Семінар 10

Властивості коефіцієнта кореляції

Коваріація та коефіцієнт кореляції

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i-M\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^2=M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\sum_{i=1}^{n}M\xi_i\right)^2=M\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-M\xi_i)\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}M\left(\xi_i-M\xi_i\right)^2+2\sum_{j>i}M\left(\xi_i-M\xi_i\right)\left(\xi_j-M\xi_j\right)=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i+2\sum_{j>i}\mathrm{cov}\left(\xi_i,\xi_j\right)$$

Коваріацією $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ величин ξ і η називають

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)(\eta-\mathrm{M}\eta).$$

Коефіцієнтом кореляції величин ξ і η називають величину

$$r_{\xi,\eta}=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}.$$

Випадкові величини ξ і η ***некорельовані***, якщо $r_{\xi,\eta}=0$.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) $-1\le r_{\xi,\eta}\le 1$.

2) Якщо $|r_{\xi,\eta}|=1$, то з ймовірністю 1 виконується співвідношення

$$\xi=a\eta+b.$$

Дійсно, нехай $r_{\xi,\eta}=1$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$D\left(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}-\frac{\eta}{\sqrt{D\eta}}\right)=0,$$

що в свою чергу можливо тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}-\frac{\eta}{\sqrt{D\eta}}=\frac{\mathrm{M}\xi}{\sqrt{D\xi}}-\frac{\mathrm{M}\eta}{\sqrt{D\eta}}\quad \text{з імовірністю 1.}$$

Звідси випливає, що

$$\xi=a\eta+b,\ \text{де}\quad a=\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}},\qquad b=\mathrm{M}\xi-\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}\mathrm{M}\eta.$$

Аналогічно розбирається випадок $r_{\xi,\eta}=-1$.

3) Якщо випадкові величини незалежні, то $r_{\xi,\eta}=0$.

Для коваріації величин ξ і η знаходимо

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)(\eta-\mathrm{M}\eta)=\mathrm{M}(\xi\eta-\eta\mathrm{M}\xi-\xi\mathrm{M}\eta+\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta)=\mathrm{M}\xi\eta-\mathrm{M}\xi\cdot\mathrm{M}\eta.$$

Таким чином, якщо ξ і η - незалежні, то $\mathrm{cov}(\xi,\eta)=0$ і $r_{\xi,\eta}=0$.

Обернене твердження невірно. Наведемо ідею, на основі якої можна будувати конкретні приклади пар залежних випадкових величин, що некорельовані.

1. Знайти лінійну функцію, яка найкращим чином у середньо квадратичному сенсі наближає випадкову аеличину η по випадковій величині ξ, тобто знайти a та b такі, що $g(a,b)=M\left(\eta-(a\xi+b)\right)^2\to\min$

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial a}=-2M\xi\left(\eta-(a\xi+b)\right)=0$$

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial b}=-2M\left(\eta-(a\xi+b)\right)=0$$

$\lambda(\xi)=a^*\xi+b^*$, де $a^*=\dfrac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}=\dfrac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}\sqrt{\dfrac{D\eta}{D\xi}}=r(\xi,\eta)\sqrt{\dfrac{D\eta}{D\xi}}$, а $b^*=M\eta-a^*\xi$

При цьому $\Delta^*=M\left(\eta-(a^*\xi+b^*)\right)^2=D\eta-\dfrac{\mathrm{cov}^2(\xi,\eta)}{D\xi}=D\eta\left(1-r^2(\xi,\eta)\right)$

Якщо $r(\xi,\eta)=0$, тоді $a^*=0$. Якщо $r^2(\xi,\eta)=1$, тоді $\Delta^*=0$.

2. Нехай $\alpha=\begin{cases}0, & \frac{1}{3}\\ \frac{\pi}{2}, & \frac{1}{3}\\ \pi, & \frac{1}{3}\end{cases}$, $\xi=\sin\alpha$, $\eta=\cos\alpha$, $M\xi=M\sin\alpha=0\frac{1}{3}+1\frac{1}{3}+0\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$$M\eta = M\cos\alpha = 1\frac{1}{3} + 0\frac{1}{3} - 1\frac{1}{3} = 0$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta$$

В нашому випадку $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M\xi\eta$

Знайдемо

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M\xi\eta = M\sin\alpha\cos\alpha = 0\cdot 1\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot 0\cdot\frac{1}{3} - 0\cdot 1\cdot\frac{1}{3} = 0$$

Натомість $\xi^2 + \eta^2 = 1$