Розв'язання нелінійних рівнянь

$$f(x) = 0$$

Етапи знаходження наближених коренів:

1) дослідження

2) відокремлення

3) наближене обчислення

p - порядок швидкості збіжності, якщо

$|x_n - x^*| \leqslant \alpha |x_{n-1} - x^*|^p$, де $0 < \alpha < 1$

Метод ділення навпіл (дихотомія)

Нехай $f(x) \in C_{[a;b]}$ та $f(a) \cdot f(b) < 0$

Початкове наближення:

$$a_0 = a, \;\; b_0 = b \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2};$$

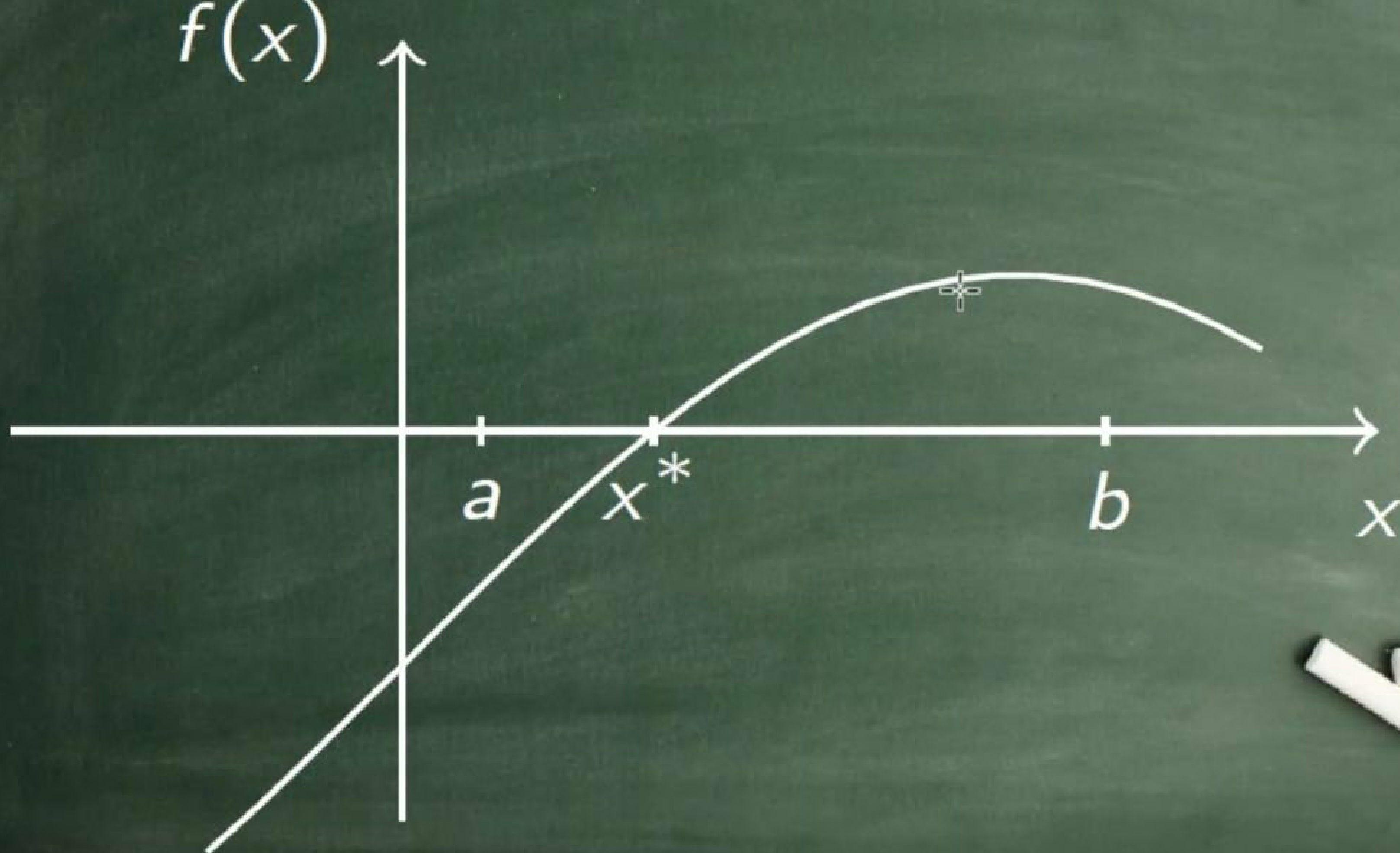
Ітераційний процес:

$$a_{n+1} = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \;\; \operatorname{sgn} f(a_n) = \operatorname{sgn} f(x_n), \\ a_n, & \text{якщо} \;\; \operatorname{sgn} f(a_n) \neq \operatorname{sgn} f(x_n); \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} x_n, & \text{якщо} \;\; \operatorname{sgn} f(b_n) = \operatorname{sgn} f(x_n), \\ b_n, & \text{якщо} \;\; \operatorname{sgn} f(b_n) \neq \operatorname{sgn} f(x_n); \end{cases}$$

Метод ділення навпіл (дихотомія)

Геометрична інтерпретація



Метод ділення навпіл (дихотомія)

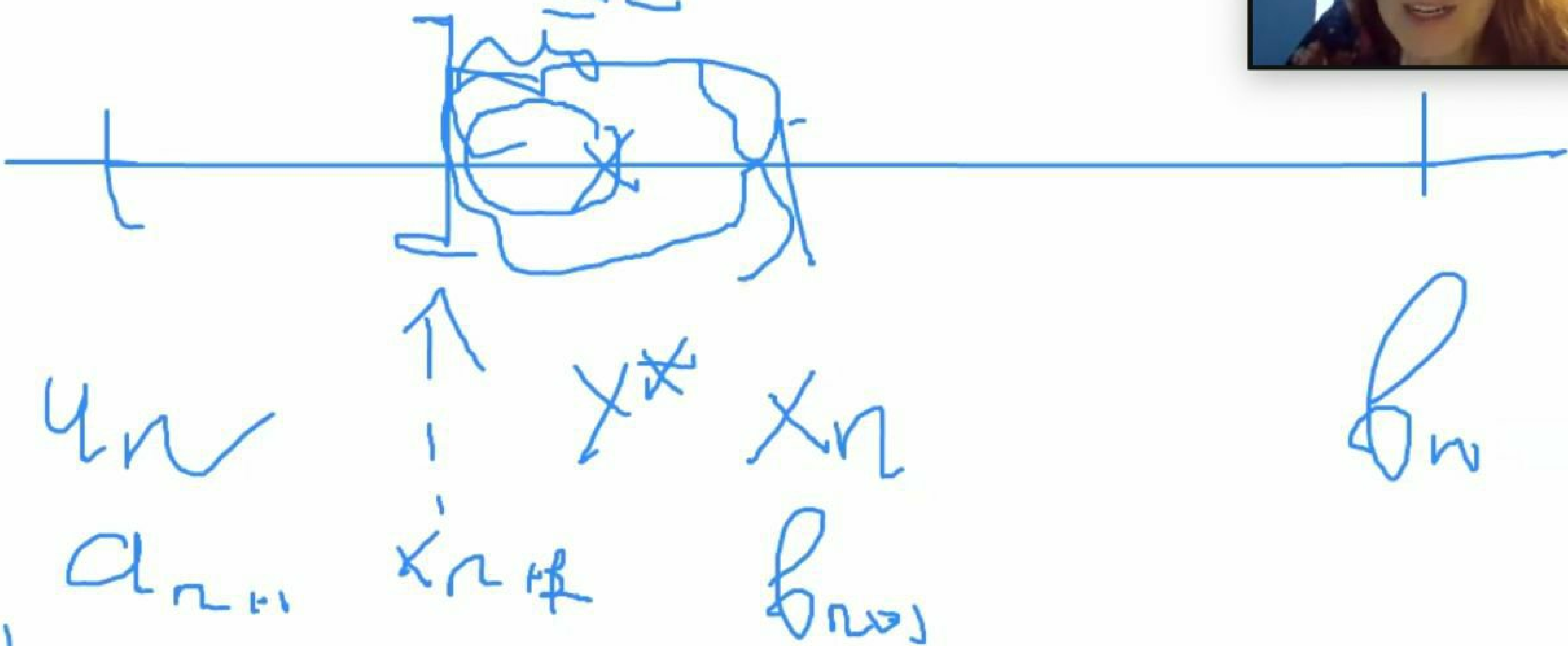
Швидкість збіжності: $|x_n - x^*| \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$

$$|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n};$$

$$|x_n - a_n| = \frac{b-a}{2^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x^*$$

$$\boxed{|x_n - x^*| \leqslant \frac{b-a}{2^{n+1}}}$$



$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

Метод ділення навпіл (дихотомія)

Швидкість збіжності: $|x_n - x^*| \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$

Порядок швидкості збіжності: 1 (лінійна)

$$|x_n - x^*| \leqslant \varepsilon; \qquad 2^{n+1} \geqslant \frac{b-a}{\varepsilon};$$

$$n+1 \geqslant \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}; \qquad n+1 \geqslant \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1;$$

$$\boxed{n \geqslant \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right]}$$

Метод ділення навпіл (дихотомія)

Швидкість збіжності: $|x_n - x^*| \leqslant \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$

Порядок швидкості збіжності: 1 (лінійна)

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right]$$

Умова припинення: $|x_n - x_{n-1}| \leqslant \varepsilon$

Апостеріорна оцінка кількості кроків: n

Метод ділення навпіл (дихотомія)

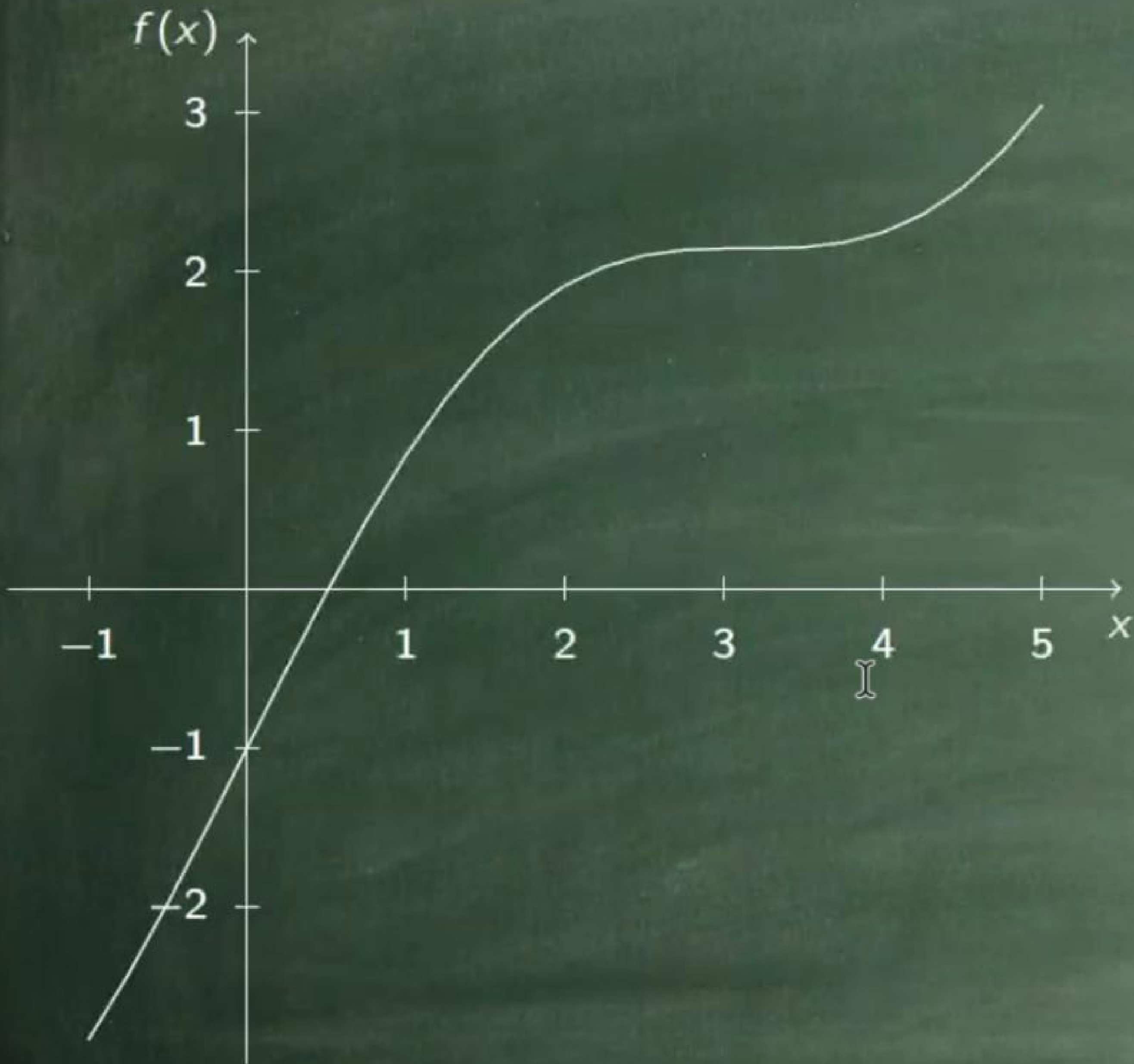
Приклад. Знайти розв'язок рівняння

$$x + \sin x - 1 = 0$$

методом дихотомії з точністю $\varepsilon = 0,1.$

Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Eman 1.



Етап 2.

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 + \sin 0 - 1 = -1 \\ f(\tfrac{\pi}{2}) &= \tfrac{\pi}{2} + \sin \tfrac{\pi}{2} - 1 = \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$f(0) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0 \Rightarrow x^* \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

Етап 3.

ітерація 0:

$$a_0 = a = 0; \quad b_0 = b = \frac{\pi}{2}; \quad x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$f(0) = -1; \quad f(\frac{\pi}{2}) \approx 1,5708; \quad f(\frac{\pi}{4}) \approx 0,4925$$

ітерація 1:

$$f(0) \cdot f(\frac{\pi}{4}) < 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_1 = a_0 = 0; \quad b_1 = x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\pi}{8}$$

$$|x_1 - x_0| = |\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}| \approx 0,4 > \varepsilon$$

ітерація 3:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0,2246\,; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0,4925\,; \quad f\left(\frac{3\pi}{16}\right) \approx 0,1446$$

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot f\left(\frac{3\pi}{16}\right) < 0 \quad \Rightarrow$$

$$a_3 = a_2 = \frac{\pi}{8}; \quad b_3 = x_2 = \frac{3\pi}{16}; \quad x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{5\pi}{32}$$

$$|x_3 - x_2| = \left|\frac{5\pi}{32} - \frac{3\pi}{16}\right| \approx 0,1 \leqslant \varepsilon$$

$$x^* \approx x_3 \approx \frac{5\pi}{32} \approx 0.4909$$

апостеріорна оцінка кількості кроків: 3 *апріорна оцінка кількості кроків:*

$$n \geqslant \left[\log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right] = \left[\log_2 \frac{\frac{\pi}{2}-0}{0,1}\right] = [3.9734] = 3$$

Метод простої ітерації

$$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) = x + \Psi(x) f(x)$

Початкове наближення: $x_0 \in [a; b]$

Ітераційний процес: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$

Метод простої ітерації

Достатні умови збіжності:

Нехай для $x_0 \in S$, $S = \{x : |x - x_0| \leqslant \delta\}$ $\varphi(x)$:

$$1)\ \max_{x \in S} |\varphi'(x)| \leqslant q < 1$$

$$\Rightarrow$$

$$2) |\varphi(x_0) - x_0| \leqslant (1 - q)\delta$$

$\exists x^* : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$ *та швидкість збіжності:*

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{q^n}{1 - q} |\varphi(x_0) - x_0|$$

1) $\equiv$ $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant q|x - y|, \ x, y \in S$

Метод простої ітерації

Порядок швидкості збіжності: 1 (лінійна)

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$|x_n - x^*| \leqslant \varepsilon; \quad |x_n - x^*| \leqslant \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0|;$$

$$q^n \geqslant \frac{(1-q)\varepsilon}{|\varphi(x_0) - x_0|}; \quad n \geqslant \log_q \frac{(1-q)\varepsilon}{|\varphi(x_0) - x_0|};$$

$$n \geqslant \frac{\ln \frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)}; \quad \boxed{n \geqslant \left[\frac{\ln \frac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)}\right] + 1}$$

Метод простої ітерації

Порядок швидкості збіжності: 1 (лінійна)

Апріорна оцінка кількості кроків:

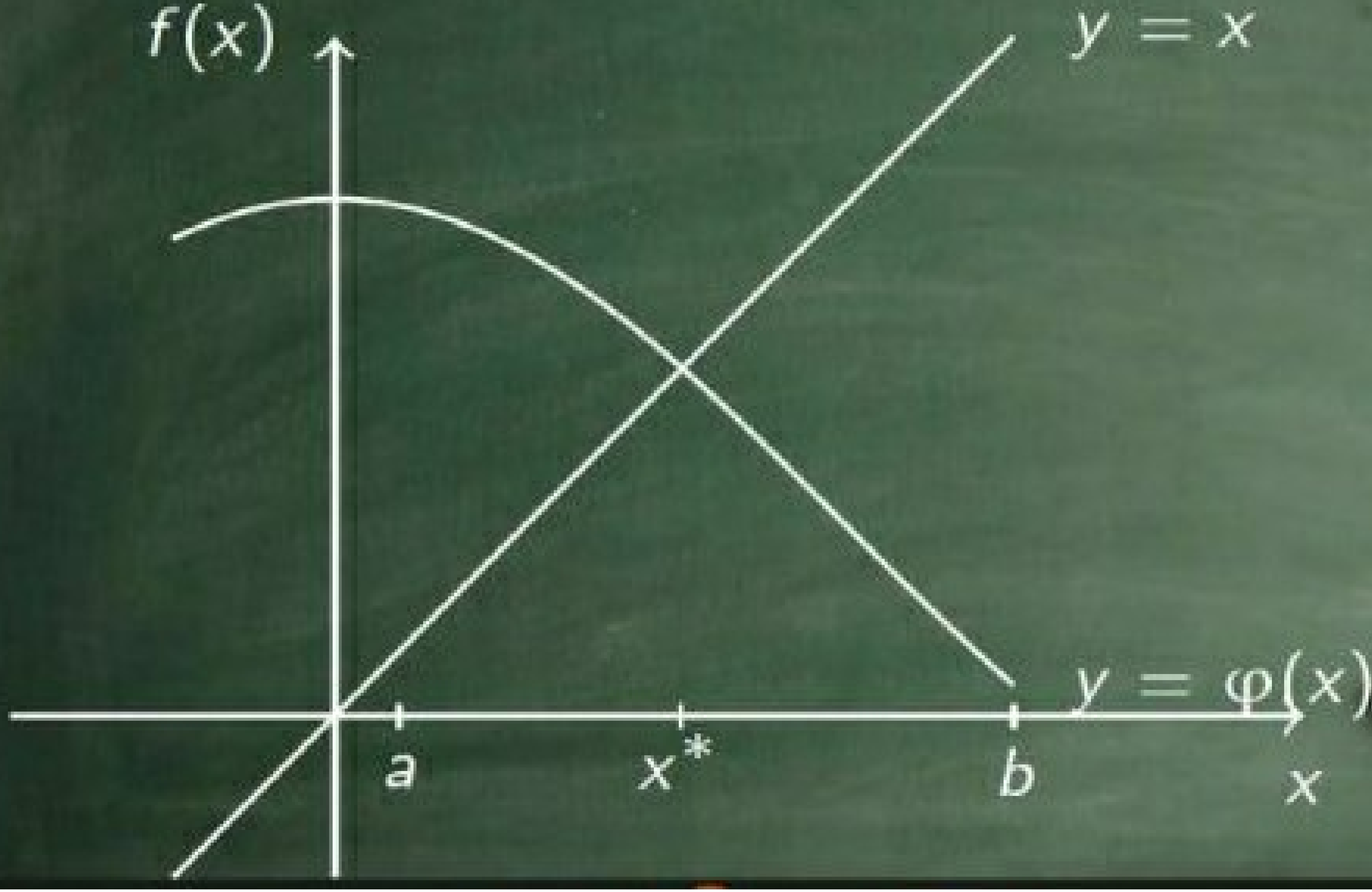
$$n \geqslant \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1$$

Умова припинення:

$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \dfrac{1-q}{q}\varepsilon$, якщо $q < \dfrac{1}{2}$

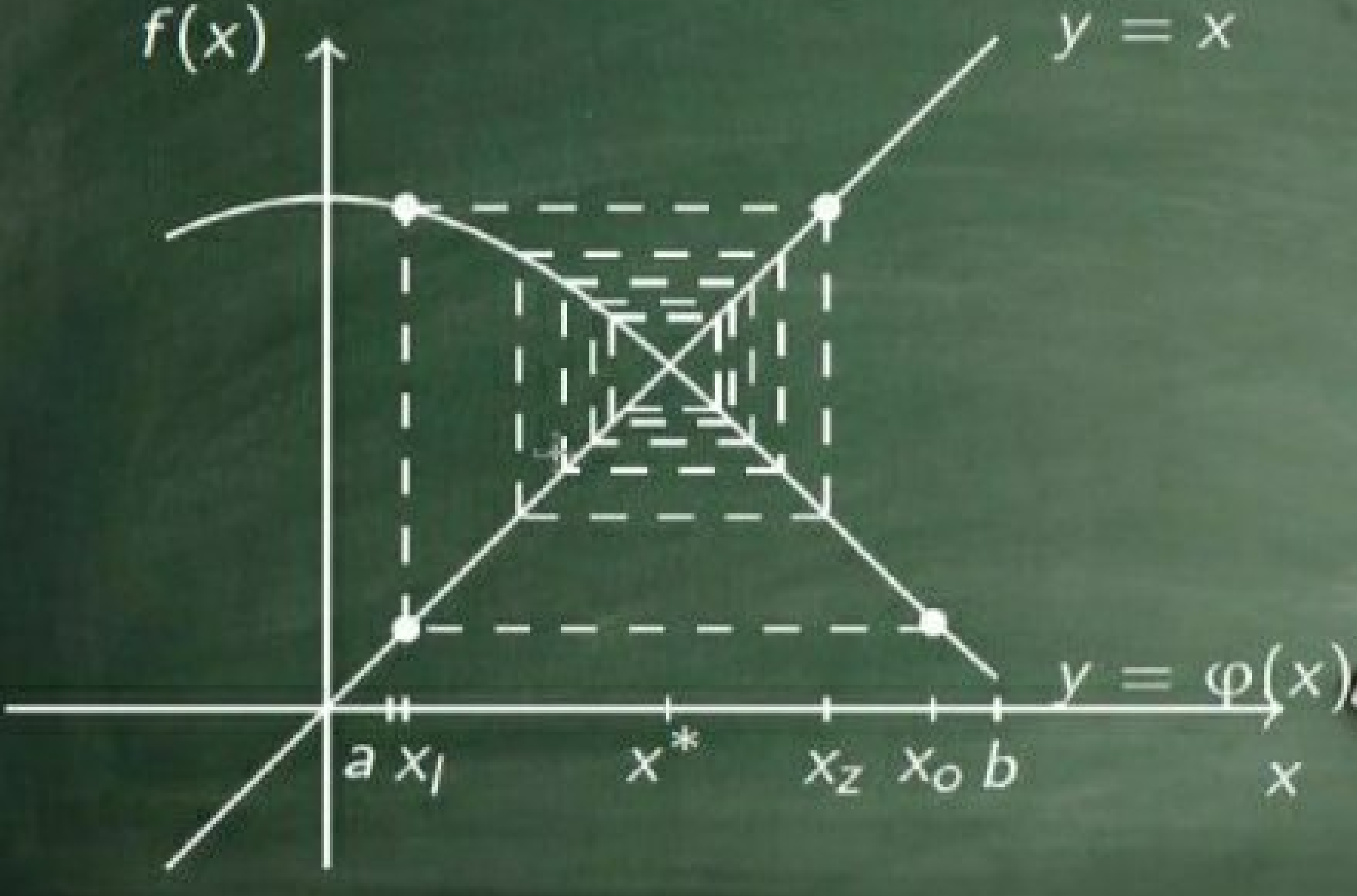
Метод простої ітерації

Геометрична інтерпретація: $-1 < \varphi'(x) < 0$



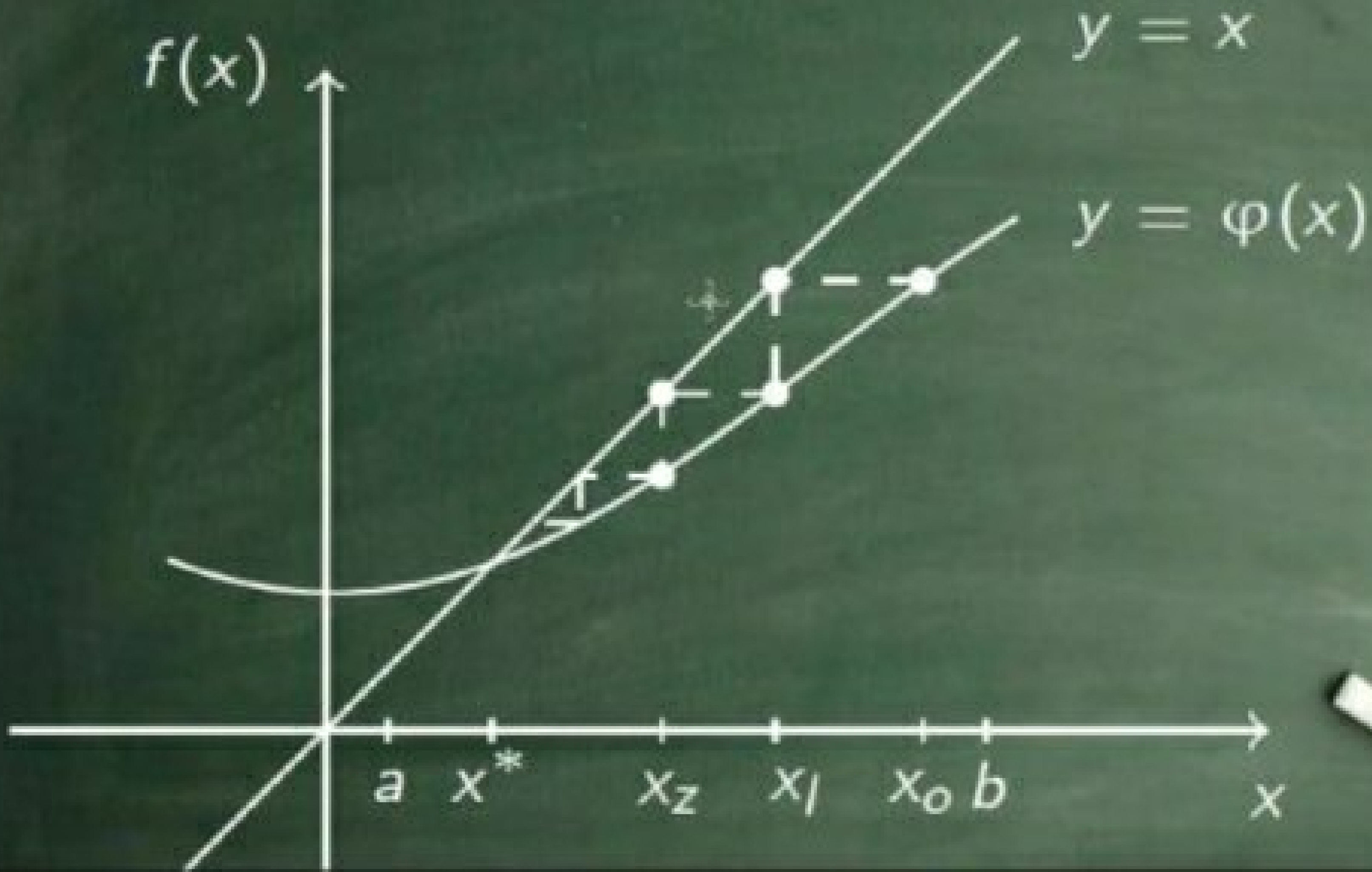
Метод простої ітерації

Геометрична інтерпретація: $-1 < \varphi'(x) < 0$



Метод простої ітерації

Геометрична інтерпретація: $0 < \varphi'(x) < 1$



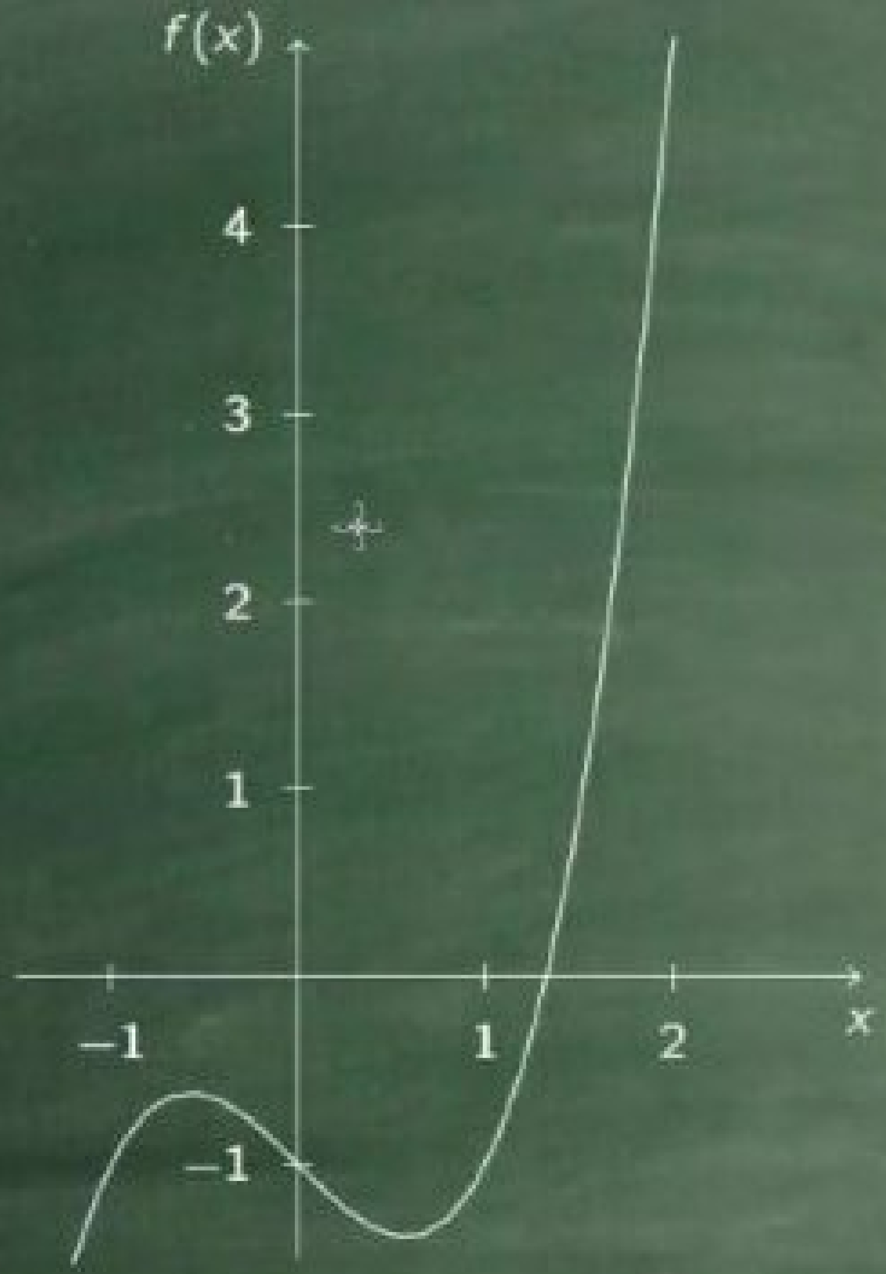
Метод простої ітерації

Приклад. Знайти розв'язок рівняння

$$x^3 - x - 1 = 0$$

методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 0,1$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Eman 1.



Етап 2.

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 1 - 1 = -1 \\ f(2) &= 2^3 - 2 - 1 = 5 \end{aligned}\right\}$$

$$f(1)\cdot f(2) < 0 \Rightarrow x^* \in [1;2]$$

Етап 3.

$$x^3 - x - 1 = 0$$

$$x_0 = 1,5$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in [1;2] \\ |x - 1.5| \leqslant \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = 0,5$$

Етап 3.

$$x^3 - x - 1 = 0$$

$x_0 = 1,5; \qquad \delta = 0,5; \qquad x \in [1;2]$

$x = x^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x^3 - 1$

Достатні умо …:

1) $\max\limits_{x\in[a;b]} |\varphi'(x)| = \max\limits_{x\in[1;2]} |3x^2| > 1$

Етап 3.

$$x_0 = 1,5 \qquad \delta = 0,5 \qquad x \in [1;2]$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{x} + 1} \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}$$

Достатні умови збіжності:

1) $$\max_{x\in[a;b]} |\varphi'(x)| = \max_{x\in[1;2]} \left| -\frac{1}{2\sqrt{x^3 + x^4}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$$

2) $$|\sqrt{\varphi(x_0) - x_0}| = \left| \sqrt{\frac{1}{1,5} + 1} - 1,5 \right| = |-0.209|$$

$$(1 - q)\delta = (1 - \frac{1}{2\sqrt{2}})0,5 = 0,323$$

$q < 1$ *і* $0.209 < 0,323 \Rightarrow$ *є збіжніть*

ітерація 1:

$$x_0 = 1,5$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \sqrt{\frac{1}{x_0} + 1} = \sqrt{\frac{1}{1,5} + 1} \approx 1,291$$

$$q = \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2} \Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-q}{q}\varepsilon \approx 0,183$$

$$|x_1 - x_0| = |1,291 - 1,5| \approx 0.209 > 0,183$$

ітерація 2:

$$x_2 = \varphi(x_1) = \sqrt{\frac{1}{x_1} + 1} = \sqrt{\frac{1}{1,291} + 1} \approx 1,332$$

$$|x_2 - x_1| = |1,332 - 1,291| \approx 0.041 < 0,183$$

апостеріорна оцінка кількості кроків: 2

апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\frac{\ln \dfrac{|\varphi(x_0) - x_0|}{(1-q)\varepsilon}}{\ln(1/q)} \right] + 1 = \left[\frac{\ln \dfrac{|1.291 - 1,5|}{(1-0.354)0,1}}{\ln(1/0.353)} \right] +$$

$$+1 = [1,128] + 1 = 2$$

Метод релаксації

$$\Psi(x) \equiv \tau \equiv const$$

$$x = x + \tau f(x)$$

$$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n)$$

$$x = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = x + \Psi(x) f(x)$$

Метод релаксації

Достатні умови збіжності:

$$|\varphi'(x)| < 1$$

$$-1 < \varphi'(x) < 1$$

$$-1 < (x + \tau f(x))' < 1$$

Метод релаксації

Достатні умови збіжності:

$$0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$$

$$M_1 = \max_{x \in [a;b]} |f'(x)|, \qquad m_1 = \min_{x \in [a;b]} |f'(x)|$$

1) $f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \tau < \dfrac{2}{M_1}$

2) $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{2}{M_1} < \tau < 0$

$$-2 < \tau f'(x) < 0$$

Метод релаксації

Достатні умови збіжності:

$$0 < m_1 < |f'(x)| < M_1$$

$$M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)|, \qquad m_1 = \min_{x\in[a;b]} |f'(x)|$$

$$\tau \in \left(0; \frac{2}{M_1}\right)$$

Ітераційний процес: $x_{n+1} = x_n \pm \tau f(x_n)$

«+», якщо $f'(x) < 0$

«-», якщо $f'(x) > 0$

Метод релаксації

Вибір оптимального τ:

$$\tau_o = \frac{2}{M_1 + m_1}; \qquad q_o = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1}$$

Швидкість збіжності: $|x_n - x^*| \leqslant q^n |x_0 - x^*|$

Порядок швидкості збіжності: 1 (лінійна)

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$n_o \geqslant \left[\frac{\ln \frac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln(1/q_o)} \right] + 1$$

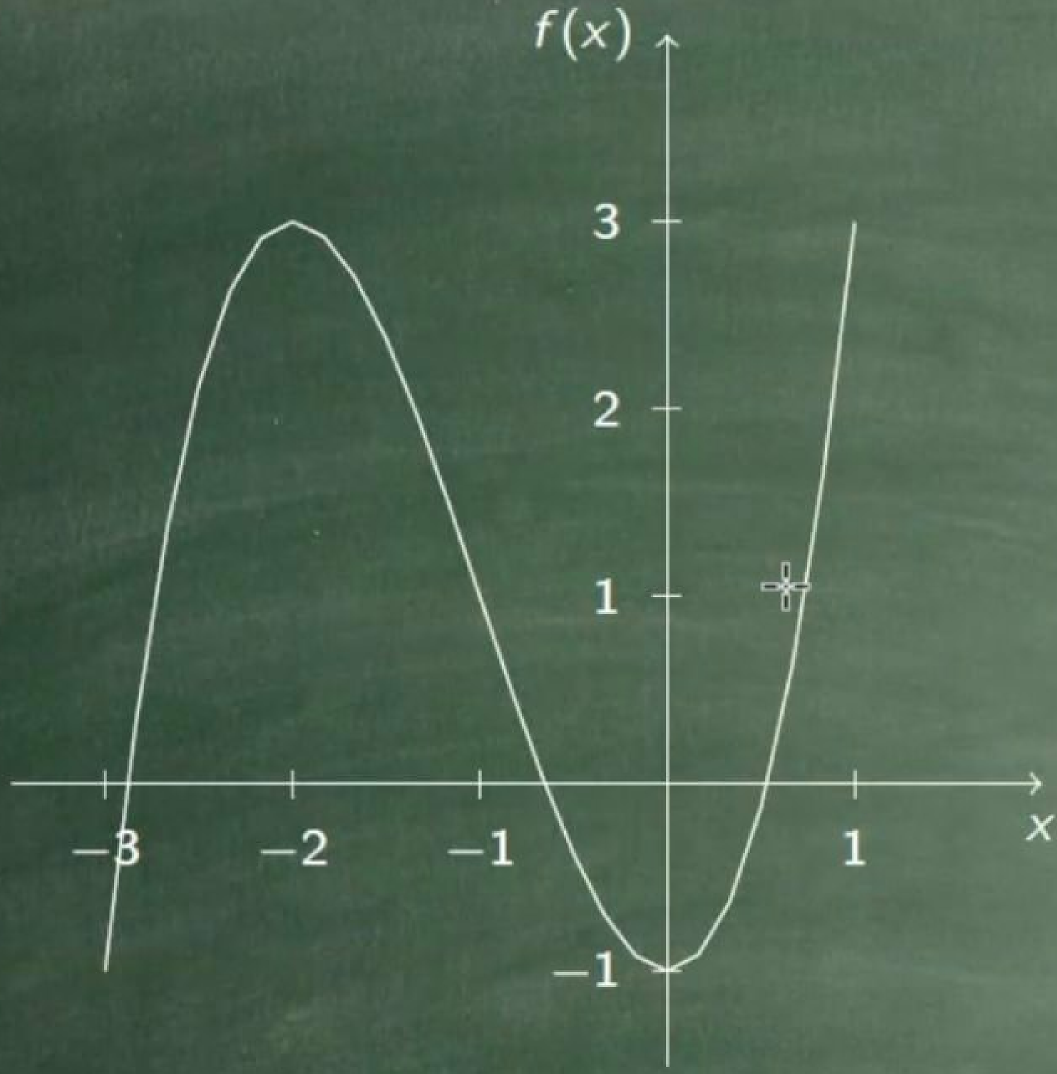
Метод релаксації

Приклад. Знайти найменший за модулем від'ємний корінь рівняння

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом релаксації з точністю $\varepsilon = 0,1$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Етап 1.



Етап 2.

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1 \\ f(-0,5) &= (-0,5)^3 + 3(-0,5)^2 - 1 = -0,125 \end{aligned}\right\}$$

Eman 2.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1 \\ f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 1 = -1 \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow$$

Етап 3.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1; \qquad f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$m_1 = \min_{x\in[-1;-0,5]} |3x^2 + 6x| = |-2,25| = 2,25$$

$$M_1 = \max_{x\in[-1;-0,5]} |3x^2 + 6x| = |-3| = 3$$

$$\tau_o = \frac{2}{M_1 + m_1} = \frac{2}{3 + 2,25} \approx 0.381$$

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n)$$

ітерація 1:

$x_0 = -0,5$

$$x_1 = x_0 + \tau f(x_0) = -0,5 + 0.381 \times$$
$$\times \left((-0,5)^3 + 3(-0,5)^2 - 1\right) \approx -0,643$$

$|x_1 - x_0| = |-0,643 + 0,5| \approx 0,1 \leqslant \varepsilon$

$x^* \approx x_2 \approx -0,653$

апостеріорна оцінка кількості кроків: 1 *апріорна оцінка кількості кроків:*

$$q_o = \frac{M1 - m_1}{M1 + m_1} = \frac{3 - 2,25}{3 + 2,25} \approx 0.143$$

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in [-1; -0,5] \\ x_0 = -0,5 \end{array}\right. \Rightarrow |x_0 - x^*| = |-0.5 - x^*| \leqslant 0,5$$

$$n_o \geqslant \left[\frac{\ln \frac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln(1/q_o)}\right] + 1 = \left[\frac{\ln \frac{0,5}{0,1}}{\ln(1/0,143)}\right] + 1 =$$

$$= [0.828] + 1 = 1$$

Метод дотичних (Ньютона)

Геометрична інтерпретація