Модульна контрольна
робота
з дисципліни Системний
Аналіз
студента групи САПР-3
Арзамасцева Владислава
Варіант №20

Питання 20

Методи розрахунку інтервальних локальних ваг із інтервальної матриці попарних порівнянь

Центральною проблемою в МАІ є розрахунок локальних ваг (або пріоритетів) МПП. Одним із методів є метод головного власного вектора EM (eigenvector method). Але лише для узгодженої МПП існує нормалізований власний вектор, який повністю відображає цінності в цих судженнях. Крім методу EM існують і інші методи знаходження локальних ваг:

- Адитивної нормалізації
- Мат. моделі оптимізації (серед яких метод логарифмічних найменших квадратів або метод геометричної середньої)

1) Метод адитивної нормалізації знаходження локальних ваг.

Це апроксимація методу ЕМ, що не потребує розрахунку власних векторів.

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \quad \text{МПП } A = \{a_{ij} \mid i,j = \overline{1,n}\}.$$

Побудуємо нову матрицю:

$$\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij} \mid i,j = \overline{1,n}\}, \quad \tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{S_j}.$$

- Обернено-симетрична матриця A узгоджена тоді і тільки тоді, коли всі стовпчики $\tilde{A}$ однакові.

У випадку узгодженості A розв'язком за методом AN є вектор

$$(S_1^{-1}, S_2^{-1}, \ldots, S_n^{-1}).$$

Для будь-якої неузгодженої матриці A (яка є обернено-симетричною) для покращення її узгодженості до найкращого можливого рівня в напрямку мінімізації гармонічного [illegible] узгодженості існує єдине коригування елементів цієї матриці:

$$a'_{jk} = \varepsilon_{jk} a_{jk}, \quad \varepsilon_{jk} = \frac{S_k - (a_{jk}+1)}{a_{jk} S_j - (a_{jk}+1)}$$

2) Метод геом. середньої (логарифмічних найменших квадратів).

Відмінність між оцінками ваг, отриманих за допомогою EM і RGMM має порядок $O(\sigma^2)$, σ^2 - дисперсія $\ln(a_{ij})$

$$k: v_i = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/n},$$

$$w_i = v_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} v_j;$$

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \ln^2 e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{a_{ij} v_j}{v_i}.$$

За таблицею визначаємо порогове значення, і якщо GCI перевищують вказані пороги, то МПП неузгоджена.

Підвищення узгодженості робиться за допомогою перетворення:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)^{\alpha} \left(\frac{\omega_i^{(k)}}{\omega_j^{(k)}}\right)^{1-\alpha}.$$

Задача 20

1) Заповнити МПП.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 2 & 1/3 \\ 6 & 1 & 2 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Обчислити вектор локальних пріоритетів (ВЛП)

Вл. вектор: $(0.577, 1.189, 0.931, 1.565)^T$

ВЛП: $(0.135, 0.279, 0.218, 0.367)$

3) Обч-ти відношення узгодженості.

ВУ = 0.8369, СУ = 0.9, ІУ = 0.75321

4) Пророботи 1 ітерацію методів зваженої арифметичної середньої та зваженої геом. середньої при $\alpha = 0.65$, для нової МПП реалізувати пункти 2 і 3.

I) Метод зваж. арифм. середньої

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha a_{ij}^{(k)} + (1-\alpha)\dfrac{\omega_i^{(k)}}{\omega_j^{(k)}}, & i = \overline{1,n}, j \geq i \\ \dfrac{1}{\alpha a_{ij}^{(k)} + (1-\alpha)\dfrac{\omega_i^{(k)}}{\omega_j^{(k)}}}, & i = \overline{2,n}, j < i. \end{cases}$$

Нова МПП:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.28 & 1.517 & 0.35 \\ 3.59 & 1 & 1.75 & 0.37 \\ 0.66 & 0.57 & 1 & 2.16 \\ 2.89 & 2.67 & 0.46 & 1 \end{pmatrix}$$

ВЛП: $(0.148, 0.296, 0.227, 0.329)^T$, ІУ $= 0.2966$

СУ $= 0.9$

ВУ: 0.3295.

II Метод зважс. геом. середньої

$$a_{ij}^{(k+1)} = \left(a_{ij}^{(k)}\right)^{\alpha} \left(\frac{\omega_i^{(k)}}{\omega_j^{(k)}}\right)^{1-\alpha}$$

Нова МПП:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.24 & 1.33 & 0.35 \\ 4.13 & 1 & 1.71 & 0.28 \\ 0.75 & 0.59 & 1 & 1.7 \\ 2.9 & 3.53 & 0.59 & 1 \end{pmatrix}$$

ВЛП $= (0.135, 0.279, 0.218, 0.367)^T$, ІУ $= 0.29$[illegible],

СУ $= 0.9$

ВУ $= 0.3225$.

Висновки

Бачимо, що МПП значно покращилась – ВУ був 0.8369, а став 0.33 і 0.32 відповідно. Проте однієї ітерації замало, адже ВУ бажано мати ≤ 0.1 (або 0.2, якщо від моделі не залежить життя і здоров'я людей).

Також бачимо, що метод зв. геометричної середньої збігається швидше, проте його складніше обчислювати.