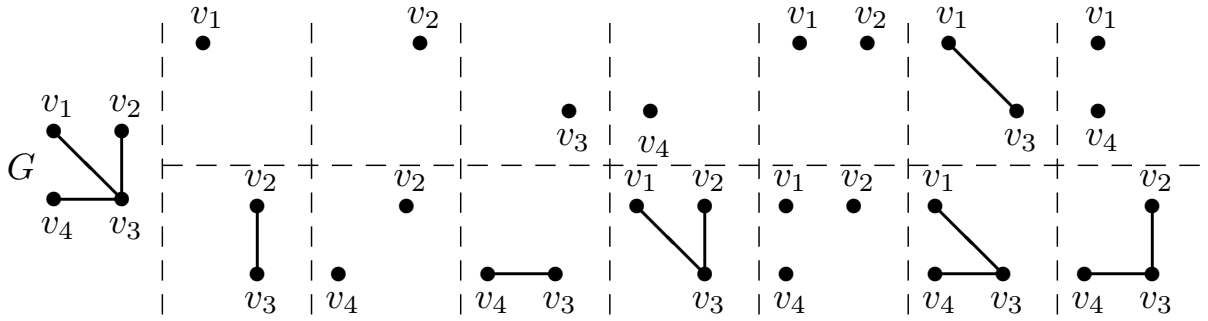


Рис. 1.5

что любой вершинно-порожденный подграф $G(V', E')$ графа $G(V, E)$ можно получить путем удаления подмножества $V \backslash V'$ вершин и всех инцидентных им ребер надграфа. Количество вершинно-порожденных подграфов равно $\sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1$. Слагаемое C_n^k этой суммы указывает число вершинно-порожденных подграфов, каждый из которых имеет k вершин.

Наконец, *реберно-порожденным* будем называть подграф $G(V', E')$, полученный на основе произвольно выбранного под-

множества E' ребер надграфа, причем множество V' вершин подграфа составляют концы только этих ребер. Все реберно-порожденные подграфы графа G изображены на рис. 1.6.

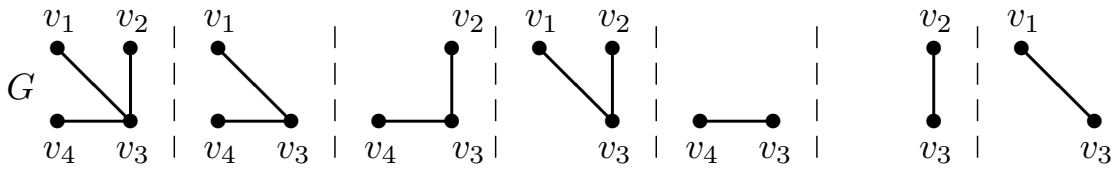
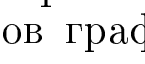


Рис. 1.6

Очевидно, что любой реберно-порожденный подграф $G(V', E')$ графа $G(V, E)$ можно сформировать, если в надграфе сначала удалить подмножество ребер $E \backslash E'$, а потом в получившемся остовном подграфе удалить все изолированные вершины. Всего имеется $\sum_{k=1}^{m} C_m^k = 2^m - 1$ реберно-порожденных подграфов (n, m)-графа.

Сравнив рис. 1.5 и рис. 1.6, легко заметить, что для графа  множество реберно-порожденных является подмножеством вершинно-порожденных подграфов, но это скорее исключение, чем правило. Более типичным является случай, когда эти множества подграфов лишь пересекаются. В этом легко убедиться, построив множества реберно- и вершинно-порожденных подграфов, например для графов:  .

Объединение множеств остовных, вершинно- и реберно-порожденных подграфов в общем случае не покрывает все множество подграфов графа. Так граф  , состоящий из одного ребра и изолированной вершины, являясь подграфом графа  , не относится ни к одному из указанных типов.

Приведенная в данном разделе терминология в основном соответствует принятой в [1, 8, 12]. В других источниках [6, 11] используются термины *часть графа*, *суграф* и *подграф*, причем частью графа называют подграф, суграфом — остовный подграф, а подграфом — вершинно-порожденный подграф.

1.3. Виды графов

Обратимся к рис. 1.7, заимствованному (с небольшими изменениями и дополнениями) из книги [1]. Здесь представлены все возможные абстрактные графы четвертого порядка.

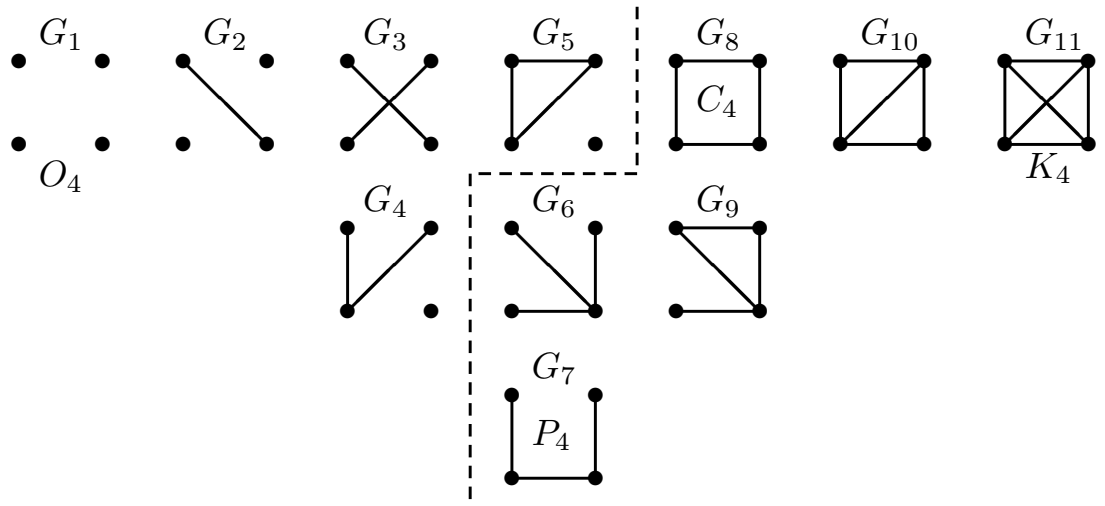


Рис. 1.7

Несвязные и связные графы. Очевидно, что изображенные на рис. 1.7 графы можно поделить на две группы (разграничены штриховой линией): *несвязные* (G_1 – G_5) и *связные* (G_6 – G_{11}).

Граф несвязен, если множество его вершин распадается на два (или более) непересекающихся подмножества, таких, что нет ни одного ребра, концы которого принадлежат разным подмножествам.Иными словами, несвязный граф состоит из двух и более частей, не соединенных ребрами. Эти части называются *компонентами связности*. Так, на рис. 1.7 граф G_1 имеет четыре компоненты, G_2 – три компоненты, G_3, G_4 и G_5 две, а остальные графы одну компоненту.

Среди несвязных графов, изображенных на рис. 1.7, особое положение занимает G_1, вообще не имеющий ребер и называемый *пустым*. Для таких графов часто используется обозначение O_n, где n – число вершин.

Среди связных графов $G_6 - G_{11}$ также можно выделить граф G_{11}, имеющий максимальное для графа четвертого по-

рядка число ребер. Это так называемый *полный* граф. Для таких графов принято обозначение K_n. Ясно, что число ребер в полном графе равно количеству двухэлементных подмножеств множества V, поэтому имеем $|E(K_n)| = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Деревья и цепи. Связные графы с минимальным количеством ребер ($|EG|=n-1$) образуют класс так называемых *деревьев*. В нашем примере это G_6 и G_7. Рассмотрению деревьев посвящен разд. 3 пособия. Здесь же отметим обозначенный на рис. 1.7 как P_4 граф G_7, являющийся частным случаем дерева и называемый *простой цепью*.

Вообще *цепь* – это чередующаяся последовательность вершин и ребер $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$, где v_{i-1} и v_i являются концами ребра e_i. В компактной форме эта запись выглядит так: $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ или $(e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k)$. В отличие от простой цепь общего вида может содержать повторяющиеся вершины. Например, в графе на рис. 1.1 $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_3)$ – простая цепь, а $(v_1, v_2, v_5, v_4, v_1, v_3)$ – цепь. Обычно цепь рассматривается не как самостоятельный граф, а как часть некоторого графа. *Длиной цепи* называют количество составляющих ее ребер. Ясно, что длина простой цепи не может превышать числа вершин содержащего ее графа, а длина цепи общего вида – числа ребер этого графа.

Понятие цепи широко используется в теории графов. Например, связный граф можно определить как граф, в котором любая пара вершин соединена хотя бы одной цепью.

Циклы. *Циклом* (*простым циклом*) называется замкнутая цепь (простая цепь). Примером простого цикла является граф G_8. Граф, представляющий собой простой цикл, обозначается как C_n. Как и в случае цепей, интерес представляет рассмотрение циклов как частей некоторого графа.

Дополнительные графы. Рассмотрим пары графов: G_1 и G_{11}, G_2 и G_{10}, G_3 и G_8, G_4 и G_9, G_5 и G_6. Если в каждой из них изображение одного из графов "наложить" определенным образом на изображение другого, то получится полный граф, т. е. один граф дополняет другой до K_4. Это пары взаимно дополнительных графов. Вообще *дополнением* графа

G называется граф $\overline{G}$, имеющий то же множество вершин, в котором любые две вершины смежны, если они не смежны в G, и не смежны, если они смежны в G. Иными словами, в графах G и $\overline{G}$ отношения смежности любой пары вершин противоположны. Особое место среди представленных на рис. 1.7 графов занимает G_7. Это так называемый *самодополнительный граф*, являющийся своим собственным дополнением, в чем нетрудно убедиться, если изобразить его как  . Для самодополнительных графов справедливо равенство $\overline{G}=G$, тогда как в общем случае $\overline{\overline{G}}=G$.

Регулярные графы. Для графов G_1, G_3, G_8, G_{11} характерным является то, что в каждом из них все вершины имеют одинаковые степени. Такие графы называют *регулярными* или *однородными*. На рис. 1.8 приведены примеры регулярных восмивершинных графов третьей, четвертой и пятой степеней.

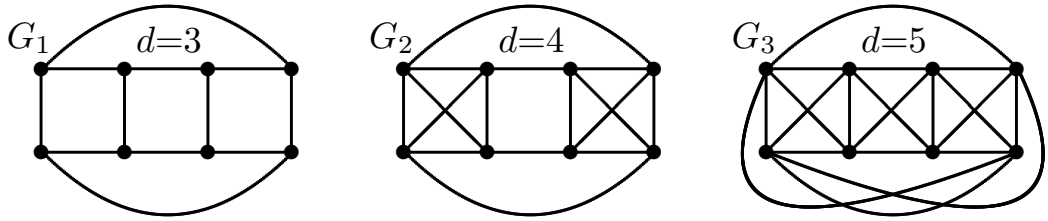


Рис. 1.8

Отметим, что графы третьей степени называют *кубическими*. Это графы G_{11} на рис. 1.7 и G_1 на рис. 1.8. Очевидно, что число ребер в регулярном графе степени d равно $m=\frac{1}{2}nd$. Из этого следует, что при нечетном числе вершин регулярный граф может иметь только четную степень, а при нечетной степени только четное число вершин. Пэтому любой кубический граф имеет четное число вершин.

Двудольные графы. Завершая обзор графов, представленных на рис. 1.7, охарактеризуем класс *двудольных* графов.

Граф называется двудольным, если существует такое разбиение множества его вершин V на два подмножества (две доли) V_1 и V_2, что концы любого ребра принадлежат разным подмножествам. Среди графов на рис. 1.7 под определение двудольного подпадают графы G_1 – G_4, G_6 и G_7, причем однозначное разбиение множества вершин на доли возмож-

но только для связных графов G_6 и G_7. На рис. 1.9 даны более наглядные примеры двудольных графов[2]. Несмотря на очевидное несходство изображений, G_1 и G_2 изоморфны, т. е. это фактически один и тот же граф, что легко проверить.

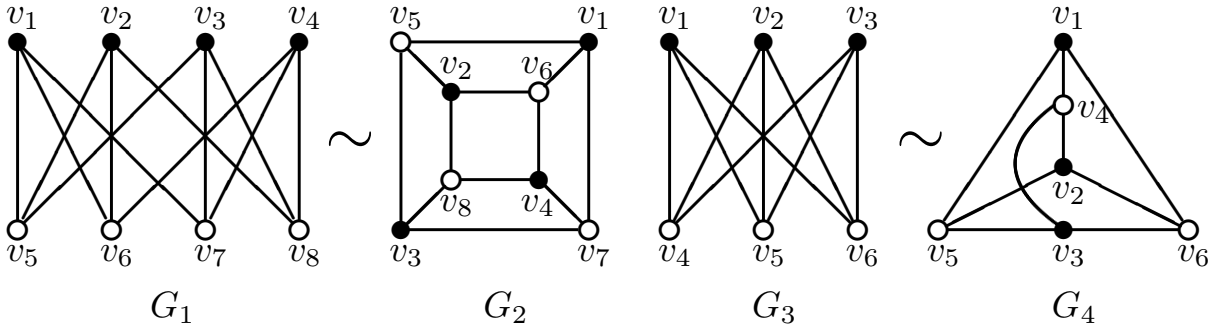


Рис. 1.9

То же самое относится к паре G_3 и G_4. Кроме того, здесь каждая вершина одной доли $\{v_1, v_2, v_3\}$ смежна с каждой вершиной другой доли $\{v_4, v_5, v_6\}$. Такие графы называют *полными двудольными* и обозначают в общем случае K_{n_1,n_2}, где $n_1{=}|V_1|$, $n_2{=}|V_2|$. Очевидно, что $|E(K_{n_1,n_2})|{=}n_1n_2$.

Существует простой способ распознавания двудольности графа, основанный на следующей *теореме Кёнига.*

Теорема 1.2 *Граф является двудольным, тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.*

$\triangleright$ В основу доказательства (и алгоритма распознавания) может быть положена следующая процедура разметки графа. Выбираем некоторую вершину v и помечаем ее знаком "$+$". Далее для каждой помеченной на предыдущем шаге вершины v отыскиваем все ее соседние вершины и помечаем их противоположным знаком. Продолжаем эту операцию до тех пор, пока не будет получен один из двух возможных результатов:

а) все вершины графа окажутся помеченными без каких-либо коллизий, т. е. метки любой вершины со стороны её соседей совпадают. Это означает, что все цепи, соединяющие любую вершину графа с v, состоят только из четного или только из нечетного числа дуг и, значит, в совокупности образуют циклы четной длины. Вместе с тем согласованность

[2]Вершины, относящиеся к разным долям, изображены по-разному.

меток всех вершин свидетельствует о возможности "двудольного разбиения" множества вершин графа (собственно распределение знаков и определяет это разбиение);

б) возникнет ситуация, когда некторая вершина u окажется помеченной знаком " $+$ " со стороны одной соседней вершины и знаком " $-$ " со стороны другой. Это значит, что в графе есть две простые цепи, соединяющие v и u, одна из которых состоит из четного числа дуг, а другая – из нечетного, в совокупности образующие цикл нечетной длины. Вместе с тем, разные знаки у вершины u не позволяют выполнить "двудольное разбиение" множества вершин графа. $\triangleleft$

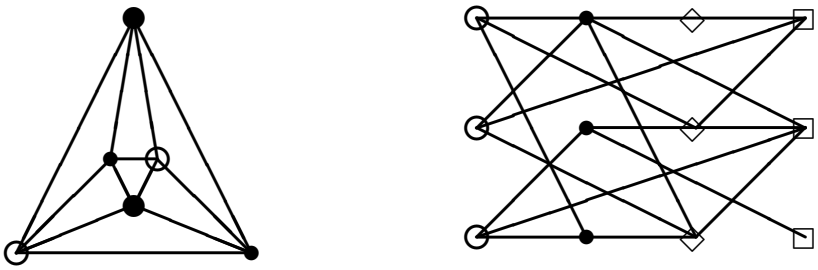


Рис. 1.10

Аналогично двудольным определяются трех-, четырех- и, вообще, *k-дольные графы*. На рис. 1.10 даны примеры трех- и четырехдольного графов [3]. К сожалению, простых критериев выявления k-дольности графа при $k>2$ не существует.

Мульти- и псевдографы. Согласно определению, совокупность ребер графа является множеством. Поэтому смежные вершины соединяет только одно ребро. Если допустить кратные (параллельные) ребра, то получим *мультиграф*. Иными словами, мультиграф это пара $\langle V, E\rangle$, где V – множество вершин, а E – семейство ребер. Наконец, если наряду с кратными разрешить ребра, связывающие вершину саму с собой (петли), то получим *псевдограф*. Мультиграф G_1 и псевдограф G_2 показаны на рис. 1.11.

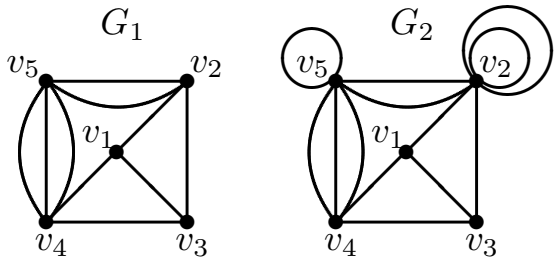


Рис. 1.11

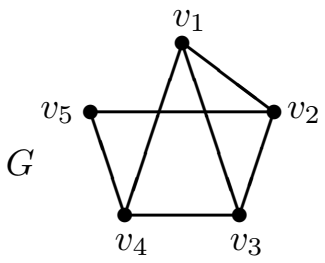
[3] Вершины, относящиеся к разным долям, изображены по-разному.

1.4. Матрицы графов

Матрица смежности. Определим *матрицу смежности* как симметричную квадратную матрицу $\mathbf{A}=[a_{i,j}]$ порядка n, в которой элемент $a_{i,j}$ равен 1, если в графе есть ребро $\{v_i, v_j\}$, т. е. v_i и v_j смежны, и 0, если такого ребра нет.

Из определения следует, что $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=d(v_i)$ при любом i, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}=d(v_j)$ при любом j и $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=2m$, т. е. количество единиц в любой строке или столбце матрицы смежности равно степени сответствующей вершины графа, а общее количество единиц равно удвоенному числу его ребер.

В качестве примера на рис. 1.12 приведены граф G, его матрица смежности $\mathbf{A}$ и степенная последовательность $\deg v_i$.



$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \deg v_i \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{array}$$

Рис. 1.12

Охарактеризуем матрицы смежности некоторых видов графов. Матрица смежности пустого графа O_n состоит из одних нулей, т. е. $\mathbf{A}(O_n)=\mathbf{0_n}$. Матрица смежности полного графа K_n состоит из одних единиц, кроме диагональных элементов, которые равны 0. Запишем это как $\mathbf{A}(K_n)=\mathbf{1_n}-\mathbf{I_n}$. Если граф несвязен и имеет s компонент, то, переставляя строки и столбцы, его матрицу смежности можно привести к блочно-диагональному виду:

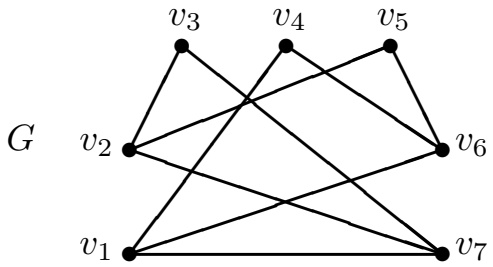
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{ss} \end{bmatrix},$$

где каждый диагональный блок $\mathbf{A}_{ii}$ является матрицей смежности компоненты s_i. В случае k-дольного графа матрица

смежности может быть приведена к блочному виду, когда по главной диагонали идут только "нулевые" блоки:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1k} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{k1} & \mathbf{A}_{k2} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Блоки $\mathbf{A}_{ij}$, где $i{\neq}j$, могут рассматриваться как приведенные[4] матрицы смежности двудольных вершинно-порожденных подграфов k-дольного графа, образованных вершинами i и j долей, причем $\mathbf{A}_{ij}{=}\mathbf{A}_{ji}{}^{T}$. В качестве примера на рис. 1.13 дан трехдольный граф G с долями $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4, v_5\}$, $\{v_6, v_7\}$ и его матрица смежности $\mathbf{A}$.



$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Рис. 1.13

Своеобразным аналогом матрицы смежности является *матрица Кирхгофа* $\mathbf{K}{=}[k_{i,j}]$, определяемая как квадратная матрица порядка n, элементы которой

$$k_{i,j}{=}\begin{cases} -1, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны,} \\ 0, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежны,} \\ \deg v_i, & \text{если } i{=}j. \end{cases}$$

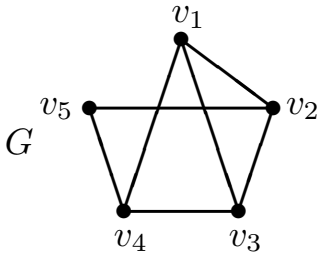
Связь между матрицей смежности $\mathbf{A}$ и матрицей Кирхгофа $\mathbf{K}$ имеет вид $\mathbf{K}{=}\mathbf{D}{-}\mathbf{A}$, где $\mathbf{D}{=}\operatorname{diag}(\deg v_1, \deg v_2, \dots, \deg v_n)$, т. е. является матрицей, диагональные элементы которой равны степеням соответствующих вершин. Важная особенность матрицы Кирхгофа (как и любой другой матрицы, у которой

[4] В приведенной матрице смежности двудольного графа строки соответствуют вершинам одной доли, а столбцы — вершинам другой

сумма элементов каждой строки и каждого столбца равна нулю) состоит в том, что алгебраические дополнения всех элементов матрицы равны между собой.

Поскольку изоморфные графы различаются лишь разметкой (нумерацией) вершин соответствующего абстрактного графа, ясно, что их матрицы смежности (матрицы Кирхгофа) могут быть получены одна из другой путем некоторой перестановки строк и столбцов.

Матрица инцидентности. Определим *матрицу инцидентности* графа как прямоугольную матрицу $\mathbf{B}=[b_{i,j}]$ размера $n\times m$, в которой элемент $b_{i,j}$ равен 1, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, и 0 в противном случае. Строки матрицы $\mathbf{B}$ называют *векторами инцидентности* и обозначают как $\mathbf{B}_i$. На рис. 1.14 изображен тот же граф G, что и на рис. 1.12, и приведена его матрица инцидентности $\mathbf{B}$.



$$\mathbf{B}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 \end{array}\right]$$

Рис. 1.14

Как следует из определения, общее количество единиц в матрице инцидентности равно удвоенному числу ребер графа, количество единиц в любой строке равно степени соответствующей вершины, а столбцы содержат по две единицы. Поэтому между строками матрицы существует простая зависимость: элементы любой строки могут быть получены сложением одноименных элементов остальных строк по модулю 2. Используя понятие вектора инцидентности, можно записать $\mathbf{B}_i=(\sum \mathbf{B}_j) \pmod 2$, где $1\le j\le n$ и $j\ne i$. Так, для приведенной выше матрицы имеем: $\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_2\oplus\mathbf{B}_3\oplus\mathbf{B}_4\oplus\mathbf{B}_5=$ $[1,0,0,1,1,0,0]\oplus$ $\oplus[0,1,0,1,0,1,0]\oplus[0,0,1,0,1,1,1]\oplus[0,0,0,0,0,0,1]=[1,1,1,0,0,0,0]$.

Матрица инцидентности несвязного графа, как и матрица смежности, может быть приведена к блочно-диагональному виду, где каждый диагональный блок является матрицей инцидентности некоторой компоненты связности.

Поскольку в графе отсутствуют параллельные ребра, то скалярное произведение любой пары векторов инцидентности $\mathbf{B}_i\mathbf{B}_j$ равно единице, если вершины v_i и v_j смежны, и нулю, если эти вершины несмежны. Следовательно, произведение $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ должно совпадать с матрицей смежности графа за исключением диагональных элементов, которые равны степеням соответствующих вершин. Это означает, что матрица смежности и матрица инцидентности графа связаны соотношением $\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{B}^T-\mathbf{D}$, где $\mathbf{D}=\operatorname{diag}(\deg v_1, \deg v_2, \ldots, \deg v_n)$.

Применительно к матрицам инцидентности изоморфных графов также справедливо утверждение о том, что они могут быть получены одна из другой путем некоторой перестановки строк и столбцов.

Кроме рассмотренных для представления графов используют и другие матрицы. Некоторые из них описаны в следующих разделах.

Списки. При решении многих задач наряду с матрицами для представления графов используют *список ребер* (*список инцидентности*) и *список вершин* (*список смежности*). Так, для графа на рис. 1.14 эти списки имеют вид:

Список ребер

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
v_1	v_1	v_1	v_2	v_2	v_3	v_4
v_2	v_3	v_4	v_3	v_4	v_4	v_5

Список вершин

v_1	v_2, v_3, v_4
v_2	v_1, v_3, v_4
v_3	v_1, v_2, v_4
v_4	v_1, v_2, v_3, v_5
v_5	v_2

.

В списке ребер каждое ребро представлено парой концевых вершин, а в списке смежности для каждой вершины указаны все смежные с ней. Можно считать, что список ребер является компактной записью матрицы инцидентности, если в каждом столбце заменить обе единицы обозначением соответствующих вершин (строк), а нули отбросить. Аналогично из матрицы смежности можно получить список вершин, если единицы в каждой строке заменить обозначением соответствующей вершины (столбца) и отбросить нули.

1.5. Диаметр, радиус и центр графа

Пусть v и w любые две вершины связного графа G. Назовем *расстоянием* между v и w длину самой короткой цепи, соединяющей эти вершины, и обозначим как $d(v,w)$. Тогда каждая вершина графа v может быть охарактеризована величиной $e(v)=\max\limits_{w\in V} d(v,w)$, которая называется *эксцентриситетом*. Нетрудно убедиться, что в графе G_2 на рис. 1.9 эксцентриситет всех вершин равен трем, тогда как в графе на рис. 1.14 имеем: $e(v_1)=e(v_2)=e(v_3)=e(v_5)=2$, $e(v_4)=1$. Очевидно, что в полном графе все вершины имеют эксцентриситет равный 1, а в простом цикле – $[n/2]$.

Максимальный эксцентриситет $d(G)=\max\limits_{v\in V} e(v)$ носит название *диаметра* графа, а минимальный $r(G)=\min\limits_{v\in V} e(v)$ – *радиуса* графа G. Диаметр графа на рис. 1.14 равен двум, радиус – единице, а в графе G_2 на рис. 1.9 и диаметр и радиус равны трем. В полном графе имеем $d(K_n)=r(K_n)=1$, а в простом цикле – $d(C_n)=r(C_n)=[n/2]$.

Для любого графа справедливо соотношение $r(G)\leq d(G)$.

Вершина v называется *центральной*, если $e(v)=r(G)$. В графе на рис. 1.14 центральной является v_4. Граф может иметь несколько таких вершин, а в некоторых графах все вершины оказываются центральными, например как в графах на рис. 1.9. В простой цепи при нечетном числе вершин только одна является центральной, а при четном их числе таких вершин две. В полном графе центральными являются все вершины. То же самое справедливо и для простого цикла. Множество всех центральных вершин называется *центром графа*.

Понятия центральной вершины и центра графа появились в связи с задачами оптимального размещения пунктов массового обслуживания, таких как больницы, пожарные части, пункты охраны общественного порядка и т. п., когда важно минимизировать наибольшее расстояние от любой точки некоторой сети до ближайшего пункта обслуживания.

1.6. Ориентированные графы

Наряду с неориентированными в теории графов рассматриваются *ориентированные графы*, или *орграфы*.

Теоретико-множественное определение орграфа. Пусть V – непустое множество, например, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Запишем его декартов квадрат $V^2{=}V{\times}V$. Для нашего примера это множество всех упорядоченных пар вида (v_i, v_j), $i, j{=}\overline{1,5}$:

$$\begin{aligned} V^2 = \{&(v_1,v_1)\,,\ \underline{(v_1,v_2)}\,,\ \underline{(v_1,v_3)}\,,(v_1,v_4),\ (v_1,v_5)\,,\\ &(v_2,v_1)\,,\ \overline{(v_2,v_2)}\,,\ \overline{(v_2,v_3)}\,,(v_2,v_4)\,,\underline{(v_2,v_5)}\,,\\ &(v_3,v_1)\,,\ \underline{(v_3,v_2)}\,,\ (v_3,v_3)\,,(v_3,v_4)\,,\overline{(v_3,v_5)}\,,\\ &\underline{(v_4,v_1)}\,,\ \overline{(v_4,v_2)}\,,\ \underline{(v_4,v_3)}\,,(v_4,v_4)\,,(v_4,v_5)\,,\\ &\overline{(v_5,v_1)}\,,\ (v_5,v_2)\,,\ \overline{(v_5,v_3)}\,,\underline{(v_5,v_4)}\,,(v_5,v_5)\}\,. \end{aligned}$$

Возьмем произвольно некоторое $A \subseteq V^2$, например, $A{=}\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_5),(v_3,v_2),(v_4,v_1),(v_4,v_3),(v_5,v_4)\}$. [5]

Пару $\langle V, A\rangle$ называют *ориентированным графом* G, в котором V – множество вершин, A – множество *дуг*, являющееся подмножеством V^2. Окончательно сформулируем определение так: пара $\langle V, A\rangle$ называется ориентированным графом, если V – непустое множество элементов, называемых вершинами, A – множество упорядоченных пар различных элементов из V, называемых дугами. Тогда для нашего примера имеем $G(V, A){=}\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_5), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_4)\}\rangle$, где (v_i, v_j) – дуга, у которой v_i – начальная, а v_j – конечная вершины. Изображение этого графа приведено на рис. 1.15. Очевидно, что множество дуг, соединяющих элементы множества вершин, отображает это множество само в себя. Поэтому орграф можно рассматривать как пару $\langle V, \Gamma\rangle$, где Γ – отображение, заданное на множестве V. Для графа на рис. 1.15 имеем

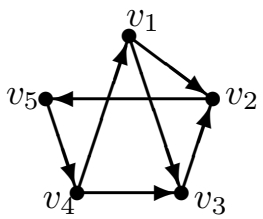


Рис. 1.15

$$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3\}, \quad \Gamma(v_2) = \{v_5\}, \quad \Gamma(v_3) = \{v_2\},$$
$$\Gamma(v_4) = \{v_1, v_3\}, \quad \Gamma(v_5) = \{v_4\}.$$

[5] В записи для V^2 элементы иножества A подчеркнуты.

Поскольку $\Gamma(v_i)$ обозначает множество конечных вершин всех дуг, исходящих из v_i, то через $\Gamma^{-1}(v_i)$ естественно обозначить множество начальных вершин всех дуг, входящих в v_i. Тогда описание графа, изображенного на рис. 1.15, может быть выполнено так:

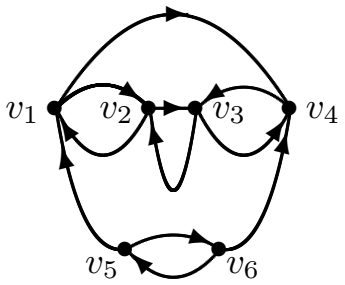
$$\Gamma^{-1}(v_1)=\{v_4\},\quad \Gamma^{-1}(v_2)=\{v_1,v_3\},\quad \Gamma^{-1}(v_3)=\{v_1,v_4\},$$
$$\Gamma^{-1}(v_4)=\{v_5\},\quad \Gamma^{-1}(v_5)=\{v_2\}.$$

О количестве орграфов. Любому простому графу G можно поставить в соответствие орграф, придав каждому ребру одну из двух возможных ориентаций. Всего имеется 2^m различных вариантов ориентации множества из m ребер, т. е. из одного простого помеченного графа в общем случае можно получить 2^m ориентированных. Кроме того, вместо одной дуги можно взять две параллельные с противоположной ориентацией. Варьируя количество пар параллельных дуг и выбирая их в различных комбинациях, получаем дополнительное и весьма существенное расширение числа графов, производных от графа G.

Характеристики орграфов. При описании орграфов используют те же понятия, термины и характеристики, что и для неориентрованных графов, но есть и своя специфика, обусловленная наличием ориентации дуг. Например, для орграфов сохраняются понятия смежности и инцидентности, определенные в разд. 1.1, но наряду с такой характеристикой, как степень вершины $\deg v$, используют еще две: *полустепень исхода* – число исходящих из v дуг $\deg^+ v=|\Gamma(v)|$ и *полустепень захода* – число входящих в v дуг $\deg^- v=|\Gamma^{-1}(v)|$, связанные очевидными соотношениями $\deg v=\deg^+ v+\deg^- v$ и $\sum_{i=1}^n \deg^- v_i=\sum_{i=1}^n \deg^+ v_i=|A|=m$, где m – число дуг в графе. Некоторые специфические понятия и характеристики орграфов рассмотрены в последующих разделах.

Матрицы орграфов. *Матрица смежности* орграфа определяется как квадратная матрица $\mathbf{A}=[a_{i,j}]$ порядка n, в которой элемент $a_{i,j}$ равен 1, если в графе есть дуга (v_i,v_j), и 0, если такой дуги нет. В качестве примера на рис. 1.16 пред-

ставлены орграф G, его матрица смежности $\mathbf{A}$ и две степенные последовательности $\deg^+ v_i$ и $\deg^- v_i$.



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ \deg^- v_i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \deg^+ v_i \\ \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

Рис. 1.16

Из определения следует (пример подтверждает это), что:

— в общем случае матрица не симметрична, так как наличие дуги (v_i, v_j) совсем не означает, что в графе присутствует также и обратная дуга (v_j, v_i);

— количество единиц в любой строке равно полустепени исхода сответствующей вершины: $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \deg^+ v_i$, $i = \overline{1,n}$;

— количество единиц в любом столбце равно полустепени захода сответствующей вершины: $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \deg^- v_j$, $j = \overline{1,n}$;

— общее количество единиц в матрице равно числу дуг в графе: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = m$.

Матрица инцидентности орграфа определяется как прямоугольная матрица $\mathbf{B} = [b_{i,j}]$ размера $n \times m$, в которой

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } v_i \text{ является начальной вершиной дуги } a_j; \\ -1, & \text{если } v_i \text{ является конечной вершиной дуги } a_j; \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ и дуга } a_j \text{ не инцидентны.} \end{cases}$$

В соответствии с этим определением матрица инцидентности, например для графа на рис. 1.16, имеет вид:

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Свойства матриц инцидентности орграфа и неорграфа практически одинаковы, хотя есть и отличия. Так, в случае орграфа характер зависимости строк матрицы инцидентности строго линейный: вектор инциденности любой вершины равен сумме векторов инцидентности остальных вершин, взятой с противоположным знаком.

Наряду с матрицами для описания орграфов используются и списки. Фактически пары $\langle V, \Gamma \rangle, \langle V, \Gamma^{-} \rangle$ и являются соответственно прямым и инвертированным списками вершин. В списке дуг должна быть отражена их ориентация.

Виды орграфов. Как и простые графы, ориентированные могут быть связными и несвязными, полными, k-дольными, регулярными и т. п. Существуют ориентированные аналоги цепей, циклов, деревьев. Типичным примером подобной аналогии являются так называемые *турниры* – ориентированные графы, в которых каждая пара вершин соединена только одной дугой. Любой турнир получается из простого полного графа, если каждому его ребру дать некоторую ориентацию. Название этого вида графов объясняется тем, что они позволяют наглядно отобразить результаты любого соревнования, когда каждый участник должен встретиться со всеми остальными и запрещены ничьи, например, как в большом теннисе или в волейболе. При этом участникам соответствуют вершины, а результатам встреч – дуги, направленные от победителя к побежденному. На рис. 1.17 изображены все непомеченные

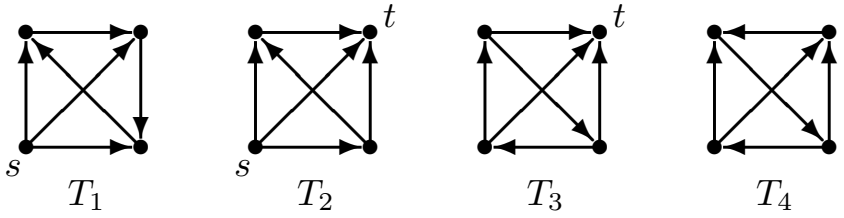


Рис. 1.17

турниры четвертого порядка. Опишем некоторые свойства турниров. В любом турнире может быть не более одной вершины s с нулевой полустепенью захода и не более одной вершины t с нулевой полустепеню исхода, называемых соответственно *истоком* и *стоком*. Действительно, наличие, например, двух

истоков означает, что в некотором реальном турнире есть два абсолютных победителя. Присутствие стока или истока существенно сокращает количество циклов в графе, так как такие вершины не могут принадлежать ни одному циклу. Поэтому число циклов в турнире $T(n)$, имеющем, как графы T_1 и T_3 на рис. 1.17, сток или исток, равно числу циклов в турнире $T(n-1)$, получающемся при удалении из $T(n)$ стока (истока) и всех инцидентных ему дуг. Проделав подобную операцию с графами T_1 и T_3, убеждаемся, что "остаток" имеет один цикл. Наконец, в турнире, имеющем, как граф T_2, и исток s и сток t, число циклов то же, что и в турнире, полученном после удаления s и t.

В приложениях часто встречаются *ациклические орграфы*, т. е. орграфы, не содержашие циклов. Один такой граф есть и на рис. 1.17 – это T_2. Более наглядные примеры даны на рис. 1.18. Понятно, что любой граф этого вида должен иметь

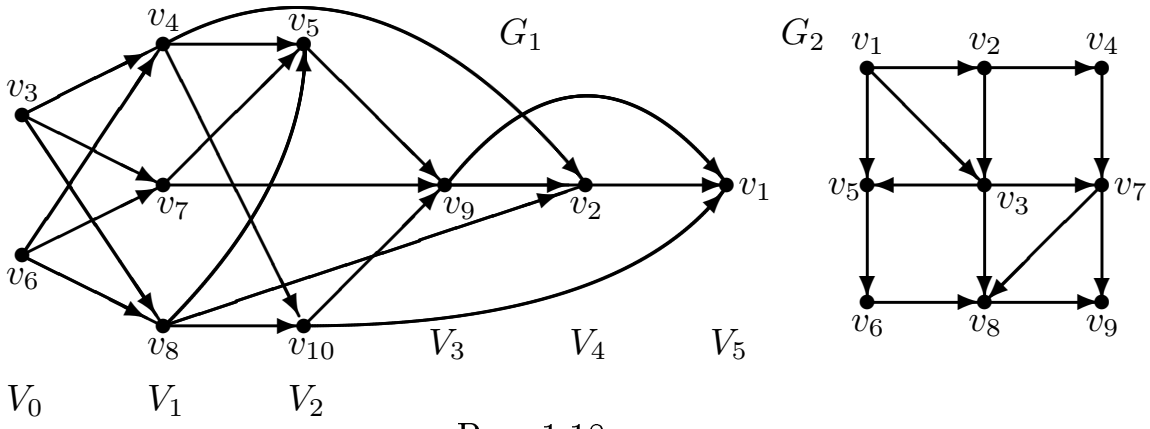


Рис. 1.18

по крайней мере один сток и один исток. Если к тому же разметка вершин графа такова, что для любой дуги (v_i, v_j) справедливо соотношение $i<j$, то говорят, что граф *топологически отсортирован*. Это значит, что, если вершины графа отображают промежуточные цели при выполнении некоторого комплекса работ, а дуги – действия, направленные на достижение этих целей, то топологическая сортировка определяет последовательность достижения целей. Так, из двух графов, изображенных на рис. 1.18, G_2 отсортирован, а G_1 – нет. Однако граф G_1 очень просто сортируется, если учесть

отчетливо выраженое разбиение его вершин на подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_5$, такое, что начальная вершина любой дуги принадлежит подмножеству с меньшим индексом по сравнению с конечной вершиной. Достаточно пронумеровать сперва вершины первого подмножества, потом второго, третьего и т. д. При этом внутри подмножества порядок произвольный, а это значит, что существует несколько вариантов такой разметки.

Следовательно, задача топологической сортировки сводится к отысканию разбиения множества вершин графа V на подмножества V_i (называемые уровнями, слоями, ярусами), такие, что если вершина принадлежит подмножеству V_i, то любая следующая за ней входит в подмножество, индекс которого больше i. Иными словами, на множестве вершин необходимо найти числовую функцию, называемую *порядковой функцией графа*, которая определяется следующим образом.

Пусть $G(V, \Gamma^{-1})$ — ациклический орграф, и найдены следующие непересекающиеся подмножества множества V:

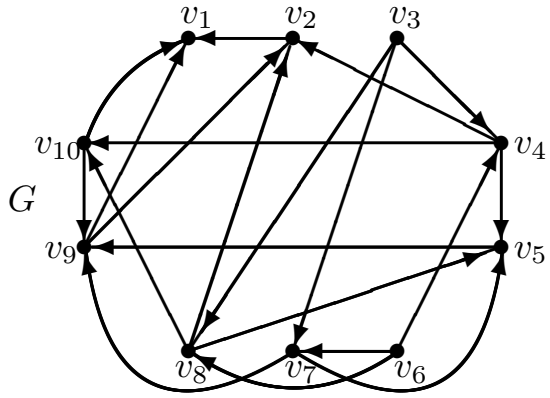
$$
\begin{aligned}
&V_0 = \{v \mid v \in V && \&\ \Gamma^{-1}(v) = \emptyset\};\\
&V_1 = \{v \mid v \in V - V_0 && \&\ \Gamma^{-1}(v) \subset V_0\};\\
&V_2 = \{v \mid v \in V - (V_0 \cup V_1) && \&\ \Gamma^{-1}(v) \subset (V_0 \cup V_1)\};\\
&\cdots && \cdots\\
&V_r = \{v \mid v \in V - \bigcup_{j=0}^{r-1} V_j && \&\ \Gamma^{-1}(v) \subset \bigcup_{j=0}^{r-1} V_j\},
\end{aligned}
$$

где V_r таково, что $\Gamma(v)=\emptyset$ для всех $v \in V_r$. Порядковая функция графа $O(v)$, определенная на множестве вершин, сопоставляет каждой из них число, равное значению индекса подмножества V_k, элементом которого эта вершина является, т. е. если $v_i \in V_k$, то $O(v_i)=k$.

В соответствии с приведенными соотношениями для получения необходимого разбиения множества V на подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_r$ следует повторно выполнять процедуру поиска вершин, у которых $\Gamma^{-1}(v)=\emptyset$, сначала в заданном графе, потом в графе, полученном из заданного путем удаления вершин, найденных на первой итерации, затем в графе, полученном путем удаления вершин, найденных на первых двух итерациях, и т. д., пока не будут обработаны все вершины.

Покажем на примере способ отыскания порядковой функции, основанный на использовании матрицы смежности и известный как *алгоритм Демукрона.*

Пусть граф G и его матрица смежности $\mathbf{A}$ выглядят, как показано на рис. 1.19. Подсчитаем число единиц в каждом столбце матрицы и запишем найденные значения в первой



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Рис. 1.19

строке табл. 1.1. Зафиксируем в столбце V_i вершины v_3, v_6 с нулевой суммой и отметим третью и шестую строки матрицы. Вновь подсчитаем число единиц в столбцах, не учитывая

Таблица 1.1

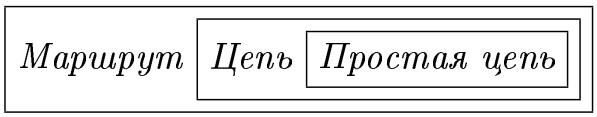
Итерации	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	V_i
1	3	3	0	2	3	0	2	2	3	2	V_0=$\{v_3, v_6\}$
2	3	3		0	3		0	0	3	2	V_1=$\{v_4, v_7, v_8\}$
3	3	1			0				2	0	V_2=$\{v_5, v_{10}\}$
4	2	1							0		V_3=$\{v_9\}$
5	1	0									V_4=$\{v_2\}$
6	0										V_5=$\{v_1\}$
$O(v_i)$	5	4	0	1	2	0	1	1	3	2	

при этом содержимое отмеченых строк. Результаты запишем во второй строке таблицы, опуская нули, полученные на первом шаге. В столбец V_i заносим вершины с нулевой суммой v_4, v_7, v_8 и отмечаем в матрице соответствующие строки. Повторяем описанные действия, пока не будут обработаны все вершины. Для завершения процесса требуется еще четыре итерации (см. табл. 1.1). В результате последний столбец таблицы

дает искомое разбиение множества вершин графа G на подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_5$, а последняя строка – порядковую функцию. Изображение рассматриваемого графа, отражающее полученное разбиение, дано на рис 1.18 (см. граф G_1).

1.7. Маршруты, цепи и простые цепи

В разд. 1.3 даны понятия цепи и простой цепи, как чередующейся последовательности вершин и ребер, причем в цепи попарно различны все ребра, а в простой цепи – все вершины. *Маршрут* определяется так же, за исключением ограничений на повторение вершин и ребер: допускается повторение как вершин, так и ребер. Таким образом, имеем триаду, отношения между элементами которой можно представить схемой:



Применительно к ориентированным графам существуют аналогичные понятия: *ориентированный маршрут* (*ормаршрут*), *ориентированная цепь* (*орцепь*) и *ориентированная простая цепь* (*простая орцепь*). Для последней часто используется другой более короткий термин *путь*.

При рассмотрении орграфов используют также понятия: *полумаршрут*, *полуцепь* и *полупуть*, которые отличаются от сответствующих им ормаршрута, орцепи и пути тем, что допускаются разнонаправленные дуги. Например, последовательность дуг $(v_1, v_2), (v_3, v_2), (v_3, v_4)$ определяет полупуть с начальной вершиной v_1 и конечной вершиной v_4.

Приведенная терминология в основном соответствует принятой, например в [1]. Вообще же для рассматриваемых понятий используют и другие термины.

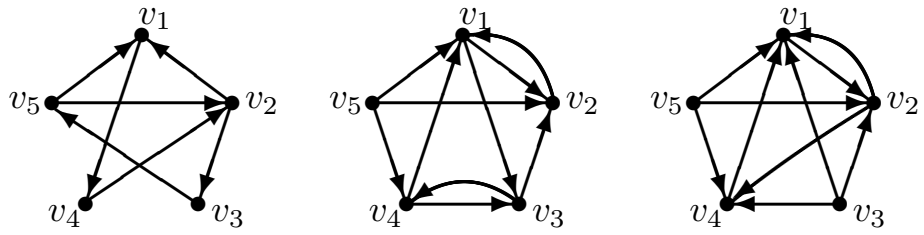
В дальнейшем слово *ориентированный* применительно к маршруту или цепи будем опускать, если из контекста ясно, о каком графе идет речь.

2. Связность в орграфах

2.1. Основные понятия

Говорят, что вершина w *достижима* из вершины v, если существует путь $(v, \ldots, w)$. Если при этом v достижима из w, то о вершинах говорят, что они *взаимно достижимы*.

Орграф называется *сильно связным* или *сильным*, если любые две вершины в нем взаимно достижимы. Пример сильного орграфа приведен на рис. 2.1,*а*. Поскольку в графе имеется орцикл $(v_1, v_4, v_2, v_3, v_5, v_1)$, включающий все вершины, то любые две из них взаимно достижимы.



а *б* *в*

Рис. 2.1

Орграф называется *односторонне связным* или *односторонним*, если в любой паре его вершин хотя бы одна достижима из другой. Пример одностороннего графа дан на рис. 2.1,*б*. В этом графе есть орцикл $(v_1, v_3, v_4, v_1, v_2, v_1)$, включающий четыре вершины. Все они взаимно достижимы. В отличие от этих вершин v_5 имеет нулевую полустепень захода, а это значит, что не существует путей, ведущих в v_5. Вместе с тем из v_5 достижима любая из четырех остальных вершин.

Орграф называется *слабо связным* или *слабым*, если в нем любые две вершины соединены полупутем. В отличие от пути, когда все дуги одинаково ориентированы (от начальной вершины пути к конечной) в полупути могут быть и противоположно направленные дуги. Пример слабо связного орграфа приведен на рис. 2.1,*в*. Очевидно, что в графе нет пути между вершинами v_3 и v_5, но существует полупуть, состоящий из двух противоположно направленных дуг (v_3, v_4) и (v_5, v_4).

2.2. Компоненты связности

Для орграфа определены три типа компонент связности: *сильная компонента* – максимальный сильный подграф, *односторонняя компонента* – максимальный односторонний подграф и *слабая компонента* – максимальный слабый подграф.

Понятие сильной компоненты иллюстрирует рис. 2.2. Граф

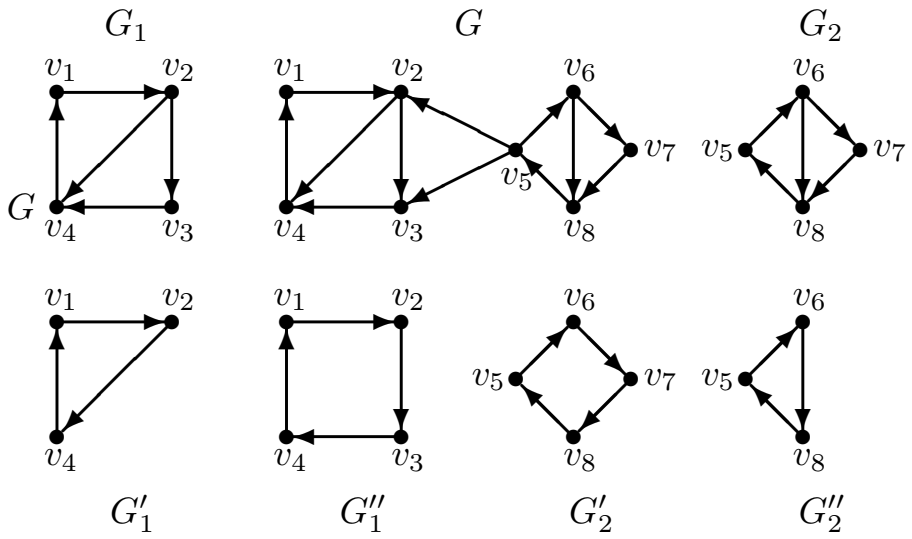


Рис. 2.2

G, который является односторонне связным, содержит шесть сильных подграфов $G_1, G'_1, G''_1, G_2, G'_2, G''_2$, из которых только два G_1 и G_2 являются сильными компонентами.

Аналогично иллюстрируется понятие односторонней компоненты. В рассматриваемом случае оносторонняя компонента совпадает с самим графом. Если же сменить, например, ориентацию дуги (v_4, v_1) на противоположную, то получим слабосвязный граф с двумя односторонними компонентами, одна из которых образована вершинами $v_1 - v_4$, а другая – вершинами $v_2 - v_8$. Как показывает этот пример, односторонние компоненты графа в отличие от сильных могут иметь общие вершины.

Слабая компонента эквивалентна компоненте связности. Подобно сильным компонентам слабые компоненты не могут иметь общих вершин.

2.3. Конденсация орграфа

На основе сильных компонент определяется еще один вид графов — *граф конденсации*. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ — сильные компоненты графа $G(V, E)$. Конденсацией графа G называется граф $G^*(V^*, E^*)$, каждая вершина которого v_i^* представляет множество вершин соответствующей сильной компоненты S_i графа G, а дуга (v_i^*, v_j^*) является элементом множества E^*, если в графе G есть по крайней мере одна дуга, идущая от некоторой вершины компоненты S_i к одной из вершин компоненты S_j. Пример орграфа G, имеющего четыре сильных компоненты $S_1 - S_4$, и его конденсации G^* дан на рис. 2.3.

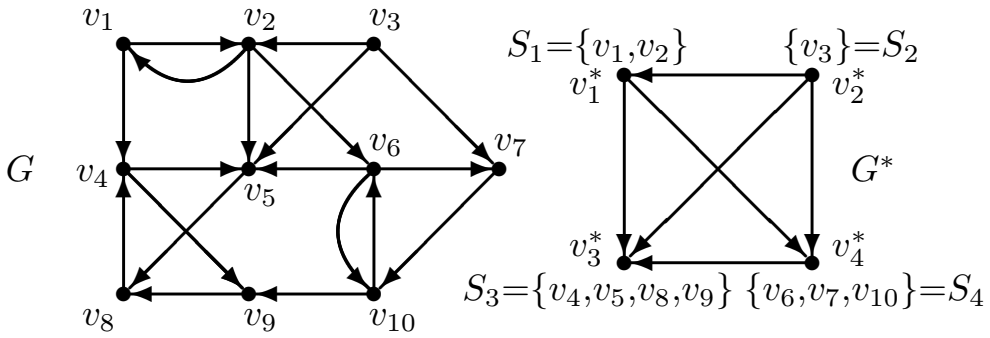


Рис. 2.3

Ясно, что граф конденсации G^* не может содержать циклов, так как все вершины любого цикла взаимно достижимы и значит принадлежат некоторой сильной компоненте, а это противоречит определению конденсации.

2.4. Отыскание сильных компонент

Пусть $R(v)$ — множество вершин (n, m)-графа, достижимых из вершины v. Тогда, поскольку $\Gamma(v)$ является множеством вершин, достижимых из v с использованием путей длины 1, $\Gamma^2(v)$ — множеством вершин, достижимых из v с использованием путей длины 2, $\Gamma^3(v)$ — с использованием путей длины 3 и т. д., то $R(v)$ можно представить в виде

$$R(v) = \{v\} \cup \Gamma(v) \cup \Gamma^2(v) \cup \ldots \cup \Gamma^p(v)\,.$$

Операции объединения выполняются последовательно слева направо до тех пор, пока множество $R(v)$ не перестанет увеличиваться. Количество операций зависит от графа, но, очевидно, что $p<n$.

Обобщая, можно говорить о множестве вершин $R(X)$, достижимых (в совокупности) не из единственной вершины, а из целой группы вершин $X\subset V$, и определять $R(X)$ как

$$R(X) = \bigcup_{v\in X} R(v)\,.$$

Пусть $Q(v)$ — множество вершин (n,m)-графа, из которых достигается вершина v. Тогда, поскольку $\Gamma^{-1}(v)$ — множество вершин, из которых v достигается с использованием путей длины 1, $\Gamma^{-2}(v)$ — множество вершин, из которых v достигается с использованием путей длины 2, $\Gamma^{-3}(v)$ — с использованием путей длины 3 и т. д., то $Q(v)$ можно представить в виде

$$Q(v) = \{v\} \cup \Gamma^{-1}(v) \cup \Gamma^{-2}(v) \cup \ldots \cup \Gamma^{-p}(v)\,.$$

Здесь операции объединения выполняются, как и в предыдущем случае, последовательно слева направо до тех пор, пока множество $Q(v)$ не перестанет увеличиваться, а число этих операций $p<n$.

В качестве объекта, достижимого из других вершин, можно рассматривать не единственную вершину, а целую группу вершин $X\subset V$. Тогда получаем множество

$$Q(X) = \bigcup_{v\in X} Q(v)\,.$$

Если $R(v)$ — это множество вершин, достижимых из v, а $Q(w)$ — множество вершин, из которых достижима w, то $R(v)\cap Q(w)$ является множеством вершин, принадлежащих всем путям, идущим из v в w. В том случае, когда $v=w$, пересечение $R(v)\cap Q(v)$ определяет множество (включая v) взаимно достижимых вершин и, следовательно, некоторую сильную компоненту графа.

С учетом изложенного, можно предложить следующую процедуру отыскания всех сильных компонент графа $G(V,\Gamma)$:

1. Формируем описание графа в виде $\Gamma^+(v_i)$ и $\Gamma^-(v_i)$ для всех $v_i \in V$.
2. Выбираем некоторую вершину v и находим $R(v)$ и $Q(v)$.
3. Получаем $VS = R(v) \cap Q(v)$. Вершинно-порожденный на множестве вершин VS подграф графа G представляет сильную компоненту.
4. Если множество $V - VS$ пусто, то все сильные компоненты найдены, в противном случае строим вершинно-порожденный подграф на $V - VS$ и переходим к п. 1.

Разберем пример на использование описанного подхода. Найдем сильные компоненты графа, изображенного на рис. 2.4.

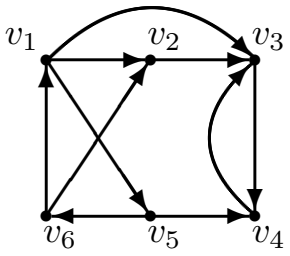


Рис 2.4

Описания графа с использованием прямого и обратного отображений выглядят так:

$$\Gamma(v_1) = \{v_2, v_3, v_5\}, \quad \Gamma(v_2) = \{v_3\}, \quad \Gamma(v_3) = \{v_4\},$$
$$\Gamma(v_4) = \{v_3\}, \quad \Gamma(v_5) = \{v_4, v_6\}, \quad \Gamma(v_6) = \{v_1, v_2\};$$

$$\Gamma^{-1}(v_1) = \{v_6\}, \quad \Gamma^{-1}(v_2) = \{v_1, v_6\}, \quad \Gamma^{-1}(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\},$$
$$\Gamma^{-1}(v_4) = \{v_3, v_5\}, \quad \Gamma^{-1}(v_5) = \{v_1\}, \quad \Gamma^{-1}(v_6) = \{v_5\}.$$

Находим множества $R(v)$, $Q(v)$ и $R(v) \cap Q(v)$ для произвольно выбранной вершины, например для v_1:

$R(v_1) = \{v_1\} \cup \{v_2, v_3, v_5\} \cup \{v_3, v_4, v_6\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$Q(v_1) = \{v_1\} \cup \{v_6\} \cup \{v_5\} = \{v_1, v_5, v_6\}$,

$VS_1 = R(v_1) \cap Q(v_1) = \{v_1, v_5, v_6\}$ — множество вершин первой сильной компоненты графа.

Множество вершин, не относящихся к найденной сильной компоненте, равно разности $V-VS_1=\{v_2, v_3, v_4\}$. Описание соответствующего вершинно-порожденного подграфа имеет вид:

$\Gamma(v_2)=\{v_3\}, \quad \Gamma(v_3)=\{v_4\}, \qquad \Gamma(v_4)=\{v_3\};$
$\Gamma^{-1}(v_2)=\emptyset, \quad \Gamma^{-1}(v_3)=\{v_2\}, \quad \Gamma^{-1}(v_4)=\{v_3\},$

Для поиска следующей сильной компоненты возьмем одну из его вершин, например v_2. В результате получим:

$R(v_2)=\{v_2\}\cup\{v_3\}\cup\{v_4\}=\{v_2, v_3, v_4\}, \quad Q(v_2)=\{v_2\},$
$VS_2=R(v_2)\cap Q(v_2)=\{v_2\}$ — единственная вершина, входящая во вторую сильную компоненту.

Далее ведем поиск на множестве $V-VS_1-VS_2=\{v_3, v_4\}$. В результате получаем:

$R(v_3)=\{v_3\}\cup\{v_4\}=\{v_3, v_4\}, \quad Q(v_3)=\{v_3\}\cup\{v_4\}=\{v_3, v_4\},$
$VS_3=R(v_3)\cap Q(v_3)=\{v_3, v_4\}$ — вершины третьей и последней сильной компоненты графа.

2.5. Матрицы достижимостей

Определим *матрицу (прямых) достижимостей* $\mathbf{R}=[r_{ij}]$ как квадратную (0,1)-матрицу порядка $|G|$, в которой r_{ij}=1, если вершина v_j достижима из v_i, и r_{ij}=0 – в противном случае. Поскольку каждая вершина достижима из самой себя, диагональные элементы в $\mathbf{R}$ равны 1.

Матрица достижимостей может быть получена следующим способом. Отыскиваем множества $R(v_i)$ для всех вершин графа и полагаем r_{ij}=1, если $v_j \in R(v_i)$, и r_{ij}=0 – в противном случае. Для примера из предыдущего раздела имеем:

$$\left.\begin{array}{l} R(v_1)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \\ R(v_2)=\{v_2, v_3, v_4\}, \\ R(v_3)=\{v_3, v_4\}, \\ R(v_4)=\{v_3, v_4\}, \\ R(v_5)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \\ R(v_6)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}, \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу обратных достижимостей $\mathbf{Q}=[q_{ij}]$ определим как квадратную (0,1)-матрицу порядка $|G|$, в которой $q_{ij}=1$, если вершина v_i достижима из v_j, и $q_{ij}=0$ – в противном случае. Диагональные элементы в $\mathbf{Q}$, как и в $\mathbf{R}$, равны 1.

Матрица $\mathbf{Q}$ может быть получена тем же способом, что и матрица $\mathbf{R}$. Ищем множества $Q(v_i)$ для всех вершин графа и полагаем $q_{ij}=1$, если $v_j \in Q(v_i)$, и $q_{ij}=0$ – в противном случае:

$$\left.\begin{array}{l} Q(v_1)=\{v_1,v_5,v_6\},\\ Q(v_2)=\{v_1,v_2,v_5,v_6\},\\ Q(v_3)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\},\\ Q(v_4)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\},\\ Q(v_5)=\{v_1,v_5,v_6\},\\ Q(v_6)=\{v_1,v_5,v_6\}, \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}.$$

Однако из определений ясно, что столбец v_i в матрице $\mathbf{Q}$ совпадает со строкой v_i в матрице $\mathbf{R}$, поэтому $\mathbf{Q}=\mathbf{R}^T$.

Процедура отыскания сильных компонент может быть сделана более наглядной и эффективной, если использовать введенные выше матрицы и операцию их поэлементного умножения $\otimes$. Матрица $\mathbf{R}\otimes\mathbf{Q}$ несет информацию обо всех сильных компонентах графа:

$$\mathbf{R}\otimes\mathbf{Q}=\begin{array}{c} \\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ v_1\\ v_5\\ v_6\\ v_2\\ v_3\\ v_4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1&v_5&v_6&v_2&v_3&v_4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c|cc} \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0\\ \mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&0&0&0\\ \hline 0&0&0&\mathbf{1}&0&0\\ \hline 0&0&0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1}\\ 0&0&0&0&\mathbf{1}&\mathbf{1} \end{array}\right] \end{array}.$$

Действительно, строка v_i содержит единицы в тех столбцах v_j, для которых выполняется условие взаимной достижимости с v_i и которые наряду с v_i входят в состав одной и той же сильной компоненты. Ясно, что строки (и столбцы) матрицы, соответствующие вершинам одной и той же сильной компоненты, должны быть идентичны. Поэтому путем перестановки строк и столбцов матрицу $\mathbf{R}\otimes\mathbf{Q}$ можно привести к блочно-диагональному виду, когда каждая диагональная под-

матрица соответствует сильной компоненте и состоит из одних единиц, а все остальные элементы – нули.

2.6. Получение матрицы достижимостей

Естественными количественными характеристиками достижимости являются длины путей между вершинами При этом матрицу смежности $\mathbf{A}$ можно трактовать как матрицу достижимости при длине путей 1, а матрицу $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}\times\mathbf{A}=[a_{ij}^{(2)}]$, где $a_{ij}^{(2)}=\bigvee_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$, как матрицу достижимости при длине путей 2 (здесь и далее матрица $\mathbf{A}$ рассматривается как булевская). Соответственно матрицы $\mathbf{A}^3, \mathbf{A}^4, \mathbf{A}^5$ и т. д. можно рассматривать как матрицы достижимости при длине путей $3, 4, 5$ и т. д.

Определим *ограниченную достижимость* как достижимость при длине путей не более чем q. Соответствующая матрица называется матрицей ограниченной достижимости $\mathbf{R}_q$. Очевидно, что $\mathbf{R}_1=\mathbf{A}+\mathbf{I}$, где "+" — булевское сложение, $\mathbf{I}$ — единичная матрица, аналогично $\mathbf{R}_2=\mathbf{R}_1+\mathbf{A}^2=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2=$ $=(\mathbf{I}+\mathbf{A})^2=\mathbf{R}_1^2$ и вообще $\mathbf{R}_q=\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^q=(\mathbf{I}+\mathbf{A})^q=\mathbf{R}_1^q$. Вместо последовательного вычисления $\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \ldots, \mathbf{R}_q$ экономичнее получать $\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_8$ и т. д., используя соотношение:

$$\mathbf{R}_1^{2^l}=\mathbf{R}_1^{2^{(l-1)}}\mathbf{R}_1^{2^{(l-1)}},$$

где $l=1, 2, 3, \ldots$ Возведение в квадрат повторяется, пока не будет получено $\mathbf{R}_q$. Если q не является степенью двойки, потребуется ряд дополнительных умножений. Например, матрица $\mathbf{R}_7$ может быть получена так: $\mathbf{R}_7 = \mathbf{R}_4\times\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_1 =$ $= \mathbf{R}_1^4\times\mathbf{R}_1^2\times\mathbf{R}_1$. В том случае, когда требуется отыскать матрицу достижимости, возведение в квадрат следует выполнять, пока результат операции не перестанет изменяться.

Более эффективное решение задачи основано на использовании транзитивного замыкания. Граф называется *транзитивным*, если при наличии дуг вида (v_i, v_k) и (v_k, v_j) в нем обязательно есть и дуга вида (v_i, v_j). Пример транзитивного графа дан на рис. 2.5. *Транзитивным замыканием* графа G

называют транзитивный граф G_{tc}, полученный путем добавления к G минимального количества дуг, необходимого для обеспечения транзитивности. Из определения следует, что если в транзитивном графе имеется цепь, связывающая вершину v с вершиной w, то существует также и дуга (v, w). Поэтому, если G_{tc} является графом транзитивного замыкания графа G, то его матрица смежности практически совпадает с матрицей достижимости графа G, отличаясь только элементами главной диагонали, соответствующими одновершинным сильным компонентам[6] G. Следовательно, для нахождения $\mathbf{R}$ можно использовать алгоритмы отыскания транзитивного замыкания. Рассмотрим один из таких алгоритмов.

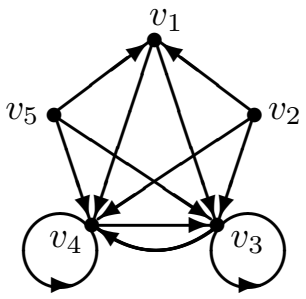


Рис. 2.5

2.7. Алгоритм Уоршолла

Пусть G_0 — орграф с множеством вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Алгоритм Уоршолла позволяет получить последовательность графов G_i, i=1, 2, ..., n, таких, что G_{i-1} является подграфом G_i, причем G_n это граф транзитивного замыкания G_0. Граф G_i получается из G_{i-1} после обработки вершины v_i в соответствии со схемой, представленной на рис. 2.6.

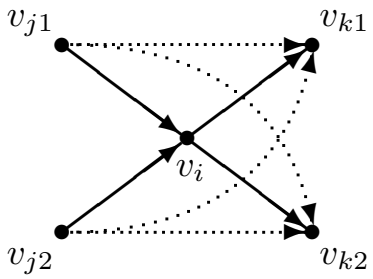


Рис. 2.6

Пусть, например, в графе G_{i-1} существуют дуги (v_{j1}, v_i) и (v_{j2}, v_i), входящие в вершину v_i, и дуги (v_i, v_{k1}) и (v_i, v_{k2}), выходящие из нее. Тогда при обработке вершины v_i каждая пара дуг (одна входящая, другая исходящая) "порождает" третью дугу, которая соединяет начало первой дуги пары с концом второй дуги. В представленный на рисунке граф добавляются четыре дуги (v_{j1}, v_{k1}), (v_{j1}, v_{k2}), (v_{j2}, v_{k1}) и (v_{j2}, v_{k2}), изображеные

[6] В матрице смежности графа G_{tc} эти элементы равны нулю.

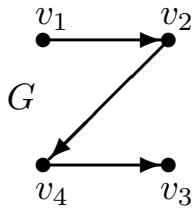
пунктиром. Граф, полученный в результате подобной обработки вершины v_i, обозначается G_i.

Дадим формальное описание алгоритма. Пусть $\mathbf{A}$ – матрица смежности графа, $\mathbf{A}^* = [a_{ji}]$ – матрица смежности транзитивного замыкания. Тогда запись алгоритма выглядит так:

```
begin          { – У О Р Ш О Л Л – }
  A* := A                          { Инициализация A*                  }
  for i := 1 to n do               { Перебор столбцов в A*             }
    for j := 1 to n do             { Перебор строк в A*                }
      if a*_ji = 1 then            { Если есть дуга (v_j, v_i), то     }
        for k := 1 to n do         { "прибавить" в A*                  }
          a*_jk := a*_jk ∨ a*_ik   { строку i к строке j               }
end            { – У О Р Ш О Л Л – }
```

Отличительной особенностью алгоритма является порядок обработки элементов $\mathbf{A}^*$ *по столбцам*. Это естественное следствие того, что обработка новой вершины не начнется, пока не переберутся все дуги, входящие в очередную вершину, причем порядок этого перебора может быть произвольным.

Как следует из приведенного описания, алгоритм обеспечивает получение транзитивного замыкания всего за один проход (просмотр) вершин графа. Существенным достоинством является и то, что результат формируется путем преобразования элементов матрицы $\mathbf{A}^*$ без использования вспомогательных данных, т. е. алгоритм "работает на месте".



$$\mathbf{A}= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{R}= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 2.7

В качестве примера найдем транзитивное замыкание для графа G с матрицей смежности $\mathbf{A}$ и матрицей достижимости[7] $\mathbf{R}$, представленных на рис 2.7. Применяя алгоритм

[7] Матрица достижимости легко получается непосредственно по графу.

Уоршолла, получим следующий ряд матриц, иллюстрирующий процесс формирования матрицы транзитивного замыкания $\mathbf{A}^*$:

$$\underset{\mathbf{A}(G_1)}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{\mathbf{A}(G_2)}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{\mathbf{A}(G_3)}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \Rightarrow \underset{\mathbf{A}(G_4)}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}.$$

Соответстующие им графы изображены на рис. 2.8.

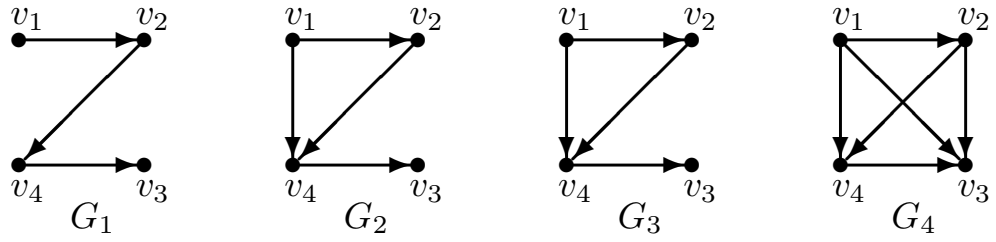


Рис. 2.8

Последний из этих графов G_4 является графом транзитивного замыкания для графа на рис. 2.7. Теперь, чтобы получить матрицу достижимости, достаточно расставить недостающие единицы на главной диагонали в матрице $\mathbf{A}^*(G)=\mathbf{A}(G_4)$.

2.8. База графа

Базой называют множество вершин, из которого достижимы все вершины графа, причем в базе нет подмножеств, обладающих таким же свойством достижимости.

Формально базу графа $G(V,\Gamma)$ можно определить как множество $B\subset V$, такое, что $R(B)=V$, а $\forall(B'\subset B)\quad R(B')\neq V$.

Итак, база удовлетворяет двум условиям:

– каждая вершина графа достижима, по крайней мере, из одной вершины базы;

– в базе нет вершин, достижимых из других вершин базы.

Поэтому можно утверждать, что в ациклическом графе существует только одна база. Она состоит из всех вершин с полу-

степенью захода, равной 0, и легко отыскивается. Например, в графе на рис. 2.6 база состоит из двух вершин v_{j1} и v_{j2}, а в графе на рис. 2.7 — из одной вершины v_1.

Из вышеприведенных условий следует также, что в базе не может быть двух вершин, принадлежащих одной и той же сильной компоненте. Поэтому, если граф содержит циклы, и, следовательно, хотя бы одну сильную компоненту, причем эта компонента образует вершину конденсации, у которой $\deg^- v^*=0$, то в графе есть несколько баз. Это следствие того, что в базу можно включить любую (но только одну!) вершину такой компоненты. Например, в графе G на рис. 2.2 базу конденсации образует сильная компонента $\{v_5, v_6, v_7, v_8\}$, значит имеется четыре одновершинных базы: $\{v_5\}, \{v_6\}, \{v_7\}$ и $\{v_8\}$. В общем же случае число баз равно произведению чисел вершин в сильных компонентах, образующих базу конденсации.

С учетом изложенного поиск баз в орграфе можно проводить в следующем порядке:

1. Найти все сильные компоненты графа.

2. Построить его конденсацию.

3. Найти базу конденсации.

4. Из каждой сильной компоненты, образующей вершину базы конденсации, взять по одной вершине.

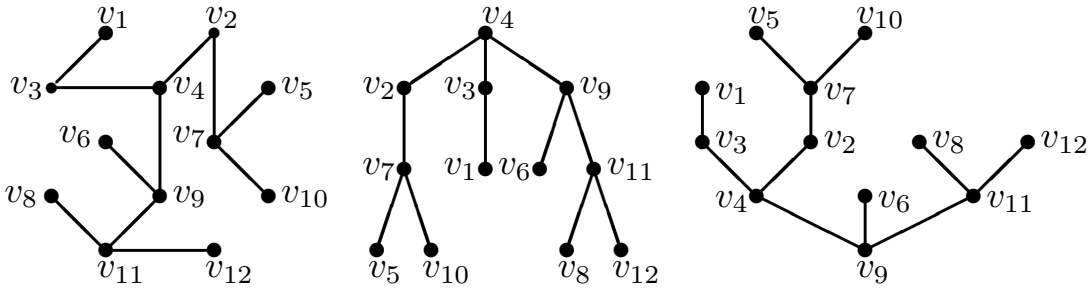
3. Деревья

Деревья являются простым, но очень важным видом графов. С их помощью легко описывается структура самых различных объектов: организаций и учреждений, книг и документов, математических формул, химических соединений, компьютерных файловых систем, программ и многое другое.

Считается, что первым понятие дерева использовал Кирхгоф в 1847г. при исследовании электрических цепей. Спустя десятилетие Кэли ввел термин "дерево" при изучении структуры углеводородных соединений и получил первые важные результаты в этом разделе теории графов.

3.1. Основные понятия

Неориентированные деревья. На рис. 3.1 даны три изображеня одного и того же неориентированного дерева. Наиболее соответствует названию вариант *в*, но обычно при изобра-



а *б* *в*

Рис. 3.1

жении деревьев используют варианты *а* и *б*. Из рисунка становятся понятными термины *корень* и *лист*, употребляемые при рассмотрении подобных графов. Листом (*висячей вершиной*) называют вершину, степень которой равна 1, если она не рассматривается как корень. В качестве корня в неориентированном дереве можно принять любую вершину.

Существует несколько эквивалентных определений неориентированного дерева, каждое из которых отражает различные свойства последнего. Приведем некоторые из них:

1) *Дерево – это связный граф без циклов.*

2) *Дерево – это граф, в котором любая пара вершин связана единственной цепью.* ▷ Действительно, наличие двух и более цепей, соединяющих некоторую пару вершин, означает присутствие циклов, образованных несовпадающими частями таких цепей. ◁

3) *Дерево – это связный граф, имеющий n вершин и $n-1$ ребер.* ▷ Непосредственной проверкой устанавливаем справедливость этого утверждения при $n=1,2,3$. Допустим, что оно верно для дерева с $n-1$ вершинами, и рассмотрим случай, когда дерево T имеет n вершин. Если в нем удалить любое ребро, то в силу утверждения 2, получим два дерева с $n_1 \leq (n-1)$ и $n_2 \leq (n-1)$ вершинами. По индуктивному предположению число ребер в них n_1-1 и n_2-1 соответственно. Поэтому T содержит $[(n_1-1)+(n_2-1)]+1=n_1+n_2-1=n-1$ ребер. ◁

Естественным расширением понятия дерева является *лес* — несвязный граф, все компоненты которого — деревья.

Любому связному графу можно поставить в соответствие некоторое дерево, называемое *остовным деревом*, или *остовом* этого графа. Остов графа — это его минимальный связный остовный подграф. В общем случае граф может иметь несколько остовов. В качестве прмера на рис. 3.2,*а* представлен неориентированный граф и все его остовы (рис. 3.2,*б,в,г*).

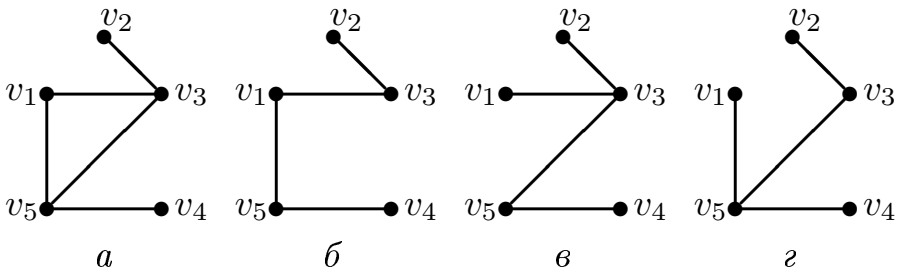
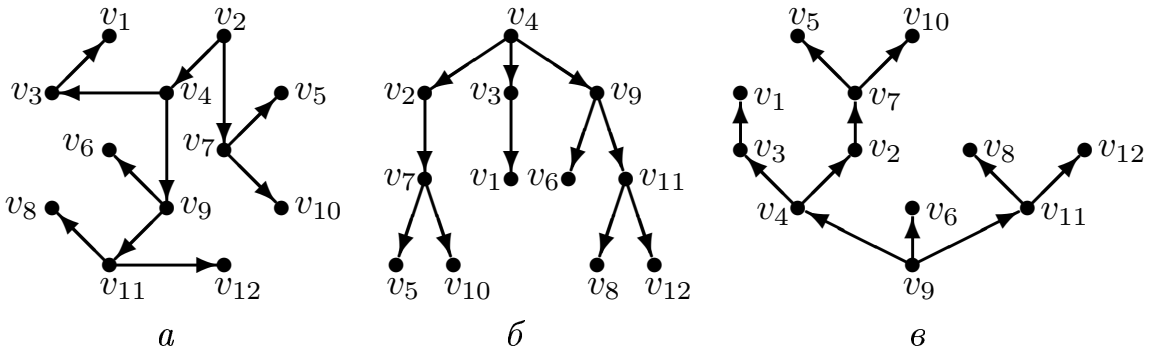


Рис. 3.2

Аналогично, любому несвязному графу можно поставить в соответствие *остовный лес* – максимальный остовный подграф, не содержащий циклов.

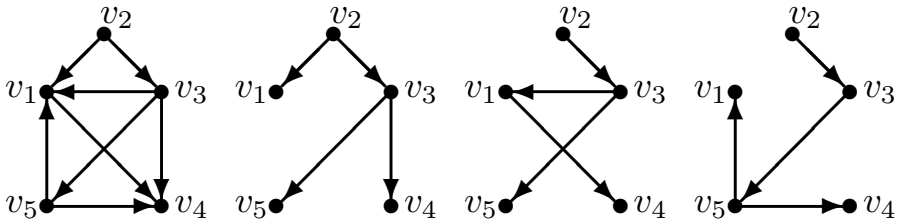
Ориентированные деревья. *Ориентированное дерево* — это граф, в котором полустепень захода у одной вершины, называемой корнем, равна нулю, а у остальных – единице. На рис. 3.3,*а,б,в* избражены три ориентированных дерева.



а *б* *в*

Рис. 3.3

И хотя по конфигурации они идентичны (если не учитывать ориентацию дуг) соответствующим изображениям одного и того же дерева на рис. 3.1,*а,б,в*, это совершенно различные деревья уже потому, что у них разные корни: v_2, v_4, v_9. Некото-



а *б* *в* *г*

Рис. 3.4

рые связные орграфы также имееют остовы. На рис. 3.4,*а* дан пример такого графа и показаны три его остова (рис. 3.4,*б,в,г*).

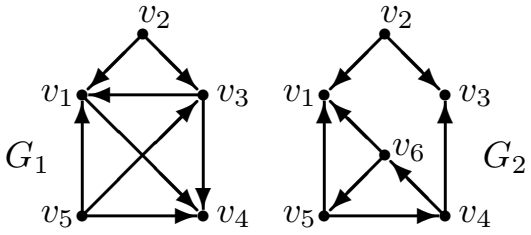


Рис. 3.5

Графы, изображенные на рис. 3.5, остова не имеют. В графе G_1 есть две вершины с нулевой полустепенью захода v_2

и v_5, что находится в явном противоречии с определением ордерева. В графе G_2 такая вершина одна — v_2, но из нее нет путей в вершины v_4, v_5, v_6. Общим для G_1 и G_2 является то, что оба они слабосвязные, а такие графы не могут иметь ориентированного остова.

3.2. Описание деревьев

Матричное представление. Дерево, как и любой другой граф, можно описать с помощью матриц. В качестве примера ниже приведены матрицы смежности $\mathbf{A}$ и инцидентности $\mathbf{B}$ для ордерева, изображенного на рис. 3.4,*г* :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Отметим особенности таких матриц для деревьев.

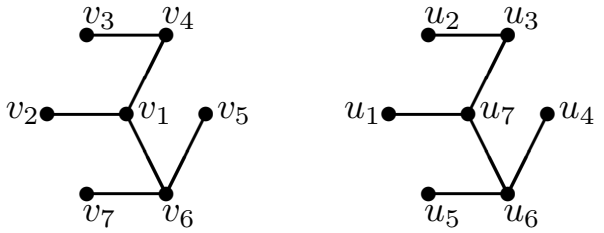
Отношение числа ребер дерева к числу его вершин, равное $(n-1)/n$, минимально для связного графа, поэтому матрица смежности дерева весьма разрежена (соотношение единиц и нулей в ней равно $(n-1):(n^2-n+1)\approx 1/n$ для ориентированного дерева и $2(n-1):(n^2-2n+2)\approx 2/n$ для неориентированного).

Матрица инцидентности дерева имеет размер $n\times(n-1)$, т. е. близка к квадратной, а фактически таковой и является, если принять во внимание ее избыточность по строкам. Действительно, удалив любую строку, получаем квадратную матрицу, по-прежнему полностью характеризующую граф.

Еще одна особенность матрицы инцидентности, которая будет использована далее, заключается в следующем. Путем переупорядочения строк и столбцов матрица инцидентности любого дерева может быть приведена к нижней трапециевидной матрице, когда одна из единиц столбца i находится в строке i, а другая – в одной из нижележащих строк. В качестве обоснования этого утверждения можно рассматривать следующий алгоритм.

▷ Пусть T — заданное дерево. Выбираем любую висячую вершину v и присваиваем ей (и инцидентному ребру) номер 1. Затем рассматриваем дерево[8] $T_1{=}T{-}v$ и выполняем с ним ту же операцию. Теперь уже другая висячая вершина u получает вместе с инцидентным ей ребром номер 2. На следующем шаге имеем дерево $T_2{=}T_1{-}u$ и т.д. Одновременно с обработкой вершин и ребер формируем столбцы матрицы инцидентности. Выбранной вершине соответствует единица на главной диагонали. Вторая (нижележащая) единица в столбце появляется, когда соответствующая вершина дерева T, ставшая висячей, выбирается на очередном шаге. Процесс завершается за $n{-}1$ шагов, причем на последнем шаге дерево T_{n-1} состоит из одного ребра, концы которого получают номера $n{-}1$ и n. ◁

В качестве примера на рис. 3.6 даны два варианта нумерации одного и того же графа: на рис. 3.6,*а* – первоначальная,



а *б*

Рис. 3.6

а на рис. 3.6,*б* – нумерация, полученная описанным способом. Соответствующие матрицы инцидентности приведены ниже:

$$\mathbf{B}_a = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{B}_б = \begin{array}{c} \\ u_1(v_2) \\ u_2(v_3) \\ u_3(v_4) \\ u_4(v_5) \\ u_5(v_7) \\ u_6(v_6) \\ u_7(v_1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_4 & e_2 & e_5 & e_6 & e_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Фактически, для получения $\mathbf{B}_б$ в матрице $\mathbf{B}_a$ выполнена перестановка строк по схеме: $1{\to}7$, $2{\to}1$, $3{\to}2$, $4{\to}3$, $5{\to}4$, $7{\to}5$ и перестановка столбцов по схеме: $2{\to}3$, $3{\to}6$, $4{\to}2$, $5{\to}4$, $6{\to}5$.

[8] Здесь и далее запись $T_1{=}T{-}v$ означает, что дерево T_1 получено путем удаления вершины v и инцидентного ей ребра в дереве T.

Теперь рассмотрим квадратную матрицу $(\mathbf{B}_б)_{-7}$, которая получается, если удалить седьмую строку матрицы $\mathbf{B}_б$. Определитель этой матрицы равен 1. Седьмая строка $\mathbf{B}_б$ соответствует первой строке $\mathbf{B}_а$, поэтому оределитель матрицы $(\mathbf{B}_а)_{-1}$, полученной при вычеркивании первой строки в $\mathbf{B}_а$, (с учетом числа перестановок строк и столбцов) равен -1.

Ясно, что вышеописанная поцедура позволяет, выбрав некоторую вершину, получить такой вариант нумерации, когда эта вершина имеет максимальный номер, а матрица инцидентности графа (после удаления последней строки, соответствующей выбранной вершине) оказывается треугольной с единицами на главной диагонали и определителем равным 1. Поэтому удаление любой строки матрицы инцидентности дерева порождает квадратную матрицу с определителем равным $+1$ или -1, а это значит, что *любой минор порядка* $n-1$ *матрицы инцидентности дерева по абсолютной величине равен* 1.

Код Прюфера. Каждое дерево, имеющее n вершин, может быть однозначно описано числовым кодом, содержащим $n-2$ элементов и называемым *кодом Прюфера.*

Алгоритм получения кода состоит в следующем. Пусть вершины дерева помечены (пронумерованы) числами от 1 до n. Отыскиваем вершину степени 1 с наименьшим номером и включаем в код номер смежной с ней вершины, после чего удаляем найденную вершину (вместе с ребром). С получившимся подграфом выполняем ту же операцию, повторяя ее, пока не ос-

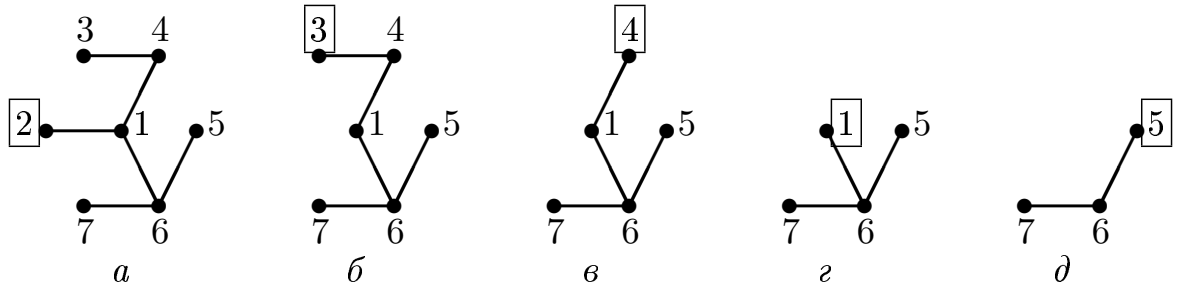


Рис. 3.7

танется только одно ребро. Процесс формирования кода отражает рис. 3.7. Номер вершины, удаляемой на очередном шаге, заключен в рамку. В заданном графе (рис. 3.7,*а*) среди вершин единичной степени минимальный номер у вершины 2. С

ней смежна вершина 1. Следовательно, первая цифра кода Прюфера равна 1. Удаляя вершину 2, получим граф, изображенный на рис. 3.7,*б*. В этом графе среди вершин единичной степени минимальный номер у вешины 3, поэтому вторая цифра кода — 4. Выполнив еще три итерации, которым соответствуют графы, изображенные на рис. 3.7,*в,г,д*, получим дерево, состоящее из единственного ребра $\{7;6\}$. Процесс завершен.

Результаты проделанных шагов представлены в табл. 3.1, последняя строка которой содержит искомый код — **14166**.

Таблица 3.1

Итерация	1	2	3	4	5
Граф на рис. 3.7	*а*	*б*	*в*	*г*	*д*
Минимальный номер вершины	2	3	4	1	5
Удаляемое ребро	{1;2}	{4;3}	{1;4}	{6;1}	{6;5}
Элемент кода Прюфера	1	4	1	6	6

Алгоритм восстановления дерева, представленного кодом Прюфера, позволяет получить соответствующей список ребер.

Назовем *антикодом* упорядоченную по возрастанию последовательность номеров вершин, не вошедших в код Прюфера. Для рассмотренного примера антикод равен **2357**.

Дерево строится путем последовательного добавления ребер. Очередное добавляемое ребро, начиная с первого, образуется парой вершин, номера которых стоят первыми в строке кода и в строке антикода. После этого использованные элементы строк вычеркиваются. Если номер, вычеркнутый из строки кода, не содержится среди оставшихся в ней элементов, его следует добавить к строке антикода, не нарушая ее упорядоченность. Описанные действия повторяются с "остатками" строк кода и антикода, пока не будут вычеркнуты все элементы первой из них. При этом строка антикода будет содержать два элемента, определяющих последнее ребро, которое следует добавить к формируемому списку. В результате получаем список из $n-1$ ребер, соответствующий дереву, заданному кодом Прюфера.

В качестве примера выполним восстановление дерева по коду **14166**. Соответствующий антикод, как уже было показано выше, равен **2357**. Поэтому первое ребро дерева будет $\{1;2\}$. Вычеркивая 1 и 2, получаем **4166** в строке кода и **357** в строке антикода. На следующей итерации вычеркиваем пару $\{4;3\}$ и включаем в строку антикода 4 и т.д. Последовательность итераций может быть представлена табл. 3.2.

Таблица 3.2

Итерация	1	2	3	4	5	6	
Строка кода	~~1~~	~~4~~	~~1~~	~~6~~	~~6~~		
Строка антикода	~~2~~	3 ~~3~~	5 5 ~~4~~	7 7 5 ~~1~~	7 5 ~~5~~	7 7 6	7
Добавляемое ребро	{1;2}	{4;3}	{1;4}	{6;1}	{6;5}	{6;7}	

Анализируя список ребер, убеждаемся, что получено исходное дерево. Отметим, что порядок следования ребер тот же, что и в предыдущей таблице.

3.3. Задачи с деревьями

3.3.1. Перечисление остовных деревьев

Пусть G является (n, m)-графом с матрицей инцидентности $\mathbf{B}$ и требуется перечислить все его остовы. Очевидно, что множество остовов это — некоторая часть множества остовных подграфов графа G, имеющих $n-1$ ребер. Матрицы инцидентности всех этих подграфов легко могут быть получены из матрицы $\mathbf{B}$. Действительно, любая матрица, составленная из $n-1$ различных столбцов матрицы $\mathbf{B}$, описывает некоторый $(n, n-1)$-граф, являющийся по отношению к G остовным подграфом. Чтобы выяснить, остов этот подграф или нет, воспользуемся следующим критерием.

Если $(n, n-1)$*-граф является деревом, то модуль любого минора* $n-1$ *порядка матрицы инцидентности соответствующего орграфа равен* 1 *и равен* 0*, если граф не является деревом.*

Под *соответствующим* орграфом для некоторого неориентированного графа будем понимать орграф, полученный путем придания произвольной ориентации ребрам этого графа (достаточно в каждом столбце матрицы инцидентности одной из единиц приписать знак "–"). Первая часть приведенного утверждения, касающаяся дерева, фактически была доказана в разд. 3.2 (см. стр. 48.). Докажем вторую часть.

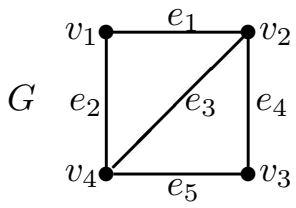
$\triangleright$ Пусть $(n, n-1)$-граф не является деревом и, значит, несвязен. Тогда его матрица инцидентности состоит из нескольких независимых блоков, представляющих собой матрицы инцидентности компонент связности. То же самое относится и к матрице инцидентности соответствующего орграфа. Кроме того, строки этой матрицы линейно зависимы, причем, поскольку граф несвязный, такая зависимость существует в каждой группе строк, описывающей ту или иную компоненту связности. Удалив некоторую строку матрицы, получим квадратную подматрицу порядка $n-1$, определитель которой равен 0. Действительно, удаление одной строки может устранить линейную зависимость только для строк, относящихся лишь к одной компоненте связности. Строки, определяющие остальные компоненты остаются по-прежнему линейно зависимыми. Поэтому любой минор $n-1$ порядка в рассматриваемом случае равен 0, что и требовалось доказать. $\triangleleft$

В соответствии с изложенным процесс получения (перечисления) всех остовов графа $G(n, m)$, представленного матрицей инцидентности, можно организовать следующим образом. Последовательно формируются сочетания из m по $n-1$ столбцов заданной матрицы, которые образуют матрицы инцидентности $(n-1)$-реберных остовных подграфов графа G. Для каждой такой матрицы после обработки всех ее столбцов (одной из двух единиц столбца приписывается знак "–") подсчитывается значение любого минора $n-1$ порядка. Если получается $+1$ или -1, то соответствующий остовный подграф

является остовом графа $G(n,m)$ и его матрица запоминается, в противном случае подграф не остов и его матрица не учитывается. Процесс завершается после перебора всех C_m^{n-1} сочетаний столбцов матрицы инцидентности.

Вместо матрицы инцидентности можно сразу взять матрицу $\overline{\mathbf{B}}_{-i}$ размера $(n-1)\times m$, представляющую собой матрицу инцидентности соответствующего орграфа с удаленной i-й строкой, и вычислять все ее миноры порядка $n-1$.

В качестве примера получим все остовы графа G, изображенного на рис. 3.8 и имеющего матрицу инцидентности $\mathbf{B}$.



$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 3.8

Ниже приведена матрица $\overline{\mathbf{B}}_{-1}$ и все ее миноры третьего порядка (их число равно $C_5^3=10$):

$$\overline{\mathbf{B}}_{-1} = \begin{array}{c} \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\begin{array}{c} e_1\ e_2\ e_3 \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \mathbf{M}_1 \end{array}, \qquad \begin{array}{c} e_1\ e_2\ e_4 \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ \mathbf{M}_2 \end{array},$$

$$\begin{array}{c} e_1\ e_2\ e_5 \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ \mathbf{M}_3 \end{array}, \quad \begin{array}{c} e_1\ e_3\ e_4 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ \mathbf{M}_4 \end{array}, \quad \begin{array}{c} e_1\ e_3\ e_5 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ \mathbf{M}_5 \end{array}, \quad \begin{array}{c} e_1\ e_4\ e_5 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ \mathbf{M}_6 \end{array},$$

$$\begin{array}{c} e_2\ e_3\ e_4 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \\ \mathbf{M}_7 \end{array}, \quad \begin{array}{c} e_2\ e_3\ e_5 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ \mathbf{M}_8 \end{array}, \quad \begin{array}{c} e_2\ e_4\ e_5 \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \\ \mathbf{M}_9 \end{array}, \quad \begin{array}{c} e_3\ e_4\ e_5 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \mathbf{M}_{10} \end{array}.$$

Миноры $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_{10}$ равны 0, значит, остовные подграфы, образованные множествами ребер $\{e_1,e_2,e_3\}$ и $\{e_3,e_4,e_5\}$, остовами не являются, тогда как подграфы, определяемые ми-

норами $\mathbf{M_2}-\mathbf{M_9}$, — остовы. Это наглядно подтверждает и рис. 3.9, где представлены все трехреберные остовные подграфы рассматриваемого графа и значения соответствующих им

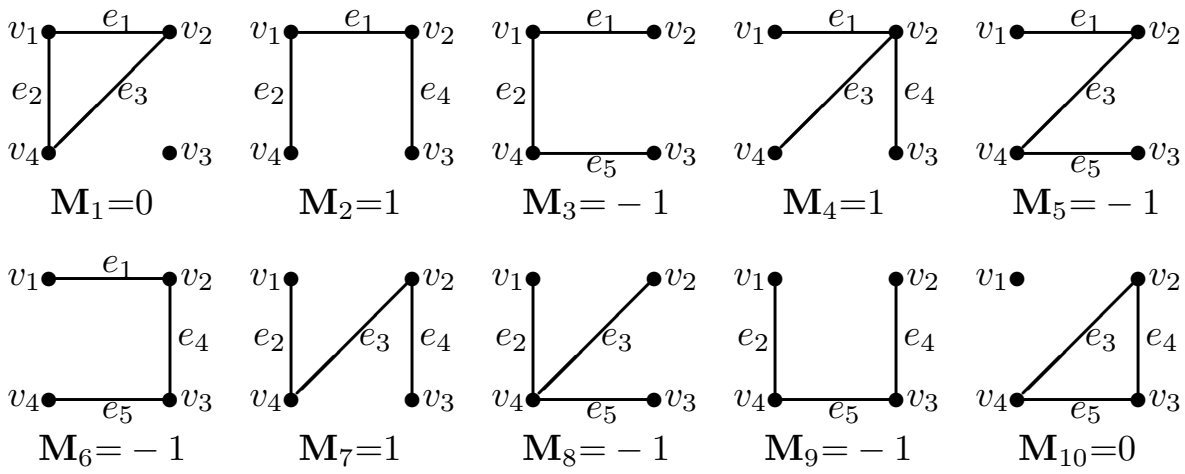


Рис. 3.9

миноров третьего порядка матрицы $\overline{\mathbf{B}}_{-1}$. Только восемь из десяти подграфов являются остовами, и именно для них абсолютная величина минора равна 1.

3.3.2. Пересчет остовных деревьев

Задача определения числа остовных деревьев графа естественным образом решается в процессе перечисления остовов. Однако, если требуется знать только количество остовов, а получать сами остовы нет необходимости, изложенный выше подход не рационален.

Эффективное решение рассматриваемой задачи можно получить на основе *теоремы Бине–Коши* для определителя произведения двух матриц, которая формулируется так.

Теорема 3.1 *Если* $\mathbf{P}$ *матрица порядка* $n\times m$, *а* $\mathbf{Q}$ *матрица порядка* $m\times n$, *где* $n\leq m$, *то определитель матрицы* $\mathbf{PQ}$ *равен сумме произведений каждого минора порядка* n *матрицы* $\mathbf{P}$ *на соответствующий минор матрицы* $\mathbf{Q}$.

Соответствующим для минора порядка n матрицы $\mathbf{P}$, образованного ее столбцами $i_1, i_2, \ldots, i_n$, является минор того

же порядка матрицы $\mathbf{Q}$, образованный строками $i_1, i_2, \ldots, i_n$ этой матрицы.

Пусть, например, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, тогда в соответствии с теоремой Бине-Коши имеем:

$$|\mathbf{PQ}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 22.$$

Перемножив матрицы непосредственно, получим:

$$\mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ и, значит, } |\mathbf{PQ}| = 22\,.$$

Если $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T$, то в силу равенства соответствующих миноров матриц-сомножителей имеем:

$$|\mathbf{P}\mathbf{P}^T| = \mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2 + \ldots + \mathbf{M}_{C_m^n}^2\,,$$

где справа от знака равенства стоит сумма квадратов всех миноров порядка n матрицы $\mathbf{P}$. Это позволяет утверждать, что определитель квадрата матрицы порядка $n \times m$, где $n \leq m$, равен сумме квадратов всех ее миноров порядка n. Следовательно, в том случае, когда любой минор порядка n в матрице принимает одно из трех значений: –1, 0 или 1, определитель квадрата матрицы оказывается равным числу ненулевых миноров. Из этого, в свою очередь, следует, что вместо перебора миноров матрицы $\overline{\mathbf{B}}_{-i}$ для получения числа остовов графа достаточно подсчитать определитель $|\overline{\mathbf{B}}_{-i} \times \overline{\mathbf{B}}_{-i}^T|$.

Например, для графа, изображенного на рис. 3.8, имеем:

$$\left|\overline{\mathbf{B}}_{-1} \times \overline{\mathbf{B}}_{-1}^T\right| = \left| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8\,,$$

что совпадает с количеством остовов, найденным ранее.

Поскольку определитель $|\overline{\mathbf{B}}_{-i}\times\overline{\mathbf{B}}_{-i}^{T}|$ равен алгебраическому дополнению элемента $k_{i,i}$ матрицы Кирхгофа, то в силу свойства последней[9] решение задачи о числе остовов в окончательном виде может быть сформулировано в виде следующей теоремы, известной как *матричная теорема о деревьях*, или *теорема Кирхгофа.*

Теорема 3.2 *Число остовных деревьев связного графа порядка* $n\geq 2$ *равно алгебраическому дополнению любого элемента матрицы Кирхгофа.*

Воспользуемся теоремой для определения числа остовов полного графа K_n. В этом случае матрица Кирхгофа (порядка n) и алгебраическое дополнение любого ее диагонального элемента (порядка $n-1$) выглядят так:

$$\mathbf{K}(K_n)=\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{i,i}=\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

Вычтя первую строчку определителя из всех нижележащих и прибавив к первому столбцу остальные $n-2$, получим:

$$\mathbf{A}_{i,i}=\begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -n & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & \dots & n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}=n^{n-2}.$$

Таким образом, число остовов полного графа K_n равно n^{n-2}, а поскольку остовы полного помеченного графа составляют все множество помеченных деревьев с n вершинами, то справедлива следующая *теорема Кэли.*

Теорема 3.3 *Число различных помеченных деревьев с* n *вершинами равно* n^{n-2}.

Этот результат может быть легко получен на основе кода Прюфера. Действительно, поскольку любое дерево, имеющее n вершин, помеченных числами от 1 до n, однозначно

[9] Равенство алгебраических дополнений элементов матрицы.

описывается $(n-2)$-разрядным кодом, каждый разряд которого может принимать некоторое, вполне определенное значение из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, и наоборот, каждому $(n-2)$-разрядному коду, составленному на основе чисел из указанного множества, соответствует конкретное дерево, то общее число деревьев должно быть равно n^{n-2}.

3.4. Задача о кратчайшем остове графа

Пусть G — связный неориентированный граф, каждому ребру которого приписан некоторый вес $c_{i,j} > 0$. Требуется среди всех остовов графа найти по крайней мере один с минимальной суммой весов ребер. Хотя в реальной системе, которая описывается графом, вес ребра может соответствовать стоимости, трудоемкости, пропускной способности и т. п., в теории графов чаще используют термин "длина ребра", а сама задача трактуется как задача отыскания остова с наименьшей суммой длин составляющих его ребер, или кратко, остова наименьшей длины (кратчайшего остова). Это одна из наиболее простых классических оптимизационных задач теории графов, которая считается полностью решенной. В настоящем разделе рассмотрим два наиболее известных алгоритма отыскания кратчайшего остова.

3.4.1. Алгоритм Краскала

Описание алгоритма. В основу алгоритма положена простая и интуитивно ясная идея: строить остов из наиболее "коротких" ребер, не допуская при этом образования циклов.

При выполнении алгоритма формируется последовательность графов $G_1, G_2, \ldots, G_i, \ldots, G_{n-1}$, где G_1 — остовный подграф, содержащий одно (самое короткое) ребро графа; G_2 — остовный подграф, содержащий два (самых коротких) ребра графа; G_i — лес, содержащий i самых коротких ребер, не образующих циклов; G_{n-1} — искомый кратчайший остов.

Пусть граф представлен списком ребер, предварительно упорядоченным по возрастанию их весов.

Процесс начинается с самого короткого ребра $e_{\text{кр}}$, которое обязательно должно войти в кратчайший остов. Предположив обратное, мы сразу приходим к протворечию. Действительно, пусть T — кратчайший остов, не содержащий $e_{\text{кр}}$. Ясно, что в графе $T+e_{\text{кр}}$ есть цикл. Удалив любое принадлежащее циклу ребро, отличное от $e_{\text{кр}}$, получаем остов, более короткий чем T и содержащий $e_{\text{кр}}$. Следовательно первое ребро списка всегда включается в остов, образуя начальный фрагмент будущего остова под номером 1.

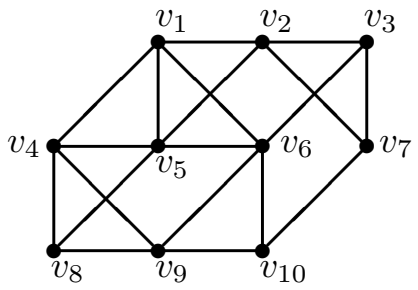
Поскольку в графе нет параллельных ребер, присоединение к остову второго ребра не может привести к появлению цикла. Поэтому второе по длине ребро также должно входить в остов. Оно может либо "примкнуть" к уже существующему фрагменту либо даст начало новому (пока одноребернoму) фрагменту под номером 2.

Для остальных ребер необходим анализ на предмет включения или невключения в остов. При этом возможны следующие четыре варианта:

а) концы ребра не принадлежат ни одному фрагменту. Ребро должно быть включено в остов, образуя при этом новый фрагмент, которому следует присвоить очередной номер;
б) только один из концов ребра принадлежит некоторому фрагменту. Ребро включается в остов, присоединясь к этому фрагменту;
в) концы ребра принадлежат разным фрагментам. При включении ребра в остов происходит объединение этих фрагментов. "Новый" фрагмент получает меньший из номеров объединяемых фрагментов;
г) концы ребра принадлежат одному фрагменту. Ребро нельзя включать в остов, так как это приводит к появлению цикла.

Построение остова завершится после присоединения к нему $n-1$ ребер. К этому моменту все фрагменты объединятся в один. Если же этого не происходит, хотя все m ребер графа просмотрены, а остов содержит менее чем $n-1$ ребер, то это значит, что граф несвязный.

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти кратчайший остов графа G с матрицей весов $\mathbf{C}$, показанных на рис. 3.10. Элемент $c_{i,j}=\infty$, если вершины v_i и v_j не связаны ребром.



$$\mathbf{C}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} \infty & 34 & \infty & 7 & 2 & 38 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 34 & \infty & 5 & \infty & 30 & \infty & 22 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 25 & 17 & \infty & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 13 & 23 & \infty \\ 2 & 30 & \infty & 3 & \infty & 20 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 38 & \infty & 25 & \infty & 20 & \infty & \infty & \infty & 14 & 14 \\ \infty & 22 & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 35 \\ \infty & \infty & \infty & 13 & 10 & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & 14 & \infty & 23 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 14 & 35 & \infty & 8 & \infty \end{array}\right] \end{array}$$

Рис. 3.10

Создаем упорядоченный список ребер в виде табл. 3.3, где столбцы $e\,,a\,,b\,,l_{ab}$ содержат соответственно номера, метки концов и длины ребер. Два последних столбца заполняются в процессе построения кратчайшего остова. В столбце T_i отражается процесс создания, изменения и объединения фрагментов остова, а в столбце VT_i фиксируются множества вершин, принадлежащих различным фрагментам остова.

В соответствии с алгоритмом формируем первый фрагмент T_1 из ребра $e_1=\{v_1, v_5\}$ (см. столбец T_i). Множество вершин, относящихся к T_1, фиксируем в первой строке столбца VT_i. Ребро $e_2=\{v_4, v_5\}$ имеет общий элемент с множеством VT_1. Поэтому присоединим его к фрагменту T_1, корректируя множество VT_1, которое теперь содержит v_1, v_4, v_5. Концы третьего ребра не принадлежат множеству VT_1, поэтому создаем второй фрагмент T_2 на основе третьего ребра. Для него $VT_2 = \{v_2, v_3\}$. Четвертое ребро пропускаем, так как обе его вершины являются элементами VT_1, а пятое ребро дает начало третьему фрагменту, и т. д. Процесс построения остова завершается на пятнадцатом ребре, которое объединяет два оставшиеся фрагмента. На рис. 3.11 представлены шесть из пятнадцати этапов построения остова. Число в верхнем левом углу каждой "картинки" соответствует табличному номеру анализируемого ребра (номеру итерации).

Таблица 3.3

e	a	b	l_{ab}	T_i	VT_i
1	v_1	v_5	2	$T_1 := \{v_1, v_5\}$	$\{v_1, v_5\}$
2	v_4	v_5	3	$T_1 := T_1 + \{v_4, v_5\}$	$\{v_1, v_4, v_5\}$
3	v_2	v_3	5	$T_2 := \{v_2, v_3\}$	$\{v_2, v_3\}$
4	v_1	v_4	7	—	—
5	v_9	v_{10}	8	$T_3 := \{v_9, v_{10}\}$	$\{v_9, v_{10}\}$
6	v_5	v_8	10	$T_1 := T_1 + \{v_5, v_8\}$	$\{v_1, v_4, v_5, v_8\}$
7	v_4	v_8	13	—	—
8	v_6	v_{10}	14	$T_3 := T_3 + \{v_6, v_{10}\}$	$\{v_6, v_9, v_{10}\}$
9	v_6	v_9	14	—	—
10	v_3	v_7	17	$T_2 := T_2 + \{v_3, v_7\}$	$\{v_2, v_3, v_7\}$
11	v_5	v_6	20	$T_1 := T_1 + T_3;\ T_3$	$\{v_1, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}\}$
12	v_2	v_7	22	—	—
13	v_8	v_9	23	—	—
14	v_4	v_9	23	—	—
15	v_6	v_3	25	$T_1 := T_1 + T_2;\ T_2$	$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$
...	...	...	...	...	...

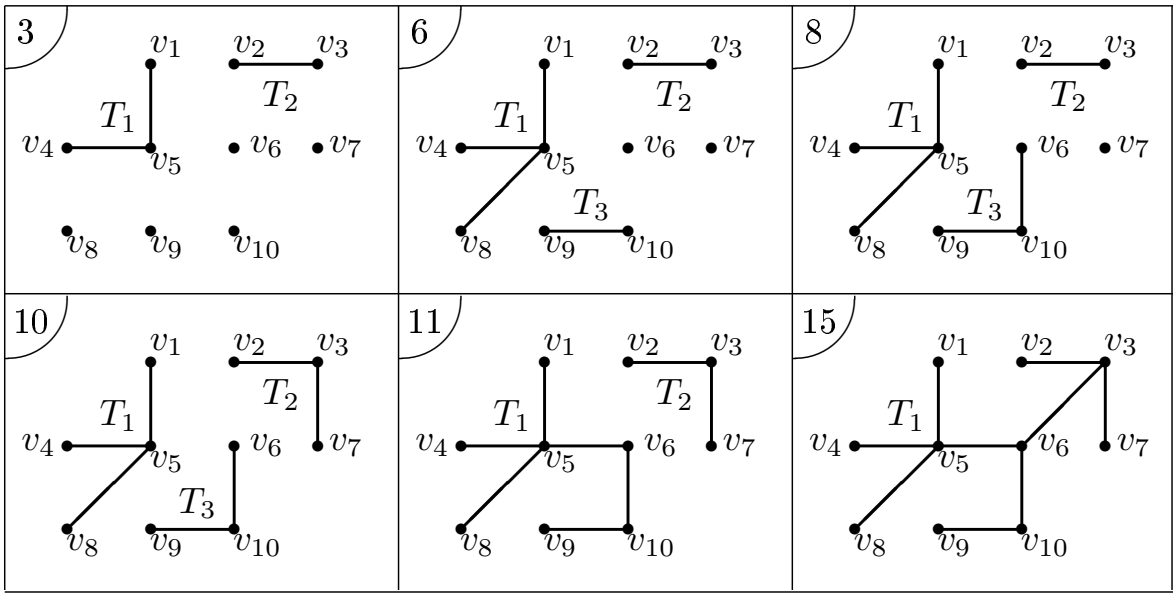


Рис. 3.11

Обоснование алгоритма. Пусть T_K – остовное дерево, полученное с помощью алгоритма Краскала, а T_S – кратчайший остов. Составим упорядоченный список ребер графа, отобразив вхождение или невхождение ребра в T_K и T_S знаком $+$ или $-$, как показано на рис. 3.12. Предположим, что у ребер с e_1 по e_{i-1} включительно знаки для T_K и T_S иден-

T_K	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$\ldots$	$+$	$\ldots$	$-$	$\ldots$
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	$\ldots$	e_i	$\ldots$	e_k	$\ldots$
T_S	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$\ldots$	$-$	$\ldots$	$+$	$\ldots$

Рис. 3.12

тичны, а первое несовпадение имеет место для e_i. Характер несовпадения может быть $\pm e_i$ или $\mp e_i$. Верхний знак соответствует вхождению (или невхождению) ребра e_i в T_K, а нижний — в T_S. Допустим, что сочетание знаков имеет вид $\mp e_i$. Это значит, что ребро e_i входит в T_S и не входит в T_K. Поскольку в соответствии с алгоритмом Краскала очередное ребро пропускается, если оно образует цикл с предшествующими ребрами, среди ребер T_S его также быть не может. Таким образом, единственно возможным сочетанием знаков (при *первом* несовпадении) может быть $\pm e_i$, т. е. ребро e_i присутствует в T_K и отсутствует в T_S. Пусть концами этого ребра являются вершины a и b. Поскольку T_S является деревом, в нем должна существовать единственная цепь, соединяющая a и b. Среди звеньев этой цепи имеется, по крайней мере, одно ребро, не входящее в T_K (в противном случае в T_K есть цикл, что невозможно). Обозначим это ребро e_k. В последовательности упорядоченных ребер e_k может находиться только "справа" от e_i, а это значит, что длина e_i не больше, чем длина e_k. Перестроим T_S, удалив из него e_k и включив e_i. В силу порядка следования ребер эта перестройка не может удлинить остов, а более короткий чем T_S остов получить невозможно. Это значит, что e_i и e_k имеют одинаковую длину. В результате перестройки вместо T_S получен остов T'_S, также являющийся кратчайшим, в котором

больше ребер, совпадающих с ребрами T_K. Повторяя описанную процедуру для T_K и T'_S, затем для T_K и T''_S и т. д., получаем конечную последовательность кратчайших остовов, сходящуюся к T_K.

Формализованная запись алгоритма. Введем следующие обозначения:

$1, 2, \ldots, n$ — числовые метки вершин графа;

i — счетчик ребер графа;

k — счетчик ребер остова;

E — список ребер графа, упорядоченных по длине. Каждая строка списка состоит из пары $e_{i,1}$ и $e_{i,2}$, являющихся числовыми метками концов i-го ребра;

t — номер фрагмента остова;

S — список принадлежности вершин графа фрагментам остова. Значение s_j равно номеру фрагмента, которому на текущей итерации принадлежит вершина j. Первоначально все элементы списка равны нулю. По завершении работы алгоритма все элементы S равны единице. Для рассмотренного выше примера динамика изменения списка отражена в табл. 3.4. На итерациях $4, 7, 9, 12-14$ состояние списка не меняет ся, так как соответствующие ребра не могут быть включены в остов.

Таблица 3.4

Итерация (ребро)	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	Фрагменты остова
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	—
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$T_1{:=}\{1;5\}$
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	$T_1{:=}T_1+\{4;5\}$
3	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0	$T_2{:=}\{2;3\}$
5	1	2	2	1	1	0	0	0	3	3	$T_3{:=}\{9;10\}$
6	1	2	2	1	1	0	0	1	3	3	$T_1{:=}T_1+\{5;8\}$
8	1	2	2	1	1	3	0	1	3	3	$T_3{:=}T_3+\{6;10\}$
10	1	2	2	1	1	3	2	1	1	1	$T_2{:=}T_2+\{3;7\}$
11	1	2	2	1	1	1	2	1	1	1	$T_1{:=}T_1+T_3;T_3$
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$T_1{:=}T_1+T_2;T_2$

С использованием введенных обозначений запись алгоритма принимает вид:

```
begin                    { – К Р А С К А Л – }
  i := 1; t := 1; k := 1; { Формировать первый фрагмент остова }
  s_{e1,1} := t;  s_{e1,2} := t;     { на основе кратчайшего ребра графа }
  output(i);                         { и напечатать номер ребра. }
  while (k<(n–1)) & (i<m) do
  {
    i := i+1;                        { Перейти к следующему ребру. }
    if (s_{ei,1}=0) & (s_{ei,2}=0)   { Если ребро не имеет общих }
                                     { вершин ни с одним из фрагментов, }
    then {
      k := k+1;                      { включить ребро в остов, }
      t := t+1;                      { создав }
      s_{ei,2} := t; s_{ei,1} := t;  { новый фрагмент, }
      output(i);                     { и напечатать номер ребра. }
    }
    else
    if (s_{ei,1}=0) & (s_{ei,2}≠0)   { Если ребро имеет общую }
                                     { вершину с одним из фрагментов, то }
    then {
      k := k+1;                      { включить ребро в остов, }
      s_{si,1} := s_{ei,2};          { присоединив его к фрагменту, }
      output(i);                     { и напечатать номер ребра. }
    }
    else
    if (s_{ei,1}≠0) & (s_{si,2}=0)   { Если ребро имеет общую }
                                     { вершину с одним из фрагментов, то }
    then {
      k := k+1;                      { включить ребро в остов, }
      s_{ei,2} := s_{ei,1};          { присоединив его к фрагменту, }
      output(i);                     { и напечатать номер ребра. }
    }
    else
    if (s_{ei,1}≠0) & (s_{ei,2}≠0) & (s_{ei,1}≠s_{ei,2}) { Если концы ребра }
                                     { принадлежат разным фрагментам, }
    then {
      k := k+1;                      { включить ребро в остов, }
      for j := 1 to n do             { объединив фрагменты }
        { if s_j=max(s_{ei,1}, s_{ei,2})   { под меньшим }
          then s_j := min(s_{ei,1}, s_{ei,2}); { номером, }
      output(i);                     { и напечатать номер ребра. }
    }
    else   { Концы ребра принадлежат одному фрагменту }
                                     { Не включать ребро в остов. }
  }
  if k = (n – 1)
  then output('Получено кратчайшее остовное дерево.')
  else output('Получен кратчайший остовный лес.')
end.                     { – К Р А С К А Л – }
```

Оценим трудоемкость приведенного варианта реализации алгоритма Краскала применительно к (n, m)-графу.

В худшем случае (самое длинное ребро принадлежит кратчайшему остову) внешний цикл перебора ребер графа должен повториться $m-1$ раз. Кроме того, в тех случаях, когда включение ребра приводит к объединению двух фрагментов будущего остова, должна быть выполнена процедура объединения множеств их вершин. Число повторений соответствующего цикла равно n. Учитывая все это, можно утверждать, что трудоемкость алгоритма не хуже чем $O(mn)$. Это весьма завышенная оценка, поскольку далеко не всегда ребро с максимальным весом входит в остов, и совсем не обязательно, что включение очередного ребра должно приводить к слиянию некоторой пары фрагментов.

В заключение отметим, что алгоритм предполагает упорядоченность списка ребер, а это, в свою очередь, требует выполнения еще порядка $O(m \log_2 m)$ операций. При достаточно большом m именно эта составляющая процесса получения кратчайшего остова может оказаться основной в общем балансе трудоемкости.

3.4.2. Алгоритм Прима

Описание алгоритма. В отличие от алгоритма Краскала, алгоритм Прима обеспечивает построение остова графа $G(V, E)$, заданного списком ребер, путем наращивания единственного древовидного фрагмента $T(VT, ET)$, который вначале вообще не имеет ребер и состоит из одной произвольно выбранной вершины графа. На каждой итерации к фрагменту добавляется самое короткое ребро из числа ребер, у которых одна из концовых вершин v_i уже включена в строящийся остов, а другая v_j еще нет, т. е. $ET_k{:=}ET_{k-1}{+}\{v_i, v_j\}$ и $VT_k{:=}VT_{k-1}{+}v_j$, где $v_i{\in}VT_{k-1}$, $v_j{\notin}VT_{k-1}$, а $c_{i,j}$ минимально. Процесс заканчивается после присоединения к T $n-1$ ребер. Таким образом, при выполнении алгоритма формируется последовательность деревьев: $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$, где $T_0{=}\langle\{v\}, \emptyset\rangle$, а T_{n-1} — кратчайший остов. Если список упорядочен по воз-

растанию весов ребер, то включению в остов на очередной итерации подлежит первое от начала списка ребро $\{v_i, v_j\}$, отвечающее указанному выше условию.

Построение остова для графа, изображенного на рис. 3.10, иллюстрирует табл. 3.5, аналогичная табл. 3.3.

Таблица 3.5

e	a	b	l_{ab}	T_i	VT_i	i
				$T_0{=}\langle\{v_1\},\emptyset\rangle$	$\{v_1\}$	
1	v_1	v_5	2	$T_1 := T_0 + \{v_1, v_5\}$	$\{v_1, v_5\}$	1
2	v_4	v_5	3	$T_2 := T_1 + \{v_4, v_5\}$	$\{v_1, v_4, v_5\}$	2
3	v_2	v_3	5	$T_8 := T_7 + \{v_2, v_3\}$	$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}\}$	8
4	v_1	v_4	7	—	—	
5	v_9	v_{10}	8	$T_6 := T_5 + \{v_9, v_{10}\}$	$\{v_1, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}\}$	6
6	v_5	v_8	10	$T_3 := T_2 + \{v_5, v_8\}$	$\{v_1, v_4, v_5, v_8\}$	3
7	v_4	v_8	13	—	—	
8	v_6	v_{10}	14	$T_5 := T_4 + \{v_6, v_{10}\}$	$\{v_1, v_4, v_5, v_6, v_8, v_{10}\}$	5
9	v_6	v_9	14	—	—	
10	v_3	v_7	17	$T_9 := T_8 + \{v_3, v_7\}$	$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$	9
11	v_5	v_6	20	$T_4 := T_3 + \{v_5, v_6\}$	$\{v_1, v_4, v_5, v_6, v_8\}$	4
12	v_2	v_7	22	—	—	
13	v_8	v_9	23	—	—	
14	v_4	v_9	23	—	—	
15	v_6	v_3	25	$T_7 := T_6 + \{v_3, v_6\}$;	$\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_{10}\}$	7
...	...	...	...	...	...	

Здесь содержимое столбца T_i показывает, как растет единственный древовидный фрагмент формируемого остова, столбец VT_i отражает рост множества вершин, принадлежащих этому фрагменту, а номер итерации, на которой ребро включается в остов, указан в столбце i.

Пусть начальный фрагмент состоит из вершины v_1. Анализ первого ребра списка показывает, что оно отвечает условию включения в остов. Полученное дерево имеет две вершины v_1 и v_5. Проверяя второе ребро, убеждаемся, что его также следует включить в остов. Новый фрагмент содержит

уже три вершины VT_2=$\{v_1, v_4, v_5\}$. Третье ребро пока пропускаем, так как ни v_2 ни v_3 не принадлежат VT_2. То же самое можно сказать и о пятом ребре. Оба конца четвертого ребра, наоборот, принадлежат VT_2, значит, его включение приведет к появлению цикла, что недопустимо. И только шестое ребро отвечает условию на включение. Таким образом, после третьей итерации получаем дерево T_3, состоящее из трех ребер, т. е. ET_3=$\{\{v_1, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_8\}\}$. На четвертой итерации к дереву добавляется одиннадцатое ребро, на пятой — восьмое и т. д. Построение остова завершается на девятой итерации присоединением десятого ребра. На рис. 3.13 представлены

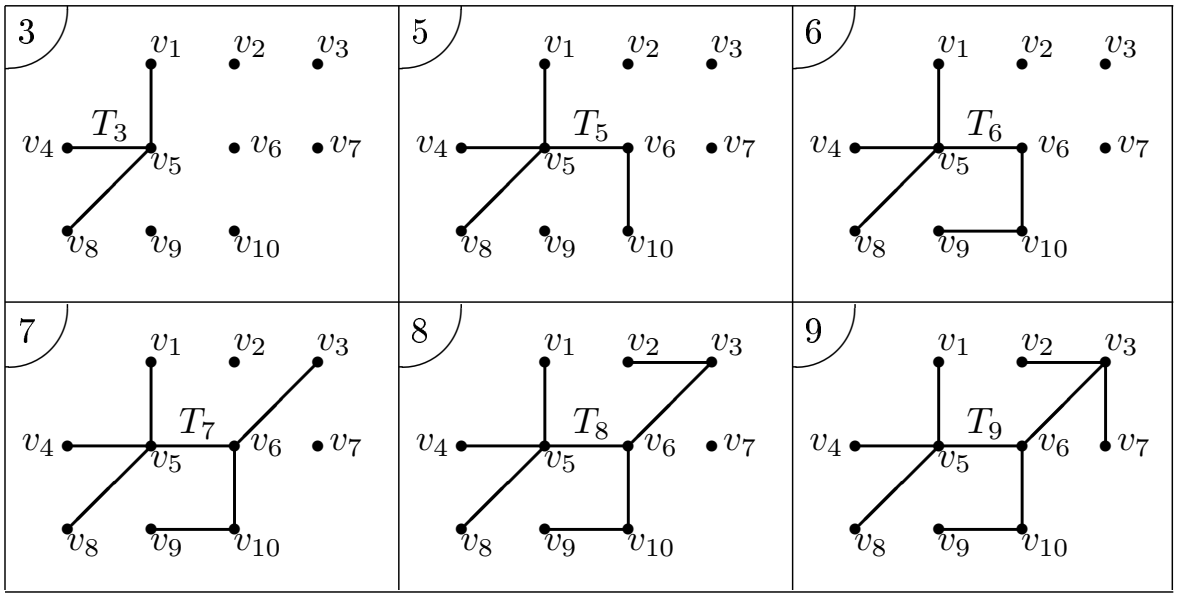


Рис. 3.13

отдельные этапы описанного процесса. Число в верхнем углу каждого прямоугольника соответствует итерации, на которой получен изображенный фрагмент.

Формализованная запись алгоритма. Введем следующие обозначения:

$1, 2, \ldots, n$ – метки вершины графа;

i – счетчик ребер графа;

k – счетчик вершин графа и счетчик итераций;

E – список ребер графа, упорядоченных по длине. Каждая строка списка состоит из пары $e_{i,1}$ и $e_{i,2}$, являющихся метками концов i-го ребра;

S – список принадлежности вершин графа формируемому фрагменту остова. Если к текущей итерации вершина j уже включена в остов, то s_j=1, иначе s_j=.0 Первоначально все элементы списка равны нулю, кроме элемента, соответствующего начальной вершине. По завершении работы алгоритма все элементы S равны единице. Для рассмотренного выше примера динамика изменения списка отражена в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Итерация (ребро)	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	Фрагменты остова
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_0=$\langle\{v_1\},\emptyset\rangle$
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	T_1:=$T_0+\{1;5\}$
2	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	T_2:=$T_1+\{4;5\}$
3	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	T_3:=$T_2+\{5;8\}$
4	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	T_4:=$T_3+\{5;6\}$
5	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	T_5:=$T_4+\{6;9\}$
6	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	T_6:=$T_5+\{3;6\}$
7	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	T_7:=$T_6+\{3;2\}$
8	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	T_8:=$T_7+\{2;3\}$
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	T_9:=$T_8+\{3;7\}$

С использованием введенных обозначений запись алгоритма принимает вид:

begin { – П Р И М – }
  for $k := 1$ **to** n **do** $s_k := 0$; { Инициализация списка S }
  $s_1 := 1$; { Начать построение остова с вершины v_1 }
  for $k := 1$ **to** $n-1$ **do** { Цикл формирования остова }
  $i := 1$;
  while $s_{e_{i,1}}$=$s_{e_{i,2}}$**do** $i := i+1$; { Поиск включаемого ребра. }
  $s_{e_{i,1}}$:=1; $s_{e_{i,2}}$:=1; {Ребро найдено, включить его в остов }
  output(i); { и напечатать номер. }
end. { – П Р И М – }

Оценивая, как и ранее, по максимуму трудоемкость этого варианта алгоритма Прима, убеждаемся, что ее порядок равен $O(nm)$ без учета трудоемкости сортировки списка ребер.

Рассмотрим еще один вариант реализации алгоритма, основанный на технике пометок вершин, не требующий предварительной сортировки ребер и использующий матрицу весов $\mathbf{C}$. Покажем эту технику на примере графа, изображенного на рис. 3.10. Матрица весов этого графа имеет вид:

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} \infty & 34 & \infty & 7 & 2 & 38 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 34 & \infty & 5 & \infty & 30 & \infty & 22 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & 25 & 17 & \infty & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty & \infty & 13 & 23 & \infty \\ 2 & 30 & \infty & 3 & \infty & 20 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ 38 & \infty & 25 & \infty & 20 & \infty & \infty & \infty & 14 & 14 \\ \infty & 22 & 17 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 35 \\ \infty & \infty & \infty & 13 & 10 & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & 14 & \infty & 23 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 14 & 35 & \infty & 8 & \infty \end{array}\right] \end{array}.$$

Процесс получения остова отображен в табл. 3.7. Столбцы таблицы содержат числовые пометки (вре́менные и постоянные), присваиваемые вершинам при выполнении алгоритма.

Таблица 3.7

Итерации	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	p
1		34	∞	7	**2**	38	∞	∞	∞	∞	v_1
2		30	∞	**3**		20	∞	10	∞	∞	v_5
3		30	∞			20	∞	**10**	23	∞	v_4
4		30	∞			**20**	∞		23	∞	v_8
5		30	25				∞		**14**	14	v_6
6		30	25				∞			**8**	v_9
7		30	**25**				35				v_{10}
8		**5**					17				v_3
9							**17**				v_2
pred		$\not{v}_1$ $\not{v}_5$ v_3	$\not{v}_1$ v_6	$\not{v}_1$ v_5	v_1	$\not{v}_1$ v_5	$\not{v}_1$ $\not{v}_{10}$ v_3	$\not{v}_1$ v_5	$\not{v}_1$ $\not{v}_4$ v_6	$\not{v}_1$ $\not{v}_6$ v_9	

Значение пометки любой вершины v_i, еще не включенной в остов, равно длине ребра, связывающего v_i с ближайшей вершиной, уже вошедшей в остов. На каждой итерации в остов

включается вершина с минимальной временной пометкой, которая в дальнейшем уже не меняется (в таблице выделена шрифтом). Сама вершина считается постоянно помеченной и фиксируется в столбце p таблицы. После этого производится пересчет временных пометок всех вершин, соседних с последней постоянно помеченной вершиной, по формуле:

$$l(v_i) = \min[l(v_i), c_{p,i}],$$

где $l(v_i)$ — пометка вершины v_i; p — последняя постоянно помеченная вершина. Если $l(v_i)$ меняет значение (уменьшается), следует скорректировать содержимое строки $pred$ в столбце v_i, заменив прежнее значение на значение p.

Пусть T_0 состоит из единственной вершины v_1. Рассматривая на первой итерации v_1 как последню постоянно помеченную, заносим ее в столбец p первой строки. Используя матрицу $\mathbf{C}$, присваиваем всем остальным вершинам временные пометки $l(v_i)$=$c_{1,i}$. Говорят, что вершины получили свои пометки из v_1. Фиксируем это в последней строке таблицы — строке "вершин-предшественниц", обозначенной как $pred$. Затем отыскиваем минимальную временную пометку. В нашем примере это пометка вершины v_5, равная 2. Далее считаем найденную пометку постоянной, а вершину v_5 постоянно помеченной, записываем ее в столбец p и включаем в формируемый остов ребро $\{v_5, v_1\}$. Отметим, что вес включаемого ребра равен значению найденной пометки.

На следующей итерации пересчитываем временные пометки по формуле $l(v_i)$= $\min[l(v_i), c_{5,i}]$. При этом, если значение пометки $l(v_i)$ меняется (уменьшается), корректируем и значение в последней строке столбца v_i, заменяя его текущим значением p=v_5. Поскольку изменяются $l(v_2), l(v_4), l(v_6)$ и $l(v_8)$, следует скорректировать содержимое 2, 4, 6 и 8 столбцов последней строки, заменив его на v_5. Вновь отыскиваем минимальную временную пометку. Теперь это $l(v_4)$=3, которая становится постоянной. Соответственно последней постоянно помеченной вершиной p становится v_4, а в остов включается ребро $\{v_4, v_5\}$.

На третьей итерации после пересчета временных пометок, причем изменяется только пометка $l(v_9)$, минимальной оказывается пометка вершины v_8, и в остов включается ребро $\{v_8, v_5\}$. Вторая вершина реберной пары берется из последней строки восьмого столбца.

На четвертой итерации (значения всех пометок сохраняются) минимальной оказывается пометка $l(v_6)$=20, на пятой (изменяются $l(v_3)$ и $l(v_9)$) минимальна $l(v_9)$=14 и т. д. Процесс завершается на девятой итерации после того, как все вершины получают постоянные пометки (см. табл. 3.6).

В итоге получаем список ребер, образующих кратчайший остов: $\{v_2, v_3\}$,$\{v_3, v_6\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_1\}$,$\{v_6, v_5\}$,$\{v_7, v_3\}$,$\{v_8, v_5\}$, $\{v_9, v_6\}$,$\{v_{10}, v_9\}$. Первая вершина пары берется из заголовка столбца, а вторая из последней строки того же столбца. Результат полностью соответствует остову на рис. 3.13(9). Длина найденного остова равна сумме всех постоянных пометок, которые, как легко проверить, равны весам ребер, вошедших в остов.

Строка вершин-предшественниц $pred$ может быть сформирована и после того, как все вершины получат постоянные пометки. Для этого достаточно в каждом столбце таблицы найти самую верхнюю строчку с минимальной пометкой. Значение $pred_i$ содержится в столбце p этой строки.

В заключение отметим, что трудоемкость рассмотренного варианта реализации алгоритма Прима имеет порядок $O(n^2)$. Действительно, число итераций внешнего цикла равно $n-1$ причем на каждой итерации следует обработать строку матрицы $\mathbf{C}$.

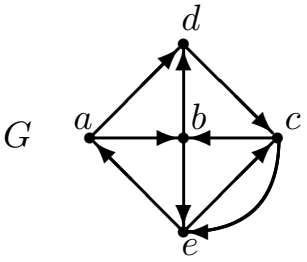
4. Пути и маршруты в графах

Существует большое разнообразие задач, связанных с путями и маршрутами в графе, начиная от стандартных задач на существование, пересчет и перечисление и кончая задачами поиска путей, отвечающих определенным требованиям. Такими требованиями могут быть: требования максимальности (минимальности) длины, пропускной способности или надежности пути; требования к множеству вершин (ребер), принадлежащих (не принадлежащих) пути, и т. п. При этом сами графы могут иметь различные свойства, например, быть или не быть ориентированными, циклическими, взвешенными и т. д. Наконец, один и тот же граф может быть описан по-разному. Поэтому даже одна и та же задача для различных по своим характеристикам и способу описания графов может решаться по-разному.

4.1. Существование путей

Эта задача эквивалентна задаче на достижимость в орграфе, решение которой рассмотрено в разд. 2. Действительно, матрица достижимости полностью определяет наличие или отсутствие пути для любой упорядоченной пары вершин. Поэтому ограничимся примером.

На рис. 4.1 изображены граф G и его матрица достижимости $\mathbf{R}$, полученная одним из ранее рссмотренных способов.



$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Рис. 4.1

Простая проверка убеждает, что для любой пары вершин в графе имеется хотя бы один путь. Именно это и следует из приведенной матрицы, поскольку все ее элементы равны 1.

4.2. Пересчет маршрутов и путей

Пусть $\Gamma(v_i)$ — множество вершин, являющихся концами дуг, выходящих из v_i, а $\Gamma^{-1}(v_j)$ — множество вершин, являющихся началами дуг, входящих в v_j. Тогда пересечение $\Gamma(v_i)\cap\Gamma^{-1}(v_j)$ представляет собой множество промежуточных вершин, принадлежащих цепям длиной в две дуги между v_i и v_j, а $|\Gamma(v_i)\cap\Gamma^{-1}(v_j)|$ — число таких цепей. Поскольку единичные элементы i- строки матрицы смежности соответствуют элементам множества $\Gamma(v_i)$, а единичные элементы j- столбца этой матрицы — элементам множества $\Gamma^{-1}(v_j)$, то $|\Gamma(v_i)\cap\Gamma^{-1}(v_j)|=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$. То же самое следует из анализа схем на рис. 4.2, где представлены все возможные комбинации

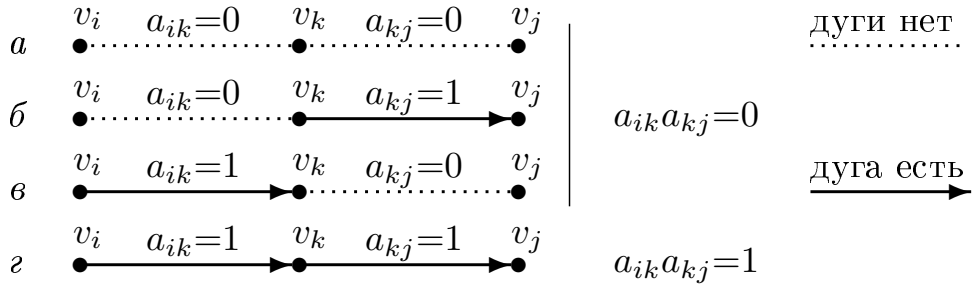


Рис 4.2

существования дуг, образующих цепь длины 2 из v_i в v_j с промежуточной вершиной v_k, а также значения соответствующих элементов a_{ik} и a_{kj} матрицы смежности. Если имеют место случаи *а*, *б* или *в*, цепь отсутствует и соответствующее слагаемое суммы $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ равно нулю. В случае *г* цепь существует, а произведение $a_{ik}a_{kj}=1$ и, следовательно, дает свой вклад в указанную сумму.

Таким образом, задача определения числа цепей (маршрутов) длины 2 между всеми парами вершин графа может быть решена простым возведением в квадрат его матрицы смежности. Аналогично, количество маршрутов длины 3 может быть получено из матрицы $\mathbf{A}^3$ и вообще количество маршрутов длины l между вершинами v_i и v_j равно элементу $a_{ij}^{(l)}$ матрицы $\mathbf{A}^l$. Наконец, количество маршрутов длины не более p

между всеми парами вершин определяется как сумма

$$\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^p=\sum_{l=1}^{p}\mathbf{A}^l.$$

В качестве примера приведем решение задачи пересчета маршрутов графа, изображенного на рис. 4.1 при l=1, 2, 3, 4. Информацию о путях в одну дугу несет матрица смежности $\mathbf{A}$, остальные три матрицы получаем простым умножением:

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}a&b&c&d&e\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}0&1&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&1&0&0\end{array}\right]\end{array},\quad \mathbf{A}^2=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}a&b&c&d&e\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}0&0&1&1&1\\1&0&2&0&0\\1&0&1&1&\underline{\mathbf{1}}\\0&1&0&0&1\\0&2&\underline{\mathbf{0}}&1&1\end{array}\right]\end{array},$$

$$\mathbf{A}^3=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}a&b&c&d&e\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}1&1&2&0&1\\0&3&0&1&2\\1&2&2&1&\underline{\mathbf{1}}\\1&0&1&1&1\\1&0&\underline{\mathbf{2}}&2&2\end{array}\right]\end{array},\quad \mathbf{A}^4=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}a&b&c&d&e\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccc}1&3&1&2&3\\2&0&3&3&3\\1&3&2&3&\underline{\mathbf{4}}\\1&2&2&1&1\\2&3&\underline{\mathbf{4}}&1&2\end{array}\right]\end{array}.$$

Непосредственной проверкой по изображению графа убеждаемся, что, например, между вершинами c и e есть
- 1 маршрут (путь) длины 2: (c,b,e);
- 1 маршрут длины 3: (c,e,c,e);
- 4 маршрута (цепи) длины 4: (c,b,e,c,e), (c,b,d,c,e), (c,e,a,b,e), (c,e,c,b,e);

а между e и c есть
- 2 маршрута длины 3: (e,c,e,c), (e,a,d,c) (путь);
- 4 маршрута длины 4: (e,c,b,e,c), (e,a,b,d,c) (путь), (e,a,b,e,c) (цепь), $(e,c,b,d,c$ (цепь).

Это полностью соответствует значениям элементов $a_{ce}^{(l)}$ и $a_{ec}^{(l)}$ (выделены шрифтом и подчеркнуты) матриц $\mathbf{A}^2,\mathbf{A}^3,\mathbf{A}^4$. К сожалению, определяется число маршрутов, связывающих пару вершин, а не число путей, которые представляют наибольший интерес. Количество путей можно определить, если найти все маршруты и отбросить те из них, где есть повторяющие-

ся фрагменты, т. е. необходимо решать задачу перечисления маршрутов. Прежде чем перейти к этой задаче, отметим два факта, касающихся задачи пересчета:

1. Отличные от нуля диагональные элементы матриц указывают на присутствие в графе соответствующего количества циклов длины l. Например, в матрице $\mathbf{A}^3$ диагональный элемент $a_{bb}^{(3)}=3$. Это значит, что в графе есть три цикла длины 3, включающие вершину b. Непосредственно по рис. 4.1 находим: (b,d,c,b), (b,e,c,b) и (b,e,a,b).

2. Поскольку длина пути в графе не может превышать $n-1$, не имеет смысла возводить $\mathbf{A}$ в более высокую степень.

4.3. Перечисление маршрутов и путей

Матричный подход, использованный в предыдущих разделах, легко адаптируется к задаче о перечислении маршрутов.

Пусть $\mathbf{P}^{(l)}$ — матрица всех маршрутов с l промежуточными вершинами (длины $l+1$), элементы которой определяются как $p_{ij}^{(l)}=\sum_{k=1}^{q} v_{k_1}v_{k_2}\ldots v_{k_l}$, где v_{k_l} это l-я по порядку промежуточная вершина маршрута, связывающего v_i и v_j, а q — количество таких маршрутов. Если маршрутов длины $l+1$ между v_i и v_j нет, то $p_{ij}^{(l)}=0$. Слагаемые $v_{k_1}v_{k_2}\ldots v_{k_l}$ представляют собой "произведения" вершин, лежащих на некотором маршруте между v_i и v_j. Их можно рассматривать как размещения без повторений или с повторениями из n элементов по l в зависимости от того, является маршрут путем или нет. Например, для графа на рис. 4.1 $p_{cd}^{(3)}=bea+eab+ecb$ и, значит, из v_i в v_j есть три маршрута: (c,b,e,a,d), (c,e,a,b,d) и (c,e,c,b,d), два из которых являются путями, так как не содержат повторяющихся вершин. В наличии указанных маршрутов легко убедиться непосредственно по графу, а их количество равно значению элемента $a_{cd}^{(4)}$ в матрице $\mathbf{A}^4$. Кроме $\mathbf{P}^{(l)}$, используем вспомогательную матрицу $\mathbf{P}'$, в которой элемент p'_{ij} равен v_j, если в графе есть дуга (v_i,v_j), и 0, если

дуга отсутствует. Поскольку j- столбец матрицы $\mathbf{P}^{(l-1)}$ отражает все маршруты длины l, с началом в v_k, где $k=\overline{1,n}$, и концом в v_j, а i- строка матрицы $\mathbf{P}'$ – концы всех дуг вида (v_i, v_k), где $k=\overline{1,n}$, то сумма $\sum_{k=1}^{n} p'_{ik} p_{kj}^{(l-1)}$ отражает все маршруты из v_i в v_j длины $l+1$. Следовательно, матрица маршрутов $\mathbf{P}^{(l)}$ может быть получена как $\mathbf{P}'\times\mathbf{P}^{(l-1)}$, при этом сомножители в произведениях не переупорядочиваются и не используется степенная запись повторяющихся сомножителей, чтобы не потерять информацию о порядке следования вершин. Таким образом может быть сформирован ряд матриц $\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \mathbf{P}^{(3)}, \ldots, \mathbf{P}^{(q-1)}$, в совокупности определяющих все маршруты длины $\leq q$ для любой пары вершин.

В качестве примера выполним расчеты для графа, представленного на рис. 4.1, используя соотношения:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}' \times \mathbf{P}^{(0)};\quad \mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}' \times \mathbf{P}^{(1)};\quad \mathbf{P}^{(3)} = \mathbf{P}' \times \mathbf{P}^{(2)},$$

где в качестве матрицы $\mathbf{P}^{(0)}$ (пути без промежуточных вершин) следует взять матрицу смежности графа $\mathbf{A}$. Матрица $\mathbf{P}'$ получается, если в матрице смежности единицы первого столбца заменить буквой a, единицы второго столбца — буквой b, третьего — буквой c и т. д. В результате имеем:

$$\mathbf{P}' = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e \\ 0 & b & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ a & 0 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{P}^{(0)} = \mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

После первого умножения получаем матрицу $\mathbf{P}^{(1)}$:

$$\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}'\times\mathbf{P}^{(0)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & d & b & b \\ e & 0 & d{+}e & 0 & 0 \\ e & 0 & e & b & b \\ 0 & c & 0 & 0 & c \\ 0 & a{+}c & 0 & a & c \end{bmatrix} \end{array},$$

после второго умножения — матрицу $\mathbf{P}^{(2)}$:

$$\mathbf{P}^{(2)}=\mathbf{P}'\times\mathbf{P}^{(1)}=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} be & dc & bd{+}be & 0 & dc \\ 0 & ea{+}dc{+}ec & 0 & ea & dc{+}ec \\ be & ea{+}ec & bd{+}be & ea & ec \\ ce & 0 & ce & cb & cb \\ ce & 0 & ad{+}ce & ab{+}cb & ab{+}cb \end{array}\right] \end{array}.$$

Наконец, матрица $\mathbf{P}^{(3)}=\mathbf{P}'\times\mathbf{P}^{(2)}$ принимает вид:

	a	b	c	d	e
a	dce	$bea{+}bdc{+}bec$	dce	$bea{+}dcb$	$dcb{+}bdc{+}bec$
b	$dce{+}ece$	0	$ead{+}dce{+}ece$	$eab{+}dcb{+}ecb$	$eab{+}dcb{+}ecb$
c	ece	$bea{+}bdc{+}bec$	$ead{+}ece$	$bea{+}eab{+}ecb$	$eab{+}ecb{+}$ $+bdc{+}bec$
d	cbe	$cea{+}cec$	$cbd{+}cbe$	cea	cec
e	$abe{+}cbe$	$cea{+}adc{+}cec$	$abd{+}cbd{+}$ $+abe{+}cbe$	cea	$adc{+}cec$

Как видно из примера, уже при небольших значениях l матрицы могут быть весьма громоздкими. Однако, если цель поиска – пути, объем вычислений можно существенно уменьшить, отбрасывая произведения с повторяющимися вершинами. Очевидно также, что в этом случае $l{\le}(n{-}2)$, так как путь в графе не может содержать более чем $n{-}2$ промежуточных вершин [10]. Кроме того, с увеличением длины количество путей в общем случае должно сокращаться.

4.4. Задачи о кратчайших путях

Большинство задач этого вида можно рассматривать как расширение, обобщение или модификацию следующей задачи.

В графе G с матрицей весов $\mathbf{C}=[c_{i,j}]$ требуется найти путь между заданной парой вершин s и t, у которого сумма

[10] В случае замкнутого пути (контура) $l=n-1$.

весов составляющих его дуг (ребер) минимальна. Здесь s и t являются соответственно начальной и конечной вершинами. Такое различие в обозначениях концевых вершин пути необходимо для орграфов, так как в этом случае, в отличие от простых графов, кратчайшие (s,t)- и (t,s)-пути различны.

Понятно, что любой участок кратчайшего пути сам является кратчайшим путем между парой его концевых вершин. Значит, если найден кратчайший (s,t)-путь, промежуточные вершины которого образуют множество V', то фактически решена задача отыскания кратчайших путей из s во все вершины V'. Поэтому представляется естественным следующее обобщение сформулированной выше задачи.

Найти кратчайшие пути между заданной начальной вершиной s и всеми остальными вершинами графа.

Наконец, в самой широкой постановке задача выглядит так: *найти кратчайшие пути между всеми вершинами графа.*

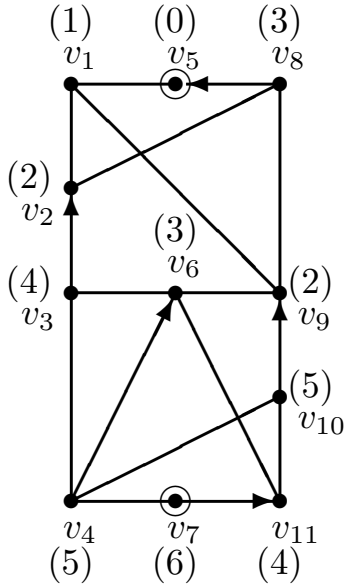
Нетрудно видеть, что определяющим в приведенных формулировках является количество пар концевых вершин, для которых следует найти кратчайший путь: в первой задаче это одна пара, во второй $n-1$ пар, а в третьей – C_n^2 пар (для простого графа) или $2C_n^2$ (для ориентированного).

Еще одна разновидность задачи возникает, когда для некоторой пары вершин кроме кратчайшего требуется найти еще $k-1$ путей, длины которых составляют неубывающую числовую последовательность $L_{\text{кр}_1} \le L_{\text{кр}_2} \le \ldots \le L_{\text{кр}_k}$. Эта задача известна как *задача поиска k кратчайших путей между двумя заданными вершинами.*

В общем случае элементы матрицы $\mathbf{C}$ могут быть разных знаков. Наличие отрицательных значений среди элементов $c_{i,j}$ усложняет решение задачи поиска кратчайших путей. Задача становится еще более сложной, если в графе присутствуют циклы с отрицательным суммарным весом. Наоборот, если выполняется так называемое "правило треугольника": $c_{i,j} \le c_{i,k} + c_{k,j}$, то задача становится существенно проще и фактически может рассматриваться как задача поиска кратчайшего пути в графе с ребрами (дугами) единичной длины.

4.4.1. Графы с дугами единичной длины

Рассмотрим случай, когда веса всех дуг (ребер) графа одинаковы. Не нарушая общности, можно считать, что для любой дуги (ребра) $c_{i,j}$=1. Эффективное решение задачи получается с помощью простой процедуры, в результате которой каждая обработанная вершина получает пометку, равную расстоянию от s. Процесс начинается с того, что все $v\in\Gamma(s)$ получают пометку, равную единице. На второй итерации все $v\in\Gamma^2(s)$ помечаются двойкой, затем все $v\in\Gamma^3(s)$ помечаются тройкой, и вообще на i итерации для всех $v\in\Gamma^i(s)$ имеем $l(v)=i$. Процесс завершается, когда помеченной оказывается вершина t. Описанная процедура расстановки пометок называется *поиском в ширину*. Рассмотрим реализацию такого вида поиска на примере. Пусть требуется найти кратчайший путь между вершинами v_5 и v_7 в графе, представленном на рис. 4.3,*а*.



а

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
v_1		1			1				1		
v_2	1							1			
v_3		1		1		1					
v_4			1			1	1			1	
v_5	1										
v_6			1						1		1
v_7				1							1
v_8		1			1				1		
v_9	1					1		1			
v_{10}				1					1		1
v_{11}						1				1	
$l(v_i)$	1	2	4	5	0	3	6	3	2	5	4

б

Рис. 4.3

Для расчетов используем матрицу смежности графа, дополнив ее строкой $l(v_i)$ для пометок вершин, как показано на рис. 4.3,*б*. Сразу пометим вершину v_5 нулевым значением. На первой итерации, просматривая пятую строку матрицы, находим единицу в первом столбце. Следовательно, пометка первой вершины $l(v_1)$=1. На второй итерации просмат-

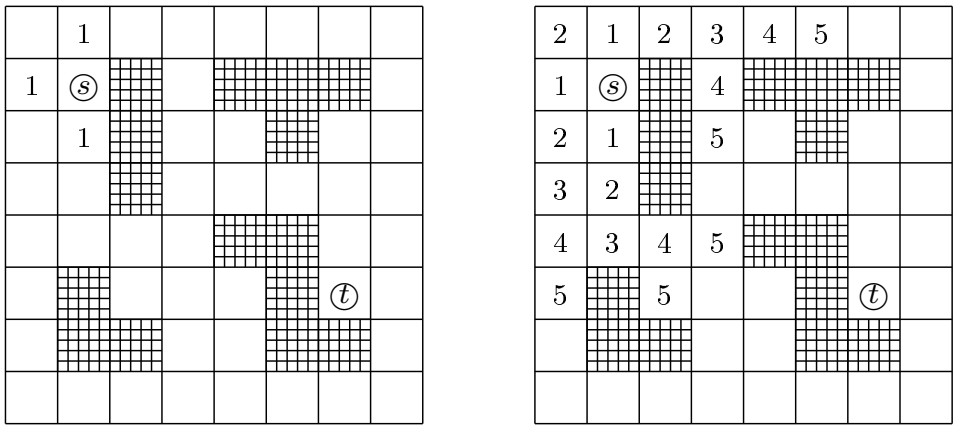
риваем первую строку матрицы. Здесь единицы содержатся во втором, пятом и девятом столбцах. Пятая вершина уже помечена, поэтому помечаем только v_2 и v_9, записывая во вспомогательной строке двойки в соответствующих столбцах. На третьей итерации анализируем вторую и девятую строки матрицы. В результате пометку 3 получают v_8 и v_6. Продолжая процесс, в итоге получаем совокупность пометок, как на рис. 4.3,*б*. Поскольку v_7 имеет пометку 6, длина искомого кратчайшего пути равна 6. Остается найти сам путь, т. е. множество составляющих его дуг (ребер), или что тоже самое, последовательность проходимых вершин.

Поиск начинаем с v_7. Будем переходить от вершины к вершине, так чтобы пометка каждый раз уменьшалась на единицу, пока не достигнем вершины v_5, причем обработку выполняем по столбцы матрицы. В седьмом столбце имеется только одна единица в четвертой строке. Значит, предпоследней вершиной пути является v_4 с пометкой 5. В четвертом столбце единицы находятся в третьей, седьмой и десятой строках. Соответствующие вершины имеют пометки $l(v_3)$=4, $l(v_7)$=6, $l(v_{10})$=5. Из них подходящей является только v_3. Это и есть третья от конца вершина пути. Содержимое третьего столбца указывает на вершины v_4 и v_6. По значению пометки ($l(v_4)$=5, $l(v_6)$=3) подходит только v_6. Действуя аналогичным образом, находим еще две промежуточные вершины пути v_9 и v_1. Окончательно получаем, что кратчайший путь из v_5 в v_7 проходит через вершины v_1, v_9, v_6, v_3, v_4.

Алгоритм Ли. В качестве примера применения поиска в ширину рассмотрим *задачу трассировки* печатных плат, являющихся составной частью любой современной электронной аппаратуры. Печатная плата — это тонкая (1,5–2мм) жесткая пластина из электроизоляционного материала, на которой устанавливаются интегральные схемы, транзисторы, диоды, конденсаторы и т. п. Электрическое соединение всех этих элементов осуществляется с помощью проводников, представляющих собой тончайшие узкие металлические полоски, нанесенные по определенной технологии на поверхность платы. Среди прочих оптимизационных задач при проектировании печатных плат важное место занимает задача отыскания

варианта размещения проводников, отвечающего ряду требований (отсутствие пересеченеий, ограничение максимальной длины проводников, минимальность их суммарной длины и т. п.), известная как задача трассировки. Многие практические алгоритмы решения этой задачи в своей основе имеют классический *алгоритм Ли*, названный так по имени автора и позволяющий найти кратчайший путь между двумя ячейками прямоугольной координатной сетки.

Пусть фрагмент некоторой печатной платы представлен сеткой, изображенной на рис. 4.4. Отдельные ячейки (на рисунке заштрихованы) заняты уже протрассированными проводниками и поэтому не могут использоваться. Необходимо

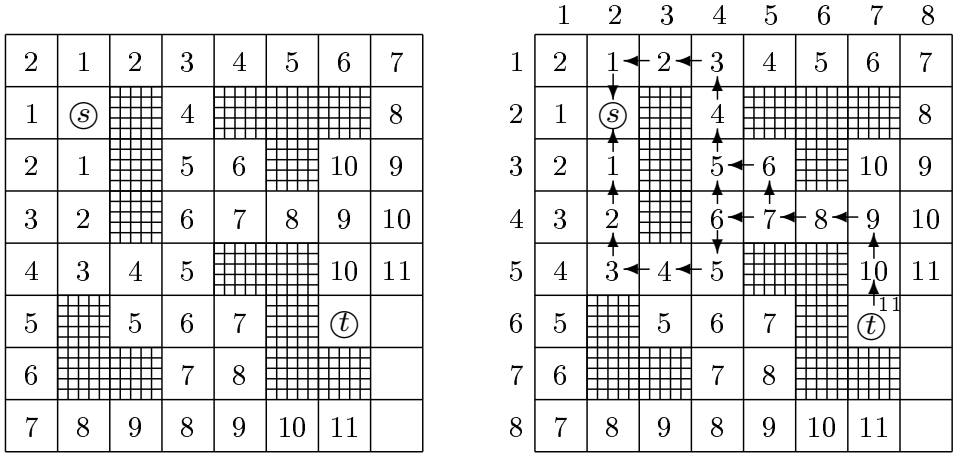


а *б*

Рис. 4.4

соединить ячейки s и t кратчайшей ломаной линией, задающей трассу будущего проводника и состоящей из горизонтальных и вертикальных отрезков, проходящих по свободным ячейкам сетки. Вначале все свободные ячейки пусты. Процесс начинается с того, что в свободные ячейки, смежные с s, записываются единицы, как показано на рис. 4.4,*а*. Далее в пустые ячейки, примыкающие к ячейкам с единицами, пишутся двойки. На третьей итерации оцифрованная область сетки обрамляется тройками, затем – четверками и т. д. После пятой итерации получаем разметку как на рис. 4.4,*б*. Смена разметки от итерации к итерации напоминает распространение волны, с той лишь разницей, что высота волнового фронта по

мере удаления от начальной точки s не убывает, а растет[11]. Процесс завершается, когда фронт достигает ячейки t. Соответствующая разметка приведена на рис. 4.5,*а*. Конфигурация



а *б*

Рис. 4.5

самой трассы для проводника выявляется при движении по ячейкам сетки, если, начиная с ячейки t, переходить к соседней с меньшим значением пометки, пока не будет достигнута ячейка s. Эта операция отображена на рис. 4.5,*б*, из которого получаем следующие варианты кратчайших путей из s в t:

$$\text{(s)}\text{–}(1;2)\text{–}(1;3)\text{–}(1;4)\text{–}(2;4)\text{–}(3;4)\text{–}\frac{(3,5)}{(4;4)}\text{–}(4;5)\text{–}(4;6)\text{–}(4;7)\text{–}(5;7)\text{–(t)};$$

$$\text{(s)}\text{–}(3;2)\text{–}(4;2)\text{–}(5;2)\text{–}(5;3)\text{–}(5;4)\text{–}(4;4)\text{–}(4;5)\text{–}(4;6)\text{–}(4;7)\text{–}(5;7)\text{–(t)},$$

где в круглых скобках указаны координаты ячеек в соответствии с нумерацией строк и столбцов сетки на рис. 4.5,*б*. Практически вариант, использующий клетку (3;5), не целесообразен, так как содержит больше углов и, значит, менее надежен.

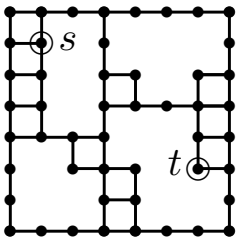


Рис. 4.6

В качестве дополнительной иллюстрации к рассмотренному примеру на рис. 4.6 изображен граф, соответствующий печатной плате: каждая свободная клетка представлена вершиной, а факт соседства клеток (по горизонтали и вертикали) отображен ребром.

[11] Поэтому алгоритм называют также *волновым*.

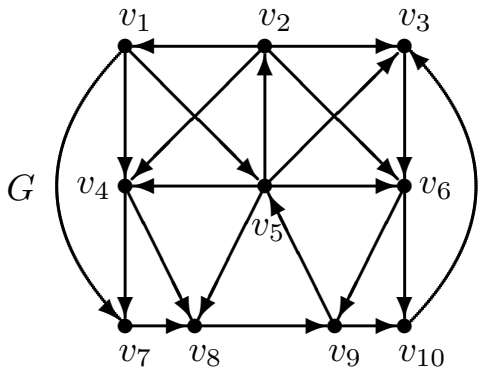
Пусть Fr_1 – множество клеток (вершин графа), образующих фронт волны на текущей итерации; Fr_2 – фронт волны на следующей итерации. Тогда формализованное описание алгоритма имеет вид:

```
begin    { – В О Л Н О В О Й   А Л Г О Р И Т М – }
  for v∈V do l(v):=∞ ; {Пометить все вершины как свободные}
  l(s) := 0 ;   Fr1 := adj s ; {Сформировать начальный фронт и}
  for v∈Fr1 do l(v) := 1 ; {пометить его вершины единицами.}
  while l(t)=∞ do  {Пока фронт волны не достиг вершины t }
    { Fr2 := ∅;
      for v∈Fr1 do    {для каждой вершины текущего фронта}
        { for w∈ adj v do   {проверить все соседние вершины}
            { if l(w)=∞          {и если найдется свободная}
              then
                { l(w) := l(v)+1;        {включить ее во вновь}
                  Fr2 := Fr2+{w};     {формируемый фронт.} } } }
      Fr1 := Fr2 }
end.     { – В О Л Н О В О Й   А Л Г О Р И Т М – }
```

4.4.2. Графы со взвешенными дугами (ребрами)

Кратчайшие пути и в этом случае можно находить с помощью волнового алгоритма. Пусть r — наибольший общий делитель весов ребер (дуг) графа G. Преобразуем граф, заменив каждое из ребер $\{v_i, v_j\}$ простой цепью, состоящей из $c_{i,j}/r$ ребер единичной длины. Ясно, что в полученном при этом графе G' полностью сохранятся метрические соотношения, характеризующие расстояния между вершинами графа G. Вместе с тем G' — это граф с ребрами (дугами) единичной длины, для которого задача решается по описанной выше схеме. Очевидный недостаток такого подхода — высокая трудоемкость из-за большой размерности графа G'. Действительно число вершин (и ребер) в последнем больше, чем в графе G на величину, равную $\frac{1}{r}\sum\limits_{\{v_i,v_j\}\in E} c_{i,j} - m$. Поэтому используют более эффективные алгоритмы решения задачи. Два из них — алгоритмы Дейкстры и Флойда рассмотрены ниже.

Алгоритм Дейкстры. Этот алгоритм позволяет найти кратчайший путь между некоторой вершиной s и остальными вершинами при условии, что в графе нет дуг (ребер) с отрицательным весом. Рассмотрим основную идею алгоритма на примере графа G матрицей весов[12] $\mathbf{C}$, представленных на рис. 4.7, взяв в качестве s вершину v_5.



$$\mathbf{C}=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} & & & 3 & 19 & & 11 & & & \\ 10 & & 7 & 19 & & 22 & & & & \\ & & & & & 13 & & & & \\ & & & & & & 5 & 3 & & \\ & 5 & 14 & 20 & & 29 & & 23 & & \\ & & & & & & & & 2 & 8 \\ & & & & & & & 4 & & \\ & & & & & & & & 8 & \\ & & & & 7 & & & & & 6 \\ & & 9 & & & & & & & \end{array}\right] \end{array}$$

Рис. 4.7

Выделим все вершины $v_i \in \Gamma(v_5)$ и припишем им числовые метки $l(v_i)$, равные весам дуг (v_5, v_i), как показано на рис. 4.8 (веса проставлены около дуг, а метки – около вершин и заключены в круглые скобки). Очевидно, что кратчайший путь до v_2 состоит из единственной дуги (v_5, v_2), а его длина $l(v_2)$=5. Зафиксируем эту вершину и будем считать ее метку постоянной. Таким образом, для v_2 задача решена. Относительно остальных четырех вершин можно лишь утверждать, что длины кратчайших путей до них не превосходят значений $l(v_i)$. Поэтому соответствующие метки пока считаем временными. В дальнейшем, чтобы различать постоянные и временные метки, постоянные будем заключать в рамку.

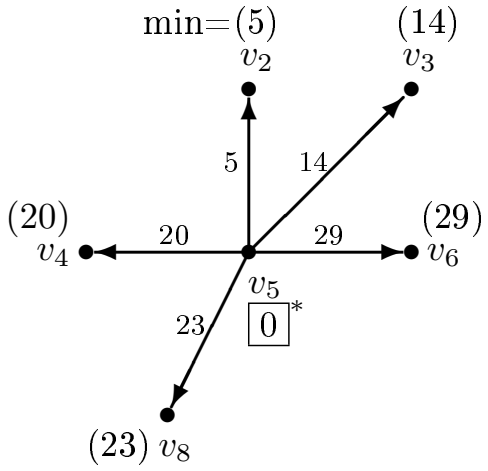


Рис. 4.8

[12]Пустые клетки в матрице означают, что соответствующих дуг в графе нет. Можно считать также, что дуги есть и каждая имеет вес ∞.

Выделим все вершины $v_i \in \Gamma(v_2)=\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ и рассмотрим дуги (v_2, v_i) (изображены на рис. 4.9 тонкими линиями). Поскольку $l(v_2)+c(v_2, v_3)<l(v_3)$, "обходной" путь (v_5, v_2, v_3) короче, чем "прямой" (v_2, v_3), поэтому за новое значение метки $l(v_3)$ примем сумму $l(v_2)+c(v_2, v_3)=12$. Аналогичной проверкой устанавливаем, что прямой путь (v_5, v_4) короче, чем обходной (v_5, v_2, v_4), следовательно, значение метки $l(v_4)$ сохраняется прежним. Для вершины v_6, как и для v_3, метка корректируется и принимает значение 27. Кроме вершин v_3, v_4 и v_6, достижимых из v_5 непосредственно, есть еще одна вершина v_1, единственный путь к которой лежит через постоянно помеченную v_2. Поэтому в качестве значения метки для нее естественно взять сумму $l(v_2)+c(v_2, v_1)$. Будем говорить, что теперь метки $l(v_1), l(v_3)$ и $l(v_6)$ получены из вершины v_2. Из пяти временных меток минимальной является $l(v_3)=12$, которая и определяет длину кратчайшего пути до v_3. Так как метка получена из v_2, путь имеет вид (v_5, v_2, v_3). Таким образом, задача решена и для v_3, которая становится постоянно помеченной. Этот факт отражен на рис. 4.10. Кроме уже рассмотренных дуг, изображена и единственная дуга, выходящая из v_3. Наличие этой дуги требует пересчета метки $l(v_6)$. Так как $l(v_3)+c(v_3, v_6)<27$, за новое значение $l(v_6)$ примем сумму $l(v_3)+c(v_3, v_6)=25$. Минимальной среди временных меток является $l(v_1)=15$. Это зна-

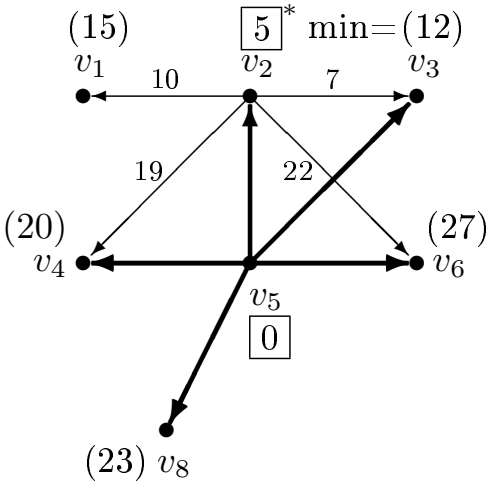


Рис. 4.9

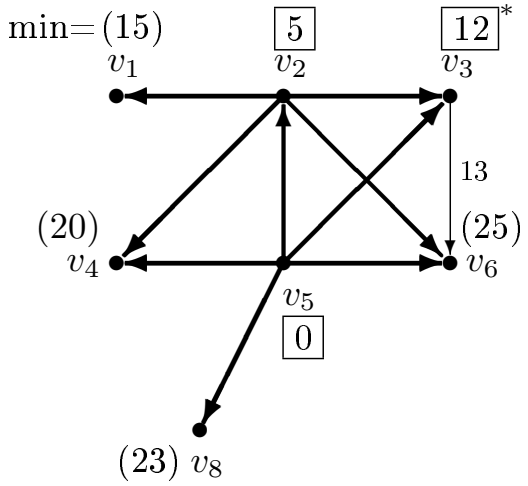


Рис. 4.10

чит, что выявлен кратчайший путь (v_5, v_2, v_1), а метка вершины v_1 становится постоянной. Последующие действия выполняются аналогично. Для v_1, как последней постоянно помеченной, находим множество вершин $\Gamma(v_1)=\{v_4, v_5, v_7\}$ и анализируем их метки, принимая во внимание длины дуг, связывающих v_1 с этими вершинами. Так как $l(v_1)+c(v_1, v_4)<l(v_4)$, метка вершины v_4 корректируется, становясь равной 18. У вершины v_5 метка постоянная и поэтому не меняется. Наконец, v_7, до этого не рассматривавшаяся, получает начальную метку, равную $l(v_1)+c(v_1, v_7)=25$. Граф, отражающий ситуацию, представлен на рис. 4.11. Здесь минимальной временной меткой оказывается $d(v_4)=18$. Теперь вершина v_4 становится постоянно помеченной. Так как свою метку она получила из v_1, кратчайший путь к ней состоит из кратчайшего пути до v_1 и дуги (v_1, v_4) и выглядит как (v_5, v_2, v_1, v_4), а его длина равна 18.

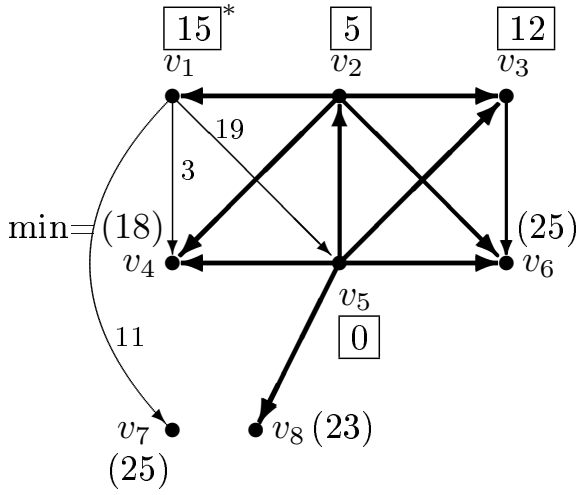


Рис. 4.11

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока конечная вершина искомого кратчайшего пути не станет постоянно помеченной. Если же требуется найти кратчайшие пути до всех вершин, итерации выполняются, пока все вершины не получат постоянные метки.

Обработку данных в соответствии с алгоритмом целесообразно оформлять в виде таблицы (см. табл. 4.2), строки которой соответствуют итерациям, а столбцы — вершинам графа и отражают процесс изменения их временных меток вплоть до момента, пока временная метка не станет постоянной. Два дополнительных столбца таблицы p и $l(p)$ нужны, чтобы зафиксировать вершину, которая становится постоянно помеченной на очередной итерации, и длину кратчайшего пути до этой вершины.

В табл. 4.2 содержатся результаты расчетов для разобранного выше примера. Покажем, как она заполняется.

Таблица 4.2

Итерации	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	p	$l(p)$
1	∞	∞	∞	∞	**0**	∞	∞	∞	∞	∞	v_5	0
2	∞	**5**	14	20		29	∞	23	∞	∞	v_2	5
3	15		**12**	20		27	∞	23	∞	∞	v_3	12
4	**15**			20		25	∞	23	∞	∞	v_1	15
5				**18**		25	25	23	∞	∞	v_4	18
6						25	23	**21**	∞	∞	v_8	21
7						25	**23**		29	∞	v_7	23
8						**25**			29	∞	v_6	25
9									**27**	33	v_9	27
10										**33**	v_{10}	33
pred	v_2	v_5	v_2	v_1	v_5	v_3	v_4	v_4	v_6	v_6		

На первой итерации полагаем временные метки для всех вершин, кроме начальной, равными ∞, а для начальной – 0. Последней постоянно помеченной считаем вершину v_5, а ее метку равной 0.

На второй итерации, используя матрицу $\mathbf{C}$, находим все вершины множества $\Gamma(v_5)$ и пересчитываем их временные метки по формуле $l(v_i)=\min\{l(v_i), l(p)+c(p, v_i)\}$. Среди временных меток ищем минимальную. Это метка вершины v_2, теперь ее считаем постоянно помеченной.

На третьей итерации находим вершины множества $\Gamma(v_2)$ и пересчитываем их временные метки. Среди всех временных вновь ищем минимальную метку. На этой итерации постоянно помеченной становится вершина v_3, и т. д.

Процесс заканчивается на десятой итерации, когда постоянную метку получает v_{10}. Результаты — длины кратчайших путей — содержатся в двух последних столбцах таблицы.

Чтобы находить сами пути, сформируем еще одну строчку таблицы — *pred*, в которой для каждой вершины графа указана ее предшественница на кратчайшем пути. С этой целью в каждом столбце отыскиваем самую нижнюю строку с предпоследним значением метки. Например, в первом столб-

це это вторая строка, в восьмом — пятая. Искомая вершина-предшественница содержится в столбце p найденной строки. Для v_1 это вершина v_2, а для v_8 — вершина v_4. Теперь для определения самого пути достаточно записать цепочку вершин-предшественниц, начиная с конечной вершины. Так, для v_{10} имеем: $pred(v_{10})=v_6$, $pred(v_6)=v_3$, $pred(v_3)=v_2$ и $pred(v_2)=v_5$. Это значит, что кратчайший путь между v_5 и v_{10} имеет вид $(v_5, v_2, v_3, v_6, v_{10})$.

Формализованная запись алгоритма Дейкстры, в которой использованы обозначения:

p – последняя постоянно помеченная вершина;
l – массив числовых меток вершин (длин путей);
$pred$ – массив предшествующих вершин [13];
$post$ – массив признака постояной метки вершины;
v^* – вершина с минимальной временной меткой;

может быть представлена в следующем виде:

```
begin    { — А Л Г О Р И Т М   Д Е Й К С Т Р Ы — }
  p := s          { s – последняя постоянно помеченная вершина }
  for v∈V do                                  { Инициализировать : }
      { l(v) := ∞                    { массив числовых меток вершин, }
      { pred(v) := v                 { массив предшествующих вершин, }
      { post(v) := 0                 { массив признака постоянной метки. }
  l(p) := 0
  post(p) := 1
  while p≠t do      { Пока t не станет постоянно помеченной, }
      { for v∈Γ(p) do     { для всех вершин множества Γ(p), }
          if l(p)+c_pv < l(v)      {метки которых  > l(p)+c_pv, }
          then                                { выполнить коррекцию }
              { l(v) := l(p)+c_pv                          { самой метки }
              { pred(v) := p     { и предшествующей вершины }
      Найти v*      { Найти минимальную временную метку }
      p := v*                  { и далее считать соответствующую }
      post(p) := 1               { вершину постоянно помеченной }
  output(l,pred)                          { Вывод массивов l и pred }
end.     { — А Л Г О Р И Т М   Д Е Й К С Т Р Ы — }
```

[13] Формируется параллельно с массивом d. Значение $pred(v_i)$ корректируется при каждом изменении $l(v_i)$, принимая значение, равное p.

Алгоритм Флойда. Этот алгоритм обеспечивает решение задачи отыскания кратчайших путей для всех C_n^2 неупорядоченых пар вершин простого графа и всех $2C_n^2$ упорядоченных пар вершин орграфа даже при наличии дуг (ребер) с отрицательным весом. Единственным условием является отсутствие в графе контуров (циклов) с суммарным отрицательным весом. Более того, алгоритм позволяет выявить эти контуры.

Пронумеруем вершины графа числами $1, 2,...,n$ и обозначим через $d_{ij}^{(m)}$ длину кратчайшего пути из вершины i в вершину j, который может содержать в качестве промежуточных любое подмножество только первых m вершин. Если между i и j нет пути такого типа, полагаем $d_{ij}^{(m)}=\infty$. Естественно также считать, что при отсутствии в графе контуров отрицательного веса все $d_{ii}^{(m)}=0$ при любом m. Теперь элемент c_{ij} матрицы $\mathbf{C}$ можно рассматривать как длину кратчайшего пути из i в j без промежуточных вершин, и обозначать $d_{ij}^{(0)}$, а длину кратчайшего пути между i и j (без ограничений на промежуточные вершины) обозначать как $d_{ij}^{(n)}$.

Пусть $\mathbf{D}^{(m)}$ — квадратная матрица порядка n. При $m=0$ она совпадает с матрицей $\mathbf{C}$ и записывается как $\mathbf{D}^{(0)}$. Начиная с $\mathbf{D}^{(0)}$, с помощью алгоритма Флойда формируется ряд матриц $\mathbf{D}^{(1)}, \mathbf{D}^{(2)},...,\mathbf{D}^{(n)}$, последняя из которых является искомой матрицей длин кратчайших путей между всеми парами вершин. Алгоритм Флойда, как и алгоритм Уоршолла, "работает на месте", т. е. не требуется хранить все матрицы $\mathbf{D}^{(m)}$. Каждая последующая матрица в этом ряду получается из предыдущей с помощью простого соотношения:

$$d_{ij}^{(m)} = \min\{d_{ij}^{(m-1)}, d_{im}^{(m-1)}+d_{mj}^{(m-1)}\},$$

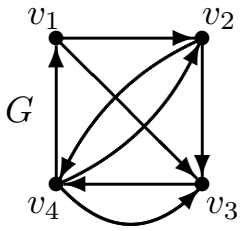
в основе которого лежит следующее, практически очевидное положение. Длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j, использующего в качестве промежуточных только первые m вершин, не может быть больше длины кратчайшего пути из i в j, использующего в качестве промежуточных только первые $m-1$ вершин, и не более суммы длин двух кратчайших

путей из i в m и из m в j, в которых промежуточными могут быть лишь первые $m-1$ вершин. Расчетное соотношение существенно упрощается, когда m является начальной или конечной вершиной рассматриваемого пути. Тогда имеем:

$$d_{im}^{(m)} = d_{im}^{(m-1)}, \quad d_{mj}^{(m)} = d_{mj}^{(m-1)}.$$

Это означает, что m-я строка и m-й столбец не меняются при переходе от матрицы $\mathbf{D}^{(m-1)}$ к матрице $\mathbf{D}^{(m)}$ и поэтому могут не пересчитываться. Если заранее известно, что в графе нет контуров отрицательного веса, то и диагональные элементы матриц также можно не пересчитывать. Отмеченные факты позволяют утверждать, что трудоемкость вычисления любой из матриц $\mathbf{D}^{(m)}$ пропорциональна n^2-3n+2. Учитывая, что для получения результата требуется n итераций, в целом трудоемкость алгоритма можно оценить как $O(n^3)$.

В качестве примера найдем матрицу длин кратчайших путей между всеми парами вершин для графа G, изображенного на рис. 4.12 и имеющего матрицу весов $\mathbf{C}$. Полагая $\mathbf{D}^{(0)}=\mathbf{C}$,



$$\mathbf{D}^{(0)}=\mathbf{C}=\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 5 & 10 & \infty \\ \hline \infty & 0 & 3 & 13 \\ \infty & \infty & 0 & 8 \\ 7 & \underline{15} & \underline{20} & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{D}^{(1)}=\left[\begin{array}{c|cc|c} 0 & 5 & \underline{10} & \underline{\infty} \\ \hline \infty & 0 & 3 & 13 \\ \hline \infty & \infty & 0 & 8 \\ 7 & 12 & \underline{17} & 0 \end{array}\right],$$

$$\mathbf{D}^{(2)}=\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 5 & 8 & \underline{18} \\ \infty & 0 & 3 & \underline{13} \\ \hline \infty & \infty & 0 & 8 \\ \hline 7 & 12 & 15 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{D}^{(3)}=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{5} & \underline{8} & 16 \\ \underline{\infty} & 0 & \underline{3} & 11 \\ \underline{\infty} & \underline{\infty} & 0 & 8 \\ \hline 7 & 12 & 15 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{D}^{(4)}=\left[\begin{array}{cccc} 0 & 5 & 8 & 16 \\ 18 & 0 & 3 & 11 \\ 15 & 20 & 0 & 8 \\ 7 & 12 & 15 & 0 \end{array}\right].$$

Рис. 4.12

с помощью алгоритма Флойда последовательно получаем матрицы: $\mathbf{D}^{(1)}$, $\mathbf{D}^{(2)}$, $\mathbf{D}^{(3)}$, $\mathbf{D}^{(4)}$, представленные на рис. 4.12, причем $\mathbf{D}^{(4)}$ и есть искомая матрица длин кратчайших путей.

В каждой матрице выделены m-й столбец и m-я строка, не подлежащие пересчету на соответствующей итерации.

Поскольку веса всех дуг не отрицательны, диагональные элементы матриц постоянны и равны нулю. Кроме того,

если $d_{im}^{(m-1)} = \infty$, то $d_{ij}^{(m)} = d_{ij}^{(m-1)}$ для всех j и

если $d_{mj}^{(m-1)} = \infty$, то $d_{ij}^{(m)} = d_{ij}^{(m-1)}$ для всех i.

Иными словами, если i элемент выделенного столбца равен ∞, то все элементы i строки на текущей итерации не изменяются. Аналогичное утверждение справедливо и для выделенной строки. Учет приведенных соотношений позволяет сократить объем вычислений на начальных итерациях, особенно для разреженных графов. Проиллюстрируем это на примере. Второй и третий элементы первого столбца, а также четвертый элемент первой строки матрицы $\mathbf{D}^{(0)}$ равны ∞. Поэтому, кроме первого столбца и первой строки, при переходе к $\mathbf{D}^{(1)}$ сохраняют свое значение элементы второй и третьей строк, а также элементы четвертого столбца. Пересчету подлежат[14] лишь $d_{4,2}^{(0)}$=15 и $d_{4,3}^{(0)}$=20. Чтобы получить, например, $d_{4,2}^{(1)}$, достаточно сложить $d_{1,2}^{(0)}$=5 и $d_{1,4}^{(0)}$=7, которые находятся в первой строке и первом столбце на позициях, соответствующих пересчитываемому элементу, сравнить найденную сумму с $d_{4,2}^{(0)}$ и выбрать наименьшее из двух чисел. Получаем $d_{4,2}^{(1)}$=12. Точно так же решается задача и для $d_{4,3}^{(1)}$=17. Нетрудно убедиться, что на второй итерации следует вычислять только $d_{1,3}^{(2)}$, $d_{1,4}^{(2)}$ и $d_{4,3}^{(2)}$, а все остальные элементы матрица $\mathbf{D}^{(2)}$ "наследует" от $\mathbf{D}^{(1)}$. Действительно, вторая строка и второй столбец не изменяются потому, что m=2, а первый столбец и третья строка – в силу приведенных выше соотношений. Все три названных элемента получают новые значения, равные соответственно 8, 18 и 15. На третьей итерации считаются $d_{1,4}^{(3)}$ и $d_{2,4}^{(3)}$, а на четвертой – $d_{1,2}^{(4)}, d_{1,3}^{(4)}, d_{2,3}^{(4)}, d_{2,1}^{(4)}, d_{3,1}^{(4)}, d_{3,2}^{(4)}$, причем из этих шести три первые сохраняют прежние значения.

Если граф имеет дуги с отрицательным весом, целесообразно наряду с остальными пересчитывать и диагональные

[14] Элементы, подлежащие пересчету, в матрицах подчеркнуты.

элементы матриц $\mathbf{D}^{(m)}$. Появление на некоторой итерации отрицательных значений на главной диагонали матрицы показывает, что в графе есть контур (цикл) с отрицательным весом. В этом случае дальнейшие вычисления теряют смысл, так как в подобных ситуациях алгоритм "не работает".

Кроме длины, для каждого кратчайшего пути необходимо определить и последовательность входящих в него вершин. С этой целью одновременно с матрицей $\mathbf{D}^{(m)}$ формируется матрица "вершин-предшественниц" $\mathbf{P}^{(m)}$. Элемент $p_{i,j}^{(m)}$ этой матрцы указывает предпоследнюю вершину кратчайшего (i,j)-пути, который может содержать в качестве промежуточных только первые m вершин графа. Вначале для всех i и j полагаем $p_{i,j}^{(0)}{=}i$, если $c_{ij}{\neq}\infty$, и $p_{i,j}^{(0)}{=}0$ — в противном случае. Далее на каждой итерации матрица $\mathbf{P}^{(m)}$ пересчитывается одновременно с матрицей $\mathbf{D}^{(m)}$ с помощью соотношения

$$p_{i,j}^{(m)}{=}\begin{cases} p_{m,j}^{(m-1)}, & \text{если } d_{i,j}^{(m-1)} > d_{i,m}^{(m-1)} + d_{m,j}^{(m-1)}, \\ p_{i,j}^{(m-1)} & \text{— в противном случае}. \end{cases}$$

Таким образом, элемент матрицы $\mathbf{P}^{(m)}$ корректируется при каждом изменении соответствующего элемента матрицы $\mathbf{D}^{(m)}$. Для нашего примера имеем следующий ряд матриц:

$$\underset{\mathbf{P}^{(0)}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & \underline{4} & \underline{4} & 0 \end{bmatrix}}, \underset{\mathbf{P}^{(1)}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \underline{1} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & \underline{1} & 0 \end{bmatrix}}, \underset{\mathbf{P}^{(2)}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \underline{2} \\ 0 & 0 & 2 & \underline{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}, \underset{\mathbf{P}^{(3)}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \underline{0} & 0 & 2 & 3 \\ \underline{0} & \underline{0} & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}, \underset{\mathbf{P}^{(4)}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}},$$

где подчеркнуты элементы, которые на очередной итерации получают новые значения. Например, как было показано ранее, на первой итерации в матрице $\mathbf{D}$ изменились элементы $d_{4,2}$ и $d_{4,3}$. Поэтому согласно с приведенному выше соотношению элементы $p_{4,2}$ и $p_{4,3}$ матрицы $\mathbf{P}$ получают новые значения, равные $p_{1,2}$ и $p_{1,3}$ соответственно. И вообще, на m-й итерации изменяющийся элемент матрицы получает значение, равное элементу, находящемуся в том же столбце на

m-й позиции. Последняя из полученных матриц $\mathbf{P}^{(4)}$ позволяет сформировать кратчайший путь для любой пары вершин. Пусть, например, это 1 и 4, причем 1 – начальная, а 4 – конечная вершины. Элемент $p^{(4)}_{1,4}$=3, т. е. предпоследней вершиной пути является вершина 3. В свою очередь, ей предшествует вершина 2, так как $p^{(4)}_{1,3}$=2. Наконец, $p^{(4)}_{1,2}$=1. Следовательно, (1,2,3,4) – кратчайший (1;4)-путь. Как следует из матрицы $\mathbf{D}^{(4)}$, длина этого пути равна $d^{(4)}_{1,4}$=16. Пусть теперь 4 – начальная вершина пути, а 1 – конечная. Так как $p^{(4)}_{4,1}$=4, т. е. предпоследняя вершина совпадает с начальной, кратчайший (4;1)-путь состоит из дуги, связывающей 4 и 1.

С использованием введенных ранее обозначений формализованное описание алгоритма Флойда можно представить так:

```
begin     { – А Л Г О Р И Т М   Ф Л О Й Д А – }
  for i := 1 to n do                                  { Формирование }
    { for j := 1 to n do                          { начальных значений }
      { { d_{i,j} := c_{i,j};                                 { элементов }
        { if c_{ij}=∞ then p_{ij}=0 else p_{ij}=i;              { матриц }
    d_{ii} := 0;                                          { D и P }
  for m := 1 to n do { Задание числа промежуточных вершин }
    { for i := 1 to n do                  { Перебор строк матрицы D }
      { if (i≠m)&(d_{i,m}≠∞)
        then
          for j := 1 to n do{Перебор столбцов матрицы D}
            { if (j≠m)&(d_{m,j}≠∞)
              then
                if d_{ij} > d_{im}+d_{mj}          { Если путь через }
                then{ вершину m короче, корректировать }
                  { { d_{ij} := d_{im}+d_{mj};           { длину пути и }
                    { p_{ij} := p_{mj}; { предпоследнюю вершину. }
    for i := 1 to n do
      { if d_{ii} < 0 then Прекратить процесс;
      { В графе обнаружен цикл отрицательного веса. }
  output (D,P)                                  { Вывод матриц D и P }
end.      { – А Л Г О Р И Т М   Ф Л О Й Д А – }
```

4.4.3. Ациклические орграфы

Кратчайший путь. Задача отыскания кратчайшего пути в ациклическом орграфе вполне может быть решена с помощью алгоритма Дейкстры. Однако существует более экономичный способ, использующий специфику таких графов.

Пусть в ациклическом орграфе с матрицей весов $[c_{i,j}]$ вершины пронумерованы так, что для любой дуги (v_i, v_j) выполняется отношение $i<j$, т. е. дуга всегда направлена от вершины с меньшим индексом (номером) к вершине с большим индексом (номером). Подобная нумерация всегда может быть выполнена на основе порядковой функции графа. Не нарушая общности, будем считать, что имеется только одна вершина s с нулевой полустепенью захода и одна вершина t с нулевой полустепенью исхода, называемые соответственно истоком и стоком. Требуется найти кратчайший путь из s в t. Как и в случае алгоритма Дейкстры, фактически отыскиваются кратчайшие пути до всех вершин графа.

Длина кратчайшего пути $l(v_j)$ до вершины v_j легко находится, если известны длины кратчайших путей до всех вершин $v_i \in \Gamma^-(v_j)$, т. е. вершин, являющихся началами дуг, входящих в вершину v_j. Очевидно, что

$$l(v_j) = \min_{v_i \in \Gamma^-(v_j)} [l(v_i) + c_{i,j}],$$

причем $|\Gamma^-(v_j)|<j$, так как при используемой системе нумерации вершин число входящих дуг для любой вершины всегда меньше, чем ее индекс (номер).

Полагая $l(s)=l(v_1)=0$, на первой итерации получаем, что $l(v_2)=l(v_1)+c_{1,2}=c_{1,2}$, так как вершина v_2 может иметь лишь одну входящую дугу. На второй итерации получаем $l(v_3) = \min_{v_i \in \Gamma^-(v_3)} [l(v_i)+c_{i,3}]$ (не более двух входящих дуг). Затем $l(v_4) = \min_{v_i \in \Gamma^-(v_4)} [l(v_i)+c_{i,4}]$ (не более трех входящих дуг) и т. д., пока не будет получена длина кратчайшего пути для s.

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти длину кратчайшего пути между вершинами v_1 (исток) и v_{13} (сток) в

ациклическом графе, изображенном на рис. 4.13. Нетрудно убедиться, что нумерация вершин графа является "правильной" в указанном выше смысле.

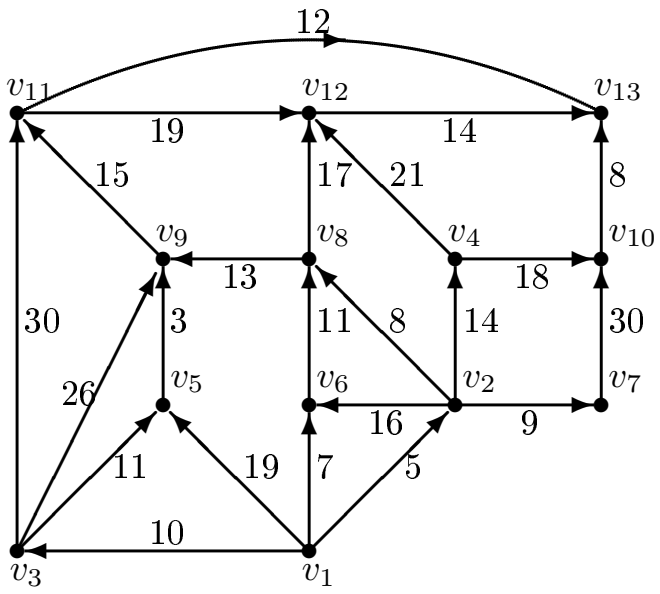


Рис. 4.13

Процесс вычислений можно выполнить непосредственно по рисунку, приняв $l(v_1)=0$, и далее переходя от вершины к вершине. При этом совсем не обязательно соблюдать очередность обработки вершин строго в соответствии с их нумерацией. Для данного графа вполне допустим, например, и такой порядок: $v_1, v_3, v_5, v_2, v_7, v_4, v_{10}, v_6, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}$. Важно только, чтобы к моменту обработки очередной вершины все ее "предшественницы" были обработаны. Тогда в любом случае результат (значения пометок вершин) будет таким, как показано на рис. 4.14,*а*, причем пометка v_{13} равна 44.

Для получения трассы кратчайшего пути следует выполнить процедуру "обратного хода". Сперва отыскивается предшественница для v_{13}, лежащая на искомом кратчайшем пути. Это одна из трех вершин v_{10}, v_{11}, v_{12}, а именно та, для которой выполняется соотношение $l(v_{13})-l(v_i)=c_{i,13}$, где $v_i \in \{v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$. Такой вершиной является v_{12}. Для нее также ищется вершина-предшественница, лежащая на кратчайшем пути. Из трех возможных v_4, v_8 и v_{11} таковой оказывается v_8. В

свою очередь, этой вершине предшествует v_2, а ей — v_1. Записывая найденную последовательность в обратном порядке, получаем собственно сам кратчайший путь $(v_1, v_2, v_8, v_{12}, v_{13})$. На рис. 4.14,*а* составляющие его дуги изображены жирными линиями.

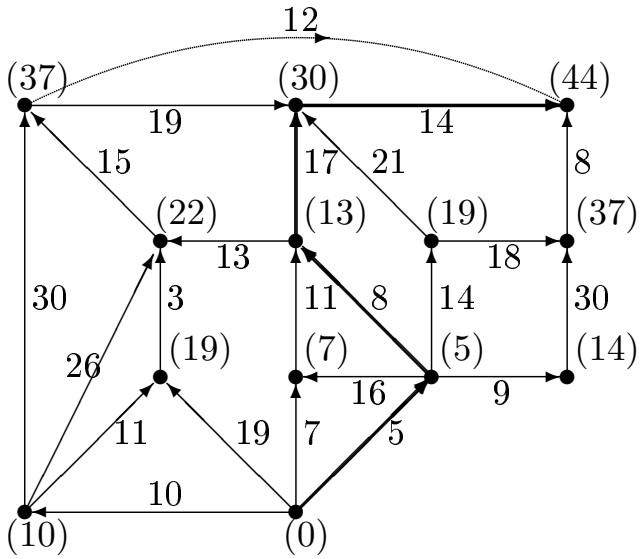
Процесс обратного хода можно упростить, если учесть, что вершина v_{13} получила свою пометку из v_{12}, которая, в свою очередь, получила пометку из v_8, и т. д. Поэтому на этапе прямого хода целесообразно наряду с присвоением пометки очередной вершине дополнительно отмечать и ту вершину, из которой эта пометка получена. Тогда на этапе обратного хода остается только пройти от стока к истоку, двигаясь лишь по этим дополнительно отмеченным вершинам.

Задачу можно решать и не прибегая к изображению графа. Техника получения пометок вершин непосредственно по матрице весов $\mathbf{C}$ дана на рис. 4.14,*б*. Как и ранее, вершины должны быть пронумерованы так, чтобы для любой дуги (v_i, v_j) выполнялось отношение $i<j$. Отметим, что матрица в этом случае оказывается верхней треугольной. Незаполненные позиции означают, что соответствующих дуг в графе нет, или дуги есть, но их вес равен ∞. Результаты вычислений целесообразно размещать на главной диагонали, т. е. считать, что $c_{ii}=l(v_i)$. На рис. 4.14,*б* эти элементы выделены жирным шрифтом и заключены в рамку. Слева приведен расчет значения соответствующего диагонального элемента. Например, в девятом столбце матрицы есть три "не пустых" значения $c_{3,9}=26$, $c_{5,9}=3$ и $c_{8,9}=13$. Это значит, что существуют три дуги, входящие в v_9, начальные вершины которых имеют пометки [15] $l(v_3)=10$, $l(v_5)=19$ и $l(v_8)=13$. В этом случае расчетное соотношение выглядит так: $\min[26+\mathbf{10}; \underline{3+\mathbf{19}}; 13+\mathbf{13}]=21$, т. е. пометка v_9 равна 21. Очевидно, что вершиной-предшественницей является v_5, поэтому дополнительно помечаем звездочкой элемент $c_{5,9}$. Подобным образом обрабатываем все столбцы матрицы, начиная со второго. На этапе обратного хода порядок просмотра столбцов меняется на обратный. Отыскиваем помеченный звездочкой элемент последнего столбца.

[15] См. соответствующие диагональные элементы $c_{3,3}$, $c_{5,5}$ и $c_{8,8}$.

Строка, в которой он находится, определяет предпоследнюю вершину кратчайшего пути. В столбце, соответствующем этой вершине, вновь ищем помеченный элемент – получаем третью

а



б

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}
v_1	**0**	5^*	10^*		19^*	7^*							
v_2		**5**		14^*		16	9^*	8^*					
v_3			**10**		11				26		30		
v_4	min[14+**5**]=			**19**						18^*		21	
v_5	min[19;11+**10**]=				**19**				3^*				
v_6		min[7; 16+**5**]=				**7**		11					
v_7			min[9+**5**]=				**14**			30			
v_8			min[8+**5**; 11+**7**]=					**13**	13			17^*	
v_9		min[26+**10**; 3+**19**; 13+**13**]=							**22**		15^*		
v_{10}				min[18+**19**; 30+**14**]=						**37**			8
v_{11}					min[30+**10**; 15+**22**]=						**37**	19	12
v_{12}					min[21+**19**; 17+**13**; 19+**37**]=							**30**	14^*
v_{13}						min[8+**37**; 12+**37**; 14+**30**]=							**44**

Рис. 4.14

(от конца) вершину кратчайшего пути и т. д., пока помеченным не окажется элемент в первой строке матрицы.

В формализованной записи (с использованием ранее введенных обозначений) рассмотренный алгоритм выглядит так:

begin { — Алгоритм поиска кратчайшего — }
{ — пути в ациклическом орграфе — }
$l(v_1) := 0$;
for $j := 2$ **to** n **do**
$\left\{ \begin{array}{l} \text{Найти } v_i^* \in \Gamma^-(v_j), \text{ для которой } l(v_i^*)+c_{i,j} \text{ минимально;} \\ l(v_j) := l(v_i^*)+c_{i,j}^*; \\ pred(v_j) := v_i^*; \end{array} \right.$
output$\{l(v_n)\}$;
$v := v_n$;
while $v \neq v_1$ **do**
$\left\{ \begin{array}{l} v \rightarrow \text{стек;} \\ v := pred(v); \end{array} \right.$
output$\{v_1$, содержимое стека$\}$;
{ — Алгоритм поиска кратчайшего — }
end. { — пути в ациклическом орграфе — }

Очевидно, что трудоемкость первого этапа равна $O(m)$, поскольку необходимо просмотреть все ребра, а трудоемкость второго — $O(n)$, так как, в худшем случае, кратчайший путь может включать все вершины графа.

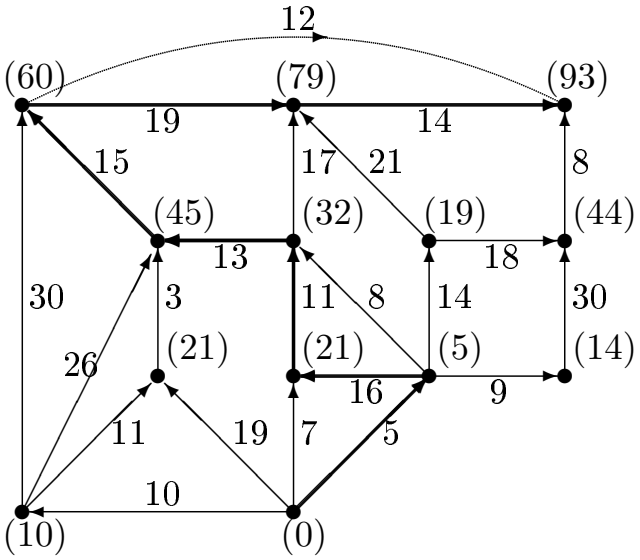
Критический путь. Ациклические орграфы являются наглядным средством отображения взаимосвязей и порядка следования этапов сложных долговременных проектов, таких как строительство крупных сооружений, проведение широкомасштабных научно-исследовательских работ и т. п.

Пусть каждая дуга графа отображает определенную работу при выполнении некоторого проекта, а вес дуги указывает продолжительность этой работы. Тогда вершины графа можно рассматривать как события, состоящие в завершении одних работ (входящие дуги) и начале других (исходящие дуги). При этом предполагается, что ни одна "исходящая" работа не может начаться, пока не будут завершены все "входящие".

При такой интерпретации граф на рис. 4.13 вполне может рассматриваться как сетевой график некоторого проекта. При этом естественно возникает задача определения наиболее ранних сроков его завершения. Ясно, что минимальное время

выполнения проекта равно самому длинному пути между начальной и конечной вершинами. Этот путь называют *критическим*. Метод отыскания такого пути тот же, что и в задаче

а



б

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}
v_1	[0]	5*	10*		19	7							
v_2		[5]		14*		16*	9*	8					
v_3			[10]		11*				26		30		
v_4				[19]						18		21	
v_5					[21]				3				
v_6						[21]		11*					
v_7							[14]			30*			
v_8								[32]	13*			17	
v_9									[45]		15*		
v_{10}										[44]			8
v_{11}											[60]	19*	12
v_{12}												[79]	14*
v_{13}													[93]

Основное расчетное соотношение: $l(v_j) = \max\limits_{v_i \in \Gamma^-(v_j)} [l(v_i) + c_{i,j}]$, $j = \overline{2,13}$

Критический путь: $v_1 - v_2 - v_6 - v_8 - v_9 - v_{11} - v_{12} - v_{13}$, $l(v_{13}) = 93$

Рис. 4.15

о кратчайшем пути, только в основном расчетном соотношении вместо минимума ищется максимум. На рис. 4.15,*а,б* приведено решение задачи о критическом пути для рассматриваемого графа. Критический путь выделен жирными линиями.

5. Циклы

5.1. Фундаментальные циклы и разрезы

Будем представлять циклы (n, m)-графа в виде m-разрядных двоичных кодов, в которых разряд j равен 1, если ребро e_j принадлежит циклу, и 0, если ребро циклу не принадлежит. Пусть, например, множество ребер некоторого графа $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_{10}\}$, и в графе есть цикл $(e_1, e_2, e_6, e_9, e_8, e_4)$, тогда соответствующий код запишется как $C=1101010110$.

В общем случае граф может содержать множество циклов. Так, в графе, изображенном на рис. 5.1, существует шесть

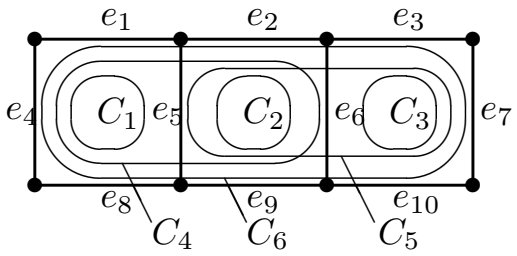


Рис. 5.1

циклов $C_1 - C_6$. Однако они не являются независимыми, поскольку любой из этих циклов может быть представлен как суперпозиция других (с помощью операции поразрядного сложения соответствующих кодов по модулю два), в частности, цикл $C_6=C_1 \oplus C_2 \oplus C_3$, цикл $C_4=C_1 \oplus C_2$ и цикл $C_5=C_2 \oplus C_3$. В этих примерах циклы C_1, C_2 и C_3 выступают как "полное" множество независимых циклов, так как на их основе можно получить любой из остальных циклов графа. Среди таких множеств независимых циклов выделяют *множества фундаментальных (базисных) циклов*[16].

Множеством фундаментальных циклов графа относительно остова T этого графа принято называть множество циклов, каждый из которых получается при добавлении к T некоторого ребра графа, не принадлежащего T.

Из определения следует, что мощность множества фундаментальных циклов не зависит от выбранного остова и все-

[16] Говорят также "фундаментальное (базисное) множество циклов".

гда равна $\nu{=}m{-}n{+}1$. Это *цикломатическое число* – одна из важнейших характеристик графа. Ясно также, что все циклы такого множества независимы, поскольку каждый из них содержит ребро, принадлежащее только этому циклу.

В качестве примера на рис. 5.2 представлены все фундаментальные циклы графа относительно остова, образованного ребрами e_5, e_6, e_7, e_8, e_9 (выделены жирными линиями). На рис. 5.3 показано полное множество независимых циклов того

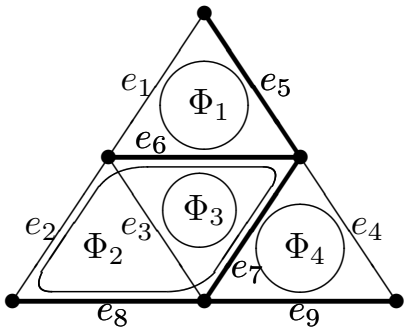


Рис. 5.2

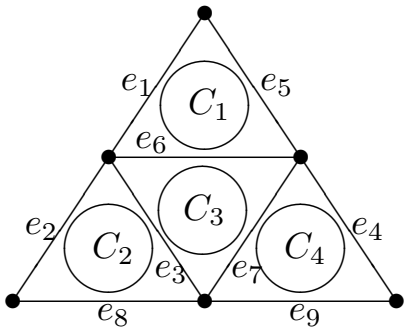


Рис. 5.3

же графа, которое не является множеством фундаментальных циклов, так как нет соответствующего остова[17].

Описание фундаментальных циклов удобно выполнять в виде матрицы $\mathbf{\Phi} = [\phi_{ij}]$, строки которой соответствуют циклам, а столбцы – ребрам, причем ϕ_{ij} равно 1, если e_j принадлежит циклу Φ_i, или 0, если не принадлежит. Каноническая форма записи матрицы получается, если предварительно пронумеровать сначала все неостовные ребра, а затем остовные, как на рис 5.2. В этом случае матрица выглядит так:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{array}{c} \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array},$$

или сокращенно $\mathbf{\Phi}{=}(\mathbf{I}_\nu|\mathbf{\Phi}')$, где $\mathbf{I}_\nu$ — единичная матрица порядка ν, а $\mathbf{\Phi}'$ — матрица размера $\nu{\times}(n{-}1)$, определяющая, какие ребра остова принадлежат соответствующему циклу.

[17]Цикл C_3 не может быть получен путем суперпозиции C_1, C_2, C_4, и поэтому независим.

С понятием цикла тесно связано понятие *разреза* — множества ребер S, удаление которых приводит к несвязному графу. Примеры разрезов даны на рис. 5.4,*а,б* — это множества ребер, пересекаемых линиями $S\,, S_1 - S_6$.

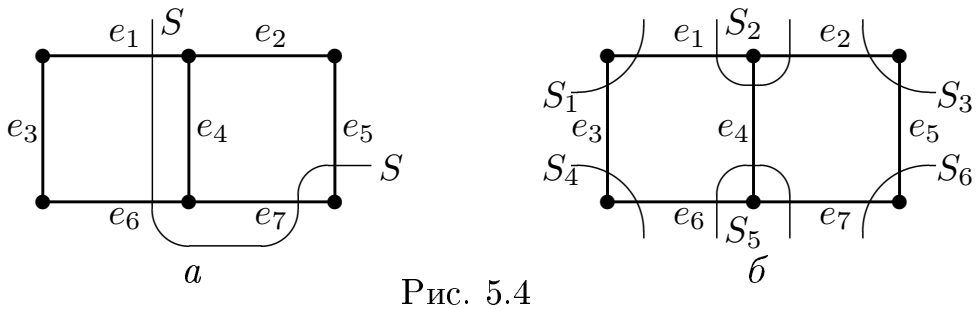


Рис. 5.4

Разрез называется *простым* или *правильным*, если никакое его собственное подмножество не является разрезом. Иными словами, простой разрез является минимальным разрезом и всегда разбивает граф на две компоненты. Некоторое множество простых разрезов графа показано на рис. 5.4,*б* :

$$S_1 = \{e_1, e_3\}\,, \quad S_2 = \{e_1, e_2, e_4\}\,, \quad S_3 = \{e_2, e_5\}\,,$$
$$S_4 = \{e_3, e_6\}\,, \quad S_5 = \{e_4, e_6, e_7\}\,, \quad S_6 = \{e_5, e_7\}\,.$$

Разрез $S{=}\{e_1, e_5, e_6, e_7\}$ на рис. 5.4,*а* простым не является, так как состоит из двух простых $\{e_1, e_6\}$ и $\{e_5, e_7\}$.

По аналогии с циклами будем описывать разрезы m-разрядными двоичными кодами, в которых разряд j равен 1, если ребро e_j принадлежит разрезу, и 0, если не принадлежит. В этом случае описание разрезов $S_1 - S_6$ имеет вид:

$$S_1 = 1010000\,, \quad S_2 = 1101000\,, \quad S_3 = 0100100\,,$$
$$S_4 = 0010010\,, \quad S_5 = 0001011\,, \quad S_6 = 0000101\,.$$

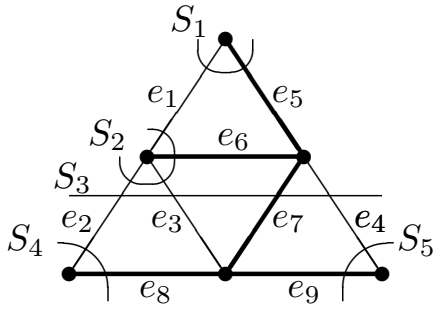
Легко заметить, что код любого из этих шести разрезов может быть получен как сумма остальных пяти по модулю 2, т. е. разрезы $S_1 - S_6$ зависимы. Если же ограничиться любыми пятью из них, то получим множество простых независимых разрезов, с помощью которых можно сформировать любой разрез в графе. Так, разрез S на рис. 5.4,*а* можно рассматривать как сумму $S{=}S_2 \oplus S_3 \oplus S_5$.

Среди множеств независимых разрезов выделяют *множества фундаментальных (базисных) разрезов.*

Множеством фундаментальных разрезов графа относительно некоторого остова T этого графа называют множество простых разрезов, каждый из которых содержит только одно ребро, принадлежащее T.

Из определения следует, что мощность множества фундаментальных разрезов не зависит от выбранного остова и равна $\rho{=}n{-}1$. Это *коцикломатическое число* графа. Такое название объясняется тем, что наряду с термином "фундаментальный разрез" используют и термин "коцикл", подчеркивая этим связь фундаментальных циклов и разрезов.

Описание фундаментальных разрезов удобно выполнять в виде матрицы $\mathbf{S}{=}[s_{ij}]$, строки которой соответствуют разрезам, а столбцы — ребрам, причем s_{ij} равно 1, если e_j принадлежит разрезу S_i, или 0, если не принадлежит. Каноническая форма записи матрицы получается, если пронумеровать сначала все неостовные ребра, а затем остовные. Тогда матрица фундаментальных разрезов графа на рис. 5.5,*а* выглядит как



а

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

б

Рис. 5.5

на рис. 5.5,*б*, или сокращенно $\mathbf{S}{=}(\mathbf{S}'|\mathbf{I}_\rho)$, где $\mathbf{I}_\rho$ — единичная матрица порядка ρ, определяющая, какое ребро остова принадлежит разрезу, а $\mathbf{S}'$ — матрица размера $\rho{\times}\nu$.

Установим связь матриц $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{S}$. Число общих ребер любого цикла и любого разреза может быть только четным (в том числе и нулевым), а это значит, что количество единиц, стоящих на одинаковых позициях в строке i матрицы $\mathbf{\Phi}$ и в строке j матрицы $\mathbf{S}$, четно. Следовательно, $\mathbf{\Phi}\mathbf{S}^T \equiv \mathbf{0} \pmod 2$. С другой стороны, если принять во внимание блочную

структуру $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{S}$, то, по правилам умножения блочных матриц, можно записать

$$\mathbf{\Phi S}^T=(\mathbf{I}_\nu|\mathbf{\Phi}')(\mathbf{S}'|\mathbf{I}_\rho)^T=(\mathbf{I}_\nu|\mathbf{\Phi}')\begin{pmatrix}\mathbf{S}'^T\\ \hline \mathbf{I}_\rho{}^T\end{pmatrix}=\mathbf{I}_\nu\mathbf{S}'^T+\mathbf{\Phi}'\mathbf{I}_\rho=\mathbf{S}'^T+\mathbf{\Phi}',$$

где $\mathbf{I}_\nu$ и $\mathbf{I}_\rho$ — единичные матрицы порядка ν и ρ соответственно, а операции выполняются по модулю 2. Учитывая, что $\mathbf{\Phi S}^T \equiv \mathbf{0} \pmod 2$, имеем $\mathbf{S}'^T+\mathbf{\Phi}'=\mathbf{0}$, откуда следует, что $\mathbf{S}'^T=\mathbf{\Phi}'$, так как сложение ведется по модулю 2.

5.2. Эйлеровы циклы

5.2.1. Определение и условия существования

Эйлеров цикл это простой цикл, содержащий все ребра связного неориентированного мультиграфа. Простую цепь, проходящую через все ребра, называют *эйлеровой цепью*. Граф, в котором есть эйлеров цикл, называется *эйлеровым*, а граф, содержащий эйлерову цепь – *полуэйлеровым*.

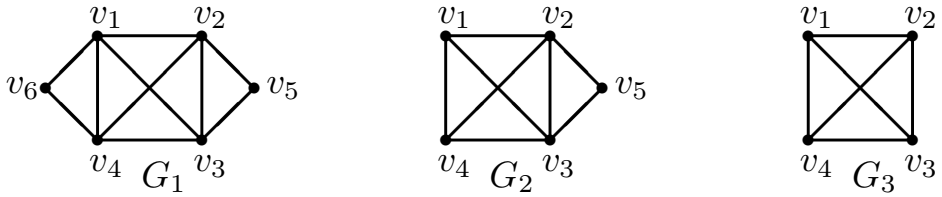
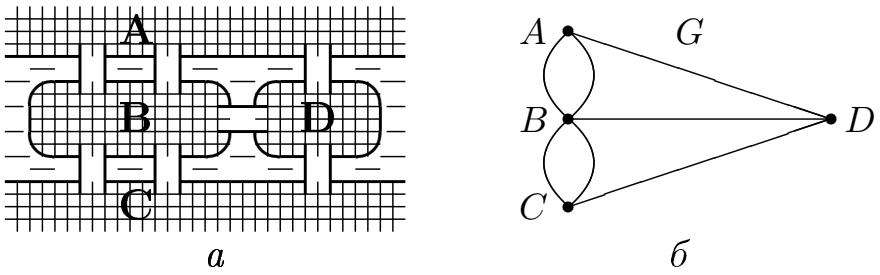


Рис. 5.6

Среди графов, представленных на рис. 5.6, граф G_1 является эйлеровым, так как в нем есть цикл, содержащий все ребра, например, $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_6, v_1)$; в графе G_2 подобный цикл отсутствует, но есть эйлерова цепь, например $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_1, v_3, v_5, v_2, v_4)$, поэтому граф G_2 полуэйлеров; наконец, граф G_3 не эйлеров и не полуэйлеров: в нем нет соответствующего цикла или цепи.

Своим названием расматриваемые здесь циклы обязаны Эйлеру, который установил простой признак существования таких циклов в графе, решив знаменитую в свое время *задачу о кёнигсбергских мостах*. Сама задача состоит в следующем. Семь мостов в тогдашнем Кёнигсберге (ныне Калининград)

соединяли берега реки Прегель, а также два острова на ней, в соответствии со схемой, изображенной на рис. 5.6,*а*. Спрашивается, можно ли, выйдя из некоторого пункта в городе, вернуться обратно, пройдя *один* раз по каждому мосту?



а *б*

Рис. 5.7

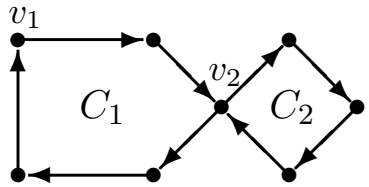
Дадим графовое представление схемы на рис. 5.7,*а*, отобразив четыре участка суши **A**,**B**,**C**,**D**, разделенные рекой, четырьмя вершинами A, B, C, D, а семь мостов, связывающих эти участки, семью ребрами мультиграфа G, как показано на рис. 5.7,*б*. При таком представлении задачу о кёнигсбергских мостах можно сформулировать иначе: есть ли в графе G цикл, содержащий все его ребра? В данном случае ответ отрицателен в соответствии со следующей теоремой, носящей также имя Эйлера.

Теорема 5.1 *Связный неориентированный граф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.*

▷ *Необходимость.* Пусть граф содежит эйлеров цикл. Поставим в соответствие каждой вершине счетчик с нулевым начальным значением. Обойдем цикл, начиная с произвольного ребра и увеличивая на 2 содержимое счетчика вершины при каждом ее прохождении, что соответствует использованию двух очередных инцидентных вершине ребер. Очевидно, что по окончании обхода, когда все ребра использованы, счетчики будут содержать степени вершин, которые при вышеуказанном приращении могут иметь только четные значения.

Достаточность. Пусть степени всех вершин графа $G(V,E)$ четны. Такой граф является, по крайней мере, двусвязным и, следовательно, содержит цикл. Для построения цикла произвольно выберем одну из вершин. Пусть это будет v_1. Перейдем по некоторому ребру в смежную вершину, пометив ребро как

использованное. Будем повторять эту операцию, каждый раз выбирая новое ребро, пока не окажемся в исходной вершине v_1. Обозначим найденный цикл как C_1. Если C_1 включает все ребра графа G, то это и будет требуемый эйлеров цикл. В противном случае рассмотрим граф $G_1(V, E-EC_1)$, получающийся при удалении из G всех ребер, относящихся к C_1. Этот граф может быть как связным, так и несвязным, но любая его компонента в силу связности G имеет хотя бы одну общую вершину с графом C_1. Так как каждая вершина в G и C_1 имеет четную степень, то и в G_1 степени всех вершин должны быть четными. Пусть v_2 общая вершина G_1 и C_1, не являющаяся изолированной в графе G_1. Найдем в G_1 цикл, содержащий эту вершину, и обозначим его как C_2. Объединим циклы C_1 и C_2, как показано на рис. 5.8. Если цикл



$$C_1 = v_1 \to \ldots \to v_2 \to \ldots \to v_1$$

$$C_2 = v_2 \to \ldots \to v_2$$

$$C_1 \cup C_2 = \underbrace{v_1 \to \ldots \to v_2}_{C_1'} \overbrace{\to \ldots \to v_2}^{C_2} \underbrace{\to \ldots \to v_1}_{C_1''}$$

Рис. 5.8

$C_1 \cup C_2$ эйлеров, то процесс завершен. В противном случае следует перейти к рассмотрению графа $G_2(V, E-EC_1-EC_2)$, отыскать в нем цикл C_3, который следует объединить с C_1 и C_2 и т. д. Так как каждый раз количество неиспользованных ребер уменьшается, то описанный процесс конечен и должен закончиться построением эйлерова цикла. $\lhd$

Аналогичная теорема для орграфов формулируется так:

Теорема 5.2 *Связный ориентированный граф содержит эйлеров орцикл (орцепь) тогда и только тогда, когда полустепени исхода и полустепени захода всех вершин удовлетворяют условиям:*

$\deg^+ v = \deg^- v \quad \forall v \in V$ *— в случае орцикла;*

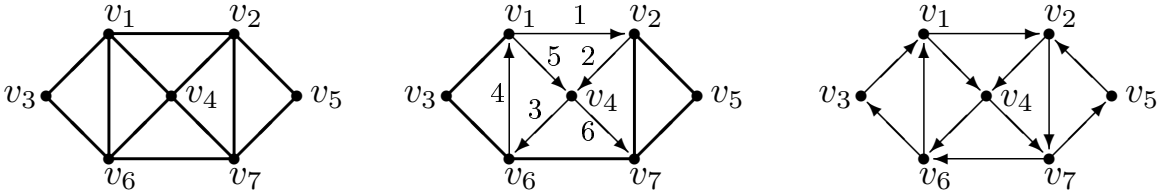
$\deg^+ v = \deg^- v \quad \forall v \neq (u$ *или* $w)$ u

$\deg^+ u = \deg^- u + 1, \ \deg^- w = \deg^+ w + 1$ *— в случае орцепи, где* u *— начальная,* w *— конечная вершины цепи.*

5.2.2. Алгоритм поиска эйлерова цикла

Существует очень простая и наглядная процедура отыскания эйлерова цикла, известная как *алгоритм Флёри*, которая заключается в следующем. Начиная с некоторой вершины, произвольным образом "идем" по смежным ребрам графа, удаляя пройденное ребро и вершину, ставшую после удаления ребра изолированной. Не проходим по ребру, если после его удаления граф становится несвязным. Нетрудно показать, что процесс завершается после обхода (удаления) всех ребер, а значит, и вершин графа, и обязательно в исходной вершине, степень которой к этому моменту становится нулевой. Отметим, что каждая вершина (в отличие от ребер, проходимых однократно), вообще говоря, может быть пройдена неоднократно, точнее — $\deg v_i/2$ раз. Порядок, в котором были пройдены ребра, определяет конфигурацию найденного цикла.

Пусть, например, требуется найти эйлеров цикл в графе, представленном на рис. 5.9,*а*. Непосредственной проверкой



а *б* *в*

Рис. 5.9

убеждаемся, что степени всех вершин четны, т. е. граф эйлеров. В качестве начальной вершины выберем v_1. На первой итерации перейдем в вершину v_2 и удалим ребро $\{v_1, v_2\}$ [18]. На второй итерации перейдем в вершину v_4 и удалим ребро $\{v_2, v_4\}$, на третьей — в v_6, удалив $\{v_4, v_6\}$, затем вновь попадаем в v_1, потом еще раз в v_4 и, наконец, в v_7. То, что получится после этого, представлено на рис. 5.9,*б*. Вершина v_4 оказалась изолированной и может быть удалена. Ребро $\{v_7, v_6\}$ стало мостом. Поэтому допустим переход только в v_2 или в v_5. Перейдем в вершину v_5, удалив ребро $\{v_7, v_5\}$,

[18] Удаленные ребра пронумерованы и отображены тонкими линиями со стрелками, показывающими направление обхода.

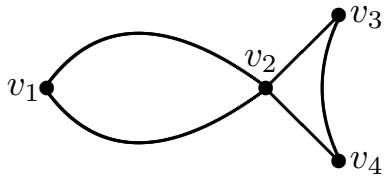
как показано на рис.5.9,*в*. Теперь "остаток" графа — простая цепь $(v_5, v_2, v_7, v_6, v_3, v_1)$, следовательно, дальнейшие переходы определены однозначно. Окончательно получаем $(v_1, v_2, v_4, v_6, v_1, v_4, v_7, v_5, v_2, v_7, v_6, v_3, v_1)$ — эйлеров цикл.

Вышеописанная процедура поиска эйлерова цикла ориентирована главным образом на работу с изображением графа и идеально подходит для решения задач-головоломок типа "нарисовать граф (картинку), не отрывая карандаш от бумаги и не повторяя линий". Если же граф задан иначе, например в матричной форме, или в виде списка, то, чтобы установить, не является ли очередное выбираемое ребро мостом (не прибегая к изображению), требуются дополнительные операции. Поэтому для компьютерной реализации лучше подходит алгоритм, основанный на процедуре, использованной при доказательстве теоремы 5.1, в соответствии с которым первоначально найденный цикл последовательно расширяется за счет объединения с другими циклами, пока не будут задействованы все ребра. Формализованная запись алгоритма имеет вид:

```
begin                          { — Э Й Л Е Р — }
   select v∈V;                 { Выбрать произвольную вершину }
   v→S;                        { и занести в стек. }
   while S≠∅ do                { Пока стек не пуст, выполнять действия: }
   ⎧ if Γ(s1)≠∅               { если окружение вершины s1, }
   ⎪                           { находящейся в верхушке стека, не пусто, }
   ⎪                           { то }
   ⎪ ⎧ then ⎧ select u∈Γ(s1);  { выбрать одну из ее }
   ⎪ ⎪      ⎪ u→S;             { "соседок" и занести в стек, }
   ⎪ ⎪      ⎪ Γ(s1) := Γ(s1)−{u}; { а затем удалить }
   ⎪ ⎪      ⎩ Γ(u) := Γ(u)−{s1} { пройденное ребро; }
   ⎪ ⎪                         { иначе }
   ⎪ ⎪      ⎧ S→v;             { получить из стека }
   ⎪ ⎪ else ⎪ output(v)        { и вывести очередную }
   ⎪ ⎪      ⎩                  { вершину цикла. }
   ⎩ ⎩
end.                           { — Э Й Л Е Р — }
```

Предполагается, что граф задан списком вершин (списком смежности), а в качестве основной рабочей структуры данных, позволяющей легко зафиксировать последовательность прохождения вершин, использован стек S.

Рассмотрим работу алгоритма на примере. Пусть требуется найти эйлеров цикл для графа, изображенного на рис. 5.10 и заданного списками смежности. Фактически мы имеем муль-



$v_1 : v_2, v_2$
$v_2 : v_1, v_1, v_3, v_4$
$v_3 : v_2, v_4$
$v_4 : v_2, v_3$

Рис. 5.10

тиграф, поэтому списки для вершин v_1 и v_2 содержат повторяющиеся элементы, отражая наличие параллельных ребер. Выберем в качестве начальной вершину v_1 и занесем ее в стек. Дальнейшие действия отражены в табл. 5.1 и 5.2.

Таблица 5.1

Итерация	Стек	$S\leftarrow$	Удаляемое ребро	$S\rightarrow$	Итерация	Стек	$S\rightarrow$
1	v_1	v_2	$\{v_1, v_2\}$	–	7	$v_1v_2v_3v_4v_2$	v_2
2	v_1v_2	v_1	$\{v_2, v_1\}$	–	8	$v_1v_2v_3v_4$	v_4
3	$v_1v_2v_1$	–	–	v_1	9	$v_1v_2v_3$	v_3
4	v_1v_2	v_3	$\{v_2, v_3\}$	–	10	v_1v_2	v_2
5	$v_1v_2v_3$	v_4	$\{v_3, v_4\}$	–	11	v_1	v_1
6	$v_1v_2v_3v_4$	v_2	$\{v_4, v_2\}$	–		$\emptyset$	–

Таблица 5.2

Итерация	1	2	3	4	5	6	7
v_1 :	$\not{v}_2, v_2$	$\not{v}_2$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
v_2 :	$\not{v}_1, v_1, v_3, v_4$	$\not{v}_1, v_3, v_4$	v_3, v_4	$\not{v}_3, v_4$	v_4	$\not{v}_4$	$\emptyset$
v_3 :	v_2, v_4	v_2, v_4	v_2, v_4	$\not{v}_2, v_4$	$\not{v}_4$	$\emptyset$	$\emptyset$
v_4 :	v_2, v_3	v_2, v_3	v_2, v_3	v_2, v_3	$v_2, \not{v}_3$	$\not{v}_2$	$\emptyset$

В табл. 5.1 представлены операции со стеком, а в табл. 5.2 показано, как изменяются списки вершин от итерации к итерации (столбцы) по мере удаления ребер.

Сначала в вершине стека находится v_1. Поэтому в списке смежности для v_1 произвольно выбираем некоторую верши-

ну (в данном случае это может быть только v_2) и заносим ее в стек. Удаляем пройденное ребро $\{v_1, v_2\}$. Для этого из списка смежности для v_1 исключаем вершину v_2, а из списка смежности для v_2 вершину v_1. Теперь состояние стека соответствует второй строке табл. 5.1, а вид списка смежности – второму столбцу табл. 5.2. На второй итерации в вершине стека содержится v_2. Теперь выбираем вершину из текущего списка смежности для v_2 (см. второй столбец табл. 5.2). Пусть это будет вершина v_1. Занесем ее в стек и удалим ребро $\{v_2, v_1\}$. В результате новое состояние стека соответствует третьей строке табл. 5.1, а вид списка смежности – третьему столбцу табл. 5.2. На третьей итерации список смежности для вершины v_1, находящейся в верхушке стека, оказался пустым. Выталкиваем ее из стека. Это означает, что в графе найден цикл, содержащий все ребра, инцидентные v_1, но не являющийся эйлеровым.

На трех последующих итерациях в стек заносятся вершины v_3, v_4, v_2, а из списков смежности удаляются все оставшиеся элементы. Таким образом, к началу седьмой итерации содержимое стека выглядит так: v_1, v_2, v_3, v_4, v_2, причем вершине соответствует самый правый элемент v_2. Так как все списки смежности теперь пусты, в течение последних пяти итераций (7 – 11) выполняется только выталкивание вершин из стека. Список всех вершин, выданных из стека (в порядке выдачи), имеет вид $(v_1,v_2,v_4,v_3,v_2,v_1)$ и, как нетрудно заметить, соответствует эйлерову циклу данного графа.

В этом графе есть еще один эйлеров цикл $(v_1,v_2,v_3,v_4,v_2,v_1)$. Ясно, что любые два таких цикла отличаются друг от друга только порядком обхода ребер.

5.2.3. О количестве эйлеровых графов

Задача определения числа эйлеровых графов является достаточно сложной. Рассмотрению этой, а также других задач пересчета и перечисления графов посвящена работа [4]. Здесь ограничимся теоремой, характеризующей долю эйлеровых графов в общем числе простых помеченных графов.

Теорема 5.3 *Почти все графы не являются эйлеровыми.*

$\triangleright$ Пусть $\mathcal{G}(n)$ – множество всех простых помеченных графов порядка n, а $\mathcal{G}_{ч}(n)$ – множество всех графов из $\mathcal{G}(n)$, не имеющих вершин нечетной степени.

Любой граф из $\mathcal{G}_{ч}(n)$ можно получить, добавляя к некоторому графу из $\mathcal{G}(n-1)$ еще одну вершину и соединяя ее со всеми вершинами нечетной степени (если таковые имеются), поэтому $|\mathcal{G}_{ч}(n)|<|\mathcal{G}(n-1)|$. Так как множество эйлеровых графов $\mathcal{G}_{э}(n)$ является подмножеством $\mathcal{G}_{ч}(n)$, запишем $|\mathcal{G}_{э}(n)|<|\mathcal{G}(n-1)|$. Разделив обе части неравенства на $|\mathcal{G}(n)|$ и учитывая, что $|\mathcal{G}(n)|=2^{C(n,2)}$ и $|\mathcal{G}(n-1)|=2^{C(n-1,2)}$, получим $|\mathcal{G}_{э}(n)|/|\mathcal{G}(n)| < 2^{C(n-1,2)-C(n,2)}$. Упростив показатель степени $C(n-1,2) - C(n,2) = \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} - \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = -(n-1)$, окочательно имеем, что $|\mathcal{G}_{э}(n)|/|\mathcal{G}(n)| < 2^{-(n-1)}$, а переходя к пределу при $n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathcal{G}_{э}(n)|/|\mathcal{G}(n)|=0$. Это значит, что при неограниченном увеличении числа вершин, в общем числе графов доля эйлеровых становится исчезающе малой, т. е. $|\mathcal{G}_{э}(n)| = o|\mathcal{G}(n)|$. $\triangleleft$

5.2.4. Задача почтальона

Пусть G — связный граф, имеющий k вершин нечетной степени и заданный матрицей весов ребер. Требуется найти кратчайший замкнутый маршрут, проходящий по всем ребрам графа. В качестве приложений, где может потребоваться решение этой или сходной задачи, можно указать контроль различных коммуникационных сетей (дорожных, электрических, газовых и т. п.), когда необходимо проверять все протяженные компоненты сети. В литературе по теории графов сформулированная выше задача называется *задачей почтальона*. Последнему далеко не безразлично знание наиболее короткого замкнутого маршрута обхода всех улиц своего участка (или некоторого их подмножества). Аналогичная задача стоит и перед курьером большого учреждения, доставляющим документы от одного "источника" к различным получателям.

Покажем, как можно решить рассматриваемую задачу. Ясно, что в графе существуют $k(k-1)/2$ кратчайших простых цепей, связывающих все пары вершин нечетной степени. Выберем из них $k/2$ цепей, таких, что

а) никакие две не имеют одинаковых конечных вершин;

б) суммарная длина всех этих цепей минимальна.

Заметим, что выбранные цепи не могут иметь общих ребер, как на рис. 5.11, что противоречило бы пункту б. Действительно, если цепь $(v_1, \ldots, v_2)$ имеет общее ребро e с цепью $(v_3, \ldots, v_4)$, то, удалив это ребро, получим две цепи, связывающих v_1 с v_3 и v_2 с v_4, суммарная длина которых меньше, чем у двух первых, на величину, равную удвоенному весу ребра e. Продублируем ребра всех выбранных цепей в графе G. В результате получим эйлеров мультиграф G', в котором нетрудно найти эйлеров цикл. Этот цикл и определяет искомый маршрут, отличаясь от него тем, что вместо обхода двух параллельных ребер в графе G' дважды проходит по соответствующему ребру в графе G. Очевидно, что длина маршрута равна сумме длин ребер G'.

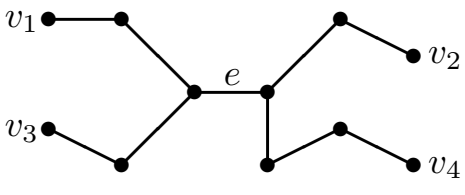


Рис. 5.11

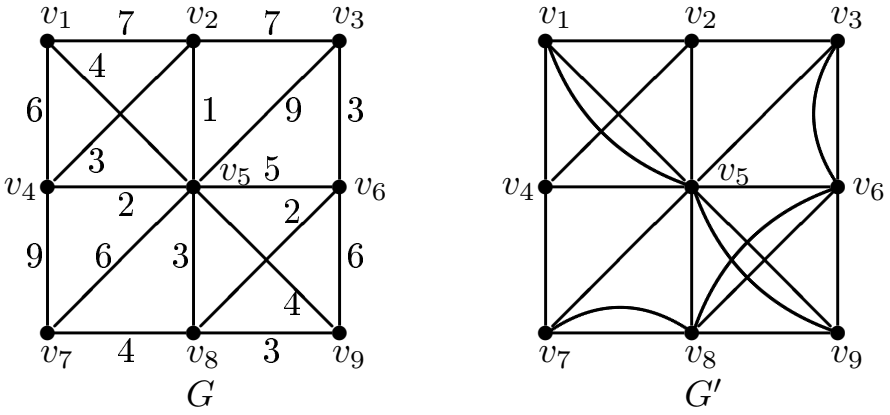


Рис. 5.12

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти "маршрут почтальона" в графе G, изображенном на рис. 5.12 (веса ребер проставлены на рисунке). Имеются четыре вершины нечетной степени v_1, v_3, v_7 и v_9, из которых можно составить C_4^2=6

различных пар. Найдем кратчайшую цепь для каждой пары. С этой целью составим матрицу весов графа и, используя алгоритм Флойда, получим матрицу $\mathbf{D}^{(9)}$ длин кратчайших путей (цепей) между всеми вершинами[19]. Выделим из неё подматрицу $\mathbf{D}^{(9)}_{1,3,7,9}$, образованную строками и столбцами с номерами 1, 3, 7 и 9. Это матрица длин всех кратчайших цепей, связывающих только вершины нечетной степени в рассматриваемом графе. Обе матрицы $\mathbf{D}^{(9)}$ и $\mathbf{D}^{(9)}_{1,3,7,9}$ приведены ниже:

$$\mathbf{D}^{(9)}= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 5 & 12 & 6 & 4 & 9 & 10 & 7 & 8 \\ 5 & 0 & 7 & 3 & 1 & 6 & 7 & 4 & 5 \\ 12 & 7 & 0 & 10 & 8 & 3 & 9 & 5 & 8 \\ 6 & 3 & 10 & 0 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 0 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 9 & 6 & 3 & 7 & 5 & 0 & 6 & 2 & 5 \\ 10 & 7 & 9 & 8 & 6 & 6 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 5 & 3 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 8 & 5 & 8 & 6 & 4 & 5 & 7 & 3 & 0 \end{array}\right] \end{array}, \quad \mathbf{D}^{(9)}_{1,3,7,9}= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_3 \\ v_7 \\ v_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_3 & v_7 & v_9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 12 & 10 & 8 \\ 12 & 0 & 9 & 8 \\ 10 & 9 & 0 & 7 \\ 8 & 8 & 7 & 0 \end{array}\right] \end{array}.$$

Теперь, используя матрицу $\mathbf{D}^{(9)}_{1,3,7,9}$, следует выбрать пару цепей, отвечающих приведенным ранее условиям. Имеется всего три варианта образования таких пар цепей, представленные в табл. 5.3. Поэтому задача решается путем простого перебора.

Таблица 5.3

Пара цепей	Цепь	Длина	Цепь	Длина	Общая длина
1	$v_1 - v_3$	12	$v_7 - v_9$	7	12+7=19
2	$v_1 - v_7$	10	$v_3 - v_9$	8	10+8=18
3	$v_1 - v_9$	8	$v_3 - v_7$	9	8+9=17

Как следует из таблицы, наилучшим является вариант 3. Следовательно, дублированию подлежат ребра, образующие кратчайшие цепи из v_1 в v_9 и из v_3 в v_7. Непосредственно по рис. 5.12 легко установить, что это цепи (v_1, v_5, v_9) и

[19] В общем случае, кроме $\mathbf{D}^{(n)}$, необходимо вычислять и матрицу вершин-предшественниц $\mathbf{P}^{(n)}$ (см. разд. 4).

(v_3, v_6, v_8, v_7). После дублирования пяти входящих в них ребер получаем эйлеров мультиграф G', изображенный на рис. 5.12. Используя, алгоритм Флёри, находим следующий вариант эйлерова цикла в графе G': $(v_1, v_2, v_3, v_6, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1, v_5, v_4, v_7, v_8, v_7, v_5, v_6, v_9, v_8, v_6, v_8, v_5, v_9, v_5, v_1)$, который одновременно является и кратчайшим замкнутым маршрутом почтальона в графе G при условии, что ребра $\{v_1,v_5\}$,$\{v_5,v_9\}$,$\{v_3,v_6\}$,$\{v_6,v_8\}$, $\{v_7, v_8\}$ обходятся дважды.

В рассмотренном примере граф содержал только четыре вершины нечетной степени. Поэтому поиск оптимума потребовал анализа всего трех вариантов решения. При бóльшем числе вершин количество вариантов быстро возрастает. Так, если k=6, то существует C_6^2=15 различных кратчайших цепей, связывающих пары вершин нечетной степени. При этом число возможных комбинаций по три цепи с различными концевыми вершинами равно 15. Если k=8, то число возможных комбинаций составляет 105, причем каждая включает в себя по четыре цепи. В общем же случае количество комбинаций, которые придется анализировать, определяется как $3{\cdot}5{\cdot}7{\ldots}(k{-}1)$, где k — число вершин нечетной степени. Таким образом, фактически приходится решать самостоятельную задачу, эквивалентную задаче отыскания *наибольшего паросочетания*[20] *минимального веса* в полном графе с четным числом вершин.

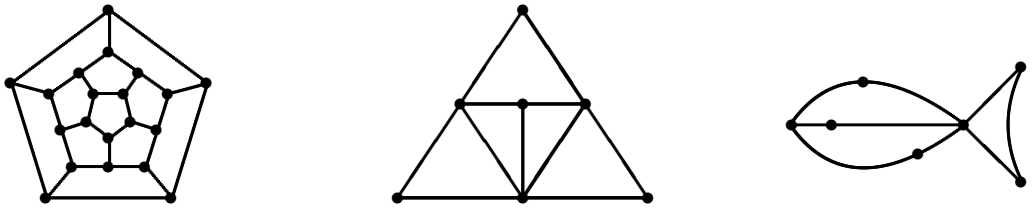
5.3. Гамильтоновы циклы

5.3.1. Определение и условия существования

Гамильтоновым называют простой цикл, включающий все вершины связного неориентированного графа. Аналогично определяется *гамильтонов контур* для орграфа. Граф (орграф), в котором есть гамильтонов цикл (контур), носит название *гамильтонова*.

[20]Паросочетанием называется множество ребер графа, выбранных так, что никакие два из них не являются смежными.

Слово "гамильтонов" в этих определениях является производным от имени У. Гамильтона , предложившего следующую игру под названием "Кругосветное путешествие". Каждой из двадцати вершин додекаэдра приписано название одного из городов мира. Требуется, переходя по ребрам додекаэдра от одного города к другому и посетив каждый из них только один раз, оказаться в исходной точке. Очевидно, что задача сводится к отысканию в графе додекаэдра (граф G_1 на рис. 5.13) простого цикла, проходящего через все вершины.



G_1 G_2 G_3

Рис. 5.13

В графе G_2, изображенном на рис. 5.13, гамильтонов цикл отсутствует, но имеется простая цепь, включающая все вершины. Такую цепь называют *гамильтоновой цепью*, а содержащий её граф — *полугамильтоновым.* Наконец, в графе G_3 на том же рисунке не существует ни гамильтоновой цепи, ни тем более, гамильтонова цикла. В таком случае говорят, что граф негамильтонов.

Рассмотрим следующую задачу планирования, характерную для химической промышленности. Имеется единственный комплекс аппаратуры или реактор, на котором можно производить n различных видов продукции v_i, причем в любой момент времени производится только один вид. При переходе к производству другого вида в зависимости от конкретного сочетания предшествующего и последующего видов либо требуется подготовка аппаратуры (настройка, очистка, охлаждение и т. п.), либо не требуется. Продукты производятся в непрерывном цикле, так что после производства в заданных количествах всех n видов процесс повторяется. Естественно возникает вопрос о том, существует ли циклическая последовательность производства n продуктов, вообще не требующая остановок для подготовки аппаратуры.

Пусть G — орграф, вершины которого соответствуют продуктам v_i и v_j, а дуги (v_i, v_j) отражают тот факт, что продукт v_j может производиться после v_i без остановки аппаратуры. Теперь ответ на поставленный вопрос зависит от того, существует ли в графе гамильтонов контур или не существует.

Сравнивая определения эйлерова и гамильтонова циклов, нельзя не заметить их существенное сходство. В первом случае накладывается требование однократного прохождения каждого ребра графа (вершины можно проходить неоднократно), а во втором — требование однократного прохождения каждой вершины. И поскольку для эйлеровых циклов имеется весьма простое необходимое и достаточное условие существования, естественно предположить (в силу отмеченного сходства), что и для гамильтоновых циклов есть подобный критерий. Однако такой критерий не найден. В настоящее время известно несколько условий существования гамильтоновых циклов. Одно из них устанавливает следующая *теорема Оре.*

Теорема 5.4 *Если для любой пары* $\{v, w\}$ *несмежных вершин графа* G *порядка* $n \geq 3$ *выполняется неравенство* $\deg v + \deg w \geq n$, *то* G — *гамильтонов граф.*

$\triangleright$ Допустим, что существует негамильтонов граф $G(V, E)$, в котором для любой пары несмежных вершин выполняется неравенство $\deg v + \deg w \geq n$. Будем добавлять к графу новые вершины, соединяя каждую из них с каждой вершиной G, до тех пор, пока получающийся при этом граф $G'(V', E')$ не станет гамильтоновым. Обозначим через k минимальное количество таких дополнительных вершин.

Пусть $(v, p, w, \ldots, v)$ — гамильтонов цикл в графе G', где $v, w \in V$, а p — одна из добавленных вершин. Заметим, что вершины v и w не являются смежными ни в G', ни тем более, в G (в противном случае, при указанной структуре цикла вершина p не нужна, что противоречит предположению о минимальности k). Более того, любая вершина $w' \in \operatorname{adj} w$ не может следовать за вершиной $v' \in \operatorname{adj} v$, потому что в этом случае цикл принимает вид $(v, p, w, \ldots, v', w', \ldots, v)$, и тогда опять вершина p оказывается лишней. Действительно, если фрагмент $w, \ldots, v'$ "перевернуть" $v', \ldots, w$, то цикл можно

организовать так: $(v, v', \ldots, w, w', \ldots, v)$, не используя p. Таким образом, в гамильтоновом цикле графа G' не может быть фрагментов v', w', т. е. за каждой вершиной, смежной с v, должна следовать вершина, не смежная с w. Это возможно при условии, что $|\overline{\mathrm{adj}\, w}| \geq \deg v$, где $\overline{\mathrm{adj}\, w}$ — множество вершин, не смежных с w. Количество таких вершин в графе G', очевидно, равно $n+k-\deg w$. Поэтому приведенное условие можно переписать так: $n+k-\deg w \geq \deg v$, или, собирая степени в правой части, $n+k \geq \deg w + \deg v$. При построении графа G' степень каждой вершины графа G увеличилась на k, значит применительно к G неравенство принимает вид $n+k \geq \deg w + \deg v + 2k$, а с учетом исходного предположения $\deg v + \deg w \geq n$, имеем $n+k \geq n+2k$. Последнее неравенство удовлетворяется лишь при $k=0$. Поэтому $G'=G$ и, следовательно, исходный граф гамильтонов. $\lhd$

Из доказанной теоремы вытекает *теорема Дирака*:

Теорема 5.5 *Если для любой вершины v графа G порядка $n>3$ выполняется неравенство $\deg v \geq n/2$, то G – гамильтонов граф.*

К сожалению, эффективность приведенных в обеих теоремах критериев оставляет желать лучшего. Действительно, так как сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его ребер, то очевидно, что в гамильтоновом графе, отвечающем условиям последней теоремы, должно быть не менее $n^2/4$ ребер. В частности, при $n=20$ это составляет 100 ребер. Однако граф с таким количеством вершин может быть гамильтоновым и при существенно меньшем числе ребер. Например, в графе G_1 на рис. 5.13, также имеющем двадцать вершин, всего тридцать ребер, и степени всех его вершин равны трем (а не десяти, как того требует теорема), но он гамильтонов. Еще более разительным примером является простой цикл C_{20}, в котором только двадцать ребер, а степени вершин равны двум. Несколько утрируя суть дела, можно сказать: данные критерии отражают тот очевидный факт, что при одном и том же числе вершин чем больше в графе ребер, тем выше вероятность того, что он гамильтонов.

Низкая эффективность подобных критериев, по-видимому, объясняется тем, что граница между гамильтоновыми и негамильтоновыми графами определяется не только величиной его связности, которая во многом определяется степенями вершин, но и другими структурными особенностями графа. Наглядным подтверждением этого может служить следующая теорема, являющаяся одним из наиболее эффективных критериев, касающихся гамильтоновых графов.

Теорема 5.6 *Любой 4-связный*[21] *планарный*[22] *граф является гамильтоновым.*

В плане рассмотрения вопроса о критериях гамильтоновости несколько "утешает" факт, декларируемый следующей теоремой, которая отражает типичный случай.

Теорема 5.7 *Почти все графы гамильтоновы.*

Это значит, что с ростом числа вершин доля гамильтоновых графов увеличивается, стремясь в пределе к 1. Так, из 34 графов, имеющих 5 вершин, только 8 гамильтоновых (23,5%), тогда как среди 156 графов с 6 вершинами их уже 48 (30,8%).

5.3.2. Методы поиска гамильтоновых циклов

В основе этих методов лежит тот или иной способ реализации перебора различных вариантов цепей. Наиболее простым, но вместе с тем и наиболее трудоемким представляется решение, когда после выбора вершины $v_{\text{нач}}$ рассматриваются различные перестановки из множества остальных $n-1$ вершин и для каждой проверяется наличие в графе соответствующей гамильтоновой цепи. Если такая цепь есть и последняя вершина цепи связана с $v_{\text{нач}}$, найден гамильтонов цикл. Очевидно, что в худшем случае при этом методе потребуется сформировать все $(n-1)!$ перестановок, причем большая часть работы

[21] Связность (реберная) определяется как наименьшее количество ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

[22] Планарным называется граф, который может быть изображен на плоскости так, что никакие два ребра не пересекаются.

оказывается проделанной впустую. На практике применяют методы частичного перебора, в основе которых лежат различные критерии, позволяющие исключить расмотрение вариантов цепей, отсутствующих в заданном графе. Рассмотрим два таких метода, демонстрирующих разные подходы к поиску гамильтоновых циклов.

Алгебраический метод. В разд. 4.3 была введена матрица всех маршрутов с l промежуточными вершинами для всех упорядоченных пар вершин графа, обозначенная как $\mathbf{P}^{(l)}$ и определяемая с помощью рекуррентного соотношения

$$\mathbf{P}^{(l)}=\mathbf{P}'\times\mathbf{P}^{(l-1)},$$

где $l=1,2,\ldots,$ в качестве $\mathbf{P}^{(0)}$ берется матрица смежности графа, а $\mathbf{P}'$ получается из той же матрицы смежности, если в каждом ее столбце единицы заменить меткой вершины, соответствующей столбцу.

Очевидно, что матрицу всех гамильтоновых цепей графа можно получить, исключив из матрицы $\mathbf{P}^{(n-2)}$ произведения с повторяющимися сомножителями (считая и конечные вершины цепей). Диагональные элементы обработанной таким образом матрицы $\mathbf{P}^{(n-2)}$ в совокупности описывают все простые циклы графа, содержащие $n-1$ вершин, а диагональные элементы матрицы $\mathbf{P}^{(n-1)}$ после аналогичной обработки дают все простые циклы графа, включающие n вершин, т. е. гамильтоновы циклы, причем *любой диагональный элемент отражает все циклы.* Это значит, что вместо матрицы $\mathbf{P}^{(n-1)}$ достаточно сформировать только один из ее столбцов, соответствующий произвольно выбранной вершине v. Искомый результат содержится в строке v найденного столбца.

Для вычислений можно использовать соотношение

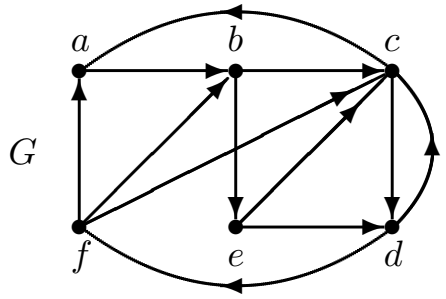
$$\mathbf{P}_v^{(l)} = \mathbf{P}' \times \mathbf{P}_v^{(l-1)},$$

где $l=1,2,\ldots,(n-1)$, а $\mathbf{P}_v^{(l)}$ — столбец матрицы $\mathbf{P}^{(l)}$, соответствующий вершине v. В качестве $\mathbf{P}_v^{(0)}$ следует принять столбец v матрицы смежности графа.

Работа только с одним столбцом матрицы $\mathbf{P}_v^{(l)}$ позволяет в n раз уменьшить трудоемкость вычислений. Последняя, однако, и в этом случае остается весьма существенной $O(n^3)$.

Дополнительный выигрыш можно получить, если на каждом шаге после получения очередного столбца $\mathbf{P}_v^{(l)}$ исключать из него произведения с повторяющимися сомножителями, а также произведения, в которых хоть один из элементов совпадает с концевой вершиной соответствующей цепи. Кроме того, целесообразно "обнулять" и диагональный элемент столбца, так как последний отражает лишь циклы длины $(l+1)<n$, содержащие вершину v.

В качестве примера на применение описанного метода решим задачу поиска гамильтоновых циклов в графе G с матрицей смежности $\mathbf{A}$, представленных на рис. 5.14. Пусть $v=a$.



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 5.14

Тогда $\mathbf{P}_a^{(0)}$ — первый столбец матрицы смежности, а матрица $\mathbf{P}'$ получается из матрицы смежности, как описано ранее:

$$\mathbf{P}' = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & e & 0 \\ a & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \mathbf{P}_a^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

В данном графе шесть вершин. Поэтому решение получим за пять итераций. Результаты вычислений приведены ниже:

$$1)\ \mathbf{P'P}_a^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ f \\ c \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{P}_a^{(1)};\quad 2)\ \mathbf{P'P}_a^{(1)} = \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix}\begin{bmatrix} \underline{bc} \\ ec \\ df \\ fc \\ df \\ bc \end{bmatrix},\ \mathbf{P}_a^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ ec \\ df \\ fc \\ df \\ bc \end{bmatrix};$$

$$3)\ \mathbf{P'P}_a^{(2)} = \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix}\begin{bmatrix} \underline{bec} \\ cdf + edf \\ \underline{dfc} \\ \underline{cdf} + fbc \\ \underline{cdf} + dfc \\ bec + \underline{cdf} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{P}_a^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ cdf + edf \\ 0 \\ fbc \\ cdf + dfc \\ bec \end{bmatrix};$$

$$4)\ \mathbf{P'P}_a^{(3)} = \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 \\ ecdf + edfc \\ \underline{dfbc} \\ \underline{fbec} \\ dfbc \\ \underline{bcdf} + \underline{bedf} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{P}_a^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ ecdf + edfc \\ 0 \\ fbec \\ dfbc \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$5)\ \mathbf{P'P}_a^{(4)} = \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{matrix}\begin{bmatrix} becdf + bedfc \\ \underline{edfbc} \\ \underline{dfbec} \\ 0 \\ \underline{dfbec} \\ \underline{becdf} + \underline{bedfc} \end{bmatrix},\qquad \mathbf{P}_a^{(5)} = \begin{bmatrix} becdf + bedfc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь подчеркнуты элементы, подлежащие удалению перед выполнением следующей итерации. Это диагональные элементы промежуточных столбцов и произведения с повторами вершин. Диагональный элемент последнего столбца содержит два произведения вершин. Это означает, что в рассматриваемом графе есть два гамильтоновых цикла: (a,b,e,c,d,f,a) и (a,b,e,d,f,c,a), что легко проверить непосредственно на графе.

Метод последовательного перебора. В противоположность алгебраическому методу, когда одновременно формируются все цепи, этот метод предполагает их последовательное построение. На каждом шаге "наращивается" только одна цепь путем добавления дуги, связывающей ее последнюю вершину с одной из смежных, еще *не включенных* в цепь. Очевид-

но, что этот процесс конечен в силу указанного ограничения и конечного числа вершин графа и завершается, когда такое наращивание становится невозможным. Если к моменту останова цепь содержит все вершины графа, т. е. является гамильтоновой, остается выяснить, есть ли дуга, соединяющая конец цепи с ее началом. В противном случае имеем простую цепь, которая не может быть даже частью гамильтонова цикла.

Пусть a — начальная, v — конечная вершины сформированной цепи, а P — множество вершин, вошедших в цепь. Тогда варианты завершения описанного процесса выглядят так:

а) $|P|{=}n$ и $a{\in}\Gamma(v)$ — найден гамильтонов цикл;

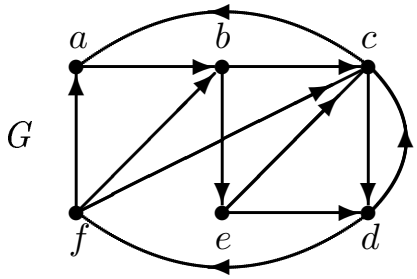
б) $|P|{=}n$ и $a{\notin}\Gamma(v)$ — найдена гамильтонова цепь;

в) $|P|{<}n$ и $\Gamma(v){\subseteq}P$ — получена простая цепь длины $|P|{-}1$, которая не может быть продлена.

Если требуется найти лишь один гамильтонов цикл, то в случае $(а)$ задачу можно считать решенной. Если же ищутся все циклы, а также в случаях $(б)$ и $(в)$, необходимо вернуться к предпоследней вершине найденной цепи $u{=}Pred(v)$, отметив при этом вершину v как "прозондированную" из вершины u и удалив ее из P. Теперь в качестве конечной вершины следует рассматривать вершину u и попытаться продлить цепь, выбрав одну из вершин множества $\Gamma(u)$, исключая вершины, содержащиеся в P, и вершины, прозондированные из u. Если же множество $\Gamma(u){-}P{-}$"прозондированные из u" оказывается пустым, следует выполнить возврат к предпоследней вершине текущей цепи, т. е. к вершине $w{=}Pred(u)$, исключив при этом u из множества P и сняв пометку "прозондирована" со всех вершин множества $\Gamma(u){-}P$. В процессе обработки текущая цепь меняется на каждом шаге, удлиняясь или укорачиваясь, причем ее промежуточные состояния соответствуют всем простым цепям графа, начинающимся в вершине a. Перебор завершается, когда прозондированными оказываются все вершины множества $\Gamma(a)$. К этому моменту должны быть выявлены все гамильтоновы циклы графа.

Покажем на примере, как "работает" рассматриваемый метод. Для этого используем граф G из предыдущего раздела,

продублировав его на рис. 5.15, и дополнив (вместо матрицы смежности) списком смежности Γ. Для простоты изложения будем рассматривать множества P и $\Gamma(v_i)$ как упорядочен-



$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma(a) = \{b\}, \\ \Gamma(b) = \{c, e\}, \\ \Gamma(c) = \{a, d\}, \\ \Gamma(d) = \{c, f\}, \\ \Gamma(e) = \{c, d\}, \\ \Gamma(f) = \{a, b, c\}. \end{cases}$$

Рис. 5.15

ные, а результаты преобразования цепи по шагам заносить в таблицу. В качестве исходной опять берем вершину a. Поэтому вначале множество $P{=}\{a\}$. Фиксируем это в первой строке табл. 5.4. Имеется единственная вершина, непосредственно

Таблица 5.4

Итерация	Цепь	Итерация	Цепь	Итерация	Цепь	Итерация	Цепь
1	a	8	a, b	15	a, b, e	22	a, b, e, d
2	a, b	9	a, b, e	16	a, b, e, d	23	a, b, e
3	a, b, c	10	a, b, e, c	17	a, b, e, d, c	24	a, b
4	a, b, c, d	11	a, b, e, c, d	18	a, b, e, d	25	a
5	a, b, c, d, f	12	$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{f}$	19	a, b, e, d, f		
6	a, b, c, d	13	a, b, e, c, d	20	$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{d}, \mathbf{f}, \mathbf{c}$		
7	a, b, c	14	a, b, e, c	21	a, b, e, d, f		

доступная из a. Это — вершина b. Поэтому включаем ее в формируемую цепь. Соответственно множество P принимает вид $\{a, b\}$.[23] Теперь пытаемся нарастить цепь от вершины b. Из нее, как показывает список смежности, выходят две дуги (b, c) и (b, e), и обе могут быть использованы, так как ни одна из вершин c и e не принадлежит множеству P. Выбираем первую из них c и включаем в P, получая после этого цепь (a, b, c). На третьем шаге имеем $\Gamma(c){=}\{a, d\}$, но первая в этом

[23] Здесь и далее P отождествляем с формируемой цепью.

списке вершина $a \in P$, поэтому берем вторую — d, с результатом $P=\{a, b, c, d\}$. На четвертом шаге, поступая аналогично, добавляем вершину f, и цепь принимает вид (a, b, c, d, f).

Дальнейшее наращивание становится невозможным, так как все вершины множества $\Gamma(f)$ уже содержатся в сформированной цепи. Поэтому возвращаемся к вершине d и вновь анализируем ее список смежности $\Gamma(d)=\{c, f\}$. Здесь $c \in P$, а вершина f только что прозондирована, и значит, "кандидатов" для присоединения к цепи нет. Исключаем d и возвращаемся к вершине c. С ней ситуация повторяется, поэтому после седьмой итерации цепь сокращается до двух вершин и принимает вид (a, b), причем вершина c помечена как прозондированная из b. Список смежности вершины b содержит вершины c и e, из которых только e не прозондирована из b и не содержится в текущей цепи. Поэтому следует перейти к вершине e. На девятом шаге из двух подходящих вершин $\Gamma(e)=\{c, d\}$ выбираем c, после чего цепь выглядит как (a, b, e, c). Еще две итерации (10 и 11) продлевают цепь до гамильтоновой, которая имеет вид (a, b, e, c, d, f), и поскольку в графе есть дуга (f, a), получаем первый гамильтонов цикл.

Далее следуют итерации, сокращающие цепь до тех пор, пока в списке смежности последней вершины не найдется подходящего продолжения. Такая ситуация наступает на шаге 15, когда цепь принимает вид (a, b, e). Из двух вершин множества $\Gamma(e)$ одна еще не использована. Это вершина d. Выбрав ее, в итоге после шага 19 получаем еще одну гамильтонову цепь (a, b, e, d, f, c) и соответствующий цикл, так как в графе есть дуга (c, a).

Дальнейшие действия приводят только к сокращению цепи. Процесс завершается на шаге 25, когда в цепи остается только исходная вершина a. Таким образом, окончательно имеем два цикла: (a, b, e, c, d, f, a) и (a, b, e, d, f, c, a), что совпадает с результатом, полученным алгебраическим способом.

Формализованное описание рассмотренного способа поиска гамильтоновых циклов, в котором:

P – множество вершин, включенных в формируемую цепь;
$Pred_u$ – вершина, предшествующая вершине u в цепи;

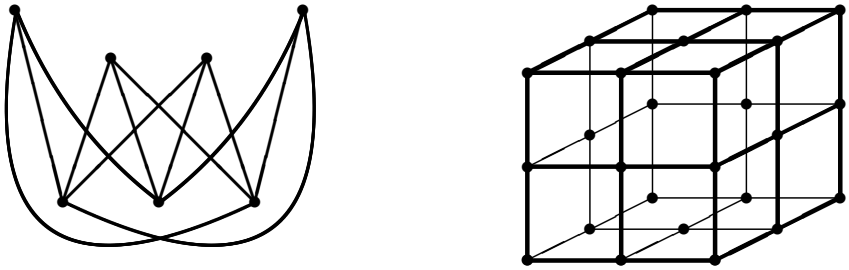
W_u – множество вершин, "прозондированных" из u;
$v_{\text{нач}}$ – исходная вершина при поиске циклов;
v – последняя вершина текущей цепи,

можно представить в следующем виде:

```
begin                    { – Г А М И Л Ь Т О Н – }
  for u ∈ V do      { Вначале для каждой вершины графа u }
  { W_u := ∅;     { множество прозондированных из u пусто; }
  { Pred_u := u;  { в качестве предшествующей принята u. }
  v := v_нач;  { За последнюю вершину цепи взята исходная, }
  P := {v};    { т. е. вначале цепь состоит из одной вершины. }
  while  P ≠ ∅  do          { Выполнять, пока P не пусто: }
  { if Γ(v)−P−W_v ≠ ∅ { Есть возможность продлить цепь? }
                                          { "да" }
    { select u ∈ Γ(v)−P−W_v; { Выбрать вершину u; }
      P := P+{u};                  { включить в цепь; }
      Pred_u := v;          { теперь v предшествует u; }
      v := u;     { далее считать u последней в цепи. }
      if (P=V)and(v_нач∈Γ(v))
    then { { найден гамильтонов цикл }
           then { while Pred_u≠∅ do  { Вывод списка }
                  { output(u);          { вершин цепи, }
                  { u:=Pred_u;                { начиная }
                output(u);                { с конечной. }
                                          { "нет" }
    else { P:=P−{v}; { Исключить последнюю вершину; }
           W_v := ∅;  { "опустошить" множество вершин, }
                                { прозондированных из v; }
           u := Pred_v;       { u – предпоследняя вершина; }
           W_u := W_u+{v};        { v прозондирована из u; }
           v := u;     { далее считать u последней в цепи. }
end.                     { – Г А М И Л Ь Т О Н – }
```

Выявление негамильтоновости графа. В общем случае установить, является ли граф гамильтоновым, как уже было показано в 5.3.1, достаточно сложно. Однако в некоторых случаях негамильтоновость можно выявить, не прибегая к трудоемким алгоритмам. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие простые приемы решения этой задачи. Пусть требуется определить характер графов, представленных на рис. 5.16.

Граф G_1 имеет семь вершин. Значит, соответствующий гамильтонов цикл должен состоять из семи ребер, т. е. иметь длину, равную семи. Но, из рис. 5.16 видно, что граф G_1 двудольный и поэтому (в силу теоремы 1.2) может содержать



G_1 G_2

Рис. 5.16

только циклы четной длины. Отсюда следует, что граф негамильтонов. Обобщая, можно утверждать, что *любой двудольный граф с нечетным числом вершин не может быть гамильтоновым*. Таким образом, решая задачу выявления негамильтоновости для графа с нечетным числом вершин, целесообразно проверить его на двудольность, используя алгоритм, изложенный в разд. 1.3.

Отметим, что в общем случае двудольность графа (в отличие от графа G_1, представленного на рис. 5.16) не всегда очевидна. Так, граф G_2 на рис. 5.16 также двудольный, но чтобы установить это, требуются некоторые усилия.

Перейдем к анализу графа G_2, изображение которого на рис. 5.16 совмещено с трехмерным кубом так, что вершины графа совадают с серединами граней и ребер куба, а также с его вершинами. В подобных случаях говорят, что граф *уложен* на некоторой поверхности. В данном случае это поверхность куба. Легко подсчитать, что граф G_2 имеет 26 вершин и 48 ребер. Так как число вершин четно, вышеописанный прием здесь неприемлем. Поступим иначе, но предварительно введем понятие *независимого множества вершин*, под которым следует понимать любое множество вершин, таких, что никакие две из них не смежны. Независимое множество называется *максимальным*, если оно не является собственным под-

множеством некоторого независимого множества вершин. В графе G_2 есть два таких множества. Одно из них V_1 включает все вершины, находящиеся в середине ребер куба, другое V_2 состоит из вершин, совпадающих с вершинами куба и серединами его граней. Рассмотрим множество V_1. Каждая из входящих в него вершин инцидентна четырем ребрам, из которых только два могут принадлежать гамильтонову циклу. Так как $|V_1|=12$, то общее число ребер, не входящих в цикл только по множеству V_1, равно 24. Оставшихся 24 ребер из 48 не достаточно для организации гамильтонова цикла, который в данном графе должен бы (по числу вершин) иметь длину 26. А это значит, что граф G_2 негамильтонов.

Оригинальный способ решения задачи, использующий особенности структуры графа, предложил Ю.Н.Заваровский[24].

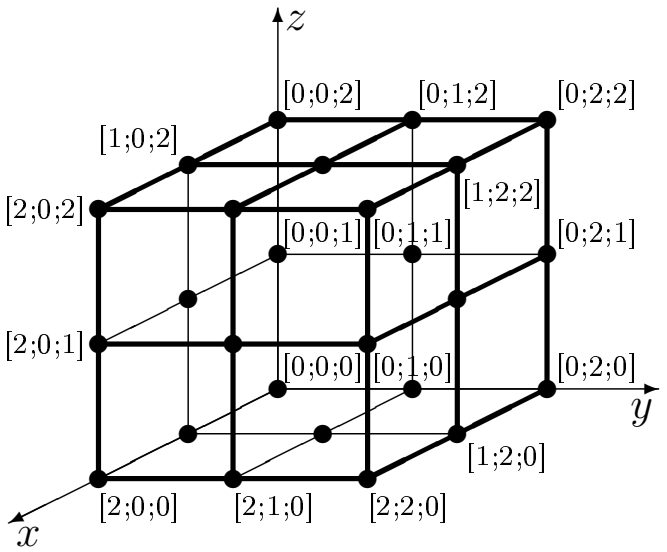


Рис. 5.17

Свяжем с кубом, на котором уложен рассматриваемый граф, декартову систему координат с единичным отрезком, соответствующим ребру графа, как показано на рис. 5.17. Тогда каждой вершине можно приписать числовую пометку, равную сумме ее координат. Ясно, что при переходе из одной вершины в другую, смежную с ней, значение пометки увеличивается или уменьшается на единицу, становясь либо четным, либо

[24] Доцент кафедры высшей математики Всероссийского заочного финансово-экономического института.

нечетным. При таком характере чередования в гамильтоновом цикле на 26 вершин должно быть 13 вершин с четными и 13 с нечетными пометками. Однако простой подсчет показывает, что в графе 14 "четных" и 12 "нечетных" вершин, т. е. гамильтонова цикла быть не может.

Если использовать понятие двудольности, можно дать и более простое обоснование полученного результата. Поскольку граф двудольный, любой цикл в нем, в том числе и гамильтонов, должен содержать четное число вершин при строгом чередовании по их принадлежности к разным долям. Следовательно, для гамильтоновости графа необходимо, чтобы доли имели равное число вершин. В рассматриваемом случае это не так, значит, граф негамильтонов.

Вышеизложенное позволяет сделать вывод о том, что *любой двудольный граф с четным числом вершин может быть гамильтоновым только при равенстве его долей.*

5.4. Задача коммивояжёра

Так называется широко известная классическая задача исследования операций, которая в графовой интерпретации формулируется следующим образом. Имеется полный граф (орграф), заданный матрицей весов $\mathbf{C}$. Требуется найти гамильтонов цикл с минимальной суммой составляющих его ребер (дуг). Если трактовать вес ребра $c_{i,j} \geq 0$ как расстояние между вершинами v_i и v_j, то задача заключается в отыскании кратчайшего гамильтонова цикла.

В литературе по исследованию операций часто приводится следующая формулировка, определившая название задачи. Коммивояжёр (агент по сбыту) должен посетить n городов, начиная с одного из них, и вернуться в исходный пункт, побывав в каждом только один раз. Для любой пары городов v_i и v_j известно расстояние (время или стоимость переезда, перелета) $c_{i,j}$. Каким должен быть кратчайший (наиболее дешевый) маршрут коммивояжёра?

5.4.1. Применение и методы решения задачи

На практике с этой оптимизационной задачей и различными ее модификациями постоянно сталкиваются фирмы и агентства, занимающиеся доставкой грузов. Еще одна область применения — это планирование производства n различных продуктов на единственном комплекте технологического оборудования (см. разд. 5.3.1). Если $c_{i,j}$ — это время на переналадку оборудования при переходе к производству продукта v_j после продукта v_i, то наилучший по времени порядок производства всех n продуктов определяется кратчайшим гамильтоновым циклом в соответствующем полном графе.

Наглядный пример применения задачи коммивояжёра приведен в [12]. При производстве печатных плат необходимо сделать большое количество отверстий в различных точках платы. Автоматический сверлильный станок, выполняющий эту операцию, должен наряду с собственно сверлением выполнять позиционирование сверла (платы). Временны́е затраты на это действие непосредственно зависят от порядка обхода вышеуказанных точек. Минимизировать общее время выполнения подобной обработки платы можно за счет выбора оптимальной последовательности обхода точек сверления, т. е. перед нами задача коммивояжёра.

Несмотря на простоту формулировки, задача оказывается весьма сложной. Это одна из оптимизационных комбинаторных задач, для которых эффективные алгоритмы неизвестны. Существуют различные подходы к ее решению.

Простейший подход, основанный на переборе всех вариантов, годится лишь для графов малой размерности. Так, при числе вершин n=6, необходимо сформировать $(n-1)!$=5!=120 перестановок, каждая из которых определяет некоторый гамильтонов цикл, подсчитать, используя матрицу весов, длину всех этих циклов и выбрать из них оптимальный(е).

Более продуктивен подход, основанный на частичном переборе, когда на основе некоторых критериев отбрасываются заведомо бесперспективные варианты. Именно такой подход реализуется с помощью *метода ветвей и границ.*

5.4.2. Метод ветвей и границ

Принцип ветвления. Рассмотрение будем вести применительно к ориентированным графам. В полном орграфе имеется множество S_0 гамильтоновых циклов различной длины. Нас интересует цикл минимальной длины. Для начала найдем нижнюю границу этой величины, т. е. такое значение, меньше которого длина гамильтонова цикла в заданном графе не может быть ни при каких обстоятельствах. Соответствующую процедуру рассмотрим позднее, а пока полагаем, что оценка нижней границы L_0 найдена. Описываемый далее процесс для четырехвершинного графа G на рис. 5.18 можно представить в виде бинарного дерева T, приведенного здесь же.

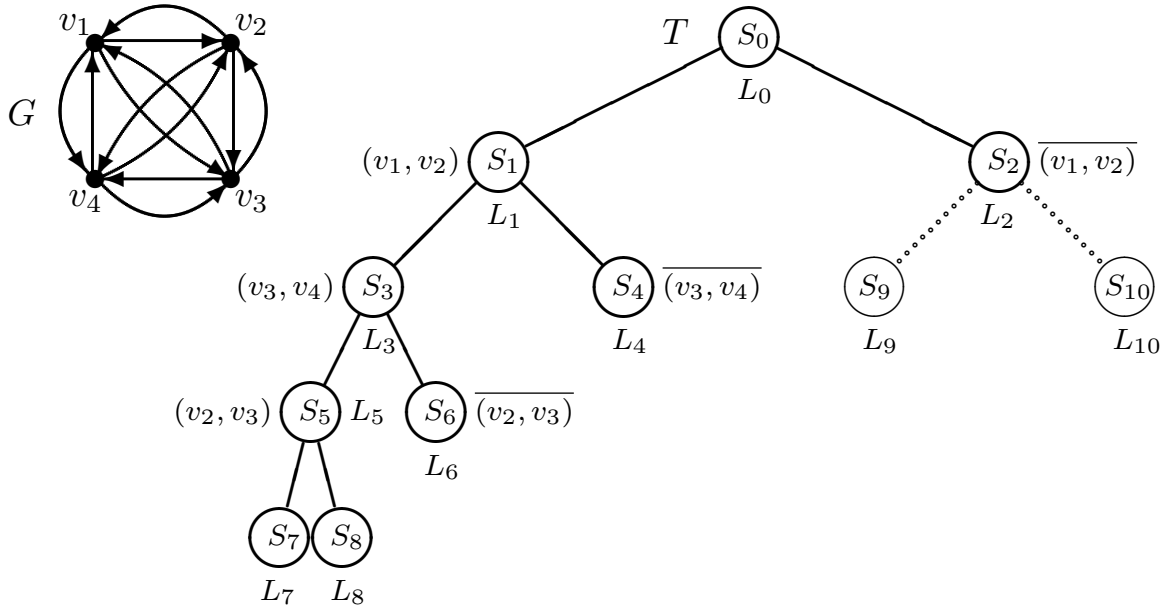


Рис. 5.18

Мысленно разобъем множество всех циклов на два непересекающихся подмножества, используя в качестве критерия вхождение в цикл некоторой дуги, например (v_1, v_2). Пусть S_1 — подмножество гамильтоновых циклов, содержащих дугу (v_1, v_2), а S_2 — подмножество циклов, не содержащих эту дугу. Для каждого подмножества находим нижнюю границу длины минимального цикла. Пусть это будут L_1 и L_2 соответственно, причем $L_1 < L_2$. Выбираем подмножество S_1 с меньшей нижней границей и разбиваем его на два непересе-

кающихся подмножества S_3 и S_4, но уже на основе другой дуги, например (v_3, v_4). Затем находим нижние границы L_3 и L_4 для этих двух подмножеств. Предположим, что $L_3 < L_4$ и $L_3 < L_2$. Это значит, что разбиению подлежит подмножество S_3. Используя для этой цели дугу (v_2, v_3), получаем S_5 и S_6 с нижними границами L_5 и L_6 соответственно. Наконец, если L_5 меньше, чем L_6, L_4 и L_2, разбиение множества S_5 по дуге (v_4, v_1) дает подмножества S_7 и S_8, из которых первое состоит из единственного гамильтонова цикла (v_1, v_2, v_3, v_4), причем нижняя граница L_7 есть длина этого цикла. Подмножество S_8 пусто, так как в четырехвершинном графе не может быть гамильтоновых циклов, содержащих дуги $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$ и не содержащих дугу (v_4, v_1). В качестве нижней границы для S_8 положим ∞. На этом процесс ветвления дерева можно считать законченным при условии, что L_7 меньше нижних границ всех подмножеств, соответствующих листьям дерева, (L_2, L_4, L_6, L_8). В разбираемом примере по отношению к S_6[25] и S_8 это условие выполняется автоматически ($L_6 = L_8 = \infty$), тогда как S_4 и S_2 вполне могут иметь нижние границы, не превышающие L_7. Если например $L_2 \leq L_7$, то процесс ветвления следует продолжить, как показано на рисунке пунктирными линиями. И вполне может оказаться, что оптимальное решение окажется на этом пути. Но в любом случае процесс завершается, когда подмножество с минимальной нижней границей сократится до одного цикла.

Оценка нижней границы. Теперь обратимся к способу оценки нижней границы длины гамильтоновых циклов. Используем тот факт, что если к элементам строки i матрицы $\mathbf{C}$ прибавить или отнять некоторое число α_i, то длина всех гамильтоновых циклов соответственно увеличится или уменьшится на эту величину. Действительно, элементы строки i определяют длины всех дуг, выходящих из вершины v_i, и по-

[25] Вообще в полном орграфе с четырмя вершинами любая дуга определяет два различных гамильтонова цикла, т. е. в нашем случае множество S_1 состоит всего из двух циклов. Более того, в таком графе любой гамильтонов цикл однозначно определяется двумя дугами. Поэтому множество S_3 содержит один цикл, включающий дуги (v_1, v_2) и (v_3, v_4), а это значит, что и S_4 также состоит из единственного цикла, а S_6 пусто.

скольку любой гамильтонов цикл обязательно содержит одну (и только одну) из этих дуг, его длина изменится на величину α_i. Ясно, что при этом соотношения между циклами по длине сохранятся, т. е. самый короткий таковым и останется. Точно такие же рассуждения справедливы и для столбца j матрицы весов, с той лишь разницей, что речь идет обо всех дугах, входящих в вершину v_j.

Пусть $\alpha_i = \min\{c_{i,j}\}$, $j=\overline{1,n}$ — минимальный элемент строки i матрицы $\mathbf{C}$. Преобразуем матрицу путем вычитания из элементов каждой строки соответствующего минимального элемента этой строки, положив $c_{i,j}=c_{i,j}-\alpha_i$, $j=\overline{1,n}$. Такая операция носит название *редукции матрицы по строкам.* Очевидно, что после ее выполнения каждая строка должна содержать хотя бы по одному нулевому элементу.

Совершенно аналогично определяется операция *редукции матрицы по столбцам.* Находятся минимальные элементы по столбцам $\beta_j = \min\{c_{i,j}\}$, $i=\overline{1,n}$, после чего выполняется преобразование $c_{i,j}=c_{i,j}-\beta_j$, $i=\overline{1,n}$ по всем столбцам матрицы. В результате в каждом столбце появится хотя бы один нулевой элемент.

Понятно, что в результате полной редукции весовой матрицы как по строкам, так и по столбцам, длины всех гамильтоновых циклов в графе должны уменьшиться на величину $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j$. Эта величина может рассматриваться как безусловная нижняя граница длины кратчайшего гамильтонова цикла в полном орграфе.

Покажем, как определяется нижняя граница множества гамильтоновых циклов при условии, что все они содержат некоторую дугу, например (v_i, v_j). Так как любая вершина в цикле может иметь только одну входящую и одну выходящую дугу, использование (v_i, v_j) фактически накладывает запрет на включение остальных дуг, выходящих из v_i и входящих в v_j. Запретить использование этих дуг можно, исключив из весовой матрицы строку i и столбец j. Кроме того, необходимо запретить использование дуги (v_j, v_i), которая образует цикл с (v_i, v_j). С этой целью достаточно положить $c_{j,i}=\infty$.

Редукция преобразованной таким образом матрицы позволяет получить нижнюю границу множества циклов, содержащих дугу (v_i, v_j).

Нижняя граница для множества гамильтоновых циклов, не содержащих (v_i, v_j), получается путем редукции весовой матрицы, в которой элемент $c_{i,j}$ полагаем равным ∞.

Наконец, дугу, по которой происходит разбиение очередного рассматриваемого подмножества гамильтоновых циклов, (см. бинарное дерево на рис. 5.18) целесообразно выбирать из числа тех, веса которых в редуцированной матрице оказались нулевыми. Во-первых, это наиболее короткие дуги и, во-вторых, они являются элементами естественной (возможно даже циклической) структуры в графе, имеющей минимальную длину. Однако количество таких дуг довольно велико, не менее числа вершин в графе. Задача выбора может быть решена путем оценки для каждой из них "штрафа" (потерь) за невключение дуги в гамильтонов цикл. Пусть, например, (v_i, v_j) одна из дуг с нулевым весом, не включенная в цикл. Значит, в цикле имеется орцепь, связывающая вершину v_i с v_j. Начальной дугой этой цепи должна быть одна из дуг, выходящих из v_i и отличная от (v_i, v_j), а конечной – одна из дуг, входящих в v_j и также отличная от (v_i, v_j). На сумму весов этих дуг в редуцированной матрице и произойдет удлинение цикла при отказе от использования дуги (v_i, v_j). Обозначим минимальный элемент i строки (не считая $c_{i,j}$) как A_i, а минимальный элемент j столбца (также не считая $c_{i,j}$) как B_j. Назовем штрафом за неиспользование дуги (v_i, v_j) сумму $\phi_{i,j}=A_i+B_j$. Максимальный из штрафов по множеству "нулевых" дуг редуцированной матрицы определяет ту из них, по которой целесообразно выполнять дальнейшее разбиение очередного подмножества циклов.

Пример. Разберем пример на применение описанного варианта реализации метода ветвей и границ. Пусть граф задан матрицей весов, на рис. 5.19,*а*.[26] Заметим, что в силу особой

[26]Не обязательно, чтобы матрица была симметричной, хотя это представляется наиболее естественным при трактовке весов дуг как расстояний. Рассматриваемый алгоритм дает решение в самом общем случае.

роли "нулевых" дуг в качестве значения для диагональных элементов матрицы вместо нуля используется ∞.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	∞	3	93	13	33	9
v_2	4	∞	77	42	21	16
v_3	45	17	∞	36	16	28
v_4	39	90	80	∞	56	7
v_5	28	46	88	33	∞	25
v_6	3	88	18	46	92	∞

а

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	α_i	A_i
v_1	∞	0	75	2	30	6	3	2
v_2	0	∞	58	30	17	12	4	12
v_3	29	1	∞	12	0	12	16	1
v_4	32	83	58	∞	49	0	7	32
v_5	3	21	48	0	∞	0	25	3
~~v_6~~	~~0~~	~~85~~	~~0~~	~~35~~	~~89~~	~~∞~~	3	0
β_j	0	0	15	8	0	0	Δ=81	
B_j	0	1	48	2	17	0		$\phi_{6,3}$=48

б

Рис. 5.19

Выполнив редукцию по строкам и по столбцам, получаем матрицу, показанную на рис. 5.19,*б*. Там же представлены столбец α_i и строка β_j, использованные при редукции. Суммируя их содержимое, находим начальную оценку нижней границы длины гамильтоновых циклов L_0=Δ=81. Для каждой "нулевой" дуги полученной матрицы отыскиваем составляющие штрафа $\phi_{i,j}$=A_i+B_j и записываем их в столбец A_i и строку B_j. Максимальный штраф $\phi_{6,3}$=A_6+B_3=48 соответствует дуге (v_6, v_3). Поэтому именно ее целесообразно взять в качестве основы при разбиении множества гамильтоновых циклов на два подмножества $S(v_6, v_3)$ и $S(\overline{v_6, v_3})$, таких, что все циклы первого содержат указанную дугу, все циклы второго ее не содержат. Этим подмножествам соответствуют матрицы на рис. 5.20,*а,в*. Первая получена путем вычеркивания шестой строки и третьего столбца в матрице на рис. 5.19,*б*. Кроме того, элемент $c_{3,6}$ принят равным ∞, чтобы заблокировать использование дуги (v_3, v_6), образующей цикл с (v_6, v_3). Вторая матрица (*в*) получается, если в матрице на рис. 5.19,*б* значение элемента $c_{6,3}$ положить равным ∞, запрещая тем самым использование дуги (v_6, v_3).

Нижняя граница длины циклов подмножества $S(\overline{v_6, v_3})$, очевидно, равна L_2=L_0+$\phi_{6,3}$=81+48=129, т. е. по сравнению

с найденной нижней границей длины всех циклов возрастает на величину $\phi_{6,3}$ как "плата" за неиспользование дуги (v_6, v_3).

$S(v_6, v_3)$

	v_1	v_2	v_4	v_5	v_6
v_1	∞	0	2	30	6
v_2	0	∞	30	17	12
v_3	29	1	12	0	$\frac{12}{\infty}$
v_4	32	83	∞	49	0
v_5	3	21	0	∞	0

L_1=L_0+Δ=81

а

	v_1	v_2	v_4	v_5	v_6	α_i	A_j
v_1	∞	0	2	30	6	0	2
v_2	0	∞	30	17	12	0	12
v_3	29	1	12	0	∞	0	1
~~v_4~~	~~32~~	~~83~~	~~∞~~	~~49~~	0	0	32
v_5	3	21	0	∞	0	0	0
β_j	0	0	0	0	0	0	
B_j	3	1	2	17	0		32

б

$S(\overline{v_6, v_3})$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	∞	0	75	2	30	6
v_2	0	∞	58	30	17	12
v_3	29	1	∞	12	0	12
v_4	32	83	58	∞	49	0
v_5	3	21	48	0	∞	0
v_6	0	85	∞	35	89	∞

L_2=L_0+$\phi_{6,3}$=129

в

Рис. 5.20

Чтобы определить L_1 — нижнюю границу длины циклов подмножества $S(v_6, v_3)$, необходимо провести редукцию матрицы, представленной на рис. 5.20,*а*. Любая строка и столбец этой матрицы содержат нулевое значение, следовательно, редуцированная матрица идентична исходной. В этом случае $\Delta = \sum \alpha_i + \sum \beta_j = 0$ (см. рис. 5.20,*б*). Поэтому нижняя граница для подмножества $S(v_6, v_3)$ совпадает с ранее найденной нижней границей для всего множества гамильтоновых циклов, т. е. равна 81. Сравнивая нижние границы обоих подмножеств, убеждаемся, что для $S(v_6, v_3)$ она ниже. Значит, разбиению подлежит именно это подмножество. Результаты поиска дуги, по которой следует производить разбиение, представлены на рис. 5.20,*б*. Максимальное значение штрафа $\phi_{4,6}$=32 указывает на дугу (v_4, v_6). Поэтому разбиваем $S(v_6, v_3)$ на два подмножества, одно из которых — $S(v_4, v_6)$ состоит из циклов, содержащих дугу (v_4, v_6), циклы другого — $S(\overline{v_4, v_6})$ этой дуги не содержат. Названным подмножествам соответствуют матрицы на рис. 5.21,*а,в*. Первая получается, если удалить строку v_4 и столбец v_6 матрицы на рис. 5.20. Это соответствует включению в цикл дуги (v_4, v_6), в результате чего формируется орцепь (v_4, v_6, v_3). Чтобы не допустить образования

трехвершинного цикла (v_4, v_6, v_3, v_4), следует заблокировать использование обратной дуги (v_3, v_4). Поэтому $c_{3,4}$ полагаем равным ∞. Вторая матрица (*в*) получается, если в матрице на рис. 5.20,*б* значение элемента $c_{4,6}$ положить равным ∞, запрещая тем самым использование дуги (v_4, v_6).

$S(v_4, v_6)$

	v_1	v_2	v_4	v_5
v_1	∞	0	2	30
v_2	0	∞	30	17
v_3	29	1	$\frac{12}{\infty}$	0
v_5	3	21	0	∞

L_3=L_1+Δ=81

а

	v_1	v_2	v_4	v_5	α_i	A_i
v_1	∞	0	2	30	0	2
v_2	0	∞	30	17	0	17
v_3	29	1	∞	0	0	1
v_5	3	21	0	∞	0	3
β_j	0	0	0	0	0	
B_j	3	1	2	17		20

б

$S(\overline{v_4, v_6})$

	v_1	v_2	v_4	v_5	v_6
v_1	∞	0	2	30	6
v_2	0	∞	30	17	12
v_3	29	1	12	0	∞
v_4	32	83	∞	49	∞
v_5	3	21	0	∞	0

L_4=L_1+$\phi_{4,6}$=113

в

Рис. 5.21

Нижняя граница длины циклов подмножества $S(\overline{v_4, v_6})$, т. е. циклов, содержащих (v_6, v_3) и не содержащих (v_4, v_6), равна сумме нижней границы подмножества $S(v_6, v_3)$ и штрафа $\phi_{4,6}$ за неиспользование (v_4, v_6): L_4=L_1+$\phi_{4,6}$=81+32=113.

Для определения нижней границы подмножества $S(v_4, v_6)$, в котором все циклы содержат (v_4, v_6) и (v_6, v_3), редуцируем матрицу, представленную на рис. 5.21,*а*. И здесь редуцированная матрица идентична исходной (см. рис. 5.21,*б*). Поэтому нижняя граница L_3 подмножества $S(v_4, v_6)$ совпадает с ранее найденной нижней границей для $S(v_6, v_3)$ и равна 81. Это меньше, чем нижняя граница L_4 для $S(\overline{v_4, v_6})$ и нижняя граница L_2 для $S(\overline{v_6, v_3})$. Значит, разбиению подлежит $S(v_4, v_6)$. Результаты поиска дуги, по которой следует производить разбиение, представлены на рис. 5.21,*б*. Максимальное значение штрафа $\phi_{2,1}$=20 указывает на дугу (v_2, v_1). Разбиваем $S(v_4, v_6)$ на два подмножества $S(v_2, v_1)$ и $S(\overline{v_2, v_1})$. Первое состоит из циклов, содержащих дугу (v_2, v_1), циклы второго этой дуги не содержат. Указанным подмножествам соответствуют матрицы на рис. 5.22,*а,в*. Матрица *а* получается, если

удалить строку v_2 и столбец v_1 из матрицы на рис. 5.21,*б*, а элемент $c_{1,2}$ положить равным ∞, чтобы исключить обратную дугу (v_1, v_2). Матрица *в* получается, если в матрице на рис. 5.21,*б* элемент $c_{2,1}$ положить равным ∞, запрещая тем самым использование дуги (v_2, v_1).

$S(v_2, v_1)$

	v_2	v_4	v_5
v_1	$\frac{0}{\infty}$	2	30
v_3	1	∞	0
v_5	21	0	∞

L_5=L_3+Δ=84

а

	v_2	v_4	v_5	α_i	A_i
v_1	∞	0	28	2	28
v_3	0	∞	0	0	0
v_5	20	0	∞	0	20
β_j	1	0	0	3	
B_j	20	0	28		28

б

$S(\overline{v_2, v_1})$

	v_1	v_2	v_4	v_5
v_1	∞	0	2	30
v_2	∞	∞	30	17
v_3	29	1	∞	0
v_5	3	21	0	∞

L_6=L_3+$\phi_{2,1}$=101

в

Рис. 5.22

Нижняя граница L_6 подмножества $S(\overline{v_2, v_1})$ находится как сумма нижней границы L_3 для $S(v_4, v_6)$ и штрафа $\phi_{2,1}$ за неиспользование дуги (v_2, v_1): L_6=81+20=101.

Чтобы найти нижнюю границу L_5 подмножества $S(v_2, v_1)$, следует выполнить редукцию матрицы *а*. Результат этой операции представлен на рис. 5.22,*б*. Параметр $\Delta = \sum \alpha_i + \sum \beta_j$ в данном случае равен 3. Поэтому нижняя граница для $S(v_2, v_1)$ имеет значение L_5=L_3+Δ=81+3=84.

Так как L_5 меньше, чем нижние границы L_6, L_4 и L_2 подмножеств $S(\overline{v_2, v_1})$, $S(\overline{v_4, v_6})$ и $S(\overline{v_6, v_3})$ соответственно, то очередному разбиению подлежит $S(v_2, v_1)$.

Используя редуцированную матрицу, представленную на рис. 5.22,*б*, находим, что максимальный суммарный штраф $\phi_{1,4}$=A_1+B_4=28+0=28 соответствует дуге (v_1, v_4). Разбиение множества $S(v_2, v_1)$ по этой дуге порождает еще два подмножества $S(v_1, v_4)$ и $S(\overline{v_1, v_4})$. Соответствующие матрицы представлены на рис. 5.23,*а*,*в*.

Первая матрица (*а*) получена из матрицы на рис. 5.22,*б* путем удаления строки v_1 и столбца v_4. Кроме того, поскольку

дуга (v_1, v_4) совместно с ранее выбранными дугами образует орцепь $(v_2, v_1, v_4, v_6, v_3)$, необходимо запретить использование дуги (v_3, v_2), замыкающей эту цепь. Полагаем $c_{3,2}{=}\infty$.

Вторая матрица (*в*) получается, если в матрице, представленной на рис. 5.22,*б*, принять $c_{1,4}{=}\infty$, чтобы заблокировать использование дуги (v_1, v_4).

Нижние границы для подмножеств $S(v_1, v_4)$ и $S(\overline{v_1, v_4})$ соответственно равны $L_7{=}104$ и $L_8{=}112$, причем для отыскания L_7 выполнена редукция (см. рис. 5.23,*б*) матрицы на рис. 5.23,*а*.

а

$S(v_1, v_4)$

	v_2	v_5
v_3	$\frac{0}{\infty}$	0
v_5	20	∞

$L_7{=}L_5{+}\Delta{=}104$

б

	v_2	v_5	α_i	A
~~v_3~~	~~∞~~	~~0~~	~~0~~	∞
v_5	0	∞	20	∞
β_j	0	0	20	
B	∞	∞		∞

в

$S(\overline{v_1, v_4})$

	v_2	v_4	v_5
v_1	∞	∞	28
v_3	0	∞	0
v_5	20	0	∞

$L_8{=}L_5{+}\phi_{1,4}{=}112$

Рис. 5.23

Содержимое матрицы на рис. 5.23,*б* указывает на единственную возможность получения гамильтонова цикла на основе сформированной к данному моменту цепи $(v_2, v_1, v_4, v_6, v_3)$. Это использование "нулевых" дуг (v_3, v_5) и (v_5, v_2). В результате имеем гамильтонов цикл $(v_2, v_1, v_4, v_6, v_3, v_5, v_2)$, длина которого равна L_7, т. е. 104. На фоне значений весов дуг, содержащихся в исходной матрице (см. рис. 5.19,*а*), полученный результат представляется очень хорошим, однако утверждать, что это кратчайший цикл, пока нельзя. Действительно, нижняя граница L_6, для множества $S(\overline{v_2, v_1})$[27] имеет значение 101 (см. рис. 5.22,*в*), а это меньше, чем длина найденного гамильтонова цикла. Поэтому вполне возможно, что среди циклов этого множества есть цикл меньшей, чем L_7, или равной длины. Следовательно, необходимо продолжить процесс разбие-

[27] Множество гамильтоновых циклов, содержащих дуги (v_4, v_6) и (v_6, v_3), но не содержащих дугу (v_2, v_1).

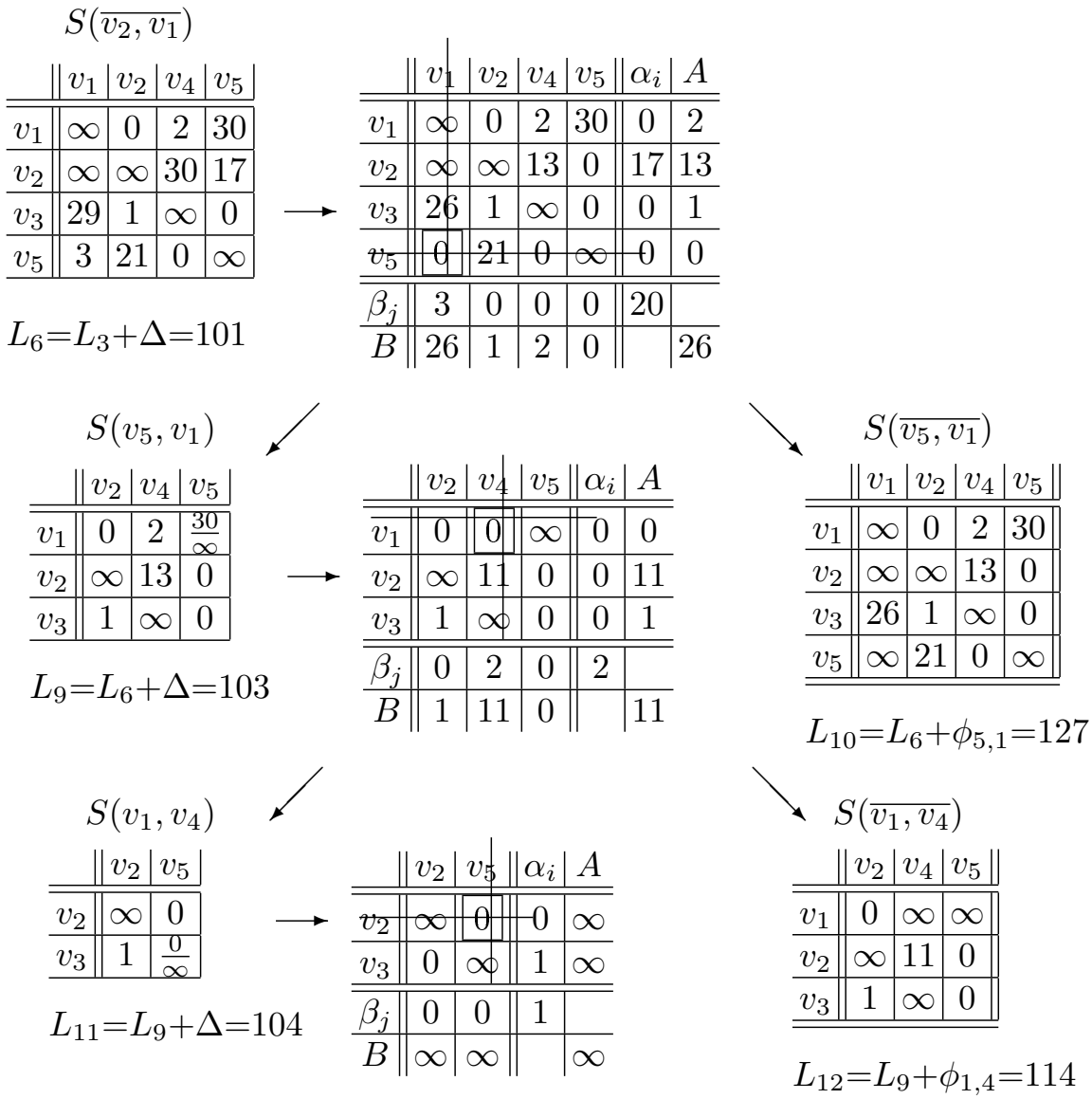


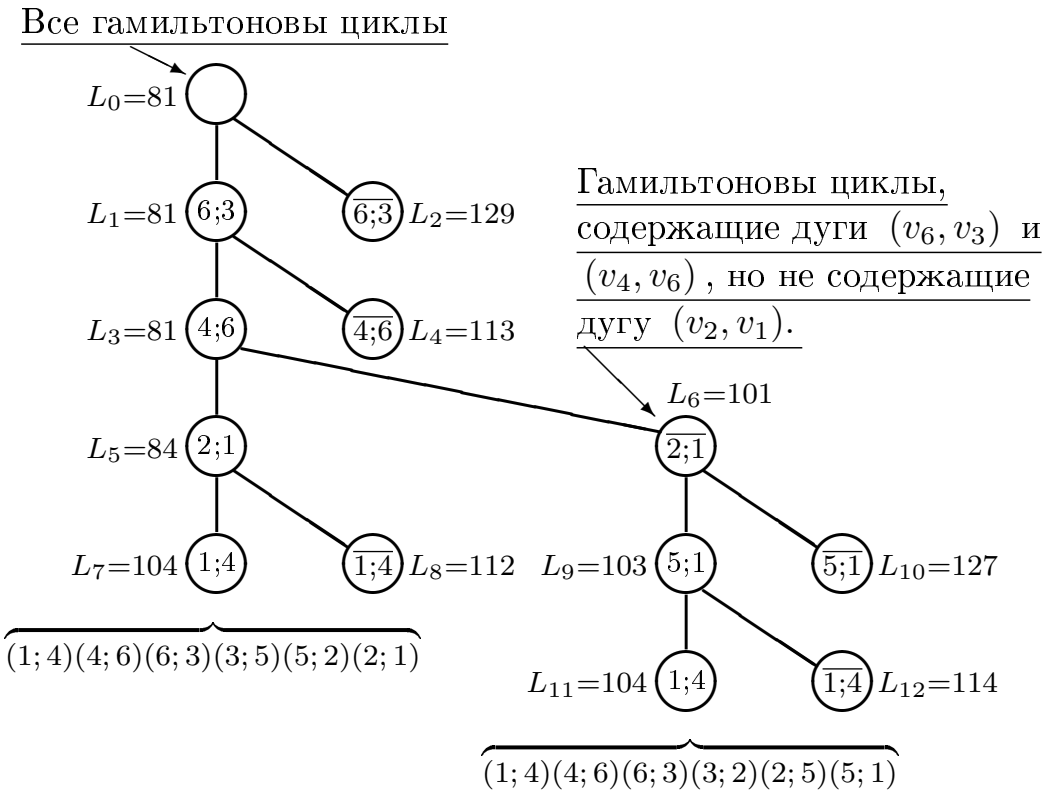
Рис. 5.24

ния, начиная с множества $S(\overline{v_2, v_1})$, как показано на рис. 5.24. Результаты проделанных операций свидетельствуют о наличии множества гамильтоновых циклов[28] $S(v_1, v_4)$ с нижней границей L_{11}=104, включающих дуги (v_6, v_3), (v_4, v_6), (v_5, v_1), (v_1, v_4), которые в совокупности образуют орцепь $(v_5, v_1, v_4, v_6, v_3)$. Поскольку редуцированная матрица для $S(v_1, v_4)$ содержит две "нулевых" дуги (v_2, v_5) и (v_3, v_2), замыкающих эту

[28]В данном случае это множество состоит лишь из одного цикла.

цепь в гамильтонов цикл $(v_2, v_5, v_1, v_4, v_6, v_3, v_2)$, длина последнего равна L_{11}=104.

Бинарное дерево, отражающее все выполнявшиеся разбиения множества гамильтоновых циклов рассматриваемого графа, изображено на рис. 5.25. Две концевые вершины дерева,



Кратчайшие гамильтоновы циклы

Рис. 5.25

имеющие наименьшее значение нижней границы, определяют оптимальное решение задачи. В данном графе существуют два кратчайших гамильтоновых цикла, длина которых равна 104.

Список литературы

1. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари. – М. : Мир, 1973. – 300 с.

2. Белов, В. В. Теория графов: Учеб. пособие для втузов / В. В. Белов, Е. М. Воробъев, В. Е. Шаталов. – М. : Высш. шк., 1976. – 392 с.

3. Уилсон, Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – М. : Мир, 1977. – 207 с.

4. Харари, Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. – М. : Мир, 1977. – 324 с.

5. Кристофидес, Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М. : Мир, 1978. – 432 с.

6. Оре, О. Теория графов / О. Оре. – М. : Наука, 1980. – 336 с.

7. Рейнгольд, Э. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М. : Мир, 1980. – 476 с.

8. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М. : Мир, 1984. – 454 с.

9. Евстигнеев, В.А. Применение теории графов в программировании / В. А. Евстигнеев. – М. : Наука, 1985. – 352 с.

10. Майника, Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Э. Майника. – М. : Мир, 1985. – 323 с.

11. Зыков, А. А. Основы теории графов / А. А. Зыков. – М. : Наука, 1987. – 384 с.

12. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. – М. : Наука, 1990. – 384 с.

13. Романовский, И. В. Дискретный анализ: учеб. пособие / И. В. Романовский. – СПб. : Невский диалект, 2000. – 240 с.

14. Ахо, А. Структуры данных и алгоритмы / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2001. – 384 с.

15. Новиков, Ф. А. Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. – СПб. : Питер, 2001. – 301 с.

16. Иванов, Б. Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: учеб. пособие / Б. Н. Иванов. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 288 с.

17. Сэджвик, Р. Фундаментальные алгоритмы на С. Алгоритмы на графах / Р. Сэджвик. – СПб : ООО "ДиаСофтЮП", 2003. – 480 с.

18. Окулов, С.М. Программирование в алгоритмах / С. М. Окулов. – М. : БИНОМ. Лаборатория базовых знаний, 2006. – 383 с.

Указатель обозначений

G — граф
$\overline{G}$ — дополнительный граф
G^* — граф конденсации
$\tilde{G}$ — граф транзитивного замыкания
O_n — пустой граф
C_n — цикл
P_n — цепь
K_n — полный граф
K_{n_1,n_2} — полный двудольный граф
T_n — дерево
T — турнир
V — множество вершин
E — множество ребер
A — множество дуг
v, u, w — вершины
e, $\{v, u\}$ — ребра
a, (v, u) — дуги
n — число вершин
m — число ребер (дуг)
Матрица:
A — смежности
B — инцидентности
C — весов ребер (дуг)
R — прямых достижимостей
Q — обратных достижимостей
D — расстояний
K — Кирхгофа
S —фундаментальных разрезов
Ф — фундаментальных циклов
adj v — окружение вершины v
$d(v, u)$ — расстояние между вершинами v и u
$\deg v$ — степень вершины v
$\deg^+ v$ — полустепень исхода вершины v
$\deg^- v$ — полустепень захода вершины v
$\Gamma^+(v)$ — множество конечных вершин дуг, выходящих из вершины v
$\Gamma^-(v)$ — множество начальных вершин дуг, входящих в вершину v
$l(v)$ — метка вершины v
$e(v)$ — эксцентриситет вершины v
$r(G)$ — радиус графа G
$d(G)$ — диаметр графа G
$\nu(G)$ — цикломатическое число (ранг) графа G
$\rho(G)$ — коцикломатическое число (ранг) графа G

Предметный указатель

Содержание