Лекція 12

Випадкові величини загального типу

Визначення випадкової величини. Її функція розподілу

Нехай (Ω, U, P) – довільний ймовірносний простір. Числову функцію $\xi=\xi(\omega)$ від елементарної події $\omega\in\Omega$ будемо називати випадковою величиною, якщо для довільного числа x

$$\{\xi\le x\}=\{\omega:\xi(\omega)\le x\}\in U .$$

Функцію $F(x)=F_\xi(x)=P\{\xi\le x\}$, визначену при усіх $x\in R$, будемо називати функцією розподілу випадкової величини ξ.

Лема 1. Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ задовольняє властивостям:

a) для $x_1<x_2$ $\quad P\{x_1<\xi\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$;

b) $P\{\xi<x\}=F(x-0)$.

Доведення. З подання $\{\xi\le x_2\}=\{\xi\le x_1\}\cup\{x_1<\xi\le x_2\}$ випливає $P\{\xi\le x_2\}=P\{\xi\le x_1\}+P\{x_1<\xi\le x_2\}$, що доводить властивість а).

Розглянемо тепер властивість b). Подамо подію $\{\xi<x\}$ у вигляді $\{\xi<x\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{x-\frac{1}{n-1}<\xi\le x-\frac{1}{n}\right\}$. Звідси на основі пункту а) маємо

$$P\{\xi<x\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{x-\frac{1}{n-1}<\xi\le x-\frac{1}{n}\right\}=F(x-1)+\lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\left\{F(x-\frac{1}{n})-F(x-\frac{1}{n-1})\right\}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}F(x-\frac{1}{N})=F(x-0).$$

Лему доведено.

Наслідок 1. Якщо $F(x)$ функція розподілу випадкової величини ξ, то

1) $P\{\xi=x\}=F(x)-F(x-0)$;

2) $P\{x_1\le\xi\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1-0)$;

3) $P\{x_1<\xi<x_2\}=F(x_2-0)-F(x_1)$;

4) $P\{x_1\le\xi<x_2\}=F(x_2-0)-F(x_1-0)$.

Характеристичні властивості функції розподілу містить наступна теорема.

Теорема 1. Функція розподілу $F(x)$ має слідуючі властивості:

1) *F(x)* – неспадна;

2) *F(x)* – неперервна справа;

3) *F(+ ∞)*=1;

4) $F(-\infty)=0$.

Доведення. 1), очевидно, випливає з а).

Для доведення 2) розглянемо $B_n=\left\{x<\xi\le x+\frac{1}{n}\right\}\downarrow\varnothing$. Тоді $P(B_n)=F(x+\frac{1}{n})-F(x)\to 0$. Таким чином $F(x)=F(x+0)$.

Нарешті перейдемо до 3) - 4). Подамо $\Omega=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}A_n$, де $A_n=\{\omega : n-1<\xi(\omega)\le n\}$. Звідси маємо

$$1=P(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(A_n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N+1}^{N}P(A_n)=\lim_{N\to\infty}\left[F(N)-F(-N)\right].$$

Отже, $F(\infty)=\lim\limits_{N\to\infty}F(N)=1;\quad F(-\infty)=\lim\limits_{N\to\infty}F(-N)=0$.

Теорему доведено.

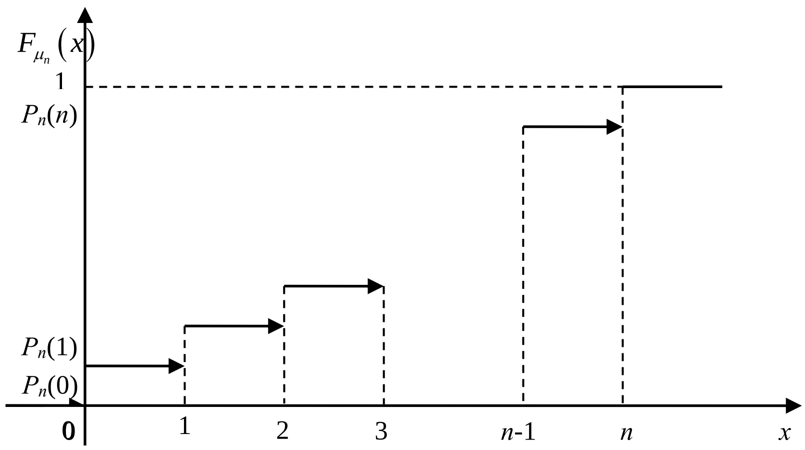
Розглянемо приклад функції розподілу. Нехай μ_n – число успіхів в схемі випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху $0<p<1$. Тоді

$$P\{\mu_n=m\}=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad m\in\{0,1,\dots,n\}=N_n.$$

Функцію розподілу μ_n можна подати у вигляді

$$F_{\mu_n}(x)=\sum_{\substack{m\in N_n\cap\\ \cap(-\infty,x]}}P_n(m)=\sum_{\substack{m\in N_n\cap\\ \cap(-\infty,x]}}C_n^m p^m q^{n-m}.$$

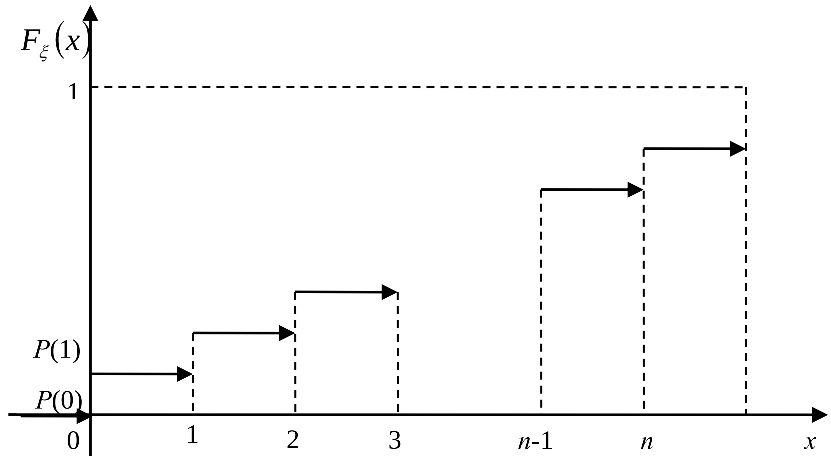
$$F_{\mu_n}(x)=\sum_{\substack{m\in N_n\cap\\ \cap(-\infty,x]}}P_n(m)=\sum_{\substack{m\in N_n\cap\\ \cap(-\infty,x]}}C_n^m p^m q^{n-m}.$$



Тепер нехай ξ – випадкова величина, яка має розподіл Пуассона з параметром $\lambda\ge 0$,

$$P\{\xi=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=P(m),\quad m\in\{0,1,\dots\}=N.$$

Тоді $F_\xi(x)=\sum\limits_{\substack{m\in N\cap\\ \cap(-\infty,x]}}P(m)$ представляє собою функцію розподілу ξ.



. Розподіл ймовірностей випадкової величини. Вибірковий ймовірносний простір

Далі через B_R будемо позначати σ-алгебру борелівських множин R, тобто мінімальну σ-алгебру, яка містить множини виду $(-\infty, x]$, для будь-якого $x \in R$.

Лема 2. Нехай A_0 – деякий клас підмножин R, $\sigma\{\mathrm{A}_0\}$ – мінімальна σ-алгебра, яка містить A_0, а $f(\omega)$ – дійсна функція, яка визначена на просторі елементарних подій Ω. Якщо для будь-якого $A \in \mathrm{A}_0$
$f^{-1}(A) \overset{def}{=} \{\omega : f(\omega) \in A\} \in U$, то для будь-якого $A' \in \sigma\{\mathrm{A}_0\}$ $f^{-1}(A') \in U$.

Доведення. Нехай B – клас таких підмножин R, що для будь-якого $B \in \mathrm{B}$, $f^{-1}(B) \in U$. За умовою $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{B}$. З іншого боку для функції $f(\omega)$ справедливі співвідношення

$$f^{-1}\left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(B_i); \quad f^{-1}\left(\bigcap_i B_i\right) = \bigcap_i f^{-1}(B_i); \quad f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}.$$

Звідси випливає, що B – σ-алгебра, а значить $\sigma\{\mathrm{A}_0\} \subset \mathrm{B}$. Лему доведено.

Наслідок 2. Якщо ξ – випадкова величина, то для кожної множини $B \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$, $\xi^{-1}(B) \in U$ і визначена ймовірність

$$P\{\omega : \xi(\omega) \in B\} = P\{\xi \in B\} = P_\xi(B).$$

Для доведення достатньо замість A_0 узяти клас множин виду $(-\infty, x]$, для будь-якого $x \in R$.

Тепер можна дати ”симетричне” визначення випадкової величини. Випадкова величина – це довільне вимірне відображення вимірного простору (Ω, U) у вимірний простір (R, B_R).

Функція $P_\xi(B)$, визначена для усіх $B \in \mathrm{B}_\mathrm{R}$, називається розподілом ймовірностей випадкової величини ξ.

Проаналізуємо зв'язок між розподілом ймовірностей і функцією розподілу. У теорії міри доводиться наступний результат.

Теорема 2 (теорема Каратеодорі). Якщо на алгебрі A_1 підмножин Ω визначена ймовірність P, яка задовольняє аксіомам:

1) невід'ємності;
2) нормованості;
3) σ-адитивності (для будь-якої послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ такої, що $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \ i \neq j$, $A_n \in \mathrm{A}_1$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathrm{A}_1$, $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$);

то цю ймовірність можна однозначно продовжити на всі множини з σ-алгебри $\sigma\{\mathrm{A}_1\}$.

Візьмемо за A_1 алгебру числових підмножин виду $\bigcup_{i=1}^{n} \left(x_1^i, x_2^i\right]$, де $\left(x_1^i, x_2^i\right] \cap \left(x_1^j, x_2^j\right] = \varnothing$ для $i \neq j$. Нехай ξ – деяка випадкова величина з функцією розподілу $F_\xi(x)$. Тоді для будь-якої множини $A \in \mathrm{A}_1$ виду $A = \bigcup_{i=1}^{n} \left(x_1^i, x_2^i\right]$

$$P_\xi(A) = \sum_{i=1}^{n} \left[F_\xi\left(x_2^i\right) - F_\xi\left(x_1^i\right) \right]. \qquad (1)$$

Неважко перевірити, що функція $P_\xi(\cdot)$, яка визначається рівністю (1) для будь-якої множини $A \in \mathrm{A}_1$, задовольняє усім трьом аксіомам ймовірності. Як наслідок теореми Каратеодорі маємо, що функція розподілу $F_\xi(x)$ однозначно визначає розподіл ймовірностей $P_\xi(\cdot)$, тобто ймовірність події $\{\xi \in B\}$ для будь-якої борелівської множини $B \in \mathrm{B}_{\mathrm{R}}$.

Зробимо також наступне зауваження. Кожна випадкова величина ξ дає таке відображення $\xi = \xi(\omega)$ множини Ω у числову пряму R, яке породжує новий ймовірносний простір $(R, \mathrm{B}_{\mathrm{R}}, P_\xi)$. Простір $(R, \mathrm{B}_{\mathrm{R}}, P_\xi)$ називається вибірковим ймовірносним простором для випадкової величини ξ.

Конструкція вибіркового ймовірносного простору дає відповідь на таке питання: як за функцією $F(x)$, яка задовольняє умовам 1)-4), побудувати випадкову величину ξ, функція розподілу якої співпадала б з $F(x)$, тобто $F_\xi(x) = F(x)$.