Лекція 10

Генератриса цілочислових випадкових величин

Дискретну випадкову величину ξ, яка приймає цілі невід'ємні значення, будемо називати ***цілочисловою*** випадковою величиною. Закон розподілу цілочислової величини визначається ймовірностями

$$p_n = P\{\xi = n\}, \quad n = 0,1,2,\dots .$$

Генератрисою цілочислової випадкової величини ξ будемо називати функцію

$$Ms^{\xi} = \varphi_{\xi}(s), \quad |s| \le 1.$$

Через закон розподілу генератриса подається сумою ряду

$$\varphi_{\xi}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n ,$$

який абсолютно збігається при $|s| \le 1$.

Так як $p_n = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0), \quad n = 0,1,2,\dots$, то між законами розподілу $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ і генератрисами встановлюється взаємно однозначна відповідність.

Приклад:

Генератриса ***біноміального*** закону розподілу

$$\varphi(s) = \sum_{m=0}^{n} s^m P(\xi = m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} s^m = (ps + q)^n;$$

Введемо позначення

$$\xi^{[0]} = 1, \quad \xi^{[r]} = \xi(\xi - 1)\dots[\xi - (r-1)] \text{ для натурального } r.$$

Факторіальним моментом r-го порядку випадкової величини ξ будемо називати $M\xi^{[r]}$. Через факторіальні моменти $M\xi^{[r]}$ можна подати $M\xi^r$ і навпаки.

Має місце рівність

$$M\xi^{[r]} = \varphi_{\xi}^{(r)}(1) \tag{1}$$

для довільного цілого невід'ємного r. Дійсно, якщо $\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ збігається у якій-небудь точці $s>1$, то його можна диференціювати почленно в $s=1$ і ми отримаємо

$$\varphi_\xi^{(r)}(1)=\sum_{n=0}^{\infty} n^{[r]} p_n = M\xi^{[r]}.$$

У протилежному випадку визначимо $\varphi_\xi^{(r)}(1)$ як $\lim_{s\to 1-0}\varphi^{(r)}(s)$ і знов ж таки маємо

$$\varphi_\xi^{(r)}(1)=\lim_{s\to 1-0}\varphi^{(r)}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} n^{[r]} p_n = M\xi^{[r]}.$$

У рівності (1) обидві частини можуть бути нескінченними.

<u>Приклад підрахунку математичного сподівання:</u>

біноміальний розподіл

$$\varphi_\xi'(s)=np(ps+q)^{n-1}; \quad M\xi=np;$$

<u>Багатовимірні генератриси</u>

Нехай $\xi'=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_r)$- випадковий вектор з цілочисловими компонентами ξ_i, $i=1,...,r$. Позначимо $p_\alpha=P\{\xi=\alpha\}$, де $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_r)$ - можливе значення вектору ξ.

Багатовимірною генератрисою називається

$$\varphi_\xi(s_1,...,s_r)=M\, s_1^{\xi_1}s_2^{\xi_2}...s_r^{\xi_r} = \sum_\alpha p_\alpha s_1^{\alpha_1}...s_r^{\alpha_r}, \quad |s|\le 1.$$

За допомогою похідних від $\varphi_\xi(s_1,...,s_r)$ підраховуються змішані факторіальні моменти

$$M\xi_1^{[k_1]}\xi_2^{[k_2]}...\xi_r^{[k_r]} = \left.\frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_r}\varphi_\xi(s_1,s_2,...,s_r)}{\partial s_1^{k_1}\partial s_2^{k_2}...\partial s_r^{k_r}}\right|_{s_1=s_2=...=s_r=1}.$$

У подальшому важливе значення має наступний результат.

<u>Теорема 2</u> Якщо $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ - незалежні цілочислові випадкові величини, $\varphi_{\xi_k}(s)$, $k=1,2,...,n$ - їх генератриси, то

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(s)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(s).$$

Доведення. З незалежності $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ випливає незалежність $s^{\xi_1},s^{\xi_2},\ldots,s^{\xi_n}$. Використовуючи мультиплікативну властивість математичного сподівання, маємо

$$\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(s)=Ms^{\xi_1+\ldots+\xi_n}=Ms^{\xi_1}\times\ldots\times s^{\xi_n}=\prod_{k=1}^{n}Ms^{\xi_k}=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k(s)}.$$

Теорему доведено.

Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,$ - послідовність цілочислових, однаково розподілених, незалежних випадкових величин з генератрисою $\varphi_\xi(s)$; ν - незалежна від них цілочислова випадкова величина з генератрисою $\varphi_\nu(s)$.

Нехай $\zeta_0=0,\quad \zeta_\nu=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_\nu$ при $\nu\ge 1$.

<u>**Т е о р е м а 3**</u> Генератриса $\varphi_{\zeta_\nu}(s)$ дорівнює суперпозиції

$$\varphi_{\zeta_\nu}(s)=\varphi_\nu(\varphi_\zeta(s)).$$

Доведення. Застосовуючи формулу повної ймовірності, знаходимо

$$Ms^{\zeta_\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{\zeta_\nu=n\}s^n=\sum_{n=0}^{\infty}s^n\left[\sum_{m=0}^{\infty}P\{\zeta_\nu=n/\nu=m\}P(\nu=m)\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}s^nP\{\zeta_m=n\}\right]P(\nu=m)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}s^nP\{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m=n\}\right]P(\nu=m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{\xi_1+\ldots+\xi_m}(s)P(\nu=m)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_\xi^m(s)P(\nu=m)=\varphi_\nu(\varphi_\zeta(s)).$$

Теорему доведено.