Лекція 6

# Дискретні випадкові величини

## Поняття дискретної випадкової величини

Перший крок до визначення випадкової величини зробив Пуассон у 1832 році у мемуарах „ Про ймовірність середніх результатів спостережень", в якому він розглянув випадкову величину, яка може приймати значення $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ з ймовірностями $p_1$, $p_2$, ... , $p_n$. Він розглянув також неперервні випадкові величини з їх щільностями розподілу.

Однак це був тільки перший крок. Чітке математичне визначення випадкової величини було введене А.М. Колмогоровим у кінці 20-х років XIX століття. Його підхід, викладений у відомій роботі „Основні поняття теорії ймовірностей", став загальноприйнятим і мав великий вплив на розвиток теорії ймовірностей.

Нехай $(\Omega, U, P)$ ймовірносний простір, а $A_1, A_2, ..., A_k, ... \in U$ скінченна або зліченна множина подій таких, що $\bigcup_k A_k = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j$. Через $\chi_{A_k}(\omega)$ будемо позначати індикатор події $A_k$:

$$\chi_{A_k}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \omega \in A_k, \\ 0, & \text{якщо} \quad \omega \notin A_k. \end{cases}$$

***Дискретною випадковою величиною*** $\xi(\omega)$ будемо називати лінійну комбінацію індикаторів $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \chi_{A_k}(\omega), \quad x_k \in R$. Очевидно, що для $\omega \in A_k$, $\xi(\omega) = x_k$ і множина усіх значень $X = \{x_1, ..., x_k, ...\}$ не більш як зліченна.

Отже, випадкова величини є функцією $\xi(\omega): \Omega \to X$ , при цьому для кожнлго $x_k \in X = \{x_1, ..., x_k, ...\}$ має місце $\{\omega : \xi(\omega) = x_k\} = A_k \in U$ .

## **П р и к л а д . Схема випробувань Бернуллі.**

Нехай $\Omega = \{\omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n), \quad \omega_i = 0$ або 1, $i$=1,...,$n$.}, $U$ – множина усіх підмножин $\Omega$. Задамо два числа $p_0, p_1 > 0$, $p_0 + p_1 = 1$, які будемо тлумачити як ймовірність невдачі (випадіння 0) і ймовірність успіху (випадіння 1). Покладемо за визначенням

$$P((\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)) \overset{def}{=} p_{\omega_1} p_{\omega_2} ... p_{\omega_n} . \qquad (1)$$

***Незалежними випробуваннями Бернуллі*** будемо називати скінченну ймовірносну схему $(\Omega, U, P)$, у якій ймовірності елементарних подій визначаються формулою (1).

Задамо на $(\Omega, U, P)$ випадкову величину $\xi(\omega)$ - число успіхів у $n$ випробуваннях Бернуллі: $\xi(\omega) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \omega_i$. Усі можливі значення $\xi(\omega) \in \{0,1,2,...,n\}$.

Введемо позначення

$$A_i = \{\omega : \xi(\omega) = i\} = \{\omega : \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n = i\}, \quad i = 0,1,...,n.$$

Тоді $\xi(\omega) = \sum_{i=0}^{n} i \chi_{A_i}(\omega)$.

Так як ймовірність кожної елементарної події з $A_i$ дорівнює $p_1^{\,i} \cdot p_0^{\,n-i}$, то для того, щоб обчислити ймовірність події $A_i$, необхідно підрахувати число елементарних подій, які входять у $A_i$. Це число співпадає з числом ланцюжків довжини $n$, складених з нулів та одиниць, у яких рівно „$i$” одиниць. Число таких ланцюжків дорівнює $C_n^{\,i}$ . Таким чином

$$P(A_i) = P(\xi(\omega) = i) = C_n^i p_1^i p_0^{n-i} . \qquad (2)$$

Для зручності перепозначимо $p_1 = p; \quad p_0 = 1 - p = q$. Тоді

$$P(\xi(\omega) = i) = C_n^i p^i q^{n-i} . \qquad (3)$$

## **З а к о н р о з п о д і л у д и с к р е т н о ї в и п а д к о в о ї в е л и ч и н и.**

***Законом розподілу випадкової величини*** $\xi$ будемо називати ймовірність $P\{\xi \in B\}$, що розглядається як функція числової множини $B$. Закон розподілу визначається значеннями $x_1, x_2, ..., x_k, ..$, які приймає $\xi$, і ймовірностями $P\{\xi = x_k\}$ цих значень. Позначимо $P\{\xi = x_k\} = p_k$. Тоді закон розподілу $P\{\xi \in B\}$ можна визначити за допомогою таблиці

| $x_1$ | $x_2$ | .... | $x_k$ | .... |
|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | $p_2$ | .... | $p_k$ | .... |

(4)

Очевидно, що $p_k \geq 0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Те, що таблиця (4) визначає закон розподілу, підтверджує рівність

$$P\{\xi \in B\} = \sum_{i: x_i \in B} p_i \,.$$

Іноді законом розподілу називають саму таблицю (4).

Наведемо приклади законів розподілу.

1) **Біноміальний** закон розподілу:

$$p_m = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, ..., n \,.$$

Дійсне число $p \in (0,1)$ і натуральне число $n$ є параметрами цього закону. Випадкова величина $\xi$, якій відповідає цей закон розподілу, представляє собою число успіхів у $n$ незалежних випробуваннях Бернуллі з імовірністю успіху $p$ і невдачі $q = 1 - p$.

2) **Гіпергеометричний** закон розподілу:

$$p_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = m_0, m_0 + 1, ..., m_1,$$

де $m_0 = \max(0, n - (N - M))$, $m_1 = \min(M, n)$, $N, M, n$ – деякі натуральні числа такі, що $M, n < N$.

Випадкова величина $\xi$, якій відповідає цей закон розподілу, дорівнює числу білих куль у виборці об'єму $n$ з урни, яка містить $M$ – білих і $N$-$M$ чорних куль.

3) **П у а с с о н і в с ь к и й** закон розподілу:

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0,1,\dots .$$

Дійсне число $\lambda \geq 0$ є параметром пуассонівського закону розподілу.

Випадкова величина $\xi$, що має пуассонівський розподіл, може описувати число позовів від клієнтів страхової компанії, поданих на фіксованому проміжку часу.

4) **Г е о м е т р и ч н и й** закон розподілу:

$$p_m = p^m q, \quad m = 0,1,\dots, \quad q = 1 - p .$$

Число $p \in (0,1)$ є параметром геометричного закону розподілу.

Випадкова величина $\xi$, що має геометричний розподіл, описує довжину серії успіхів у схемі Бернуллі при необмеженому числі випробувань.

В теорії ймовірностей часто говорять про випадкову величину $\xi$ із законом розподілу певного виду, не вказуючи при цьому ні ймовірносний простір ($\Omega, U, P$), ні функцію $\xi(\omega)$, що задає цю випадкову величину.

У зв'язку з цим розглянемо модель вибіркового ймовірносного простору. В цій моделі за законом розподілу стандартним чином будується ймовірносний простір і випадкова величина, закон розподілу якої співпадає із заданим законом.

Нехай закон розподілу задається множиною значень $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ і ймовірностями $p_i, \; i = 1,2,\dots$. Тоді покладемо $\Omega = X = \{x_1, x_2, \dots\}$; $U = 2^X$ - множина усіх підмножин *X*, і для будь-якого *A*$\subset$ *X* $P(A) \overset{def}{=} \sum_{i: x_i \in A} p_i$ . Трійка ($X$,$2^X$,$P$) називається ***вибірковим ймовірносним простором.***

Для $x \in X$ задамо випадкову величину $\xi$ як тотожне перетворення: $\xi(x) = x$. Очевидно, що $\xi(x)$ має закон розподілу, який співпадає з початковим.

За законом розподілу випадкова величина відновлюється неоднозначно. Можуть бути декілька випадкових величин, які мають один і той же закон розподілу. Таким чином з точки зору теорії ймовірностей вони однакові.