Семінар 6

Застосування формули повної ймовірності в зліченній схемі

1) Монета підкидається до появи другого герба. Знайти ймовірність того, що експеримент завершиться на парному кроці.

Нехай A - подія, яка означає появу другого герба на парному кроці;

$$A=\left\{\omega_{2n}=\underbrace{\begin{matrix}(ГЦ\ldots ЦЦ)Г\\(ЦЦ\ldots ГЦ)Г\end{matrix}}_{2n-1},\ n=1,2,\ldots\right\}.$$ Тоді

а) $P(A)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{2}{4}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{5}{9}$

б) Використання формули повної ймовірності.
Введемо до розгляду дві гіпотези: H_1 - перше випробування закінчилося появою цифри, H_2 - перше випробування закінчилося появою герба.

$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$

Тоді $p=P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)$

Нехай $P(A)=p$ $\quad P(\bar{A})=q$, тоді

$$p=\underset{Ц}{\frac{1}{2}}q+\underset{Г}{\frac{1}{2}}\left(\underset{Г}{\frac{1}{2}}+\underset{Ц}{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\right)$$, де $\frac{1}{3}$ - це ймовірність появи одного герба на парному кроці в експерименті підкиданні монети до першої появи герба.
Отже,

$$\begin{cases}p=\underset{Г}{\frac{1}{2}}\left(\underset{Г}{\frac{1}{2}}+\underset{Ц}{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}q\\ \quad p+q=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad p+\frac{1}{2}p=\frac{5}{6}\quad\Rightarrow\quad p=\frac{5}{9}$$

2) Монета пілкидається до появи двох гербів поспіль. Знайти ймовірність того, що це станеться на: а) n- му кроці; б) на парному кроці.

$$p_{n+2} = \underset{Ц}{\frac{1}{2}} p_{n+1} + \underset{Г}{\frac{1}{2}} \left(\underset{Ц}{\frac{1}{2}} p_n \right), \quad n = 2,3,\ldots$$

$$p_n = \frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n - \frac{2}{\sqrt{5}\left(1-\sqrt{5}\right)} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n$$

Нехай A - подія, яка означає появу двох гербів поспіль на парному кроці.

$$p_{n+2} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{4} p_n \quad n = 2k, k = 1,2,\ldots \quad \text{Нехай} \quad P(A) = p$$

$$p_{2k+2} = \frac{1}{2} p_{2k+1} + \frac{1}{4} p_{2k}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k+2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k+1} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} p_{2k} \quad \Rightarrow \quad p - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} q + \frac{1}{4} p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{5}$$

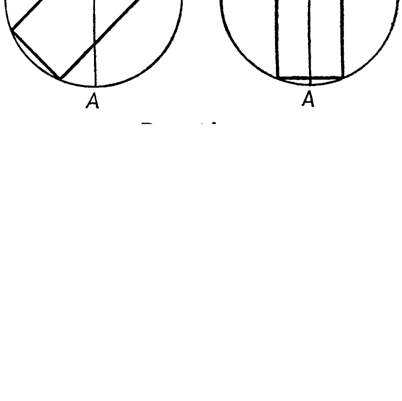
Використання формули повної ймовірності.
Введемо до розгляду дві гіпотези: H_1 - перше випробування закінчилося появою цифри, H_2 - перше випробування закінчилося появою герба.

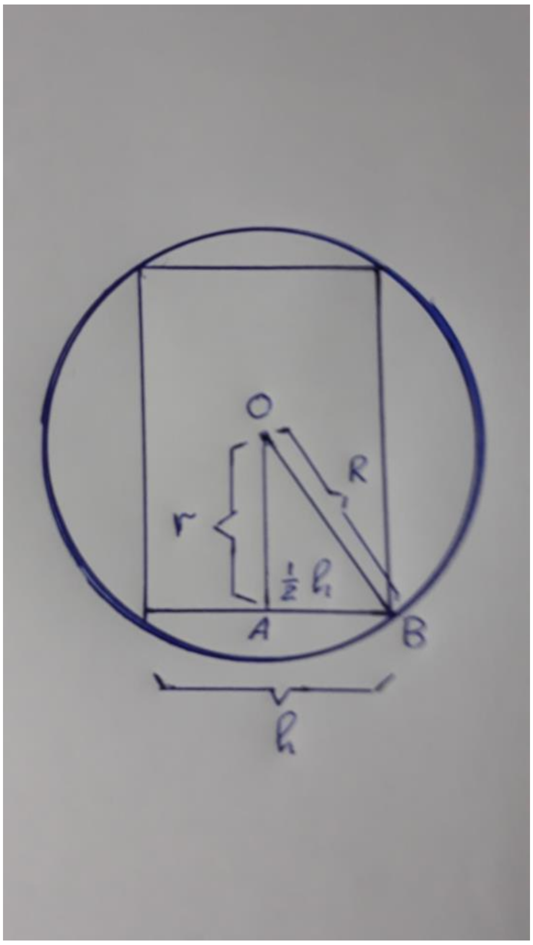
$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

Тоді $\quad p = P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2)$

$$p = q\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} p \right) \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} q + \frac{1}{4} p \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{5}$$

<u>Задача</u> Якої товщини повинна бути монета, щоб ймовірність падіння її на ребро дорівнювала 1/3?





$$\frac{S_{сферичного\_паса}}{S_{сфери}} = \frac{2\pi Rh}{4\pi R^2} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2}{3}R$$, де R - радіус сфери. Позначимо через r - радіус монети. Тоді

$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}R\right)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 = \frac{9}{8}r^2 \Rightarrow \quad h = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{8}r^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}r = \frac{\sqrt{2}}{4}d$$, де

d - діаметр монети. Отже, $h = \frac{\sqrt{2}}{4}d \approx 0,354d$

Задачі для самостійного аналізу

<u>Задача 1</u> З колоди карт у 52 листи навмання виймають одну карту. Нехай подія A означає, що витягнута карта є пікової масті, а подія B означає, що витягнута карта є туз. Чи є ці події незалежними? Відповідь обґрунтувати підрахунками.

<u>Задача 2</u> Два рази підкидається гральний кубик. Подія A означає, що за першим разом випало 5, подія B означає, що сума очок більше 8. Чи є ці події незалежними? Відповідь обґрунтувати підрахунками.

<u>Задача 3</u> Відомо, що при підкиданні п'яти монет принаймні на одній з них випав орел. Яка ймовірність того, що випало п'ять орлів?

<u>Задача 4</u> Довести, що якщо події A і B – незалежні, і $A \subset B$, то або $P(A) = 0$, або $P(B) = 1$. (Отже, якщо подія A не залежить сама від себе, то $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$).

<u>Задача 5</u> Довести, що якщо події A і B – незалежні, то A і $\overline{B}$ теж незалежні.