Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского

М. А. МУРАТОВ
В. Л. ОСТРОВСКИЙ
Ю. С. САМОЙЛЕНКО

КОНЕЧНОМЕРНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ I. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ (L)

Учебное пособие

Киев
«Центр учебной литературы»
2011

УДК 512.64
ББК 22.143
М91

Рекомендовано министерством образования и науки Украины
как учебное пособие для студентов высших учебных заведений
(письмо №1/11-1444 от 21.02.2011)

Рецензенты:

Боднарчук Юрий Викторович, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математики Национального университета "Киево-Могилянская Академия".

Дрозд Юрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом алгебры института математики НАН Украины.

Петравчук Анатолий Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и математической логики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко.

Муратов М.А.
М91 Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах (L): Учебное пособие / Муратов М.А., Островский В.Л., Самойленко Ю.С. — Киев: Центр учебной литературы, 2011. — 153 с.

ISBN 978-611-01-0223-0

Учебное пособие I(L) посвящено теории линейных операторов в конечномерных векторных пространствах. Основано на курсах, которые читались авторами в Киевском национальном университете имени Тараса Шевченко и Таврическом национальном университете имени В.И.Вернадского.

Для математиков, физиков, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Библиография: 18 назв.

УДК 512.64
ББК 22.143

ISBN 978-611-01-0223-0

Оглавление

Предисловие **5**

1 Векторные пространства **6**

1.1 Определение и основные свойства векторного пространства . 6

1.2 Размерность векторного пространства 9

1.3 Подпространства векторного пространства 14

1.4 Факторпространство 20

1.5 Сопряженное пространство 24

2 Операторы в конечномерном векторном пространстве и их матрицы **28**

2.1 Понятие линейного оператора 28

2.2 Ядро и образ линейного оператора 31

2.3 Обратный оператор 34

2.4 Матрица линейного оператора 36

2.5 Связь между матрицами оператора в различных базисах. Подобие матриц и операторов 38

3 Алгебры $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ и $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ **41**

3.1 Понятие алгебры. Идеал. Фактор-алгебра 41

3.2 Алгебра $\mathcal{B}(\mathbf{V})$. Теорема об изоморфизме 46

3.3 Алгебра $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ и ее свойства 50

4 Инвариантные подпространства линейного оператора **56**

4.1 Инвариантные подпространства линейного оператора и матрицы 56

4.2 Характеристический многочлен и след линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы 60

4.3 Операторы простой структуры 68

5 Треугольная форма Шура **72**
5.1 Индуцированный оператор 72
5.2 Спектр оператора 73
5.3 Собственные и присоединенные векторы линейного оператора 77
5.4 Операторный многочлен и инвариантные подпространства . 86
5.5 Треугольная форма Шура матрицы линейного оператора . . 90

6 Нормальная форма линейного оператора **96**
6.1 Прямая сумма операторов 96
6.2 Корневые подпространства оператора 100
6.3 Неразложимые операторы. Клетки Жордана 108
6.4 Нормальная форма Жордана оператора, имеющего единственное собственное значение 115
6.5 Нормальная форма Жордана линейного оператора 119
6.6 Матрицы, коммутирующие с данной 124
6.7 Функции от операторов 136

Литература **146**

Предметный указатель **149**

Предисловие

1. Первоначальная цель авторов была написать ряд учебных пособий, посвященных линейным операторам, наборам линейных операторов и наборам линейных подпространств в конечномерных гильбертовых (унитарных) пространствах (пособия с пометкой (H)). Но начав работу, мы пришли к мысли, что эти пособия есть частью единого текста, состоящего из пособий с пометкой (L), посвященных операторам, наборам операторов и наборам подпространств в конечномерных линейных пространствах и соответствующих пособий с пометкой (H).

2. Основная цель авторов — написать ряд учебных пособий (L) по структурной теории операторов, наборов операторов и наборов подпространств в *конечномерных линейных* пространствах, и (H) по структурной теории линейных операторов, наборов операторов и наборов подпространств в *конечномерных гильбертовых* пространствах.

Настоящее пособие I(L) содержит материал, посвященный (более или менее) стандартным темам конечномерной линейной алгебры, а соответствущее пособие I(H) содержит материал, посвященный изложению основ гильбертового анализа в конечномерных гильбертовых (унитарных) пространствах. Их текст содержит упражнения, которые позволяют читателю убедиться в понимании изложенного материала и дополняют его.

3. Главная же цель авторов — написать ряд пособий, понятных и полезных студентам, аспирантам и научным работникам.

Мустафа Абдурешитович Муратов
Василий Львович Островский
Юрий Стефанович Самойленко

Глава 1

Векторные пространства

1.1 Определение и основные свойства векторного пространства

Определение 1.1.1. Непустое множество $\mathbf{V}$, в котором определены операции сложения и умножения на элементы поля комплексных чисел $\mathbb{C}$

$$\text{“}+\text{”}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V},$$
$$\text{“}\cdot\text{”}: \mathbb{C} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

называется *линейным (векторным) пространством* над полем $\mathbb{C}$, если имеет место следующая группа аксиом:

(i) $\mathbf{V}$ — коммутативная группа по сложению:

- Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$
$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$
- Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$
$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$
- Существует такой элемент $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$
$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$
(этот элемент $\mathbf{0}$ называется *нулевым элементом* или *нулем* векторного пространства $\mathbf{V}$);

- Для любого элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ существует такой элемент $-\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, что
$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$
(этот элемент $-\mathbf{x}$ называется *противоположным* элементу $\mathbf{x}$);

(ii) Умножение на скаляр
$$\text{“}\cdot\text{”} : (\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x}$$
удовлетворяет свойствам:

- Для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$
$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x};$$
- Для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$
$$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{x};$$

(iii) Имеют место два закона дистрибутивности:

- Для любых α, $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$
$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{x}.$$
- Для любых $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$
$$\alpha \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha \cdot \mathbf{x} + \alpha \cdot \mathbf{y}.$$

Элементы векторного пространства $\mathbf{V}$ называются *векторами*, а элементы поля $\mathbb{C}$ — *скалярами*.

Замечание 1.1.2. Векторные пространства $\mathbf{V}$ могут определяться над любым полем скаляров $\mathbb{F}$. Мы будем рассматривать только векторные пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Приведем примеры векторных пространств.

Пример 1.1.3. Декартово произведение
$$\mathbf{V} = \mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n} = \{\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),\ \alpha_i \in \mathbb{C}\},$$
где $i = 1, \ldots, n$, с покоординатным сложением векторов и умножением скаляра на вектор.

Пример 1.1.4. $\mathbf{V} = \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n[\mathbb{C}]$ — множество всех полиномов вида

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0,$$

$z \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$, степени которых не превосходят n, с обычными операциями сложения многочленов и умножения их на комплексное число.

Пример 1.1.5. $\mathbf{V} = \mathcal{P} = \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ — множество всех полиномов, заданных на $\mathbb{C}$.

Пример 1.1.6. $\mathbf{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ — множество всех квадратных матриц $\|a_{ij}\|$ порядка n, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i,\ j = 1,\ \ldots,\ n$, с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на комплексное число.

Пример 1.1.7. $\mathbf{V} = \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ — множество всех прямоугольных матриц $\|a_{ij}\|$ порядка $n \times m$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i = 1,\ \ldots,\ n$, $j = 1,\ \ldots,\ m$, с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на комплексное число.

Пример 1.1.8. $\mathbf{V} = C(a, b)$ — множество всех непрерывных комплекснозначных функций действительного переменного на отрезке $[a, b]$, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на комплексное число.

Упражнение 1.1.9. Пусть $\mathbf{V}$ — произвольное векторное пространство. Тогда

- В пространстве $\mathbf{V}$ нулевой элемент $\mathbf{0}$ определен однозначно.
- Для каждого элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ противоположный элемент $-\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ определен однозначно.
- Для каждого элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ имеет место равенство

  $$0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

  (в правой части равенства $\mathbf{0}$ — нуль-вектор, а в левой — число 0).
- Для каждого элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ имеет место равенство

  $$-\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x}.$$

- Для каждого $\alpha \in \mathbb{C}$ имеет место равенство

  $$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

  где $\mathbf{0}$ — нуль-вектор.

- Если $\alpha \cdot \mathbf{x} = \beta \cdot \mathbf{x}$, α, $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то $\alpha = \beta$.
- Если $\alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{y}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, $\alpha \neq 0$, то $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- Равенство $\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ имеет место тогда и только тогда, когда либо $\alpha = 0$, либо $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Замечание 1.1.10. Существование противоположного элемента позволяет ввести в векторном пространстве $\mathbf{V}$ операцию вычитания:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}.$$

1.2 Размерность векторного пространства

Пусть $\mathbf{V}$ — векторное пространство. Всюду в дальнейшем для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, α, $\beta \in \mathbb{C}$ мы будем обозначать

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}\mathbf{y}, \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}, \quad \alpha \cdot \beta = \alpha\beta,$$

и если $\alpha \neq 0$, то

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}.$$

Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$. Вектор

$$\mathbf{y} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \lambda_m\mathbf{x}_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\mathbf{x}_i$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ — *коэффициентами* этой линейной комбинации.

Если $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, то очевидно, $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Такая линейная комбинация векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ называется *тривиальной*. Если хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ отличен от нуля, то такая линейная комбинация векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ называется *нетривиальной*. Может оказаться, что существует нетривиальная линейная комбинация векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$, равная нулю.

Определение 1.2.1. Векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$ называются *линейно независимыми*, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов отлична от нуля. В этом случае векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ попарно различны.

Векторы $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю.

Определение 1.2.2. Множество $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}$ называется *линейно независимым*, если любая нетривиальная линейная комбинация любого конечного набора попарно различных векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{M}$ отлична от нуля. Если же существует нетривиальная линейная комбинация попарно различных векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{M}$, равная нулю, то множество $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}$ называется *линейно зависимым.*

Непустое конечное упорядоченное множество векторов из $\mathbf{V}$ будем называть *системой векторов*. Одна система называется *подсистемой* другой системы, если она является ее подмножеством.

Упражнение 1.2.3. Докажите следующие утверждения.

- Для того, чтобы система, состоящая из одного вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- Если система векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$ содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
- Для того, чтобы система векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$, $m > 1$, была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.
- Каждая подсистема линейно независимой системы векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in \mathbf{V}$, $m > 1$, линейно независима.
- Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

Пусть $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}$. Множество

$$\mathrm{Lin}(\mathbf{M}) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i \in \mathbf{M}, \lambda_i \in \mathbb{C}, m \in \mathbf{N} \right\} = \mathbb{C}\langle \mathbf{M} \rangle$$

называется *линейной оболочкой* множества $\mathbf{M}$. Легко видеть, что $\mathrm{Lin}(\mathbf{M})$ — векторное пространство.

Определение 1.2.4. Множество векторов $\mathfrak{B} \subset \mathbf{V}$ называется *базисом* (*базисом Гамеля*) векторного пространства $\mathbf{V}$, если оно линейно независимо и $\mathrm{Lin}(\mathfrak{B}) = \mathbf{V}$.

Заметим, что так как $\mathrm{Lin}(\mathfrak{B}) = \mathbf{V}$, то базис $\mathfrak{B}$ не может содержатся ни в каком другом линейно независимом множестве, т.е. является максимальным линейно независимым подмножеством в $\mathbf{V}$.

Определение 1.2.5. Векторное пространство $\mathbf{V}$ называется *конечномерным*, если оно обладает базисом, состоящим из конечного числа элементов. В противном случае оно называется *бесконечномерным*.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать конечномерные векторные пространства $\mathbf{V}$.

Пусть $\mathbf{V}$ — конечномерное векторное пространство. Система линейно независимых векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbf{V}$ является базисом пространства $\mathbf{V}$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ имеет место разложение:

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \dots + \xi_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\mathbf{e}_i, \tag{1.1}$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}$.

Утверждение 1.2.6. *Если $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис конечномерного векторного пространства $\mathbf{V}$, то коэффициенты разложения* (1.1) *определяются однозначно.*

Доказательство. Если для некоторого вектора $x \in \mathbf{V}$ имеют место два разложения

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \dots + \xi_n\mathbf{e}_n,$$
$$\mathbf{x} = \eta_1\mathbf{e}_1 + \dots + \eta_n\mathbf{e}_n,$$

то вычитая почленно из первого равенства второе, получим:

$$\mathbf{0} = (\xi_1 - \eta_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (\xi_n - \eta_n)\mathbf{e}_n,$$

из которого, в силу линейной независимости векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, следует, что

$$\xi_1 = \eta_1, \quad \dots, \quad \xi_n = \eta_n. \qquad \square$$

Определение 1.2.7. Коэффициенты $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ разложения (1.1) называются *координатами* вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ относительно базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Если в пространстве $\mathbf{V}$ выбран некоторый базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, то вектор $\mathbf{x}$ удобно отождествлять с набором его координат относительно этого базиса, при этом используют обозначение $\mathbf{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Основное значение базиса векторного пространства состоит в том, что линейные операции в пространстве, вначале введенные абстрактно, при задании базиса становятся обычными линейными операциями с числами

— координатами взятых векторов относительно этого базиса. В частности, если базис $\mathfrak{B}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ фиксирован, то при сложении двух векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Упражнение 1.2.8. Докажите следующие утверждения.

- Система ненулевых векторов $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^m$, $m > 1$, линейно зависима тогда и только тогда, когда существует такой номер $k \in \{2, 3, \dots, m\}$, что $\mathbf{x}_k \in \mathrm{Lin}\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1} \rangle$.
- Любую линейно независимую систему векторов $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m\}$ конечномерного векторного пространства $\mathbf{V}$ можно дополнить до базиса.

Утверждение 1.2.9. *Все базисы конечномерного векторного пространства* $\mathbf{V}$ *состоят из одинакового числа элементов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ — два базиса векторного пространства $\mathbf{V}$. Предположим, что $n > m$. Так как $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ — базис, то имеют место следующие равенства:

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}_1 = \mu_{11}\mathbf{f}_1 + \dots + \mu_{1m}\mathbf{f}_m, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{e}_n = \mu_{n1}\mathbf{f}_1 + \dots + \mu_{nm}\mathbf{f}_m.
\end{gathered}$$

Рассмотрим однородную систему уравнений

$$\begin{cases}
\mu_{11}\lambda_1 + \dots + \mu_{n1}\lambda_n = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mu_{1m}\lambda_1 + \dots + \mu_{nm}\lambda_n = 0.
\end{cases}$$

Так как число неизвестных n больше числа уравнений m, то эта система имеет ненулевые решения. Пусть λ_1, …, λ_n — одно из них. Тогда

$$\begin{gathered}
\lambda_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n\mathbf{e}_n = \\
= (\mu_{11}\lambda_1 + \dots + \mu_{n1}\lambda_n)\mathbf{f}_1 + \dots + (\mu_{1m}\lambda_1 + \dots + \mu_{nm}\lambda_n)\mathbf{f}_m = \\
= 0 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{f}_m = \mathbf{0},
\end{gathered}$$

что противоречит линейной независимости векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Аналогично проверяется, что неравенство $n < m$ также невозможно. Таким образом, $n = m$. $\square$

Это утверждение позволяет ввести понятие размерности конечномерного векторного пространства.

Определение 1.2.10. Число элементов базиса конечномерного векторного пространства $\mathbf{V}$ называется *размерностью* или *векторной размерностью* $\mathbf{V}$ и обозначается $\dim \mathbf{V}$.

Если размерность $\dim \mathbf{V} = n$, то векторное пространство $\mathbf{V}$ называется *n-мерным.* Примером n-мерного векторного пространства служит пространство $\mathbb{C}^n$.

Определение 1.2.11. Два векторных пространства $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ и $(\mathbf{W}, \oplus, *)$ над полем $\mathbb{C}$ называются *изоморфными* (обозначается $\mathbf{V} \simeq \mathbf{W}$), если существует такое взаимно однозначное отображение $\psi\colon \mathbf{V} \to \mathbf{W}$, что

$$\psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \psi(\mathbf{x}) \oplus \psi(\mathbf{y}), \quad \psi(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha * \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V},\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Заметим, что любое n-мерное векторное пространство $\mathbf{V}$ над полем $\mathbb{C}$ изоморфно $\mathbb{C}^n$. В дальнейшем операции в изоморфных векторных пространствах $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$ будем обозначать одинаково.

Упражнение 1.2.12. Докажите следующие утверждения.

- Изоморфные конечномерные векторные пространства имеют одну и ту же размерность.
- Все конечномерные векторные пространства, имеющие одну и ту же размерность, изоморфны между собой.
- Конечномерные векторные пространства, имеющие разные размерности, не изоморфны друг другу.
- Любое подмножество из $(n+1)$-го вектора n-мерного векторного пространства $\mathbf{V}$ линейно зависимо.

Приведем примеры базисов некоторых векторных пространств.

Пример 1.2.13. Пространство $\mathbb{C}^n$. В этом пространстве базис образуют векторы

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1).\end{gathered}$$

Базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ называется *каноническим базисом* в $\mathbb{C}^n$.

Пример 1.2.14. Пространство $\mathbf{V} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ всех квадратных матриц $\|a_{ij}\|$ порядка n, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, i, $j = 1, 2, \ldots, n$. Это пространство имеет размерность $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2$. Канонический базис в $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ образуют матрицы $[E_{ij}]$, у которых элемент $a_{ij} = 1$, а все остальные элементы равны нулю.

Пример 1.2.15. Пространство $\mathcal{P}_n[\mathbb{C}]$ полиномов, определенных на $\mathbb{C}$, степени которых не превосходят n. Канонический базис пространства $\mathcal{P}_n[\mathbb{C}]$ образуют векторы $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = z$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = z^n$. Координатами многочлена

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

в этом базисе являются его коэффициенты $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Пример 1.2.16. Пространство $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ всех многочленов, определенных на $\mathbb{C}$. Это пространство бесконечномерно. Канонический базис в нем образуют векторы $\mathbf{e}_k = z^k$, $k = 0, 1, \ldots$.

1.3 Подпространства векторного пространства

Определение 1.3.1. Подмножество $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ называется *подпространством* векторного пространства $\mathbf{V}$, если оно само является векторным пространством относительно определенных в $\mathbf{V}$ операций сложения и умножения на скаляры.

Подмножество $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ является подпространством векторного пространства $\mathbf{V}$, если из $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ следует, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{M}$ и $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} + \mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}, \quad \alpha\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M}.$$

Ясно, что подмножество $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ является подпространством векторного пространства $\mathbf{V}$, если $\mathbb{C}\langle\mathbf{M}\rangle = \mathbf{M}$.

Тривиальным и примерами подпространств любого пространства $\mathbf{V}$ являются нулевое подпространство $\mathbf{M} = \{\mathbf{0}\}$ и все пространство $\mathbf{V}$. Приведем другие примеры подпространств векторного пространства $\mathbf{V}$.

Пример 1.3.2. В пространстве $C(\mathbb{C})$ всех непрерывных комплекснозначных функций на $\mathbb{C}$ пространство $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ полиномов является подпространством, а пространство $\mathcal{P}_n[\mathbb{C}]$ — подпространством в $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$.

Пример 1.3.3. В пространстве $\mathbb{C}^n$ множество всех векторов

$$\mathbf{M} = \{\mathbf{x} = (0, \xi_2, \ldots, \xi_n),\ \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}\}$$

образует подпространство.

Упражнение 1.3.4. Любое подпространство $\mathbf{M}$ линейного пространства $\mathbf{V}$ содержит нулевой вектор.

Поскольку любое подпространство $\mathbf{M}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ само является векторным пространством, то все понятия, такие как линейная независимость, базис, размерность и т.д., применимы и к подпространствам. Так как в подпространстве $\mathbf{M}$ не может быть больше линейно независимых векторов, чем в самом пространстве $\mathbf{V}$, то

$$\dim \mathbf{M} \leqslant \dim \mathbf{V}.$$

Если $\{\mathbf{M}_j\}_{j\in J}$ — набор подпространств векторного пространства $\mathbf{V}$, где J — некоторое индексное множество, то $\bigcap\limits_{j\in J} \mathbf{M}_j$ — тоже подпространство. При этом

$$\dim\Big(\bigcap_{j\in J} \mathbf{M}_j\Big) \leqslant \min\{\dim \mathbf{M}_j,\ j \in J\}.$$

Следовательно, для любого подмножества $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{V}$ пересечение всех подпространств из $\mathbf{V}$, содержащих $\mathcal{S}$, является наименьшим подпространством, содержащим $\mathcal{S}$. Оно называется подпространством, *порожденным* множеством $\mathcal{S}$, и обозначается $l(\mathcal{S})$. Ясно, что

$$l(\mathcal{S}) = \mathrm{Lin}(\mathcal{S}) = \mathbb{C}\langle\mathcal{S}\rangle.$$

Упражнение 1.3.5. Если $\mathcal{S} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — линейно независимое подмножество векторного пространства $\mathbf{V}$, то $\mathbf{M} = l(\mathcal{S})$ — k-мерное подпространство и векторы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ образуют в нем базис.

Упражнение 1.3.6. Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — два подпространства n-мерного векторного пространства $\mathbf{V}$. Если $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$, то

$$\dim \mathbf{M} \leqslant \dim \mathbf{N},$$

причем

$$\dim \mathbf{M} = \dim \mathbf{N}$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{M} = \mathbf{N}$.

Упражнение 1.3.7. Если $\mathbf{M}$ — k-мерное подпространство n-мерного пространства $\mathbf{V}$, то существует такой базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ пространства $\mathbf{V}$, что

$$\mathbf{M} = \mathbb{C}\langle\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\rangle,$$

т.е. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис подпространства $\mathbf{M}$.

Определение 1.3.8. Множество подпространств $\{\mathbf{M}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ называется *цепью*, если для каждой пары подпространств $\mathbf{M}_{\gamma_1}$ и $\mathbf{M}_{\gamma_2}$ либо $\mathbf{M}_{\gamma_1} \subseteq \mathbf{M}_{\gamma_2}$, либо $\mathbf{M}_{\gamma_2} \subseteq \mathbf{M}_{\gamma_1}$. Цепи, отличающиеся лишь числом совпадающих подпространств, отождествляются, поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что все ее подпространства попарно различны. Цепь подпространств называется *максимальной* (для максимальных цепей используется также термин "флаг подпространств"), если она не является собственным подмножеством никакой другой такой цепи.

Упражнение 1.3.9. Докажите следующие свойства цепей.

- (Принцип обрыва цепи) Любая цепь подпространств $\{\mathbf{M}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ n-мерного векторного пространства $\mathbf{V}$ конечна, т.е. может быть записана в виде
$$\mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{M}_m, \quad 0 \leqslant m \leqslant n,$$
где все подпространства попарно различны.
- Для того, чтобы цепь подпространств $\mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{M}_m$ была максимальной, необходимо и достаточно, чтобы $m = n$ и
$$\dim \mathbf{M}_k = k, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$
причем $\mathbf{M}_0 = \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{M}_n = \mathbf{V}$.
- Любая цепь подпространств содержится в некоторой максимальной цепи, которая в общем случае определяется неоднозначно.
- Если $\{\mathbf{M}_k\}_{k=0}^n$ — максимальная цепь подпространств, то существует такой базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ векторного пространства $\mathbf{V}$, что векторы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ образуют базисы в подпространствах $\mathbf{M}_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — два подпространства n-мерного пространства $\mathbf{V}$.

Определение 1.3.10. Если каждый вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ однозначно представим в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{M}$, а $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{N}$, то говорят, что пространство $\mathbf{V}$ *разложено в прямую сумму* подпространств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, и записывают:
$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N}$$

Утверждение 1.3.11. *Для того, чтобы пространство* $\mathbf{V}$ *разлагалось в прямую сумму подпространств* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

(i) $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \{\mathbf{0}\}$;

(ii) $\dim \mathbf{M} + \dim \mathbf{N} = \dim \mathbf{V}$.

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\dim \mathbf{V} = n$, $\dim \mathbf{M} = k$ и $\dim \mathbf{N} = m$. Выберем в подпространстве $\mathbf{M}$ базис $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, а в подпространстве $\mathbf{N}$ базис $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$. В силу условия (ii), $k + m = n$. Покажем, что

$$\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$$

— базис пространства $\mathbf{V}$. Действительно, если линейная комбинация

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{e}_k + \mu_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \mu_m \mathbf{f}_m = \mathbf{0},$$

то

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{e}_k = -\mu_1 \mathbf{f}_1 - \cdots - \mu_m \mathbf{f}_m.$$

Но $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{e}_k \in \mathbf{M}$, а $-\mu_1 \mathbf{f}_1 - \cdots - \mu_m \mathbf{f}_m \in \mathbf{N}$ и, в силу условия (i), $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{e}_k = \mathbf{0}, \quad -\mu_1 \mathbf{f}_1 - \cdots - \mu_m \mathbf{f}_m = \mathbf{0}.$$

Поэтому, в силу линейной независимости наборов векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ и $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0, \quad \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ — набор n линейно независимых векторов, и поскольку $\dim \mathbf{V} = n$, они являются базисом векторного пространства $\mathbf{V}$.

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор пространства $\mathbf{V}$. Тогда имеет место разложение вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathfrak{B}$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{e}_k + \beta_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{f}_m.$$

При этом

$$\mathbf{x}_1 = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{e}_k \in \mathbf{M},$$
$$\mathbf{x}_2 = \beta_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_m \mathbf{f}_m \in \mathbf{N},$$

и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$.

Покажем, что такое разложение единственно. Предположим, что существует еще одно разложение:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1' + \mathbf{x}_2', \quad \mathbf{x}_1' \in \mathbf{M},\ \mathbf{x}_2' \in \mathbf{N}.$$

Тогда вычитая из второго разложения первое, получим:

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1' + \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2',$$

откуда $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1' = \mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_2$, причем $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1' \in \mathbf{M}$ и $\mathbf{x}_2' - \mathbf{x}_2 \in \mathbf{N}$. В силу того же условия (i)

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1', \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2',$$

т.е., разложение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{M}$ и $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{N}$, единственно. $\square$

Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — два произвольных подпространства n-мерного векторного пространства $\mathbf{V}$. Как уже отмечалось выше, $\mathbf{S} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ — также подпространство пространства $\mathbf{V}$.

По подпространствам $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ можно построить еще одно подпространство $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$, которое называется их *суммой*. Векторами этого пространства являются всевозможные суммы вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbf{M},\ \mathbf{x}_2 \in \mathbf{N} \tag{1.2}$$

Заметим, что в отличии от прямой суммы двух подпространств, представление вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ в виде (1.2) может быть неоднозначным.

Упражнение 1.3.12. Показать, что сумма подпространств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ совпадает с наименьшим подпространством, содержащим $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$.

Теорема 1.3.13. (*Формула Грассмана*) *Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — два произвольных подпространства n-мерного векторного пространства $\mathbf{V}$. Тогда*

$$\dim \mathbf{M} + \dim \mathbf{N} = \dim(\mathbf{M} + \mathbf{N}) + \dim(\mathbf{M} \cap \mathbf{N}).$$

Доказательство. Пусть $\dim(\mathbf{M} \cap \mathbf{N}) = k$, $\dim \mathbf{M} = k + l$, $\dim \mathbf{N} = k + m$. Выберем в пересечении $\mathbf{S} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ и дополним его, с одной стороны, до базиса в $\mathbf{M}$

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l\}, \tag{1.3}$$

с другой стороны — до базиса в $\mathbf{N}$

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}. \tag{1.4}$$

Покажем, что векторы

$$\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_l, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\} \tag{1.5}$$

образуют базис в сумме подпространств $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$.

Сначала проверим линейную независимость системы (1.5). Пусть

$$\lambda_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \lambda_l \mathbf{f}_l + \mu_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \mu_k \mathbf{e}_k + \nu_1 \mathbf{g}_1 + \dots + \nu_m \mathbf{g}_m = \mathbf{0}.$$

Тогда

$$\lambda_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \lambda_l\mathbf{f}_l + \mu_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \mu_k\mathbf{e}_k = -\nu_1\mathbf{g}_1 - \cdots - \nu_m\mathbf{g}_m.$$

Левая часть этого равенства — вектор из $\mathbf{M}$, а правая — вектор из $\mathbf{N}$. Таким образом,

$$-\nu_1\mathbf{g}_1 - \cdots - \nu_m\mathbf{g}_m \in \mathbf{S} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$$

и так как $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $\mathbf{S}$, то

$$-\nu_1\mathbf{g}_1 - \cdots - \nu_m\mathbf{g}_m = c_1\mathbf{e}_1 + \cdots + c_k\mathbf{e}_k.$$

В силу линейной независимости системы векторов (1.4), это возможно только тогда, когда все коэффициенты равны нулю. В частности, $\nu_1 = \cdots = \nu_m = 0$. Поэтому,

$$\lambda_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \lambda_l\mathbf{f}_l + \mu_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \mu_k\mathbf{e}_k = \mathbf{0},$$

откуда, в силу линейной независимости системы (1.3), получаем, что все коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_l, \mu_1, \ldots, \mu_k$ равны нулю. Таким образом, система векторов (1.5) линейно независима.

Покажем теперь, что любой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$ представим в виде линейной комбинации векторов системы (1.5). По определению подпространства $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$ вектор $\mathbf{x}$ можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in \mathbf{M},\ \mathbf{x}_2 \in \mathbf{N}.$$

Так как $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{M}$, то

$$\mathbf{x}_1 = \lambda_1^{(1)}\mathbf{f}_1 + \cdots + \lambda_l^{(1)}\mathbf{f}_l + \mu_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + \cdots + \mu_k^{(1)}\mathbf{e}_k.$$

С другой стороны, так как $\mathbf{x}_2 \in \mathbf{N}$, то

$$\mathbf{x}_2 = \mu_1^{(2)}\mathbf{e}_1 + \cdots + \mu_k^{(2)}\mathbf{e}_k + \nu_1^{(2)}\mathbf{g}_1 + \cdots + \nu_m^{(2)}\mathbf{g}_m.$$

Складывая эти равенства, получим, что вектор $\mathbf{x}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов (1.5):

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = {} & \lambda_1^{(1)}\mathbf{f}_1 + \cdots + \lambda_l^{(1)}\mathbf{f}_l \\ & + (\mu_1^{(1)} + \mu_1^{(2)})\mathbf{e}_1 + \cdots + (\mu_k^{(1)} + \mu_k^{(2)})\mathbf{e}_k \\ & + \nu_1^{(2)}\mathbf{g}_1 + \cdots + \nu_m^{(2)}\mathbf{g}_m.\end{aligned}$$

Следовательно, система векторов (1.5) образует базис подпространства $\mathbf{K} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$ и его размерность равна $\dim\mathbf{K} = k + l + m$. Наконец,

$$\dim\mathbf{M} + \dim\mathbf{N} = (k + l) + (k + m) = (k + l + m) + k = \dim\mathbf{K} + \dim\mathbf{S}. \ \square$$

Следствие 1.3.14. *Пусть* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *— два произвольных подпространства* n*-мерного векторного пространства* $\mathbf{V}$. *Тогда*

(i) $\dim(\mathbf{M}+\mathbf{N}) \leqslant \dim \mathbf{M} + \dim \mathbf{N}$*;*

(ii) $\dim(\mathbf{M} \dotplus \mathbf{N}) = \dim \mathbf{M} + \dim \mathbf{N}$.

Объединение подпространств векторного пространства $\mathbf{V}$ не всегда является подпространством.

Упражнение 1.3.15. Для того, чтобы объединение конечного числа подпространств $\{\mathbf{M}_k\}_{k=1}^m$ векторного пространства $\mathbf{V}$ было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы одно из них содержало все остальные.

Суммой подпространств $\{\mathbf{M}_k\}_{k=1}^m$ векторного пространства $\mathbf{V}$ называется наименьшее подпространство $\mathbf{M}$, содержащее все подпространства $\mathbf{M}_k$. В этом случае пишут:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^m \mathbf{M}_k = \mathbf{M}_1 + \cdots + \mathbf{M}_m.$$

Упражнение 1.3.16. Сумма $\mathbf{M}$ подпространств $\{\mathbf{M}_k\}_{k=1}^m$ линейного пространства $\mathbf{V}$ совпадает с линейной оболочкой объединения $\bigcup\limits_{k=1}^m \mathbf{M}_k$:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^m \mathbf{M}_k = \operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{k=1}^m \mathbf{M}_k\Big) = \mathbb{C}\Big\langle\bigcup_{k=1}^m \mathbf{M}_k\Big\rangle$$

1.4 Факторпространство

Пусть $\mathbf{M}$ — подпространство векторного пространства $\mathbf{V}$. Обычно существует много других подпространств $\mathbf{N}$, таких что

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N}.$$

Не существует естественного критерия, позволяющего каноническим образом выбрать единственное среди всех подпространств $\mathbf{N}$, дополняющих подпространство $\mathbf{M}$ до всего пространства $\mathbf{V}$. Однако существует конструкция, позволяющая по паре $(\mathbf{M}, \mathbf{V})$ строить новое векторное пространство, играющее роль такого дополнения.

Рассмотрим на $\mathbf{V}$ отношение, полагая

$$\mathbf{x} \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbf{M}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}.$$

В этом случае говорят, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ *сравнимы по модулю* $\mathbf{M}$. Отношение $\overset{\mathbf{M}}{\sim}$ есть отношение эквивалентности на $\mathbf{V}$, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обозначим через $[\mathbf{x}]$ класс эквивалентности, порожденный вектором $\mathbf{x}$:

$$[\mathbf{x}] = \{\mathbf{x}' \in \mathbf{V} : \mathbf{x}' \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{x}\}.$$

Классы эквивалентности, порожденные эквивалентными векторами, в силу свойств отношения $\overset{\mathbf{M}}{\sim}$, совпадают. В противном случае, классы эквивалентности не пересекаются. Обозначим множество всех классов эквивалентности через $\mathbf{V}/\mathbf{M}$.

Утверждение 1.4.1. *Множество* $\mathbf{V}/\mathbf{M} = \{[\mathbf{x}] : \mathbf{x} \in \mathbf{V}\}$ *является векторным пространством относительно следующих алгебраических операций:*

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}] + [\mathbf{y}] &= [\mathbf{x} + \mathbf{y}], \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \\ \alpha[\mathbf{x}] &= [\alpha\mathbf{x}], \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V},\ \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем сначала корректность введенных алгебраических операций.

Пусть $\mathbf{x}' \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{x}$, $\mathbf{y}' \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{y}$. Тогда

$$[\mathbf{x}'] = [\mathbf{x}], \quad [\mathbf{y}'] = [\mathbf{y}],$$

и

$$(\mathbf{x}' + \mathbf{y}') - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + (\mathbf{y}' - \mathbf{y}) \in \mathbf{M}.$$

Поэтому

$$\mathbf{x}' + \mathbf{y}' \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{x} + \mathbf{y},$$

и следовательно,

$$[\mathbf{x}' + \mathbf{y}'] = [\mathbf{x} + \mathbf{y}].$$

Пусть теперь $\mathbf{x}' \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{x}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}' = \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \in \mathbf{M}.$$

Следовательно, $\alpha\mathbf{x}' \overset{\mathbf{M}}{\sim} \alpha\mathbf{x}$, и потому

$$[\alpha\mathbf{x}'] = [\alpha\mathbf{x}].$$

Таким образом, алгебраические операции в множестве $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ определены корректно.

Теперь покажем, что $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ — векторное пространство. Действительно, для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$

$$\begin{gathered}[\mathbf{x}] + [\mathbf{y}] = [\mathbf{x} + \mathbf{y}] = [\mathbf{y} + \mathbf{x}] = [\mathbf{y}] + [\mathbf{x}],\\ ([\mathbf{x}] + [\mathbf{y}]) + [\mathbf{z}] = [(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}] = [\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})] = [\mathbf{x}] + ([\mathbf{y}] + [\mathbf{z}]).\end{gathered}$$

Легко видеть, что $[\mathbf{0}] = \mathbf{M}$ и $[\mathbf{x}] + [\mathbf{0}] = [\mathbf{x}]$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Далее, $[-\mathbf{x}] = -[\mathbf{x}]$, и потому $[\mathbf{x}] + [-\mathbf{x}] = [\mathbf{0}]$.

Следовательно, $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ — коммутативная группа по сложению. Кроме того, умножение на скаляр удовлетворяет свойствам:

$$\begin{gathered}1 \cdot [\mathbf{x}] = [\mathbf{x}], \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V},\\ \alpha(\beta[\mathbf{x}]) = [(\alpha\beta)\mathbf{x}] = (\alpha\beta)[\mathbf{x}], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \mathbf{x} \in \mathbf{V},\end{gathered}$$

и имеют место два закона дистрибутивности:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)[\mathbf{x}] &= [(\alpha + \beta)\mathbf{x}] = [\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}] = [\alpha\mathbf{x}] + [\beta\mathbf{x}]\\ &= \alpha[\mathbf{x}] + \beta[\mathbf{x}], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \mathbf{x} \in \mathbf{V},\\ \alpha([\mathbf{x}] + [\mathbf{y}]) &= \alpha[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = [\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y})] = [\alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}]\\ &= [\alpha\mathbf{x}] + [\alpha\mathbf{y}] = \alpha[\mathbf{x}] + \alpha[\mathbf{y}], \quad \alpha \in \mathbb{C},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ — векторное пространство. □

Замечание 1.4.2. Легко видеть, что для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

$$[\mathbf{x}] = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \colon \mathbf{y} \in \mathbf{M}\} = \mathbf{x} + \mathbf{M}.$$

При этом для любого $\mathbf{x}' \in \mathbf{V}$

$$\begin{gathered}[\mathbf{x}] + [\mathbf{x}'] = (\mathbf{x} + \mathbf{x}') + \mathbf{M},\\ \alpha[\mathbf{x}] = \alpha\mathbf{x} + \mathbf{M}.\end{gathered}$$

Множество $[\mathbf{x}] = \mathbf{x} + \mathbf{M}$ называют *смежным классом* (*вектора* $\mathbf{x}$) *по* $\mathbf{M}$.

Определение 1.4.3. Векторное пространство $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ называется *фактор-пространством* векторного пространства $\mathbf{V}$ по (модулю) $\mathbf{M}$.

Теорема 1.4.4. *Если* $\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N}$*, то отображение*

$$\psi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{V}/\mathbf{M}$$

определяемое равенством:

$$\psi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{M} = [\mathbf{y}]$$

является изоморфизмом векторных пространств $\mathbf{N}$ *и* $\mathbf{V}/\mathbf{M}$*.*

Доказательство. Пусть $\psi(\mathbf{y}_1) = \psi(\mathbf{y}_2)$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{N}$. Тогда $[\mathbf{y}_1] = [\mathbf{y}_2]$ и поэтому $\mathbf{y}_1 \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{y}_2$, т.е. $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{M}$. Но, с другой стороны, $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \in \mathbf{N}$. В силу утверждения 1.3.11, $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \mathbf{0}$. Следовательно, $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$.

Пусть теперь $[\mathbf{x}] = \mathbf{x} + \mathbf{M} \in \mathbf{V}/\mathbf{M}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Так как $\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N}$, то вектор $\mathbf{x}$ однозначно представим в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{M},\ \mathbf{y} \in \mathbf{N}.$$

Поэтому $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z} \in \mathbf{M}$, и значит $\mathbf{x} \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{y}$. Следовательно, для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ однозначно определяется $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$, такой, что

$$[\mathbf{x}] = [\mathbf{y}] = \psi(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbf{N}.$$

Таким образом, ψ взаимно однозначно отображает $\mathbf{N}$ на $\mathbf{V}/\mathbf{M}$. Линейность ψ следует непосредственно из определения:

$$\psi(\alpha\mathbf{y_1} + \beta\mathbf{y}_2) = [\alpha\mathbf{y_1} + \beta\mathbf{y}_2] = \alpha[\mathbf{y_1}] + \beta[\mathbf{y}_2] = \alpha\psi(\mathbf{y_1}) + \beta\psi(\mathbf{y}_2). \qquad \square$$

Теорема 1.4.5. *Если* $\mathbf{M}$ *— k-мерное подпространство n-мерного векторного пространства* $\mathbf{V}$*, то*

$$\dim(\mathbf{V}/\mathbf{M}) = \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{M}) = n - k.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $\mathbf{M}$. Дополним его до базиса в $\mathbf{V}$:

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}.$$

Рассмотрим векторное подпространство $\mathbf{N} \subset \mathbf{V}$, порожденное векторами $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$\mathbf{N} = \mathbb{C}\langle \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$$

Тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N}.$$

Поэтому факторпространство $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ изоморфно подпространству $\mathbf{N}$ и

$$\dim(\mathbf{V}/\mathbf{M}) = \dim(\mathbf{N}) = \dim(\mathbf{V}) - \dim(\mathbf{M}) = n - k. \qquad \square$$

Последнее равенство можно записать в следующем виде:

$$\dim(\mathbf{V}/\mathbf{M}) + \dim(\mathbf{M}) = \dim(\mathbf{V}).$$

Эта формула называется *формулой дополнения*.

1.5 Сопряженное пространство

Определение 1.5.1. Если функция

$$f : \mathbf{V} \to \mathbb{C}$$

такова, что

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V},$$

то она называется *линейным функционалом* на $\mathbf{V}$.

Приведем примеры линейных функционалов.

Пример 1.5.2. Пусть $\mathbf{V} = \mathbb{C}^n$. Для любого вектора $\mathbf{x} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{C}^n$ положим:

$$f(\mathbf{x}) = \alpha_1.$$

Тогда f — линейный функционал на $\mathbb{C}^n$.

Пример 1.5.3. Пусть $\mathbf{V} = \mathbb{C}^n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — фиксированный набор скаляров. Для любого вектора $\mathbf{x} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{C}^n$ положим:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k.$$

Тогда g — линейный функционал на $\mathbb{C}^n$.

Пример 1.5.4. Пусть $\mathbf{V} = \mathcal{P}_n[\mathbb{C}]$. Для любого $p \in \mathcal{P}_n[\mathbb{C}]$ положим:

$$h(p) = p(0).$$

Тогда h — линейный функционал на $\mathcal{P}_n[\mathbb{C}]$.

Множество $\mathbf{V}^*$ всех линейных функционалов на $\mathbf{V}$ является векторным пространством над полем $\mathbb{C}$ относительно следующих алгебраических операций

(i) $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$, $f,\, g \in \mathbf{V}^*$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$;

(ii) $(\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbf{V}^*$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Определение 1.5.5. Векторное пространство $\mathbf{V}^*$ называется *сопряженным* (*векторным сопряженным*) пространством пространства $\mathbf{V}$.

Теорема 1.5.6. *Пусть $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис n-мерного векторного пространства $\mathbf{V}$. Тогда в сопряженном векторном пространстве $\mathbf{V}^*$ существует единственный базис $\{f_1, \dots, f_n\}$ такой, что*

$$f_j(\mathbf{e}_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } i = j, \\ 0, & \text{\textit{если} } i \neq j. \end{cases}$$

(*Этот базис называется сопряженным к $\mathfrak{B}$ и обозначается $\mathfrak{B}^*$*).

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ и $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$. Положим

$$f_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j.$$

Тогда $f_j \in \mathbf{V}^*$, $j = 1, \dots, n$. Ясно, что $f_j(\mathbf{e}_i) = \delta_{ij}$.

Покажем, что $\{f_1, \dots, f_n\}$ — базис в $\mathbf{V}^*$. Действительно, если

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0,$$

то

$$0 = (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)(\mathbf{e}_i) = \lambda_i$$

для любого $i = 1, \dots, n$, т.е. система $\{f_1, \dots, f_n\}$ линейно независима.

Если теперь $f \in \mathbf{V}^*$, то для любого вектора $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \in \mathbf{V}$ имеем:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{e}_i) = \Big(\sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{e}_i) f_i\Big)(\mathbf{x}),$$

т.е.

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{e}_i) f_i \in \mathbb{C}\langle f_1, \dots, f_n\rangle.$$

Следовательно, $\{f_1, \dots, f_n\}$ — базис в $\mathbf{V}^*$. $\square$

Следствие 1.5.7. *Векторное пространство* $\mathbf{V}^*$ *конечномерно, причем*

$$\dim \mathbf{V}^* = \dim \mathbf{V} = n$$

Следствие 1.5.8. *Если* $f(\mathbf{x}) = 0$ *для любого линейного функционала* $f \in \mathbf{V}^*$*, то* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathbf{V}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ и $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$. Тогда для сопряженного базиса $\mathfrak{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ в $\mathbf{V}^*$ имеем:

$$f_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Следовательно, по нашему предположению, $\alpha_j = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

Обозначим

$$\mathbf{V}^{**} = (\mathbf{V}^*)^*.$$

Следствие 1.5.9. *Соответствие*

$$\mathbf{V} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} \in \mathbf{V}^{**}$$

между векторными пространствами $\mathbf{V}$ *и* $\mathbf{V}^{**}$*, определяемое формулой*

$$\mathbf{z}(f) = f(\mathbf{x}), \quad f \in \mathbf{V}^*,$$

есть изоморфизм.

Доказательство. 1). Покажем, что соответствие

$$\mathbf{V} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} \in \mathbf{V}^{**}$$

линейное. Действительно, если $\alpha \in \mathbb{C}$, то

$$(\alpha \mathbf{z})(f) = \alpha \mathbf{z}(f) = \mathbf{z}(\alpha f) = (\alpha f)(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) = f(\alpha \mathbf{x}).$$

Следовательно,

$$\mathbf{V} \ni \alpha \mathbf{x} \mapsto \alpha \mathbf{z} \in \mathbf{V}^{**}.$$

Кроме того, если

$$\mathbf{V} \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{t} \in \mathbf{V}^{**},$$

то
$$(\mathbf{z}+\mathbf{t})(f) = \mathbf{z}(f)+\mathbf{t}(f) = f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y}),$$
потому
$$\mathbf{V} \ni \mathbf{x}+\mathbf{y} \mapsto \mathbf{z}+\mathbf{t} \in \mathbf{V}^{**}.$$

2). Покажем, что это соответствие — инъективное. Пусть
$$\mathbf{V} \ni \mathbf{x}_1 \mapsto \mathbf{z}_1 \in \mathbf{V}^{**},$$
$$\mathbf{V} \ni \mathbf{x}_2 \mapsto \mathbf{z}_2 \in \mathbf{V}^{**},$$
и $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2$. Тогда
$$f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{z}_1(f) = \mathbf{z}_2(f) = f(\mathbf{x}_2)$$
для любого $f \in \mathbf{V}^*$. Следовательно, $f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 0$ для любого $f \in \mathbf{V}^*$. В силу следствия 1.5.8, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ и потому соответствие
$$\mathbf{V} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} \in \mathbf{V}^{**}$$
инъективно.

3). Любое линейное инъективное отображение векторных пространств сохраняет линейную независимость. Поэтому базис векторного пространства $\mathbf{V}$ перейдет в линейно независимое множество в $\mathbf{V}^{**}$. Но
$$\dim \mathbf{V}^{**} = \dim \mathbf{V}^* = \dim \mathbf{V}.$$
Следовательно, базис в $\mathbf{V}$ перейдет в базис в $\mathbf{V}^{**}$, т.е. соответствие
$$\mathbf{V} \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} \in \mathbf{V}^{**}$$
сюръективное, а потому и биективное, т.е. является изоморфизмом векторных пространств $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}^{**}$. □

Замечание 1.5.10. Так как векторные пространства $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}^{**}$ имеют одинаковую размерность, то они изоморфны. В следствии 1.5.9 рассматривается специальный изоморфизм, который обычно называют *каноническим.*

Упражнение 1.5.11. Пусть $\{f_1, \ldots, f_k\}$ — некоторое семейство функционалов из $\mathbf{V}^*$. Обозначим через
$$\operatorname{Ker}(f_1, \ldots, f_k) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} : f_1(\mathbf{x}) = \cdots = f_k(\mathbf{x}) = 0\}.$$

- Показать, что $\operatorname{Ker}(f_1, \ldots, f_k)$ — подпространство $\mathbf{V}$.
- Найти размерность $\dim \operatorname{Ker}(f_1, \ldots, f_k)$.
- Показать, что для любого подпространства $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ существует такое семейство функционалов $\{f_1, \ldots, f_k\}$ из $\mathbf{V}^*$, что
$$\mathbf{M} = \operatorname{Ker}(f_1, \ldots, f_k).$$

Глава 2

Операторы в конечномерном векторном пространстве и их матрицы

2.1 Понятие линейного оператора

Пусть $\mathbf{V}$ — векторное пространство.

Определение 2.1.1. Отображение

$$A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$$

называется *линейным оператором*, если

$$A(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha A\mathbf{x} + \beta A\mathbf{y}.$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Приведем примеры линейных операторов в векторных пространствах.

Пример 2.1.2. Единичный (тождественный) оператор: $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Пример 2.1.3. Нулевой оператор: $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Пример 2.1.4. Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{V}$ и $f \in \mathbf{V}^*$ фиксированы. Положим

$$A\mathbf{x} = f(\mathbf{x})\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

A — линейный оператор в $\mathbf{V}$.

Пример 2.1.5. Пусть $\mathbf{V} = \mathbb{C}^n$. Положим

$$S^+\mathbf{x} = (0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}),$$
$$S^-\mathbf{x} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0).$$

S^+ и S^- — линейные операторы в $\mathbb{C}^n$. Оператор S^+ называется *оператором правого сдвига*, а S^- — *оператором левого сдвига.*

Пример 2.1.6. Пусть $\mathbf{V} = \mathcal{P}[\mathbf{R}]$ — пространство многочленов, определенных на прямой $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$. Для $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$ определим:

- *оператор дифференцирования*

$$D\,p(t) = p'(t) = \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k t^{k-1};$$

- *оператор интегрирования*

$$S\,p(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} t^{k+1};$$

- *оператор умножения на независимую переменную*

$$T\,p(t) = tp(t).$$

Операторы D, S, T — линейные операторы в $\mathcal{P}[\mathbf{R}]$.

Приведем один из общих методов построения линейных операторов.

Теорема 2.1.7. *Пусть* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *— базис векторного пространства* $\mathbf{V}$ *и* $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ *— произвольный набор из* n *векторов пространства* $\mathbf{V}$. *Тогда существует и притом единственный линейный оператор* A *такой, что*

$$A\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ и

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n$$

его разложение по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Определим отображение $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ по правилу:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n.$$

Докажем, что A — линейный оператор в $\mathbf{V}$. Действительно, пусть $\mathbf{x}'\in \mathbf{V}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ и

$$\mathbf{x}' = \alpha_1'\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n'\mathbf{e}_n.$$

Тогда

$$A\mathbf{x}' = \alpha_1'\mathbf{y}_1 + \cdots + \alpha_n'\mathbf{y}_n$$

и

$$\begin{aligned}\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}' &= \lambda(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n) + \mu(\alpha_1'\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n'\mathbf{e}_n) = \\ &= (\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_1')\mathbf{e}_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \mu\alpha_n')\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}A(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}') &= (\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_1')\mathbf{y}_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \mu\alpha_n')\mathbf{y}_n = \\ &= \lambda(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n) + \mu(\alpha_1'\mathbf{y}_1 + \cdots + \alpha_n'\mathbf{y}_n) = \\ &= \lambda A\mathbf{x} + \mu A\mathbf{x}',\end{aligned}$$

т.е. A — линейный оператор и $A\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Докажем теперь единственность оператора A с указанными свойствами.

Пусть A' — еще один такой линейный оператор, что $A'\mathbf{e}_i = \mathbf{y}_i$. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ имеем:

$$\begin{aligned}A\mathbf{x} &= \alpha_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n = \alpha_1 A'\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n A'\mathbf{e}_n = \\ &= A'(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = A'\mathbf{x},\end{aligned}$$

откуда следует равенство $A = A'$. □

Обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ множество всех линейных операторов в векторном пространстве $\mathbf{V}$. В $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ определены следующие алгебраические операции:

$$\begin{aligned}(A+B)\mathbf{x} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{x}, \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{V}),\ \mathbf{x} \in \mathbf{V};\\ (\lambda A)\mathbf{x} &= \lambda A\mathbf{x}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{V}),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \mathbf{x} \in \mathbf{V};\\ (AB)\mathbf{x} &= A(B\mathbf{x}), \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{V}),\ \mathbf{x} \in \mathbf{V}.\end{aligned}$$

Роль единицы в $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ играет тождественный оператор I:

$$I\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V},$$

а роль нуля — нулевой оператор:

$$0\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

Степень оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ определяется обычным образом:

$$A^0 = I,\ A^1 = A,\ A^2 = AA,\ A^3 = A^2A,\ \dots,\ A^{k+1} = A^kA.$$

Легко видеть, что для любых натуральных m, n

$$A^{m+n} = A^mA^n.$$

Если $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, то для любого многочлена

$$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_k z^k \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$$

определен оператор

$$p(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_k A^k \in \mathcal{B}(\mathbf{V}).$$

2.2 Ядро и образ линейного оператора

Определение 2.2.1. Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Множество

$$\operatorname{Ran} A = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbf{V}\}$$

называется *образом* оператора A, а множество

$$\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

ядром оператора A.

Теорема 2.2.2. *Имеют место такие свойства.*

(i) *Множества* $\operatorname{Ran} A$ *и* $\operatorname{Ker} A$ *являются линейными подпространствами векторного пространства* $\mathbf{V}$.

(ii) $\dim \operatorname{Ran} A + \dim \operatorname{Ker} A = \dim \mathbf{V}$.

Доказательство. (i). 1). Пусть $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Ran} A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда существуют $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{V}$ такие, что

$$\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2.$$

Следовательно,

$$\alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2 = \alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 = A(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2).$$

т.е., $\alpha \mathbf{y}_1 + \beta \mathbf{y}_2 \in \operatorname{Ran} A$.

2). Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тогда $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ и $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$A(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2) = \alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0},$$

т.е., $\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 \in \operatorname{Ker} A$.

(ii). Допустим, что $\operatorname{Ker} A$ имеет размерность $\dim \operatorname{Ker} A = k$. Выберем в $\operatorname{Ker} A$ базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ и дополним его до базиса

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

во всем векторном пространстве $\mathbf{V}$.

Рассмотрим векторы $\{A\mathbf{e}_{k+1}, \dots, A\mathbf{e}_n\}$ и покажем, что они образуют базис в $\operatorname{Ran} A$.

Действительно, пусть $\mathbf{y} \in \operatorname{Ran} A$ — произвольный вектор. Тогда существует такой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, что $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Так как

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

— базис векторного пространства $\mathbf{V}$, то вектор $\mathbf{x}$ представим в виде:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Но $A\mathbf{e}_1 = A\mathbf{e}_2 = \dots = A\mathbf{e}_k = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{y} = \alpha_{k+1} A\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \alpha_n A\mathbf{e}_n.$$

Осталось показать, что векторы $\{A\mathbf{e}_{k+1}, \dots, A\mathbf{e}_n\}$ линейно независимы.

Пусть существуют не равные одновременно нулю числа $\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$ такие, что

$$\gamma_{k+1} A\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \gamma_n A\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{x} = \gamma_{k+1} \mathbf{e}_{k+1} + \dots + \gamma_n \mathbf{e}_n \neq \mathbf{0}.$$

Тогда

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \gamma_{k+1} A\mathbf{e}_{k+1} + \dots + \gamma_n A\mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

т.е. вектор $\mathbf{x}$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker} A$ оператора A и потому представим в виде линейной комбинации векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$. Противоречие показывает, что векторы $\{A\mathbf{e}_{k+1}, \dots, A\mathbf{e}_n\}$ линейно независимы, и потому размерность подпространства $\operatorname{Ran} A$ равна $n - k$. $\square$

Определение 2.2.3. Размерности подпространств $\operatorname{Ran} A$ и $\operatorname{Ker} A$ называются *рангом* и *дефектом* линейного оператора A и обозначаются

$$\dim \operatorname{Ran} A = \operatorname{rg} A, \quad \dim \operatorname{Ker} A = \operatorname{def} A.$$

Отметим, что в силу теоремы 2.2.2 (ii),

$$\operatorname{rg} A + \operatorname{def} A = n = \dim \mathbf{V}.$$

Замечание 2.2.4. Несмотря на то, что для любого оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$

$$\dim \operatorname{Ran} A + \dim \operatorname{Ker} A = \dim \mathbf{V},$$

нельзя утверждать, что пространство $\mathbf{V}$ разлагается в прямую сумму подпространств $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ran} A$. Рассмотрим, например $(n+1)$-мерное векторное пространство $\mathbf{V} = \mathcal{P}_n[\mathbf{R}]$ многочленов степени $\leqslant n$ и оператор дифференцирования D:

$$D\, p(t) = p'(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} D &= \{p(t) \in \mathcal{P}_n : p'(t) \equiv 0\} = \{p(t) \in \mathcal{P}_n : p(t) \equiv \text{const}\},\\
\operatorname{Ran} D &= \{p'(t) : p(t) \in \mathcal{P}_n\} = \mathcal{P}_{n-1},\\
&\dim \operatorname{Ker} D + \dim \operatorname{Ran} D = 1 + n = \dim \mathcal{P}_n,
\end{aligned}$$

причем при $n \geqslant 1$ имеем:

$$\operatorname{Ker} D \subset \operatorname{Ran} D.$$

Если рассмотреть оператор D^2, то

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} D^2 &= \{p(t) \in \mathcal{P}_n : p''(t) \equiv 0\} = \mathcal{P}_1\\
\operatorname{Ran} D^2 &= \{p''(t) : p(t) \in \mathcal{P}_n\} = \mathcal{P}_{n-2},\\
\dim \operatorname{Ker} D + \dim \operatorname{Ran} D &= 2 + (n-1) = n + 1 = \dim \mathcal{P}_n,
\end{aligned}$$

причем при $n > 2$

$$\operatorname{Ker} D^2 \subsetneq \operatorname{Ran} D^2.$$

а при $n = 3$

$$\operatorname{Ker} D^2 = \operatorname{Ran} D^2.$$

2.3 Обратный оператор

В этом параграфе мы рассмотрим понятие обратного оператора.

Определение 2.3.1. Оператор $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется *обратным* к оператору $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, если

$$BA = AB = I,$$

где I — тождественный оператор. Если оператор A имеет обратный, то он называется обратимым.

Оператор, обратный к оператору A, обозначается через A^{-1}. Ясно, что оператор A^{-1} тоже обратим и

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Замечание 2.3.2. Не всякий линейный оператор имеет обратный. Например, нулевой оператор необратим.

Приведем критерий обратимости оператора A.

Теорема 2.3.3. *Следующий условия эквивалентны:*

(i) *Оператор A — обратим;*

(ii) $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$*;*

(iii) $\operatorname{Ran} A = \mathbf{V}$*.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть оператор A обратим, $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ такой, что $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Тогда

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Пусть $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$, $\dim \mathbf{V} = n$ и $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathbf{V}$. Покажем, что тогда $\{A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n\}$ — тоже базис в $\mathbf{V}$.

Действительно, если множество $\{A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n\}$ линейно зависимо, то существуют такие не равные нулю одновременно числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что

$$\alpha_1 A\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n A\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Тогда

$$A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{0},$$

и так как $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$, то

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Но $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathbf{V}$, и поэтому это равенство возможно лишь в случае
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$
Противоречие показывает, что множество $\{A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n\}$ линейно независимо. Так как $\dim \mathbf{V} = n$, то $\{A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathbf{V}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ и разложим его по базису $\{A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n\}$:
$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k A\mathbf{e}_k = A\Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mathbf{e}_k\Big).$$
Следовательно, $\mathbf{y} \in A(\mathbf{V})$, и потому $A(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathbf{V}$. Так как $A(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$, то существуют такие $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ в $\mathbf{V}$, что
$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1,\ \ldots,\ A\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n.$$
Покажем, что $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — тоже базис в $\mathbf{V}$. Действительно, если
$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$
то
$$\mathbf{0} = A(\mathbf{0}) = A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n) = \\ = \alpha_1 A\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n A\mathbf{x}_n = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n.$$
Следовательно,
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$
и потому $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ — базис в $\mathbf{V}$.

Если теперь векторы $\mathbf{z}, \mathbf{u} \in \mathbf{V}$ такие, что $A\mathbf{z} = A\mathbf{u}$, то
$$\mathbf{z} - \mathbf{u} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{x}_k,$$
поэтому
$$\mathbf{0} = A(\mathbf{z} - \mathbf{u}) = A\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{x}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A\mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{e}_k.$$
Следовательно,
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$
потому $\mathbf{z} = \mathbf{u}$ и значит оператор A обратим. □

Следствие 2.3.4. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Оператор A обратим;*

(ii) *Существует оператор $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ такой, что $BA = I$;*

(iii) *Существует оператор $C \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ такой, что $AC = I$.*

Доказательство. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Если оператор A обратим, то полагая $B = A^{-1}$, получим:

$$BA = A^{-1}A = I.$$

Обратно, если существует оператор $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ такой, что $BA = I$, то $\operatorname{Ran} B = \mathbf{V}$. Поэтому, в силу теоремы 2.3.3, оператор B обратим и

$$B^{-1} = B^{-1}BA = A.$$

Следовательно, оператор A обратим и $A^{-1} = B$.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$. Если оператор A обратим, то полагая $C = A^{-1}$, получим:

$$AC = AA^{-1} = I.$$

Обратно, если существует оператор $C \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ такой, что $AC = I$, то $\operatorname{Ker} C = \{\mathbf{0}\}$, так как если $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} C$, то

$$\mathbf{x} = A(C\mathbf{x}) = A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Поэтому, в силу теоремы 2.3.3, оператор C обратим и

$$C^{-1} = ACC^{-1} = A.$$

Следовательно, оператор A обратим и $A^{-1} = C$. □

2.4 Матрица линейного оператора

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис векторного пространства $\mathbf{V}$ и A — линейный оператор в $\mathbf{V}$. Тогда каждый вектор $A\mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, n$, раскладывается в линейную комбинацию базисных векторов:

$$A\mathbf{e}_j = \alpha_{1j}\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{nj}\mathbf{e}_n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Числа α_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, образуют матрицу $\|\alpha_{ij}\|$, которая обозначается через

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

и называется *матрицей линейного оператора* A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Замечание 2.4.1. При фиксированном базисе векторного пространства $\mathbf{V}$ соответствие между оператором A и его матрицей $[A]$ взаимно однозначно.

Как показывает пример, если базисы векторного пространства $\mathbf{V}$ разные, то одному и тому же оператору, в общем случае, соответствуют разные матрицы.

Пример 2.4.2. Пусть $\mathbf{V} = \mathcal{P}_{n-1}[\mathbb{C}]$ — векторное пространство многочленов над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ порядка $\leqslant (n-1)$ и $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования.

- Пусть $\mathfrak{B} = \{1, z, \ldots, z^{n-1}\}$ — канонический базис пространства $\mathbf{V}$. Так как $\mathbf{e}_j = z^{j-1}$ и

$$\mathcal{D}\mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathcal{D}\mathbf{e}_j = (j-1)z^{j-2}, \quad j = 2, 3, \ldots, n,$$

то матрица $[\mathcal{D}]$ оператора $\mathcal{D}$ в этом базисе имеет вид

$$[\mathcal{D}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

- Рассмотрим теперь в пространстве $\mathbf{V}$ другой базис:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = z, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \frac{z^{j-1}}{(j-1)!}.$$

Для оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ имеем:

$$\mathcal{D}\mathbf{e}_1 = 0, \quad \mathcal{D}\mathbf{e}_j = (j-1)\frac{z^{j-2}}{(j-1)!} = \frac{z^{j-2}}{(j-2)!} = \mathbf{e}_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Поэтому матрица $[\mathcal{D}]$ оператора $\mathcal{D}$ в этом базисе имеет вид

$$[\mathcal{D}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2.4.3. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис векторного пространства $\mathbf{V}$, A — линейный оператор в $\mathbf{V}$ и

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

— его матрица в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ и $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Обозначим векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в этом базисе в виде матриц-столбцов

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ имеет следующий матричный вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

т.е.

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_k.$$

2.5 Связь между матрицами оператора в различных базисах. Подобие матриц и операторов

Пусть $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ — два различных базиса векторного пространства $\mathbf{V}$ и $[C] = \|c_{ij}\|$ — матрица перехода от первого базиса ко второму, т.е. $\mathbf{e}'_1 = C\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}'_n = C\mathbf{e}_n$. Ясно, что матрица $[C]$ — невырожденная, т.е. $\det[C] \neq 0$. В этом случае будем писать $\mathfrak{B} \xrightarrow{C} \mathfrak{B}'$.

Пусть теперь A — произвольный линейный оператор в $\mathbf{V}$, имеющий в базисах $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ матрицы $[A]$ и $[A']$ соответственно.

Теорема 2.5.1. *Матрицы $[A]$ и $[A']$ оператора A связаны равенством:*

$$[A'] = [C]^{-1}[A][C].$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $C \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, полагая

$$C\mathbf{e}_k = \mathbf{e}'_k.$$

Тогда оператор C обратим и его матрица в базисе $\mathfrak{B}$ совпадает с матрицей $[C]$.

Пусть матрицы $[A]$ и $[A']$ имеют вид:

$$[A] = \|a_{ij}\|, \quad [A'] = \|a'_{ij}\|.$$

Тогда

$$A\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i, \quad A\mathbf{e}'_k = \sum_{i=1}^{n} a'_{ik}\mathbf{e}'_i.$$

Следовательно,

$$AC\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a'_{ik}C\mathbf{e}_i.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор C^{-1}, получим

$$C^{-1}AC\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a'_{ik}C^{-1}C\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} a'_{ik}\mathbf{e}_i.$$

Таким образом, матрица $[A'] = \|a'_{ij}\|$ совпадает с матрицей оператора $C^{-1}AC$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. С другой стороны, произведению $C^{-1}AC$ соответствует матрица $[C^{-1}][A][C]$. Следовательно, $[A'] = [C]^{-1}[A][C]$. $\square$

Следствие 2.5.2. $\det[A'] = \det[A]$.

Определение 2.5.3. Квадратная матрица $[A]$ называется подобной матрице $[B]$, если найдется такая невырожденная матрица $[C]$, что

$$[B] = [C]^{-1}[A][C].$$

Замечание 2.5.4. Теорему 2.5.1 можно сформулировать так: *Матрицы линейного оператора в различных базисах подобны.*

Упражнение 2.5.5. Показать, что единственная матрица, подобная нулевой матрице, есть она сама.

Определение 2.5.6. Операторы A и B из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ называются подобными, если найдется такой обратимый оператор $S \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, что

$$B = S^{-1}AS.$$

Легко видеть, что подобие является отношением эквивалентности на $\mathcal{B}(\mathbf{V})$.

Утверждение 2.5.7. *Если операторы A и B подобны и*

$$B = S^{-1}AS,$$

то для любого полинома $p(\lambda)$ операторы $p(A)$ и $p(B)$ тоже подобны и имеет место равенство:

$$p(B) = S^{-1}p(A)S.$$

Доказательство. Так как $B = S^{-1}AS$, то для любого $k = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$B^k = (S^{-1}AS)^k = \underbrace{(S^{-1}AS)\ldots(S^{-1}AS)}_{k} = S^{-1}A^kS.$$

Следовательно, для любого полинома $p(\lambda)$ имеет место равенство:

$$p(B) = S^{-1}p(A)S. \qquad \square$$

Упражнение 2.5.8. Доказать, что для того, чтобы операторы A и B были подобными, необходимо и достаточно, чтобы для любого базиса $\mathfrak{B}_1$ векторного пространства $\mathbf{V}$ существовал такой базис $\mathfrak{B}_2$, что матрица оператора B в базисе $\mathfrak{B}_2$ была бы равна матрице оператора A в базисе $\mathfrak{B}_1$.

Глава 3

Алгебры $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ и $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

3.1 Понятие алгебры. Идеал. Фактор-алгебра

Определение 3.1.1. Множество $\mathbf{A}$ называется *алгеброй*, если

(i) $\mathbf{A}$ — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$;

(ii) В векторном пространстве $\mathbf{A}$ определено умножение

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \ni (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \to \mathbf{ab} \in \mathbf{A}$$

со свойствами:

- $\alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A},\ \alpha \in \mathbb{C}$;
- $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{A}$;
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{A}$;
- $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{A}$.

Определение 3.1.2. Линейное подпространство $\mathbf{B}$ алгебры $\mathbf{A}$ называется *подалгеброй*, если оно является алгеброй относительно операций, введенных в $\mathbf{A}$.

Таким образом, подпространство $\mathbf{B}$ алгебры $\mathbf{A}$ является подалгеброй, если из $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{B}$ следует, что $\mathbf{ab} \in \mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\,\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}.$$

Замечание 3.1.3. Если $\mathbf{B}$ — подалгебра алгебры $\mathbf{A}$, а $\mathbf{L}$ — подалгебра $\mathbf{B}$, то $\mathbf{L}$ является подалгеброй $\mathbf{A}$.

Определение 3.1.4. Размерностью алгебры $\mathbf{A}$ называется векторная размерность $\mathbf{A}$. Размерность алгебры $\mathbf{A}$ обозначается $\dim \mathbf{A}$.

Определение 3.1.5. Алгебра $\mathbf{A}$ называется *коммутативной*, или *абелевой*, если умножение коммутативно, т.е. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$. В противном случае алгебра $\mathbf{A}$ называется *некоммутативной*.

Определение 3.1.6. Если в алгебре $\mathbf{A}$ существует элемент $\mathbf{e}$ такой, что для любого $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$

$$\mathbf{ae} = \mathbf{ea} = \mathbf{a},$$

то $\mathbf{A}$ называется *алгеброй с единицей* $\mathbf{e}$.

Определение 3.1.7. Множество

$$Z(\mathbf{A}) = \{\mathbf{a} : \mathbf{ab} = \mathbf{ba} \text{ для любого } \mathbf{b} \in \mathbf{A}\}$$

называется *центром* алгебры $\mathbf{A}$.

Приведем простейшие примеры алгебр.

- Пусть $\mathbf{V}$ — произвольное линейное пространство. Полагая $\mathbf{xy} = \mathbf{0}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, мы получим алгебру, которая называется *патологической или тривиальной*.
- Пусть

  $$\mathbf{A} = \mathcal{P}[\mathbb{C}] = \Big\{p(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j,\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\},\ z \in \mathbb{C},\ \alpha_j \in \mathbb{C}\Big\}$$

  — линейное пространство многочленов с обычными алгебраическими операциями. Тогда $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ — коммутативная алгебра с единицей $e(z) \equiv 1$ ($a_0 = 1$, $a_k = 0$ для $k = 1, 2, \ldots$).
- Пусть $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ — линейное пространство матриц $[A] = \|\alpha_{ij}\|$ размерности $n \times n$. В $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ определена операция умножения:

  $$\|\alpha_{ij}\|\|\beta_{ij}\| = \|\gamma_{ij}\|, \quad \gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj},$$

  относительно которой $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ — алгебра. При этом $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ — алгебра с единицей, где роль единицы играет единичная матрица $[I] = \|\delta_{ij}\|$. Отметим, что при $n > 1$ алгебра $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ некоммутативна.

- Пусть $\mathbf{T}_n(\mathbb{C}) = \{[A] = \|a_{ij}\| : a_{ij} = 0, i > j\}$ — множество всех верхнетреугольных матриц:
$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
Множество $\mathbf{T}_n(\mathbb{C})$ является подалгеброй алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- Пусть $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ — множество всех верхнетреугольных матриц вида
$$[A] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ & a_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_2 \\ 0 & & & a_1 \end{pmatrix},$$
где элементы постоянны на каждой из диагоналей. Такая матрица называется *верхнетреугольной тёплицевой*. Множество $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ является подалгеброй как алгебры $\mathbf{T}_n(\mathbb{C})$, так и алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, причем если матрица $[A] \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ невырожденная, то обратная матрица $[A]^{-1}$ тоже принадлежит $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.
- Пусть $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ — множество всех диагональных матриц $\|\alpha_{ij}\delta_{ij}\|$ размерности $n \times n$. Тогда $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ — коммутативная подалгебра с единицей как алгебры $\mathbf{T}_n(\mathbb{C})$, так и алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Определение 3.1.8. Подпространство $\mathbf{L}$ алгебры $\mathbf{A}$ называется *правым идеалом* в $\mathbf{A}$, если из $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{A}$ следует, что $\mathbf{ab} \in \mathbf{L}$:
$$\mathbf{L}\,\mathbf{A} \subseteq \mathbf{L}.$$

Подпространство $\mathbf{L}$ алгебры $\mathbf{A}$ называется *левым идеалом* в $\mathbf{A}$, если из $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{A}$ следует, что $\mathbf{ba} \in \mathbf{L}$:
$$\mathbf{A}\,\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}.$$

Идеал $\mathbf{L}$ алгебры $\mathbf{A}$, который одновременно является и левым, и правым, называется *двусторонним идеалом* в $\mathbf{A}$.

В коммутативной алгебре нет различия между левыми, правыми и двусторонними идеалами. Во всякой алгебре имеется два очевидных идеала: нулевой — состоящий из единственного элемента 0, и сама алгебра $\mathbf{A}$. Все остальные идеалы алгебры $\mathbf{A}$ называются *собственными* или *нетривиальными*.

Замечание 3.1.9. Всякий идеал является подалгеброй. Обратное, вообще говоря, неверно, т.е. не всякая подалгебра является идеалом. Например, пусть $\mathbf{A} = \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ — коммутативная алгебра многочленов. Тогда

$$\mathbf{B} = \{p(z) : p(0) = p(1)\}$$

— подалгебра в $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$, не являющаяся идеалом. Нетривиальным идеалом этой алгебры $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ является

$$\mathbf{L} = \{p(z) : p(0) = 0\}.$$

Пусть $\mathbf{M} \subset \mathbf{A}$ — линейное подпространство алгебры $\mathbf{A}$. Полагая

$$\mathbf{a} \overset{\mathbf{M}}{\sim} \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathbf{M}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A},$$

мы получим отношение эквивалентности на $\mathbf{A}$, позволяющее рассмотреть фактор-пространство $\mathbf{A}/\mathbf{M}$. Если $A = [\mathbf{a}]$ и $B = [\mathbf{b}]$ — классы эквивалентности, порожденные элементами $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$, то

$$A + B = [\mathbf{a} + \mathbf{b}], \quad \alpha A = [\alpha \mathbf{a}], \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Утверждение 3.1.10. *Если* $\mathbf{L}$ *— двусторонний идеал алгебры* $\mathbf{A}$*, то в фактор-пространстве* $\mathbf{A}/\mathbf{L}$ *можно ввести умножение*

$$AB = [\mathbf{a}][\mathbf{b}] = [\mathbf{ab}],$$

которое превращает $\mathbf{A}/\mathbf{L}$ *в алгебру.*

Доказательство. Покажем сначала, что такое определение умножения корректно. Пусть

$$\mathbf{a}' \in A = [\mathbf{a}], \quad \mathbf{b}' \in B = [\mathbf{b}].$$

Тогда

$$\mathbf{a}' - \mathbf{a} \in \mathbf{L}, \quad \mathbf{b}' - \mathbf{b} \in \mathbf{L},$$

и так как $\mathbf{L}$ — двусторонний идеал, то

$$\mathbf{a}'\mathbf{b}' - \mathbf{ab} = \mathbf{a}'(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) + (\mathbf{a}' - \mathbf{a})\mathbf{b} \in \mathbf{L}.$$

Следовательно,

$$[\mathbf{a}'\mathbf{b}'] = [\mathbf{ab}],$$

и потому умножение определено однозначно.

Далее, так как $\mathbf{A}$ — алгебра, то

$$\alpha(AB) = \alpha[\mathbf{ab}] = [\alpha\mathbf{ab}] = [(\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}] = (\alpha A)B,$$
$$\alpha(AB) = [\alpha\mathbf{ab}] = [\mathbf{a}(\alpha\mathbf{b})] = A(\alpha B),$$

поэтому
$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Кроме того,

$$A(BC) = [\mathbf{a}][\mathbf{bc}] = [\mathbf{abc}] = [\mathbf{ab}][\mathbf{c}] = (AB)C.$$

Следовательно, умножение ассоциативно.

Наконец,

$$A(B+C) = [\mathbf{a}][\mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})] = [\mathbf{ab}+\mathbf{bc}] = AB + AC,$$
$$(A+B)C = [\mathbf{a}+\mathbf{b}][\mathbf{c}] = [(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}] = [\mathbf{ac}+\mathbf{bc}] = AC + BC.$$

Таким образом, $\mathbf{A}/\mathbf{L}$ — алгебра. □

Определение 3.1.11. Алгебра $\mathbf{A}/\mathbf{L}$ называется *фактор-алгеброй* алгебры $\mathbf{A}$ по двустороннему идеалу $\mathbf{L}$.

Замечание 3.1.12. Если алгебра $\mathbf{A}$ коммутативна, то фактор-алгебра $\mathbf{A}/\mathbf{L}$ тоже коммутативна.

Определение 3.1.13. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — две алгебры. Отображение

$$\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$$

называется *гомоморфизмом* алгебры $\mathbf{A}$ в алгебру $\mathbf{B}$, если

(i) $\psi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{a}) + \psi(\mathbf{b}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$;

(ii) $\psi(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\psi(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} \in \mathbf{A},\ \alpha \in \mathbb{C}$;

(iii) $\psi(\mathbf{ab}) = \psi(\mathbf{a})\psi(\mathbf{b}), \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$.

Если гомоморфизм $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ отображает алгебру $\mathbf{A}$ в алгебру $\mathbf{B}$ взаимно однозначно, то он называется *мономорфизмом.*

Если гомоморфизм $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ отображает алгебру $\mathbf{A}$ на всю алгебру $\mathbf{B}$, то он называется *эпиморфизмом.*

Если гомоморфизм $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ отображает алгебру $\mathbf{A}$ на всю алгебру $\mathbf{B}$ взаимно однозначно, то он называется *изоморфизмом.* В этом случае алгебры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются изоморфными.

Определение 3.1.14. Изоморфизм $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ алгебры $\mathbf{A}$ на себя называется *автоморфизмом.*

Упражнение 3.1.15. Если $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ — автоморфизм алгебры $\mathbf{A}$ с единицей $\mathbf{e}$, то $\psi(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$.

Определение 3.1.16. Если $\mathbf{A}$ — алгебра с единицей $\mathbf{e}$, и для элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ существует такой элемент $\mathbf{a}^{-1}$, что

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{e},$$

то $\mathbf{a}^{-1}$ называется *обратным* к $\mathbf{a}$, а сам элемент $\mathbf{a}$ — *обратимым.*

Приведем примеры гомоморфизмов алгебр.

- Пусть $\mathbf{L}$ — подалгебра алгебры $\mathbf{A}$. Отображение $\psi\colon \mathbf{L} \to \mathbf{A}$ такое, что $\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ для любого $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$, является мономорфизмом алгебры $\mathbf{L}$ в алгебру $\mathbf{A}$, который называется *вложением.*
- Пусть $\mathbf{L}$ — двусторонний идеал алгебры $\mathbf{A}$. Отображение $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathbf{L}$ такое, что $\psi(\mathbf{a}) = [\mathbf{a}]$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, является эпиморфизмом алгебры $\mathbf{A}$ на фактор-алгебру $\mathbf{A}$.
- Пусть $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — мономорфизм алгебры $\mathbf{A}$ в алгебру $\mathbf{B}$. Тогда

  $$\mathbf{B}' = \psi(\mathbf{A}) = \{\psi(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in \mathbf{A}\}$$

  является подалгеброй алгебры $\mathbf{B}$ и $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}'$ является изоморфизмом алгебр $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}'$.
- Пусть $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — гомоморфизм алгебры $\mathbf{A}$ в алгебру $\mathbf{B}$. Тогда

  $$\mathbf{L} = \{\mathbf{a} \in \mathbf{A}\colon \psi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\}$$

  является двусторонним идеалом алгебры $\mathbf{A}$ и $\psi_{\mathbf{L}}\colon \mathbf{A}/\mathbf{L} \to \mathbf{B}$ является мономорфизмом фактор-алгебры $\mathbf{A}/\mathbf{L}$ в алгебру $\mathbf{B}$. При этом, если ψ — эпиморфизм, то $\psi_{\mathbf{L}}$ —изоморфизм алгебр $\mathbf{A}/\mathbf{L}$ и $\mathbf{B}$.

3.2 Алгебра $\mathcal{B}(\mathbf{V})$. Теорема об изоморфизме

Множество $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ является алгеброй относительно введенных алгебраических операций:

$$(A+B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{x}, \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{V}),\ \mathbf{x} \in \mathbf{V};$$
$$(\lambda A)\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{V}),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \mathbf{x} \in \mathbf{V};$$
$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}), \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{V}),\ \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

Напомним, что роль единицы в алгебре $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ играет тождественный оператор I:

$$I\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V},$$

а роль нуля — нулевой оператор:

$$0\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{V}.$$

Заметим, что если $\dim \mathbf{V} > 1$, то алгебра $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ некоммутативная, так как в общем случае $AB \neq BA$. Операторы A и B из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ называются *коммутирующими*, если $AB = BA$. Оператор

$$[A, B] = AB - BA$$

называется *коммутатором* операторов A и B.

Утверждение 3.2.1. *Отображение*

$$\psi_A \colon \mathcal{P}[\mathbb{C}] \to \mathcal{B}(\mathbf{V}),$$

такое, что $\psi_A(p(z)) = p(A)$, *является гомоморфизмом алгебры многочленов* $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ *в алгебру операторов* $\mathcal{B}(\mathbf{V})$.

Доказательство. Для любых $p, q \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ имеем:

$$\begin{gathered} \psi_A(\alpha p(z)) = \alpha p(A) = \alpha \psi_A(p(z)), \\ \psi_A(p(z) + q(z)) = p(A) + q(A) = \psi_A(p(z)) + \psi(q(z)), \\ \psi_A(p(z)q(z)) = p(A)q(A) = \psi_A(p(z))\psi_A(q(z)). \end{gathered}$$

Поэтому $\psi_A \colon \mathcal{P}[\mathbb{C}] \to \mathcal{B}(\mathbf{V})$ — гомоморфизм. □

Для любых многочленов $p(z)$, $q(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ операторы $p(A)$ и $q(A)$ коммутируют:

$$[p(A), q(A)] = p(A)q(A) - q(A)p(A) = 0.$$

Пусть векторное пространство $\mathbf{V}$ разложено в прямую сумму подпространств:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N}$$

и $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Тогда существует единственная пара векторов $\mathbf{y} \in \mathbf{M}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{N}$ такая, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}.$$

Определим оператор $P_{\mathbf{M}}$ равенством:

$$P_{\mathbf{M}}\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Ясно, что оператор $P_{\mathbf{M}} \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Оператор $P_{\mathbf{M}}$ называется *проектором на подпространство* $\mathbf{M}$ *параллельно подпространству* $\mathbf{N}$. Легко видеть, что $P_{\mathbf{M}}(P_{\mathbf{M}}\mathbf{x}) = P_{\mathbf{M}}\mathbf{x}$, т.е. для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

$$P_{\mathbf{M}}^2\mathbf{x} = P_{\mathbf{M}}\mathbf{x},$$

и потому $P_{\mathbf{M}}^2 = P_{\mathbf{M}}$.

Линейный оператор P, удовлетворяющий равенству:

$$P^2 = P,$$

называется *идемпотентным оператором или идемпотентом.*

Например, если $\mathbf{V} = \mathbb{C}^2$, то оператор P, матрица которого в каноническом базисе имеет вид

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

является идемпотентом.

Упражнение 3.2.2. Если P, P_1, …, $P_k \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, $k \in \mathbb{N}$ идемпотенты и

$$P = P_1 + \cdots + P_k,$$

то $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$.

Замечание 3.2.3. В бесконечномерном векторном пространстве это утверждение при $k \geq 4$ неверно.

Упражнение 3.2.4. Пусть $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ — изоморфизм алгебр $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Если $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$ — идемпотент, то $\psi(\mathbf{p}) \in \mathbf{B}$ — тоже идемпотент.

Теорема 3.2.5. *Пусть* $\dim \mathbf{V} = n$ *и* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *— базис векторного пространства* $\mathbf{V}$. *Тогда отображение*

$$\psi\colon A \to [A]$$

есть изоморфизм алгебр $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ *и* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Доказательство. Легко видеть, что для любых A, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\psi(A+B) = [A+B] = [A] + [B] = \psi(A) + \psi(B),$$
$$\psi(\lambda A) = [\lambda A] = \lambda[A] = \lambda\psi(A),$$

т.е. ψ является изоморфизмом векторных пространств $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ и $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Покажем, что $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$, т.е. $[AB] = [A][B]$. Если

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\mathbf{e}_i, \quad B\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}\mathbf{e}_k,$$

то

$$(AB)\mathbf{e}_j = A(B\mathbf{e}_j) = A\Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}\mathbf{e}_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}A\mathbf{e}_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}\Big)\mathbf{e}_i.$$

Значит, $[AB] = [A][B]$. □

Следствие 3.2.6. *Пространство* $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ *конечномерно, и если* $\dim \mathbf{V} = n$, *то* $\dim \mathcal{B}(\mathbf{V}) = n^2$.

Следствие 3.2.7. *Для того, чтобы линейный оператор A был обратимым, необходимо и достаточно, чтобы ему в любом базисе соответствовала невырожденная матрица $[A]$. При этом $[A^{-1}] = [A]^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $\dim \mathbf{V} = n$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис векторного пространства $\mathbf{V}$, оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ обратим, оператор $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ — обратный к A и $[A]$ и $[B]$ — матрицы операторов A и B в этом базисе. Так как, в силу теоремы 3.2.5, отображение

$$\psi\colon \mathcal{B}(\mathbf{V}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

есть изоморфизм, то

$$[A][B] = [B][A] = [I]$$

где $[I]$ — единичная матрица размерности n. Следовательно, матрица $[A]$ невырожденная, и $[B] = [A^{-1}] = [A]^{-1}$.

Обратно, если матрица $[A]$ невырожденная, то по матрице $[B] = [A]^{-1}$, в силу того же изоморфизма, построим оператор $B = \psi[B]$. Тогда

$$\psi([A][B]) = \psi([I]) = \psi([B][A]),$$

т.е. $AB = BA = I$, и потому оператор A — обратим. □

3.3 Алгебра $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ и ее свойства

3.3.1 Мультипликативный базис в $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Как уже отмечалось, алгебра $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ всех квадратных матриц $\|a_{ij}\|$ порядка n, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \ldots, n$, является векторным пространством размерности $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = n^2$. Канонический базис в $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ образуют матрицы $[E_{ij}]$, у которых элемент $a_{ij} = 1$, а все остальные элементы равны нулю. Матрицы $[E_{ij}]$ называются *матричными единицами.*

В следующем утверждении приведены некоторые свойства этого канонического базиса.

Утверждение 3.3.1. *Базис* $\{[E_{ij}]\}_{i,j=1}^{n}$ *имеет следующие свойства.*

(i) $[E_{ij}][E_{kl}] = \delta_{jk}[E_{il}]$;

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{n} [E_{kk}] = I$;

(iii) *Если*

$$\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{n}, \quad \mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, 1_k, 0, \ldots, 0)^\top$$

— канонический базис пространства $\mathbb{C}^n$, *то*

$$[E_{rj}]\mathbf{e}_i = \delta_{ji}\mathbf{e}_r.$$

Доказательство. Приведенные свойства проверяются непосредственными операциями над матрицами $\{[E_{ij}]\}_{i,j=1}^{n}$. □

Следствие 3.3.2. *Для канонического базиса выполнены соотношения*

$$[E_{kk}]^2 = [E_{kk}], \quad [E_{kk}][E_{jj}] = 0, \quad k \neq j.$$

Базис $\{[E_{ij}]\}_{ij=1}^{n}$ алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ называют *каноническим* или *мультипликативным.*

Упражнение 3.3.3. Проверить, что для любой матрицы $[A] = \|\alpha_{jk}\|$ ее разложение по каноническому базису имеет вид

$$[A] = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}[E_{ij}].$$

Утверждение 3.3.4. *Если* $k \neq r$, *то*

$$\Big([E_{kr}] + [E_{rk}] + \sum_{i \neq k, i \neq r} [E_{ii}]\Big)^2 = I.$$

Доказательство. Действительно, в силу свойств мультипликативного базиса имеем

$$\Big([E_{kr}]+[E_{rk}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}]\Big)^2=$$
$$=\Big([E_{kr}]+[E_{rk}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}]\Big)\Big([E_{kr}]+[E_{rk}]+\sum_{j\neq k,i\neq r}[E_{jj}]\Big)=$$
$$=[E_{kr}][E_{kr}]+[E_{rk}][E_{kr}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}][E_{kr}]+$$
$$+[E_{kr}][E_{rk}]+[E_{rk}][E_{rk}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}][E_{rk}]+$$
$$+\sum_{j\neq k,i\neq r}[E_{kr}][E_{jj}]+\sum_{j\neq k,i\neq r}[E_{rk}][E_{jj}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}]\sum_{j\neq k,i\neq r}[E_{jj}]=$$
$$=[E_{rr}]+[E_{kk}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}]=\sum_{i=1}^{n}[E_{ii}]=I. \qquad \square$$

Утверждение 3.3.5. *Матричные единицы $[E_{kk}]$ и $[E_{rr}]$ подобны.*

Доказательство. Если $k=r$, то утверждение очевидно. Пусть $k\neq r$.

Рассмотрим матрицу

$$[C]=[E_{kr}]+[E_{rk}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}].$$

В силу утверждения 3.3.4, $[C]^2=I$. Следовательно, $[C]$ обратима и

$$[C]^{-1}=[C]=[E_{kr}]+[E_{rk}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}].$$

Тогда

$$[C]^{-1}[E_{kk}][C]=$$
$$=\Big([E_{kr}]+[E_{rk}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}]\Big)[E_{kk}]\Big([E_{kr}]+[E_{rk}]+\sum_{i\neq k,i\neq r}[E_{ii}]\Big)=$$
$$=[E_{rk}][E_{kk}][E_{kr}]=[E_{rr}]. \qquad \square$$

3.3.2 Простота алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Определение 3.3.6. Алгебра **A** называется *простой*, если она не содержит нетривиальных двусторонних идеалов.

Утверждение 3.3.7. *Алгебра $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ является простой.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{J}$ — двусторонний идеал в алгебре $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ и $[A] = \|\alpha_{jk}\| \in \mathbf{J}$ — ненулевая матрица. Допустим, что элемент $\alpha_{sq} \neq 0$. Тогда при любых $r, t = 1, \ldots, n$

$$[E_{rs}][A][E_{qt}] = [E_{rs}][A][E_{qt}] = [E_{rs}]\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}[E_{ij}]\Big)[E_{qt}] = \alpha_{sq}[E_{rt}].$$

Так как $\mathbf{J}$ — двусторонний идеал в алгебре $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $[A] \in \mathbf{J}$, а матрицы $[E_{rs}]$ и $[E_{qt}]$ принадлежат $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, то

$$[E_{rs}][A][E_{qt}] = \alpha_{sq}[E_{rt}] \in \mathbf{J}.$$

Но матрицы $\{[E_{rt}], r, t = 1, \ldots, n\}$ образуют базис в $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Поэтому $\mathbf{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Таким образом, алгебра $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ не имеет собственных двусторонних идеалов и следовательно, она простая. □

Следствие 3.3.8. *Алгебра $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ является простой.*

Доказательство. Так как при $\dim \mathbf{V} = n$ алгебра $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ изоморфна алгебре $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, то в силу утверждения 3.3.7, алгебра $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ простая. □

3.3.3 Автоморфизмы алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Определение 3.3.9. Автоморфизм $\psi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ алгебры $\mathbf{A}$ с единицей называется *внутренним*, если существует такой обратимый элемент $\mathbf{c} \in \mathbf{A}$, что для любого $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ выполняется равенство:

$$\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{c}^{-1}.$$

Теорема 3.3.10. *Любой автоморфизм $\varphi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ является внутренним.*

Доказательство. 1). Пусть $\{[E_{ij}]\}_{i,j=1}^{n}$ — канонический базис в алгебре $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Обозначим $\varphi([E_{ij}]) = [F_{ij}]$. Тогда, поскольку φ является автоморфизмом, $\{[F_{ij}]\}_{i,j=1}^{n}$ обладают свойствами матричных единиц:

$$[F_{ij}][F_{kl}] = \delta_{jk}[F_{il}], \quad \sum_{k=1}^{n}[F_{kk}] = I.$$

В частности,

$$[F_{kk}][F_{jj}] = \delta_{kj}[F_{kj}] = \delta_{kj}[F_{kk}] = \delta_{kj}[F_{jj}].$$

2). Пусть $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^n$ — ненулевой вектор. Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} [F_{kk}] = I$, то существует такой номер p, $1 \leqslant p \leqslant n$, что $[F_{pp}]\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$.

Для каждого $j = 1, \ldots, n$ обозначим $\mathbf{f}_j = [F_{jp}]\mathbf{f}$ и покажем, что $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^n$ — базис в $\mathbb{C}^n$.

Действительно, $[F_{pj}]\mathbf{f}_j = [F_{pj}][F_{jp}]\mathbf{f} = [F_{pp}]\mathbf{f} \neq 0$. Поэтому $\mathbf{f}_j \neq \mathbf{0}$ для любого $j = 1, \ldots, n$.

Предположим, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{f}_j = \mathbf{0}$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j [F_{jp}]\mathbf{f} = \mathbf{0}$ и для любого $k = 1, \ldots, n$ имеем:

$$[F_{kk}]\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j [F_{jp}]\mathbf{f}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [F_{kk}][F_{jp}]\mathbf{f} = \alpha_k [F_{kp}]\mathbf{f} = \alpha_k \mathbf{f}_k = \mathbf{0}.$$

Так как $\mathbf{f}_k \neq \mathbf{0}$, то $\alpha_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, векторы $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^n$ линейно независимы и образуют базис в $\mathbb{C}^n$.

3). Рассмотрим канонический базис $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ в $\mathbb{C}^n$. Пусть $[C]$ — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ к базису $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^n$. Тогда $[C]\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_j$ и матрица $[C]$ обратима. Следовательно,

$$[F_{ri}][C]\mathbf{e}_j = [F_{ri}]\mathbf{f}_j = [F_{ri}][F_{jp}]\mathbf{f} = \delta_{ij}[F_{rp}]\mathbf{f} = \delta_{ij}\mathbf{f}_r = \delta_{ij}[C]\mathbf{e}_r.$$

Поэтому

$$[C]^{-1}[F_{ri}][C]\mathbf{e}_j = \delta_{ij}\mathbf{e}_r.$$

Но $\delta_{ij}\mathbf{e}_r = [E_{ri}]\mathbf{e}_j$. Таким образом,

$$[C]^{-1}[F_{ri}][C]\mathbf{e}_j = [E_{ri}]\mathbf{e}_j,$$

и потому $[C]^{-1}[F_{ri}][C] = [E_{ri}]$. Следовательно

$$\varphi([E_{ri}]) = [F_{ri}] = [C][E_{ri}][C]^{-1},$$

и значит, для любого $[A] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\varphi([A]) = [C][A][C]^{-1}$, т.е. автоморфизм $\varphi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ является внутренним. $\square$

3.3.4 Центр $Z(\mathcal{M}(\mathbb{C}))$ алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Для любых $[A] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ и $\lambda \in \mathbb{C}$

$$[\lambda I][A] = [A][\lambda I].$$

Следовательно, $[\lambda I] \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$. Как показывает следующая теорема, других элементов центр $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ не содержит.

Теорема 3.3.11. $Z(\mathcal{M}(\mathbb{C})) = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Доказательство. Пусть $[B] \in Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Рассмотрим канонический базис $\{[E_{kl}]\}_{k,l=1}^n$ алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ и разложим $[B]$ по этому базису:

$$[B] = \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}[E_{kl}].$$

Для любых $i, j = 1, \ldots, n$ имеем:

$$[B][E_{ij}] = [E_{ij}][B].$$

Но

$$[B][E_{ij}] = \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}[E_{kl}][E_{ij}] = \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\delta_{li}[E_{kj}] = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}[E_{kj}],$$
$$[E_{ij}][B] = \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}[E_{ij}][E_{kl}] = \sum_{k,l=1}^{n} b_{kl}\delta_{jk}[E_{il}] = \sum_{l=1}^{n} b_{jl}[E_{il}].$$

Таким образом, в матрице $[B][E_{ij}]$ все столбцы, кроме j-го, нулевые, а j-й столбец совпадает с i-м столбцом матрицы $[B]$. В свою очередь, в матрице $[E_{ij}][B]$ все строки, кроме i-й, нулевые, а i-я строка совпадает с j-й строкой матрицы $[B]$. Так как $[B][E_{ij}] = [E_{ij}][B]$, то $b_{ij} = 0$ для любых $i \neq j$ и $b_{ii} = b_{jj} = \lambda$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$. Следовательно, $[B] = [\lambda I]$. $\square$

3.3.5 Коммутативные подалгебры алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Пусть $\mathcal{L}_n$ — линейное подпространство алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, состоящее из матриц $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$, для которых $a_{ij} = 0$, если $i > [\frac{n}{2}]$ или $j < [\frac{n}{2}] + 1$. Если размерность $n = 2k$ — четная, то матрицы $[A]$ из $\mathcal{L}_{2k}$ имеют вид

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1k+1} & \ldots & \alpha_{1,2k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{kk+1} & \ldots & \alpha_{k,2k} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если размерность $n = 2k+1$ — нечетная, то матрицы $[A]$ из $\mathcal{L}_{2k+1}$ имеют вид

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{1k+1} & \dots & \alpha_{1,2k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{kk+1} & \dots & \alpha_{k,2k+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$(n-[n/2])[n/2] = \begin{cases} (2k-k)k = k^2 = [\frac{n^2}{4}], & \text{если } n = 2k, \\ (2k+1-k)k = k^2+k = [\frac{n^2}{4}], & \text{если } n = 2k+1, \end{cases}$$

то размерность подпространства $\dim \mathcal{L}_n$ равна $[\frac{n^2}{4}]$. Произведение любых двух матриц $[A], [B] \in \mathcal{L}_n$ равно нулю, поэтому $\mathcal{L}_n$ — коммутативная подалгебра в $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Добавляя к $\mathcal{L}_n$ скалярные матрицы λI, $\lambda \in \mathbb{C}$, мы получим коммутативную подалгебру $\mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}_n \cup \{\mathbb{C}I\},$$

размерность которой равна $\dim \mathcal{A} = [\frac{n^2}{4}] + 1$.

Замечание 3.3.12. Оказывается, что построенная коммутативная подалгебра имеет максимальную возможную размерность (теорема И.Шура): в пособии II(L) мы приведем доказательство того, что максимальная размерность коммутативной подалгебры $\mathbf{B} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ равна $[\frac{n^2}{4}] + 1$.

Глава 4

Инвариантные подпространства линейного оператора

4.1 Инвариантные подпространства линейного оператора и матрицы

Определение 4.1.1. Линейное подпространство $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ называется *инвариантным подпространством* линейного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, если

$$A\mathbf{M} \subseteq \mathbf{M},$$

т.е. если $A\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.

Для любого оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ все пространство $\mathbf{V}$ и нулевое подпространство $\{\mathbf{0}\}$ являются инвариантными. Эти инвариантные подпространства будем называть *тривиальными*.

Упражнение 4.1.2. Докажите следующие утверждения.

- Если $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, то подпространства $\operatorname{Ker} A$ и $\operatorname{Ran} A$ инвариантны относительно A.
- Если оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ обратим и подпространство $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ инвариантно относительно оператора A, то оно инвариантно и относительно обратного оператора A^{-1}.
- Если $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, то сумма и пересечение любого семейства инвариантных подпространств оператора A является инвариантным подпространством.

Утверждение 4.1.3. *Если операторы A и B коммутируют, то подпространства* $\operatorname{Ker} A$ *и* $\operatorname{Ran} A$ *инвариантны относительно оператора B.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A$. Тогда

$$AB\mathbf{x} = BA\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

т.е. $B\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} A$.

Пусть теперь $\mathbf{x} \in \operatorname{Ran} A$. Тогда существует $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ такой, что

$$\mathbf{x} = A\mathbf{y}.$$

Следовательно,

$$B\mathbf{x} = BA\mathbf{y} = AB\mathbf{y}.$$

Поэтому, $B\mathbf{x} \in \operatorname{Ran} A$. □

Определение 4.1.4. Если $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — нетривиальные линейные подпространства векторного пространства $\mathbf{V}$, инвариантные относительно линейного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, такие, что $\mathbf{V} = \mathbf{M} \dot{+} \mathbf{N}$, то говорят, что оператор A *разложим.*

Приведем примеры инвариантных подпространств операторов.

- Для любого векторного пространства $\mathbf{V}$ и любого линейного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ тривиальные подпространства $\mathbf{M}_1 = \{\mathbf{0}\}$ и $\mathbf{M}_2 = \mathbf{V}$ являются инвариантными относительно A.
- Пусть $\mathbf{V} = \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ — пространство многочленов степени $\leqslant n$ и $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования. Тогда любое подпространство $\mathcal{P}_k(\mathbb{C})$, где $k \leqslant n$, является инвариантным относительно оператора $\mathcal{D}$.
- Если оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ задан в некотором базисе

  $$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

  матрицей вида

  $$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1k} & \alpha_{1k+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \ldots & \alpha_{kk} & \alpha_{kk+1} & \ldots & \alpha_{kn} \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{k+1k+1} & \ldots & \alpha_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nk+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

то подпространство $\mathbf{M}$, порожденное первыми k векторами базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$, является инвариантным относительно оператора A. Действительно, если $\mathbf{y} \in \mathbf{M}$, то

$$[\mathbf{y}] = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^\top,$$

и умножая матрицу на вектор видим, что

$$[A][\mathbf{y}] = [\mathbf{z}],$$

где $[\mathbf{z}]$ имеет вид

$$[\mathbf{z}] = (z_1, \dots, z_k, 0 \dots 0)^\top.$$

Таким образом, $A\mathbf{y} = \mathbf{z} \in \mathbf{M}$, т.е. подпространство $\mathbf{M}$ инвариантно относительно оператора A.

- Если оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ задан в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ матрицей вида

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1k+1} & \dots & \alpha_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nk+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

то подпространство $\mathbf{M}$, порожденное векторами $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ и подпространство $\mathbf{N}$, порожденное векторами $\{\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$, являются инвариантными относительно оператора A, причем $\mathbf{V} = \mathbf{M} \dot{+} \mathbf{N}$, т.е. оператор A является разложимым.

Теорема 4.1.5. *Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Оператор A обладает нетривиальным инвариантным подпространством тогда и только тогда, когда его матрица в некотором базисе имеет вид*

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} & \alpha_{1k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} & \alpha_{kk+1} & \dots & \alpha_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1k+1} & \dots & \alpha_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nk+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ 0 & [A_{22}] \end{pmatrix},$$

где матрицы $[A_{11}]$ и $[A_{22}]$ ненулевые.

(ii) *Оператор A разложим тогда и только тогда, когда его матрица в некотором базисе имеет вид*

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1k+1} & \dots & \alpha_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nk+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A_{11}] & 0 \\ 0 & [A_{22}] \end{pmatrix},$$

где матрицы $[A_{11}]$ и $[A_{22}]$ ненулевые.

Доказательство. (i). Пусть оператор A обладает k-мерным инвариантным подпространством $\mathbf{M}$, $0 < k < n$. Рассмотрим такой базис

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

пространства $\mathbf{V}$, первые k векторов которого образуют базис в подпространстве $\mathbf{M}$. Так как векторы $A\mathbf{e}_j \in \mathbf{M}$, $j = 1, \dots, k$, то их можно разложить по векторам $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$, как векторам базиса $\mathbf{M}$. Следовательно,

$$A\mathbf{e}_1 = \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{k1}\mathbf{e}_k,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A\mathbf{e}_k = \alpha_{1k}\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{kk}\mathbf{e}_k.$$

Поэтому матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ имеет вид

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ 0 & [A_{22}] \end{pmatrix},$$

где $[A_{11}]$ — квадратная матрица размерности k.

Обратно, если матрица оператора A в некотором базисе

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

имеет вид

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} & \alpha_{1k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} & \alpha_{kk+1} & \dots & \alpha_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1k+1} & \dots & \alpha_{k+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nk+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

то подпространство $\mathbf{M}$, порожденное векторами $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, является инвариантным относительно оператора A.

(ii). Доказывается аналогично. $\square$

В случае, когда матрица $[A]$ оператора A в некотором базисе имеет вид

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_{11}] & 0 \\ 0 & [A_{22}] \end{pmatrix},$$

где матрицы $[A_{11}]$ и $[A_{22}]$ квадратные, будем писать

$$[A] = [A_{11}] \oplus [A_{22}].$$

Пусть $\mathbf{M}$ — инвариантное подпространство оператора A. Тогда можно определить оператор

$$A/\mathbf{M} \colon \mathbf{V}/\mathbf{M} \to \mathbf{V}/\mathbf{M},$$

полагая

$$(A/\mathbf{M})[\mathbf{x}] = [A\mathbf{x}].$$

Оператор $A/\mathbf{M}$ называется *фактор-оператором* линейного оператора A по модулю $\mathbf{M}$.

Кроме того, в этом случае можно определить оператор $A\restriction_{\mathbf{M}}$ в $\mathcal{B}(\mathbf{M})$, полагая $A\restriction_{\mathbf{M}}\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ для $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$. Такой оператор называют сужением оператора A не подпространство $\mathbf{M}$ или индуцированным оператором.

4.2 Характеристический многочлен и след линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы

Особую роль в теории линейных операторов играют одномерные инвариантные подпространства.

Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ и $\mathbf{N}$ — одномерное подпространство, порожденное ненулевым вектором $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$:

$$\mathbf{N} = \{\alpha\mathbf{x}, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Очевидно, что $\mathbf{N}$ инвариантно относительно A тогда и только тогда, когда $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Определение 4.2.1. Вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, удовлетворяющий соотношению

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{4.1}$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, называется *собственным вектором*, а соответствующее значение λ — *собственным значением* или *характеристическим числом* линейного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$.

Замечание 4.2.2. Если $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, то

$$\mathbf{N} = \{\alpha\mathbf{x}, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

является одномерным инвариантным относительно A подпространством. Обратно, все отличные от нуля векторы одномерного инвариантного относительно A подпространства являются собственными векторами оператора A.

Теорема 4.2.3. *Если* $\mathbf{V}$ *— n-мерное векторное пространство над полем* $\mathbb{C}$*, то любой линейный оператор* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ *имеет хотя бы один собственный вектор.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис векторного пространства $\mathbf{V}$ и матрица оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ имеет вид

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если в этом базисе

$$[\mathbf{x}] = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

то условие (4.1) эквивалентно матричному уравнению

$$[A - \lambda I][\mathbf{x}] = 0$$

или систему n линейных уравнений с n неизвестными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$:

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\xi_n = 0, \\ \alpha_{21}\xi_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\xi_n = 0, \\ \dotfill \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \cdots + (\alpha_{nn} - \lambda)\xi_n = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Эта система имеет ненулевое решение $\xi_1, \ldots, \xi_n$ тогда и только тогда, когда

$$\det[A - \lambda I] = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.3}$$

Так как уравнение (4.3) имеет по крайней мере один корень λ, то подставляя его в систему (4.2), получим некоторое ненулевое решение $[\mathbf{x}] = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$, такое что $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. $\square$

Определение 4.2.4. Уравнение (4.3) называется *характеристическим уравнением*, а многочлен

$$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I] = |A - \lambda I|$$

— *характеристическим многочленом* оператора A или матрицы $[A]$.

Замечание 4.2.5. Имеют место такие очевидные свойства.

- Корни характеристического уравнения являются собственными значениями оператора A, и обратно, собственные значения оператора A являются корнями характеристического уравнения (4.3).
- Если $\mathbf{M}$ — инвариантное относительно линейного оператора A подпространство, то в $\mathbf{M}$ содержится хотя бы один собственный вектор оператора A.
- Число $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением оператора A, если оператор $(A - \lambda I)$ необратим, т.е. если $\operatorname{Ker}(A - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$.

Упражнение 4.2.6. Пусть A — обратимый оператор. Доказать, что $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора A тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора A^{-1}.

Теорема 4.2.7. *Характеристические многочлены подобных матриц совпадают.*

Доказательство. Пусть $[A]$ и $[B]$ — подобные матрицы. Тогда существует невырожденная матрица $[C]$, что $[B] = [C]^{-1}[A][C]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det[B - \lambda I] = \det([C^{-1}][A - \lambda I][C]) = \\ &= \det[C^{-1}] \det[A - \lambda I] \det[C] = \det[A - \lambda I] = P_A(\lambda). \end{aligned}$$ $\square$

В силу теорем 2.5.1 и 4.2.7 имеем следующее следствие.

Следствие 4.2.8. *Характеристический многочлен $P_A(\lambda)$ линейного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ не зависит от выбора базиса.*

Приведем формулы для коэффициентов характеристического многочлена $P_A(\lambda)$ линейного оператора A. Пусть в некотором базисе оператор задается матрицей $[A]$ вида:

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} S_1 \lambda^{n-1} + \dots - S_{n-1}\lambda + S_n,$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}, \quad S_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} M_{i_1, i_2},$$
$$S_3 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} M_{i_1, i_2, i_3}, \quad \dots, \quad S_n = \det[A] = |A|.$$

где $M_{i_1, \dots, i_p}$ — главные миноры порядка p матрицы $[A]$, $p = 2, \dots, n-1$.

Замечание 4.2.9. С каждым линейным оператором A, действующим в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, связан характеристический многочлен этого оператора степени n, все коэффициенты которого не зависят от выбора базиса пространства $\mathbf{V}$. Верно и обратное утверждение. Каждый многочлен вида

$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda + a_0$$

есть характеристический многочлен некоторого линейного оператора $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Рассмотрим, например, оператор B, матрица которого в некотором базисе имеет вид

$$[B] = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Тогда, раскрывая определитель по первому столбцу, имеем

$$\det[B - \lambda I] = \begin{vmatrix} a_{n-1} - \lambda & a_{n-2} & \dots & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{n-1} - \lambda)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} - \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}a_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^{n-2}a_{n-2}\lambda^{n-2} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{n-3} & a_{n-4} & \dots & a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \dots = P(\lambda).$$

Матрица $[B]$ вида (4.4) называется *матрицей Фробениуса.*

Упражнение 4.2.10. Для любых операторов $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ имеет место равенство:

$$P_{AB}(\lambda) = P_{BA}(\lambda).$$

Пусть $[A]$ — матрица оператора A в некотором базисе векторного пространства $\mathbf{V}$.

Определение 4.2.11. Сумма диагональных элементов матрицы $[A]$ линейного оператора A называется *следом матрицы* $[A]$ (*следом линейного оператора* A) и обозначается

$$\operatorname{tr}[A] = \operatorname{tr} A.$$

В силу теорем 2.5.1 и 4.2.7 и следствия 4.2.8, след $\operatorname{tr} A$ линейного оператора A не зависит от выбора базиса, поэтому приведенное определение корректно.

Утверждение 4.2.12. *Для любых операторов $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ имеет место равенство*

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA.$$

Доказательство. Пусть в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ матрицы операторов A и B имеют вид:

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы в прямом и обратном порядке, получим

$$\operatorname{tr}[AB] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}\beta_{ik}, \quad \operatorname{tr}[BA] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\alpha_{ki}.$$

Поскольку след не зависит от выбора базиса, утверждение доказано. □

Замечание 4.2.13. Если $A, B, C \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, то в общем случае,

$$\operatorname{tr}[ABC] \neq \operatorname{tr}[ACB].$$

Действительно, например, для матриц

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [C] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\operatorname{tr}[ABC] = 0 \neq 1 = \operatorname{tr}[ACB].$$

Упражнение 4.2.14. Доказать, что если операторы A и B из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ подобны, то $\operatorname{tr} A^k = \operatorname{tr} B^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Упражнение 4.2.15. Доказать, что не существует таких операторов A и B, что

$$[A, B] = AB - BA = I.$$

Упражнение 4.2.16. Доказать, что если $[A, B] = A$, то

$$[A^k, B] = kA^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

оператор A — необратим и $A^n = 0$, $n = \dim \mathbf{V}$.

Упражнение 4.2.17. Доказать, что если

$$B = [C, D] = CD - DC,$$

то $\operatorname{tr} B = 0$.

Верно также обратное утверждение.

Утверждение 4.2.18. *Пусть* $\dim \mathbf{V} < \infty$. *Если след оператора A равен нулю, то существует базис, в котором все диагональные элементы матрицы оператора A равны нулю.*

Доказательство. Доказательство проведем с помощью индукции по размерности пространства $n = \dim \mathbf{V}$. В случае $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $n \geq 2$.

Пусть $[A]$ — матрица оператора A в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ пространства $\mathbf{V}$. Если среди диагональных элементы матрицы $[A] = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ хотя бы один равен нулю, не ограничивая общности можно считать, что $a_{11} = 0$. Действительно, если $a_{jj} = 0$, то переупорядочив базис таким образом, чтобы элемент $\mathbf{e}_j$ стоял на первом месте, в переупорядоченном базисе будем иметь $a_{11} = 0$. При этом матрица $[A]$ имеет вид

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & [B] \\ [C] & [A_0] \end{pmatrix},$$

где $[A_0]$ — некоторая квадратная матрица порядка $n-1$ с нулевым следом, $[B]$ и $[C]$ — некоторые матрицы порядка $1 \times (n-1)$ и $(n-1) \times 1$ соответственно. Согласно предположению индукции в этом случае существует обратимая матрица $[S_0]$ порядка $n-1$ такая, что у матрицы $[S_0][A_0][S_0]^{-1}$ все диагональные элементы равны нулю. При этом матрица $[S] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [S_0] \end{pmatrix}$ обратима и у матрицы

$$[S][A][S]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [S_0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & [B] \\ [C] & [A_0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [S_0]^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [B][S_0]^{-1} \\ [S_0][C] & [S_0][A_0][S_0]^{-1} \end{pmatrix}$$

все диагональные элементы равны нулю.

Таким образом, для завершения доказательства остается показать, что базис можно выбрать так, чтобы у матрицы оператора A хотя бы один диагональный элемент был нулевым. Возможны два случая: матрица $[A]$ является диагональной или нет.

Рассмотрим случай, когда матрица $[A]$ диагональная и $[A] \neq 0$. Поскольку $\operatorname{tr} A = 0$ и $[A] \neq 0$, у диагональной матрицы $[A]$ существует по крайней мере два различных диагональных элемента; не ограничивая общности, можно считать, что $a_{11} \neq a_{22}$. Рассмотрим матрицу

$$[T_0] = \frac{1}{\sqrt{a_{11} - a_{22}}} \begin{pmatrix} \sqrt{-a_{22}} & -\sqrt{a_{11}} \\ \sqrt{a_{11}} & \sqrt{-a_{22}} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$[T_0]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{a_{11} - a_{22}}} \begin{pmatrix} \sqrt{-a_{22}} & \sqrt{a_{11}} \\ -\sqrt{a_{11}} & \sqrt{-a_{22}} \end{pmatrix}$$

и имеем

$$[T_0] \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} [T_0]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a_{11}}\sqrt{-a_{22}} \\ \sqrt{a_{11}}\sqrt{-a_{22}} & a_{11} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, производя невырожденное линейное преобразование первых двух элементов базиса и не изменяя остальных базисных векторов, можно получить $a_{11} = 0$.

Рассмотрим случай, когда матрица A не является диагональной. Тогда существуют $i \neq j$, для которых $a_{ij} \neq 0$. Пусть $[S] = I + tE_{ji}$. Непосредственная проверка показывает, что $[S]^{-1} = I - tE_{ji}$. Так как $[A] = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} E_{kl}$ и $E_{pq}E_{rs} = \delta_{qr} E_{ps}$, p, q, r, $s = 1, \ldots, n$, то

$$\begin{aligned} [S][A][S]^{-1} &= \big(I + tE_{ji}\big) \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} E_{kl} \big(I - tE_{ji}\big) \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} E_{kl} + t \sum_{l=1}^{n} a_{il} E_{jl} - t \sum_{k=1}^{n} a_{kj} E_{ki} - t^2 a_{ij} E_{ji}. \end{aligned}$$

Коэффициент при E_{ii} в последнем выражении равен $a_{ii} - ta_{ij}$, следовательно, при $t = a_{ii}/a_{ij}$ i-й диагональный элемент матрицы $[S][A][S]^{-1}$ равен нулю. □

Утверждение 4.2.19. *Пусть* $\dim \mathbf{V} < \infty$. *Если след оператора* A *равен нулю, то существуют операторы* B, $C \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ *такие, что*

$$A = [B, C].$$

Доказательство. Согласно доказанному утверждению 4.2.18, в пространстве $\mathbf{V}$ существует базис, в котором диагональные элементы матрицы $[A]$ оператора A равны нулю. Пусть $[B]$ — диагональная матрица с различными числами $b_1, \ldots, b_n$ на диагонали. Тогда, полагая $[C] = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$,

$$c_{ij} = \frac{a_{ij}}{b_i - b_j}, \quad i \neq j = 1, \ldots, n, \qquad c_{ii} = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

непосредственной проверкой убеждаемся, что $[[B], [C]] = [A]$. □

4.3 Операторы простой структуры

Теорема 4.3.1. *Система собственных векторов $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ линейного оператора A, отвечающих попарно различным собственным значениям $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, линейно независима.*

Доказательство. Собственные векторы, по определению, являются ненулевыми. Поэтому теорема верна для $m = 1$. Допустим, что она верна для любой системы из $(m-1)$ собственных векторов, но не верна для векторов $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$. Тогда система $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ линейно зависима, и потому существует набор чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, не равных нулю одновременно, для которых верно равенство

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0},$$

и потому

$$A(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{x}_m) = \alpha_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0}.$$

Без ограничения общности предположим, что $\alpha_1 \neq 0$ и $\lambda_m \neq 0$. Умножим первое из этих равенств на λ_m и вычтем из второго. Получим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\mathbf{x}_{m-1} = \mathbf{0}.$$

Согласно индуктивному предположению, векторы $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m-1}\}$ линейно независимы. Поэтому все коэффициенты последнего равенства равны нулю. В частности,

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0,$$

что противоречит условию $\lambda_1 \neq \lambda_m$ и предположению $\alpha_1 \neq 0$. Следовательно, система векторов $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ линейно независима. □

Особый интерес представляет случай, когда оператор A, действующий в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, имеет ровно n попарно различных собственных значений. В этом случае, согласно теореме 4.3.1, можно выбрать базис пространства $\mathbf{V}$, целиком состоящий из собственных векторов оператора A.

Определение 4.3.2. Оператор A, действующий в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, называется оператором *простой структуры* или оператором *скалярного типа*, если он имеет n линейно независимых собственных векторов, т.е., если в пространстве $\mathbf{V}$ существует базис, состоящий из собственных векторов оператора A. Этот базис называется *собственным базисом* оператора A.

Замечание 4.3.3. Примером оператора простой структуры является *скалярный оператор* αI. Для него все ненулевые векторы пространства $\mathbf{V}$ являются собственными, отвечающими одному и тому же собственному значению α, и, соответственно, все базисы — собственные.

Замечание 4.3.4. Не каждый оператор обладает собственным базисом. Действительно, пусть $\dim \mathbf{V} = n > 1$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — какой-нибудь базис пространства $\mathbf{V}$. Определим оператор D равенствами:

$$D\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \quad D\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Этот оператор имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$, и все его собственные векторы имеют вид $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{e}_1$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Таким образом, оператор D не имеет собственного базиса.

Теорема 4.3.5. *Для того, чтобы оператор A, действующий в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, был оператором простой структуры, необходимо и достаточно, чтобы его матрица была подобна диагональной.*

Доказательство. Пусть A — оператор простой структуры, действующий в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, состоящий из собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Так как

$$A\mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{e}_2 = \lambda_2 \mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n,$$

то матрица $[A]$ оператора A в этом базисе имеет диагональный вид:

$$[A] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Обратно, пусть $[A]$ — матрица линейного оператора A в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть матрица $[A]$ подобна диагональной, т.е. существует невырожденная матрица $[C]$, такая, что

$$[C]^{-1}[A][C] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AC\mathbf{e}_k = \lambda_k C\mathbf{e}_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, векторы

$$\mathbf{e}'_k = C\mathbf{e}_k, \quad k = 1, \ldots, n$$

являются собственными векторами оператора A, отвечающими собственным значениям $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Поскольку матрица $[C]$ невырождена, векторы $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ образуют базис. Таким образом, оператор A — оператор простой структуры. $\square$

Замечание 4.3.6. Для оператора простой структуры A набор его собственных значений с учетом кратности однозначно определяет класс операторов, подобных A.

Замечание 4.3.7. Оператор A, действующий в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, имеет простую структуру тогда и только тогда, когда пространство $\mathbf{V}$ разлагается в прямую сумму n подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathbf{M}_n,$$

где $\mathbf{M}_k$ — одномерные инвариантные подпространства линейного оператора A, $k = 1, \ldots, n$;

Замечание 4.3.8. Если оператор A, действующий в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, имеет n попарно различных собственных значений, т.е., если все корни характеристического многочлена имеют кратность 1, то оператор A имеет простую структуру.

Упражнение 4.3.9. Докажите следующие утверждения.

- Если A — оператор простой структуры, то для любого полинома $p(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ оператор $p(A)$ тоже оператор простой структуры.
- Любой идемпотентный оператор оператор A является оператором простой структуры.
- Если оператор A удовлетворяет уравнению $A^m = I$ при некотором натуральном m, то он является оператором простой структуры. (Такой оператор A называется *корнем из единицы.*)
- Будем говорить, что многочлен $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ имеет свойство (П), если из условия $p(A) = 0$ следует, что A — оператор простой структуры. Многочлен $p(z)$ имеет свойство (П) тогда и только тогда, когда он не имеет кратных корней, то есть, когда НОД$(p(z), p'(z))$=1.

Упражнение 4.3.10. Если операторы A и B подобны и A — оператор простой структуры, то оператор B — тоже оператор простой структуры. При этом, если

$$B = S^{-1}AS,$$

и $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ — собственный базис оператора A, то $\{S^{-1}\mathbf{e}_k\}_{k=1}^n$ — собственный базис оператора B, причем собственные значения, которым соответствуют векторы $\mathbf{e}_k$ и $S^{-1}\mathbf{e}_k$, равны.

Упражнение 4.3.11. Пусть матрицы операторов A и B в некотором базисе имеют вид:

$$[A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оба эти оператора имеют собственное значение 0 кратности 2, но не подобны.

Замечание 4.3.12. Операторами простой структуры не исчерпывается все множество $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ линейных операторов в $\mathbf{V}$.

Утверждение 4.3.13. *Если*

$$A = J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и $m > 1$, то оператор A не является оператором простой структуры для любого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Если бы оператор $A = J_m(\lambda)$ был оператором простой структуры, то

$$J_m(\lambda) = S\Lambda S^{-1},$$

где Λ — диагональная матрица. Тогда $\Lambda = \lambda I$. Действительно, поскольку характеристические многочлены подобных матриц совпадают, то

$$P_\Lambda(z) = P_{J_n(\lambda)}(z) = (\lambda - z)^n$$

и λ является собственным числом матрицы Λ кратности n. Таким образом, $\Lambda = \lambda I$. Поэтому

$$J_m(\lambda) - \lambda I = S\Lambda S^{-1} - \lambda I = \lambda I - \lambda I = 0,$$

а это невозможно при $m > 1$. □

Глава 5

Треугольная форма Шура

5.1 Индуцированный оператор

Пусть линейное подпространство $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$ является инвариантным относительно линейного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Если $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$, то $A\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. Следовательно, оператор A порождает на $\mathbf{M}$ оператор $A\restriction_{\mathbf{M}}$, определяемый равенством

$$A\restriction_{\mathbf{M}}\mathbf{x} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{M}.$$

Оператор $A\restriction_{\mathbf{M}}$ называется *индуцированным* оператором, порожденным оператором A или *сужением оператора* A на подпространство $\mathbf{M}$. По отношению к оператору $A\restriction_{\mathbf{M}}$ оператор A называется *порождающим*. Ясно, что $A\restriction_{\mathbf{M}} \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$.

Замечание 5.1.1. Любое собственное значение индуцированного оператора $A\restriction_{\mathbf{M}}$ является собственным значением порождающего оператора A.

Следствие 5.1.2. *Если пространство* $\mathbf{V}$ *разложено в прямую сумму* r *инвариантных относительно линейного оператора* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ *подпространств, то оператор* A *имеет по крайней мере* r *линейно независимых собственных векторов.*

Теорема 5.1.3. *Пусть оператор* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ *имеет нетривиальное инвариантное подпространство* $\mathbf{M}$*. Тогда характеристический многочлен индуцированного оператора* $A\restriction_{\mathbf{M}}$ *является делителем характеристического многочлена оператора* A*.*

Доказательство. Пусть оператор A обладает нетривиальным инвариантным подпространством $\mathbf{M}$. Выберем такой базис

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

пространства $\mathbf{V}$, первые k векторов которого образуют базис в подпространстве $\mathbf{M}$. Тогда матрица оператора A в базисе имеет вид

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ 0 & [A_{22}] \end{pmatrix},$$

причем матрица $[A_{11}]$ есть матрица индуцированного оператора $A\restriction_{\mathbf{M}}$. Следовательно,

$$P_A(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \begin{vmatrix} [A_{11} - \lambda I_{11}] & [A_{12}] \\ 0 & [A_{22} - \lambda I_{22}] \end{vmatrix} =$$
$$= \det[A_{11} - \lambda I_{11}] \det[A_{22} - \lambda I_{22}] = P_{A\restriction_{\mathbf{M}}}(\lambda) Q(\lambda). \qquad \square$$

5.2 Спектр оператора

Определение 5.2.1. Множество $\sigma(A)$ собственных значений оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется спектром оператора A.

Упражнение 5.2.2. Если операторы A и B из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ подобны, то

$$\sigma(A) = \sigma(B).$$

Исследование спектра и связанной с ним структуры оператора является предметом спектральной теории операторов. Отметим, что в силу теоремы 4.2.3, $\sigma(A) \neq \emptyset$ для любого оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$.

Теорема 5.2.3. *Если* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ *и* $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$, *то*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Доказательство. Если $p(z) \equiv \alpha_0$, то очевидно,

$$\sigma(p(A)) = \alpha_0 = \{p(\lambda) \colon \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Пусть теперь $n \geqslant 1$, $\lambda \in \sigma(A)$ и $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbf{V}$ — соответствующий собственный вектор. Тогда

$$p(A)\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k A^k \mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{x} + \alpha_1 A\mathbf{x} + \cdots + \alpha_n A^n \mathbf{x}.$$

Но
$$A^k\mathbf{x} = A^{k-1}A\mathbf{x} = \lambda A^{k-1}\mathbf{x} = \dots = \lambda^k\mathbf{x}, \quad k = 1, \dots, n.$$
Поэтому
$$p(A)\mathbf{x} = \alpha_0\mathbf{x} + \alpha_1\lambda\mathbf{x} + \dots + \alpha_n\lambda^n\mathbf{x} = (\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_n\lambda^n)\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x}.$$
Следовательно, $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$.

Обратно, если $\mu \notin \{p(\lambda)\colon \lambda \in \sigma(A)\}$, $\alpha_n \neq 0$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — все корни полинома $(p(z) - \mu)$, то $p(\lambda_i) = \mu$, $i = 1, \dots, n$ и потому $\lambda_1, \dots, \lambda_n \notin \sigma(A)$. Так как
$$p(A) - \mu I = \alpha_n(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_n I),$$
то оператор $(p(A) - \mu I)$ обратим. Следовательно, $\mu \notin \sigma(p(A))$. □

Следствие 5.2.4. *Если $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, $\lambda \in \sigma(A)$ и $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ такой многочлен, что $p(A) = 0$, то λ — корень многочлена $p(z)$, т.е. $p(\lambda) = 0$.*

Доказательство. Так как $p(A) = 0$, то $\sigma(p(A)) = \{0\}$. Поэтому, если $\lambda \in \sigma(A)$, то $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$, откуда следует, что $p(\lambda) = 0$. □

Утверждение 5.2.5. *Для любых операторов A, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$*
$$\sigma(AB) = \sigma(BA).$$

Доказательство. 1). Докажем сначала, что если $\lambda \neq 0$, то операторы $(AB - \lambda I)$ и $(BA - \lambda I)$ обратимы или необратимы одновременно.

Пусть оператор $(AB - \lambda I)$ обратим и $C = (AB - \lambda I)^{-1}$. Тогда
$$(AB - \lambda I)C = C(AB - \lambda I) = I,$$
откуда
$$ABC = CAB = \lambda C + I.$$
Умножим последнее равенство слева на оператор B, а справа — на оператор A. Получим
$$BABCA = BCABA = \lambda BCA + BA,$$
или
$$BABCA - (\lambda BCA + BA) = BCABA - (\lambda BCA + BA) = 0.$$

Тогда

$$\lambda I = \lambda I + BABCA - (\lambda BCA + BA) = (BA - \lambda I)(BCA - I).$$

Аналогично

$$\lambda I = \lambda I + BCABA - (\lambda BCA + BA) = (BCA - I)(BA - \lambda I).$$

Следовательно, оператор $(BA - \lambda I)$ обратим и

$$(BA - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(BCA - I).$$

2). Пусть теперь $\lambda = 0$. Докажем, что и в этом случае операторы AB и BA обратимы или необратимы одновременно.

Пусть, например, оператор AB — обратим. Тогда

$$AB(AB)^{-1} = A(B(AB)^{-1}) = I.$$

Следовательно, $\operatorname{Ran} A = \mathbf{V}$. Но тогда, в силу теоремы 2.3.3, оператор A обратим и

$$BA = A^{-1}ABA = A^{-1}(AB)A,$$

т.е. операторы AB и BA подобны, и потому оператор BA обратим. $\square$

Упражнение 5.2.6. Докажите следующие утверждения.

- Если $\dim \mathbf{V} = n$, то для любого множества σ комплексных чисел, содержащего не более n элементов, существует такой оператор $A \in \mathbf{V}$, что $\sigma(A) = \sigma$.
- Пусть $\mathbf{M}$ — нетривиальное инвариантное подпространство оператора A. Тогда
$$\sigma(A) = \sigma(A\restriction_{\mathbf{M}}) \cup \sigma(A/\mathbf{M}).$$
- Пусть $P^2 = P$ — идемпотентный оператор. Доказать, что $\sigma(P) \subseteq \{0, 1\}$.
- Оператор $S \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется *инволюцией*, если $S^2 = I$. Если S — инволюция, то $\sigma(S) \subseteq \{-1, 1\}$.

Утверждение 5.2.7. *Если $P \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ идемпотентный оператор, то*

$$\operatorname{tr} P = \dim(\operatorname{Ran} P) = \operatorname{rg} P.$$

Доказательство. Каждый идемпотент есть оператором простой структуры (упражнение 4.3.9) и его спектр содержится в $\{0,1\}$ (упражнение 5.2.6). Тогда в пространстве $\mathbf{V}$ существует базис, в котором матрица оператора P диагональная и имеет вид

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что след этой матрицы равен размерности собственного подпространства, отвечающего собстенному значению 1, которое совпадает с образом оператора. □

Следствие 5.2.8. *Если* $\psi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ *— линейный гомоморфизм, отображающий единицу в единицу, т.е.*

$$\psi([A][B]) = \psi[A]\psi[B], \quad \psi(I_n) = I_m,$$

то существует такое натуральное число p, *что*

$$m = np.$$

Доказательство. Пусть $\{[E_{ij}]\}_{i,j=1}^{n}$ — канонический базис в $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. В силу утверждения 3.3.1 и следствия 3.3.2, для любого $k = 1, \ldots, n$

$$(\psi[E_{kk}])^2 = \psi([E_{kk}][E_{kk}]) = \psi[E_{kk}],$$

т.е. $\psi[E_{kk}]$ идемпотент. Далее

$$\psi[E_{kk}]\psi[E_{jj}] = \psi([E_{kk}][E_{jj}]) = \psi(\delta_{kj}[E_{kk}]) = \delta_{kj}\psi[E_{kk}].$$

Кроме того, в силу утверждения 3.3.5, $[E_{kk}]$ и $[E_{rr}]$ подобны, т.е. существует такая обратимая матрица $[C]$, что

$$[E_{rr}] = [C]^{-1}[E_{kk}][C].$$

Поэтому

$$\psi[E_{rr}] = \psi([C]^{-1}[E_{kk}][C]) = \psi([C]^{-1})\psi[E_{kk}]\psi[C],$$

т.е. $\psi[E_{kk}]$ и $\psi[E_{rr}]$ тоже подобны. Следовательно, в силу утверждения 5.2.7,

$$\mathrm{tr}(\psi[E_{rr}]) = \dim(\mathrm{Ran}\,\psi[E_{rr}]) = \dim(\mathrm{Ran}\,\psi[E_{kk}]) = \mathrm{tr}(\psi[E_{kk}]).$$

Обозначим $\mathrm{tr}(\psi[E_{kk}]) = p$. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \psi[E_{kk}] = \psi\Big(\sum_{k=1}^{n} [E_{kk}]\Big) = \psi(I_n) = I_m,$$

то

$$\mathrm{tr}\Big(\sum_{k=1}^{n} \psi[E_{kk}]\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{tr}(\psi[E_{kk}]) = np = m. \qquad \square$$

Определение 5.2.9. Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется *одноточечным*, если его спектр состоит из одной точки. При этом говорят, что оператор A *сосредоточен в этой точке*.

Одноточечным оператором является скалярный оператор αI. Однако, как показывает замечание 4.3.3, не всякий одноточечный оператор является скалярным.

Упражнение 5.2.10. Для того, чтобы оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ был одноточечным, сосредоточенным в точке α, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное число $r > 0$, что $(A - \alpha I)^r = 0$.

5.3 Собственные и присоединенные векторы линейного оператора

Определение 5.3.1. Пусть λ — собственное значение оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Подпространство

$$\mathbf{N}_\lambda^{(1)} = \mathbf{N}_\lambda = \mathbf{N}_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$$

называется собственным подпространством оператора A, соответствующим собственному значению λ. Размерность $\dim \mathbf{N}_\lambda$ называется *геометрической кратностью* собственного значения λ.

Упражнение 5.3.2. Если операторы A и B подобны, то геометрические кратности соответствующих собственных значений этих операторов равны:

$$\dim \mathbf{N}_\lambda(A) = \dim \mathbf{N}_\lambda(B).$$

Замечание 5.3.3. Имеют место следующие свойства.

- Подпространство $\mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A) = \mathbf{N}_\lambda(A)$ состоит из всех собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ, к которым добавлен нулевой вектор $\mathbf{0}$.
- Собственными векторами операторов 0, I и αI будут все ненулевые векторы пространства $\mathbf{V}$. Эти операторы имеют по одному собственному значению, равному соответственно 0, 1 и α и, следовательно, по одному собственному подпространству, совпадающему с $\mathbf{V}$.

Упражнение 5.3.4. Собственное подпространство $\mathbf{N}_\lambda = \mathbf{N}_\lambda(A)$ является инвариантным относительно оператора A.

Упражнение 5.3.5. Докажите следующие утверждения.

- Если операторы A и B коммутируют:

$$[A, B] = AB - BA = 0,$$

  и $\lambda \in \sigma(A)$, то подпространство $\mathbf{N}_\lambda(A)$ инвариантно относительно оператора B:

$$B(\mathbf{N}_\lambda(A)) \subseteq \mathbf{N}_\lambda(A).$$

- Если $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то

$$\sum_{k=1}^{r} \dim \mathbf{N}_{\lambda_k}(A) \leqslant n;$$

- Оператор A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{r} \dim \mathbf{N}_{\lambda_k}(A) = n.$$

- Если

$$\mathbf{N}_{\lambda_1}(A) \dotplus \cdots \dotplus \mathbf{N}_{\lambda_r}(A) = \mathbf{V}$$

  и подпространства $\mathbf{N}_{\lambda_k}(A)$ инвариантны относительно оператора B:

$$B(\mathbf{N}_{\lambda_k}(A)) \subset \mathbf{N}_{\lambda_k}(A),$$

  то операторы A и B коммутируют.

Определение 5.3.6. Вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ называется *присоединенным вектором 1-го порядка* оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, отвечающим собственному значению λ, если $\mathbf{x} \notin \mathbf{N}_\lambda(A)$ и вектор

$$\mathbf{y} = (A - \lambda I)\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda(A),$$

т.е. является собственным вектором оператора A с тем же собственным значением.

Обозначим

$$\mathbf{N}_\lambda^{(2)} = \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2.$$

Замечание 5.3.7. Пусть $\mathbf{e}_2$ — присоединенный вектор 1-го порядка оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, отвечающий собственному значению λ. Тогда вектор $\mathbf{e}_1 = (A - \lambda I)\mathbf{e}_2$ — собственный вектор оператора A. Следовательно,

$$A\mathbf{e}_2 = \lambda \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1,$$

т.е. присоединенный вектор 1-го порядка — “почти собственный” вектор оператора A с точностью до собственного вектора $\mathbf{e}_1$.

Утверждение 5.3.8. *Подпространство* $\mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A)$ *инвариантно относительно оператора* A.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A)$. Тогда $(A - \lambda I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$(A - \lambda I)^2 A\mathbf{x} = A(A - \lambda I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Поэтому $A\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A)$. □

Упражнение 5.3.9. Если операторы A и B коммутируют:

$$[A, B] = AB - BA = 0,$$

и $\lambda \in \sigma(A)$, то подпространство $\mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A)$ инвариантно относительно оператора B:

$$B(\mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A)) \subseteq \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A).$$

Утверждение 5.3.10. *Имеют место следующие свойства.*

(i) $\mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A) \subset \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A)$;

(ii) *Если* $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A) \setminus \mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A)$, *то* $\mathbf{x}$ — *присоединенный вектор оператора* A *1-го порядка, отвечающий собственному значению* λ.

Доказательство. (i). Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A)$. Тогда $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, откуда $(A - \lambda I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A)$.

(ii). Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A) \setminus \mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A)$. Тогда $(A-\lambda I)^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, но $(A-\lambda I)\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, вектор $\mathbf{y} = (A - \lambda I)\mathbf{x}$ является собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ. Следовательно, $\mathbf{x}$ — присоединенный вектор 1-го порядка. □

Определение 5.3.11. Вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ называется *присоединенным вектором k-го порядка* оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, отвечающим собственному значению λ, $k \geqslant 2$, если вектор

$$\mathbf{y} = (A - \lambda I)\mathbf{x}$$

является присоединенным вектором $(k-1)$-го порядка.

Замечание 5.3.12. Отметим следующие полезные свойства присоединенных векторов.

- Если $\mathbf{e}_3$ — присоединенный вектор 2-го порядка оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, отвечающий собственному значению λ, то вектор $\mathbf{e}_2 = (A - \lambda I)\mathbf{e_3}$ — присоединенный вектор 1-го порядка оператора A. Следовательно,

  $$A\mathbf{e}_3 = \lambda\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2,$$

  т.е. присоединенный вектор 2-го порядка — "почти собственный" вектор оператора A с точностью до присоединенного вектора $\mathbf{e}_2$ 1-го порядка.

- Если $\mathbf{e}_{k+1}$ — присоединенный вектор k-го порядка оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, отвечающий собственному значению λ, то вектор $\mathbf{e}_k = (A - \lambda I)\mathbf{e_{k+1}}$ — присоединенный вектор $k-1$-го порядка оператора A. Следовательно,

  $$A\mathbf{e}_{k+1} = \lambda\mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{e}_k,$$

  т.е. присоединенный вектор k-го порядка — "почти собственный" вектор оператора A с точностью до присоединенного вектора $\mathbf{e}_k$ $k-1$-го порядка.

- Вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ является присоединенным вектором k-го порядка оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, отвечающим собственному значению λ, $k \geqslant 2$, если вектор $(A - \lambda I)^k\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора A.

Обозначим

$$\mathbf{N}_\lambda^{(k)} = \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^k.$$

Утверждение 5.3.13. *Подпространства $\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$ обладают следующими свойствами.*

(i) *Подпространство $\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$ является инвариантным относительно оператора A, $k \geqslant 2$;*

(ii) $\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A) \subset \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A)$, *$k \geqslant 2$;*

Доказательство. (i). Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$. Тогда $(A - \lambda I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$(A - \lambda I)^k A\mathbf{x} = A(A - \lambda I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Поэтому $A\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$.

(ii). Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$. Тогда $(A - \lambda I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$, откуда $(A - \lambda I)^{k+1} \mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A)$. □

Утверждение 5.3.14. *Вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ является присоединенным вектором k-го порядка оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, отвечающим собственному значению λ, $k \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A) \setminus \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$.*

Доказательство. Необходимость. Докажем по индукции, что если $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ является присоединенным вектором k-го порядка оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, то $(A - \lambda I)^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, а $(A - \lambda I)^k \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

1). Пусть $\mathbf{x}$ — присоединенный вектор 1-го порядка оператора A. Тогда $\mathbf{y} = (A - \lambda I)\mathbf{x}$ —собственный вектор оператора A. Следовательно, $\mathbf{y} = (A - \lambda I)\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $A\mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$. Таким образом,

$$(A - \lambda I)^2 \mathbf{x} = (A - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

2). Допустим, что наше утверждение верно для присоединенного вектора $\mathbf{y}$ $(k-1)$-го порядка, т.е. $(A - \lambda I)^k \mathbf{y} = \mathbf{0}$, а $(A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

3). Пусть теперь $\mathbf{x}$ — присоединенный вектор k-го порядка. Тогда $\mathbf{y} = (A - \lambda I)\mathbf{x}$ — присоединенный вектор $(k-1)$-го порядка. Следовательно,

$$(A - \lambda I)^k \mathbf{y} = (A - \lambda I)^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

и

$$(A - \lambda I)^{k-1}\mathbf{y} = (A - \lambda I)^k \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Таким образом, если вектор $\mathbf{x}$ является присоединенным вектором k-го порядка оператора A, отвечающим собственному значению λ, $k \geqslant 1$, то $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A) \setminus \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A) \setminus \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$. Тогда

$$\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A) \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \notin \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A).$$

Следовательно, вектор $\mathbf{y} = (A - \lambda I)^k \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и

$$(A - \lambda I)^{k+1}\mathbf{x} = (A - \lambda I)\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $\mathbf{y} = (A-\lambda I)^k\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора A и потому, в силу замечания 5.3.12, $\mathbf{x}$ — присоединенный вектор k-го порядка. □

Утверждение 5.3.15. *Имеет место включение*

$$(A - \lambda I)\mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A) \subset \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A)$. Тогда $(A-\lambda I)^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Возможны два случая.

1). $(A - \lambda I)^k\mathbf{x} = 0$. Тогда $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$ и, так как подпространство $\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$ инвариантно относительно оператора A, то $(A - \lambda I)\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$.

2). $(A - \lambda I)^k\mathbf{x} \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A) \setminus \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$$

и, в силу утверждения 5.3.14, $\mathbf{x}$ — присоединенный вектор k-го порядка. Но тогда вектор $(A - \lambda I)\mathbf{x}$ является присоединенным вектором $(k-1)$-го порядка и потому $(A - \lambda I)\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$. □

Утверждение 5.3.16. *Цепь подпространств*

$$\mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A) \subset \mathbf{N}_\lambda^{(2)}(A) \subset \dots \subset \mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A) \subset \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A) \subset \dots$$

конечна, т.е. существует такое $p \leqslant n$, что

$$\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) = \mathbf{N}_\lambda^{(p+1)}(A) \dots.$$

Доказательство. Так как $\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A) \subset \mathbf{N}_\lambda^{(k+1)}(A)$, $\ k \geqslant 1$, то размерности подпространств $\mathbf{N}_\lambda^{(k)}(A)$ могут только увеличиваться. Так как $\dim \mathbf{V} = n$, то для какого-то $p \leqslant n$ впервые получится равенство:

$$\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) = \mathbf{N}_\lambda^{(p+1)}(A).$$

Покажем, что тогда

$$\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) = \mathbf{N}_\lambda^{(p+1)}(A) = \mathbf{N}_\lambda^{(p+2)}(A) \dots.$$

Предположим противное:

$$\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) = \cdots = \mathbf{N}_\lambda^{(p+j)}(A) \subset \mathbf{N}_\lambda^{(p+j+1)}(A),$$

причем

$$\mathbf{N}_\lambda^{(p+j+1)}(A) \setminus \mathbf{N}_\lambda^{(p+j)}(A) \neq \emptyset.$$

Тогда существует такой ненулевой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, что $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(p+j+1)}(A)$ и $\mathbf{x} \notin \mathbf{N}_\lambda^{(p+j)}(A)$. Следовательно,

$$(A - \lambda I)^{p+j+1}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad (A - \lambda I)^{p+j}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{y} = (A - \lambda I)^j \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Так как

$$(A - \lambda I)^{p+1}\mathbf{y} = (A - \lambda I)^{p+j+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

и

$$(A - \lambda I)^{p}\mathbf{y} = (A - \lambda I)^{p+j}\mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

то

$$\mathbf{y} \in \mathbf{N}_\lambda^{(p+1)}(A) \quad \text{и} \quad \mathbf{y} \notin \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A)$$

вопреки равенству $\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) = \mathbf{N}_\lambda^{(p+1)}(A)$. □

Непосредственно из утверждения 5.3.16 получаем:

Следствие 5.3.17. *Пусть A — линейный оператор.*

(i) *Для каждого собственного значения λ оператора A однозначно определена конечная цепь инвариантных подпространств*

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A) \subset \cdots \subset \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A), \quad p \leqslant n,$$

причем все члены этой цепи различны;

(ii) *Подпространство $\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A)$ порождено собственными и присоединенными векторами оператора A, отвечающими собственному значению λ;*

(iii) *Индуцированный оператор $A\restriction_{\mathbf{N}_\lambda^{(p)}}$ имеет единственное собственное значение λ.*

Обозначим

$$\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A) = \operatorname{Ran}(A - \lambda I)^p.$$

Так же как и $\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A)$, подпространство $\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$ инвариантно относительно оператора A.

Теорема 5.3.18. *Подпространства* $\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$ *обладают следующими свойствами.*

(i) *Пространство* $\mathbf{V}$ *является прямой суммой инвариантных подпространств*
$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) \dotplus \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A);$$

(ii) *В подпространстве* $\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$ *оператор* $(A - \lambda I)$ *обратим.*

Доказательство. (i). Так как

$$\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^p, \quad \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A) = \operatorname{Ran}(A - \lambda I)^p,$$

то в силу теоремы 2.2.2,

$$\dim \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) + \dim \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A) = \dim \mathbf{V} = n.$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) \cap \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A) = \{\mathbf{0}\}.$$

Допустим противное, т.е. пусть существует ненулевой вектор

$$\mathbf{y} \in \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) \cap \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A).$$

Так как $\mathbf{y} \in \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A)$, то $(A - \lambda I)^p \mathbf{y} = \mathbf{0}$. С другой стороны, так как $\mathbf{y} \in \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$, то существует такой ненулевой вектор $\mathbf{x}$, что

$$(A - \lambda I)^p \mathbf{x} = \mathbf{y} \neq \mathbf{0}.$$

Тогда
$$(A - \lambda I)^{2p} \mathbf{x} = (A - \lambda I)^p \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, существует такой ненулевой вектор $\mathbf{x}$, что

$$\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(2p)}(A) \setminus \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A),$$

что невозможно. Следовательно,

$$\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) \cap \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A) = \{\mathbf{0}\},$$

и потому
$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A) \dotplus \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A).$$

(ii). Допустим, что на подпространстве $\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$ оператор $(A-\lambda I)$ необратим. Тогда существует ненулевой вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$, такой что

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $(A-\lambda I)^p\mathbf{x} = \mathbf{0}$, и значит $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A)$, т.е. ненулевой вектор $\mathbf{x}$ принадлежит одновременно подпространствам $\mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A)$ и $\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$, что невозможно. Следовательно, оператор $(A-\lambda I)$ обратим в подпространстве $\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$. $\square$

Замечание 5.3.19. Если подпространство $\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A) \neq \{\mathbf{0}\}$, то оператор A имеет на $\mathbf{M}_\lambda^{(p)}(A)$ по крайней мере еще одно собственное значение μ, отличное от λ. Этому собственному значению соответствует своя конечная цепь инвариантных подпространств

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{N}_\mu^{(1)}(A) \subset \cdots \subset \mathbf{N}_\mu^{(q)}(A),$$

где все члены этой цепи различны.

Упражнение 5.3.20. Если $\lambda, \mu \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \mu$,

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A) \subset \cdots \subset \mathbf{N}_\lambda^{(p)}(A),$$

и

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{N}_\mu^{(1)}(A) \subset \cdots \subset \mathbf{N}_\mu^{(q)}(A),$$

соответствующие цепи инвариантных подпространств, то

$$\mathbf{N}_\lambda^{(i)}(A) \cap \mathbf{N}_\mu^{(j)}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

для любых $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$.

Теорема 5.3.21. *Если оператор A имеет k различных собственных значений:*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\},$$

то пространство $\mathbf{V}$ можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_{\lambda_1}^{(p_1)}(A) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathbf{N}_{\lambda_k}^{(p_k)}(A),$$

где каждое из подпространств $\mathbf{N}_{\lambda_i}^{(p_i)}(A)$ состоит из собственных и присоединенных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ_i, $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Пусть

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{N}_{\lambda_i}^{(1)}(A) \subset \cdots \subset \mathbf{N}_{\lambda_i}^{(p)}(A)$$

— конечная цепь инвариантных подпространств, отвечающих собственному значению λ_i. По теореме 5.3.18 пространство $\mathbf{V}$ представимо в виде прямой суммы

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_{\lambda_1}^{(p_1)}(A) \dotplus \mathbf{V}_1,$$

где $\mathbf{V}_1 = \mathbf{M}_{\lambda_1}^{(p_1)}(A)$, причем индуцированный оператор $A\restriction_{\mathbf{V}_1}$ не имеет собственного значения λ_1. В силу той же теоремы 5.3.18 пространство $\mathbf{V}_1$ представимо в виде прямой суммы

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_{\lambda_2}^{(p_2)}(A) \dotplus \mathbf{V}_2,$$

а значит пространство $\mathbf{V}$ представимо в виде прямой суммы

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_{\lambda_1}^{(p_1)}(A) \dotplus \mathbf{N}_{\lambda_2}^{(p_2)}(A) \dotplus \mathbf{V}_2,$$

где $\mathbf{V}_2 = \mathbf{M}_{\lambda_2}^{(p_2)}(A)$, причем индуцированный оператор $A\restriction_{\mathbf{V}_2}$ не имеет собственных значений λ_1 и λ_2. Продолжая процесс, пока не будут исчерпаны все собственные значения оператора A, мы получим доказываемое разложение

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_{\lambda_1}^{(p_1)}(A) \dotplus \cdots \dotplus \mathbf{N}_{\lambda_k}^{(p_k)}(A). \qquad \square$$

5.4 Операторный многочлен и инвариантные подпространства

Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\psi_A \colon \mathcal{P}[\mathbb{C}] \to \mathcal{B}(\mathbf{V})$$

алгебры многочленов $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ в алгебру операторов $\mathcal{B}(\mathbf{V})$, который каждому многочлену

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$

ставит в соответствие оператор

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m.$$

Этот оператор называется *операторным многочленом* или *многочленом от оператора* A.

Множество

$$\Phi(A) = \{p(A) : p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m,\ m = 1, 2, \dots\}$$

всех операторных многочленов от A является коммутативной подалгеброй алгебры $\mathcal{B}(\mathbf{V})$. В частности,

$$p(A)A = A\,p(A)$$

для любого многочлена $p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$.

Ясно, что любое линейное подпространство $\mathbf{M}$, инвариантное относительно оператора A, является инвариантным и относительно операторного многочлена $p(A)$.

Так как $p(A) \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, то образ $\mathbf{R}_{p(A)} = \operatorname{Ran} p(A)$ и ядро $\mathbf{K}_{p(A)} = \operatorname{Ker} p(A)$ оператора $p(A)$ являются линейными подпространствами в $\mathbf{V}$.

Утверждение 5.4.1. *Линейные подпространства $\mathbf{R}_{p(A)}$ и $\mathbf{K}_{p(A)}$ являются инвариантными относительно оператора A.*

Доказательство. 1). Пусть $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_{p(A)}$. Тогда $\mathbf{y} = p(A)\mathbf{x}$ для некоторого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Следовательно

$$A\mathbf{y} = A\,p(A)\mathbf{x} = p(A)A\mathbf{x} = p(A)(A\mathbf{x}) \in \mathbf{R}_{p(A)}.$$

2). Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{p(A)}$. Тогда $p(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$p(A)(A\mathbf{x}) = A\,p(A)\mathbf{x} = A(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

т.е. $A\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{p(A)}$. □

Как отмечалось ранее, в любом ненулевом инвариантном подпространстве оператора A содержится по крайней мере один собственный вектор. Имеет место более общее утверждение.

Утверждение 5.4.2. *Пусть $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$ и $\lambda \in \sigma(A)$.*

(i) *Если $p(\lambda) = 0$, то $\mathbf{N}_\lambda(A) \subset \mathbf{K}_{p(A)}$;*

(ii) *Если $p(\lambda) \neq 0$, то $\mathbf{N}_\lambda(A) \subset \mathbf{R}_{p(A)}$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(A)$ и $\mathbf{x} \neq 0$ — соответствующий собственный вектор: $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Тогда

$$\begin{aligned} p(A)\mathbf{x} &= (a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m)\mathbf{x} = \\ &= a_0\mathbf{x} + a_1 A\mathbf{x} + \cdots + a_m A^m\mathbf{x} = \\ &= a_0\mathbf{x} + a_1\lambda\mathbf{x} + \cdots + a_m\lambda^m\mathbf{x} = \\ &= (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m)\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{x}$ — собственный вектор оператора $p(A)$, отвечающий собственному значению $p(\lambda)$.

(i). Пусть $p(\lambda) = 0$. Тогда

$$p(A)\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

т.е. $\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{p(A)}$.

(ii). Пусть $p(\lambda) \neq 0$. Тогда

$$\mathbf{x} = p(A)\Big(\frac{1}{p(\lambda)}\mathbf{x}\Big),$$

т.е. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{p(A)}$. □

Замечание 5.4.3. Утверждение, что любое инвариантное подпространство оператора A является любо ядром, либо областью значений некоторого операторного многочлена, неверно. Пусть например, $A = I$. Тогда для любого многочлена $p(z)$ имеем

$$p(I) = p(1)I.$$

Поэтому оператор $p(I)$ либо нулевой, либо невырожденный. Следовательно, область значений и ядро оператора $p(I)$ представляют собой тривиальные подпространства. В свою очередь, инвариантным подпространством оператора I является любое подпространство.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.4.4. *Пусть* $\mathbf{M}$ *— инвариантное подпространство оператора* A*. Если все собственные значения индуцированного на* $\mathbf{M}$ *оператора* $A\restriction_{\mathbf{M}}$ *являются корнями многочлена* $p(z)$*, то существует такое* k_0*, что*

$$\mathbf{M} \subset \mathbf{K}_{p^k(A)}$$

для всех натуральных значений $k \geqslant k_0$*.*

Доказательство. Так как $\mathbf{M}$ — инвариантное подпространство оператора A, то $\mathbf{M}$ инвариантно относительно каждого операторного многочлена $p^k(A)$, $k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим операторы

$$p(A)\restriction_{\mathbf{M}}, \quad p^2(A)\restriction_{\mathbf{M}}, \quad p^3(A)\restriction_{\mathbf{M}}, \quad \ldots$$

и обозначим образы этих операторов через

$$\mathbf{R}'_1 = \mathrm{Ran}(p(A)\restriction_{\mathbf{M}}), \quad \mathbf{R}'_2 = \mathrm{Ran}(p^2(A)\restriction_{\mathbf{M}}), \quad \ldots$$

Так как $p(\lambda) = 0$ для любого $\lambda \in \sigma(A\restriction_{\mathbf{M}}) \subset \sigma(A)$, то

$$\mathbf{N}_\lambda(A) \subset \mathbf{K}_{p(A)}$$

и поэтому оператор $p(A)$ является вырожденным на $\mathbf{M}$. Следовательно,

$$\mathbf{R'}_1 \subset \mathbf{M} \quad \text{и} \quad \dim \mathbf{R'}_1 < \dim \mathbf{M}.$$

Подпространство $\mathbf{R'}_1$ является инвариантным относительно A. Если $\mathbf{R'}_1$ — ненулевое, то согласно теореме 5.1.3, характеристический многочлен оператора $A\restriction_{\mathbf{R'}_1}$, является делителем характеристического многочлена оператора $A\restriction_{\mathbf{M}}$. Следовательно, все собственные значения оператора $A\restriction_{\mathbf{R'}_1}$ являются корнями многочлена $p(z)$. Но тогда, как и выше,

$$\mathbf{R'}_2 \subset \mathbf{R'}_1 \quad \text{и} \quad \dim \mathbf{R'}_2 < \dim \mathbf{R'}_1.$$

Продолжая процесс, получим, что

$$\dim \mathbf{M} > \dim \mathbf{R'}_1 > \dim \mathbf{R'}_2 > \dots.$$

Но размерности подпространств $\mathbf{R'}_1, \mathbf{R'}_2, \dots$ не могут убывать неограниченно. Следовательно, существует такое k_0, начиная с которого все эти подпространства будут нулевыми. Но это и означает, что $\mathbf{M} \subset \mathbf{K}_{p^k(A)}$ для всех натуральных значений $k \geqslant k_0$. □

Теорема 5.4.5. *Если* $\dim \mathbf{V} = n$, *то любой оператор* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ *имеет по крайней мере одно инвариантное подпространство размерности* $(n-1)$.

Доказательство. Оператор A имеет по крайней мере один собственный вектор $\mathbf{x}$. Пусть он соответствует собственному значению $\lambda \in \sigma(A)$. Для многочлена

$$p(z) = -\lambda + z$$

имеем:

$$p(A) = -\lambda I + A = A - \lambda I.$$

Образ

$$\mathbf{R}_{p(A)} = \operatorname{Ran} p(A) = \operatorname{Ran}(A - \lambda I)$$

является инвариантным относительно оператора A подпространством. Но

$$\det[A - \lambda I] = P_A(\lambda) = 0.$$

Поэтому оператор $(A - \lambda I)$ вырожден. Следовательно,

$$\dim \mathbf{R}_{p(A)} \leqslant n - 1.$$

Пусть $\mathbf{M}$ — произвольное линейное подпространство $\mathbf{V}$, такое, что

$$\mathbf{R}_{p(A)} \subset \mathbf{M}, \quad \dim \mathbf{M} = n - 1.$$

Так как $\mathbf{R}_{p(A)} = p(A)\mathbf{V}$, то

$$p(A)\mathbf{M} \subset \mathbf{R}_{p(A)} \subset \mathbf{M}.$$

Следовательно, $\mathbf{M}$ инвариантно относительно $p(A)$ и поэтому инвариантно относительно A. □

5.5 Треугольная форма Шура матрицы линейного оператора

Теорема 5.5.1. *Для любого линейного оператора A, действующего в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, существует максимальная цепь инвариантных подпространств:*

$$\{\mathbf{0}\} = \mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{M}_k \subset \cdots \subset \mathbf{M}_{n-1} \subset \mathbf{M}_n = \mathbf{V},$$

где подпространства $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_k, \ldots, \mathbf{M}_n$ имеют размерности $k = 0$, $1, \ldots, n$.

Доказательство. Существование у оператора A инвариантных подпространств $\mathbf{M}_0 = \{\mathbf{0}\}$ размерности 0 и $\mathbf{M}_n = \mathbf{V}$ размерности n очевидна. Согласно теореме 5.4.5, оператор A имеет инвариантное подпространство $\mathbf{M}_{n-1}$ размерности $(n-1)$.

Рассмотрим теперь на инвариантном подпространстве $\mathbf{M}_{n-1}$ индуцированный оператор $A\restriction_{\mathbf{M}_{n-1}}$. Как и любой другой оператор из $\mathcal{B}(\mathbf{M}_{n-1})$, он, согласно той же теореме 5.4.5, имеет инвариантное подпространство $\mathbf{M}_{n-2}$ размерности $(n-2)$. Но подпространство $\mathbf{M}_{n-2}$, инвариантное для индуцированного оператора $A\restriction_{\mathbf{M}_{n-1}}$, будет инвариантным и для порождающего оператора A. Таким образом, существование инвариантного подпространства $\mathbf{M}_{n-2}$ размерности $(n-2)$, такого, что

$$\{\mathbf{0}\} = \mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_{n-2} \subset \mathbf{M}_{n-1} \subset \mathbf{M}_n = \mathbf{V},$$

доказано. Аналогично доказывается существование инвариантных подпространств $\mathbf{M}_{n-3}, \dots, \mathbf{M}_1$ размерностей $(n-3), (n-4), \dots, 1$, для которых

$$\{\mathbf{0}\} = \mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1 \subset \dots \subset \mathbf{M}_{n-3} \subset \mathbf{M}_{n-2} \subset \mathbf{M}_{n-1} \subset \mathbf{M}_n = \mathbf{V}. \qquad \square$$

Теорема 5.5.2. *Для любого линейного оператора A, действующего в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{V}$, существует базис, в котором матрица $[A]$ оператора A имеет верхнетреугольный вид:*

$$[A] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & a_{12} & \dots & \alpha_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Доказательство. Рассмотрим для оператора A максимальную цепь инвариантных подпространств

$$\{\mathbf{0}\} = \mathbf{M}_0 \subset \mathbf{M}_1 \subset \dots \subset \mathbf{M}_k \subset \dots \subset \mathbf{M}_{n-1} \subset \mathbf{M}_n = \mathbf{V}$$

и построим базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ пространства $\mathbf{V}$ следующим образом. В качестве вектора $\mathbf{e}_1$ возьмем любой ненулевой вектор из $\mathbf{M}_1$, в качестве вектора $\mathbf{e}_2$ — любой ненулевой вектор из $\mathbf{M}_2$, не принадлежащий $\mathbf{M}_1$, и т.д., в качестве вектора $\mathbf{e}_k$ возьмем любой ненулевой вектор $\mathbf{M}_k$, не принадлежащий $\mathbf{M}_{k-1}$, $3 \leqslant k \leqslant n$. Рассмотрим матрицу $[A]$ оператора A в этом базисе. Так как вектор $\mathbf{e}_k$ принадлежит инвариантному подпространству $\mathbf{M}_k$, если разложить вектор $A\mathbf{e}_k$ в по векторам $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$, то в разложении

$$A\mathbf{e}_k = \alpha_{1k}\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_{nk}\mathbf{e}_n$$

коэффициенты при $\mathbf{e}_i$ должны равняться нулю при всех $i > k$. Следовательно, в этом базисе матрица $[A]$ оператора A имеет верхнетреугольный вид (5.1). $\square$

Базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ называется *базисом треугольного представления* оператора A или *базисом Шура*, а само представление (T) — *треугольной формой Шура* матрицы линейного оператора A или *представлением Шура*.

Замечание 5.5.3. Отметим следующие полезные факты.

- Утверждение теоремы 5.5.1 означает, что любая квадратная матрица подобна верхнетреугольной матрице.

- Рассматривая построенный базис в обратном порядке, получим, что матрица $[A]$ оператора A имеет нижнетреугольный вид и, соответственно, что каждая квадратная матрица подобна нижнетреугольной матрице.
- Если в некотором базисе матрица $[A]$ оператора A имеет верхнетреугольный (нижнетреугольный) вид, то ее диагональные элементы совпадают с собственными значениями оператора A даже с учетом их кратности.

Упражнение 5.5.4. Если $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — инвариантные подпространства оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ такие, что

$$\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_2, \quad \dim \mathbf{M}_2 - \dim \mathbf{M}_1 > 1,$$

то существует промежуточное инвариантное подпространство $\mathbf{M}$ такое, что

$$\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{M}_2, \quad \mathbf{M} \neq \mathbf{M}_1, \quad \mathbf{M} \neq \mathbf{M}_2.$$

Упражнение 5.5.5. Для того, чтобы базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ векторного пространства $\mathbf{V}$ был базисом треугольного представления оператора A, необходимо и достаточно, чтобы линейные оболочки

$$\mathbf{M}_k = l(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = \mathbb{C}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \rangle, \quad k = 1, \dots, n$$

были инвариантными подпространствами оператора A.

Рассмотрим треугольную форму Шура класса нильпотентных операторов.

Определение 5.5.6. Линейный оператор $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется *нильпотентным*, если для некоторого натурального числа r выполняется равенство: $B^r = 0$, т.е., $B^r\mathbf{x} = 0$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Утверждение 5.5.7. *Если оператор B нильпотентный, то $\sigma(B) = \{\mathbf{0}\}$.*

Доказательство. Пусть B — нильпотентный оператор, $B^r = 0$, $\lambda \in \sigma(B)$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ — соответствующий ненулевой собственный вектор:

$$B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq 0.$$

Тогда

$$B^r\mathbf{x} = \lambda^r\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

и так как $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, то $\lambda = 0$. □

Пусть B — нильпотентный оператор. Рассмотрим базис векторного пространства $\mathbf{V}$, в котором матрица $[B]$ оператора имеет треугольную форму. В силу замечания 5.5.3, диагональные элементы матрицы $[B]$ совпадают с собственными значениями оператора B с учетом их кратности. Но так как все собственные значения нильпотентного оператора равны нулю, то треугольная форма Шура оператора B имеет вид:

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1,n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Из приведенных рассуждений непосредственно получается следствие.

Следствие 5.5.8. *Если оператор B — нильпотентный, то* $\operatorname{tr} B = 0$.

Замечание 5.5.9. Обратное утверждение неверно. Действительно, пусть $\dim \mathbf{V} = 2$ и оператор B в некотором базисе имеет матрицу

$$[B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\operatorname{tr} B = 0$, в то время как оператор B не является нильпотентным:

$$B^2 = I, \quad B^3 = B, \quad B^4 = I, \quad \dots .$$

Следствие 5.5.10. *Если оператор B нильпотентный, то* $\operatorname{tr} B^k = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Верно и обратное к следствию 5.5.10 утверждение. А именно: из равенств $\operatorname{tr} B^k = 0$, $k = 1, 2, \dots$ следует нильпотентность оператора B.

Утверждение 5.5.11. *Оператор B нильпотентный тогда и только тогда, когда* $\operatorname{tr} B^k = 0$ *для всех* $k = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Для нильпотентного оператора B выполняется $\operatorname{tr} B^k = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$ (следствие 5.5.10). Докажем обратное утверждение. Выберем базис, в котором матрица $[B]$ оператора B имеет треугольную форму. Согласно замечанию 5.5.3 диагональные элементы матрицы $[B]$ являются собственными числами B, причем каждое число λ_k встречается столько раз, какова его кратность n_k. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ различные ненулевые собственные значения оператора B, $n_1, \dots, n_k$ — их кратности.

Возведя матрицу $[B]$ в произвольную степень k, получим опять верхнетреугольную матрицу $[B]^k$, ненулевыми диагональными элементами которой будут числа $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k$ с теми же кратностями $n_1, \ldots, n_k$. Условия $\operatorname{tr} B^k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, приводят к системе уравнений

$$n_1\lambda_1^k + \cdots + n_m\lambda_m^k, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{5.2}$$

Поскольку при различных ненулевых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^m & \ldots & \lambda_m^m \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, система (5.2) имеет единственное решение

$$n_1 = \cdots = n_m = 0. \qquad \square$$

Утверждение 5.5.12 (Теорема Н.Джекобсона)**.** *Если A, $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ такие, что $[A,[A,B]] = 0$, то $[A,B]$ — нильпотентный оператор.*

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 5.5.13. *Пусть $[A,[A,B]] = 0$. Существуют операторы B_k такие, что $[A,B]^k = [A,B_k]$.*

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Очевидно, что $B_1 = B$. Пусть $[A,B]^{k-1} = [A,B_{k-1}]$. Тогда, учитывая $A[A,B] = [A,B]A$, имеем

$$\begin{aligned} [A,B]^k &= [A,B]^{k-1}[A,B] = [A,B_{k-1}][A,B] = (AB_{k-1} - B_{k-1}A)[A,B] \\ &= A(B_{k-1}[A,B]) - (B_{k-1}[A,B])A = [A,B_k], \end{aligned}$$

где положено $B_k = B_{k-1}A[A,B]$. $\square$

Доказательство теоремы Джекобсона. Из доказаной леммы по утверждению 4.2.18 следует, что $\operatorname{tr}[A,B]^k = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots$, тогда согласно утверждению 5.5.11 $[A,B]$ — нильпотентный оператор. $\square$

Замечание 5.5.14. Одному и тому же оператору в различных базисах могут соответствовать различные верхнетреугольные матрицы с одинаковыми диагоналями. Таким образом, форма Шура оператора определяется неоднозначно.

Упражнение 5.5.15. Показать что матрицы

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 2 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

подобны.

Глава 6

Нормальная форма линейного оператора

6.1 Прямая сумма операторов

Пусть пространство $\mathbf{V}$ разложено в прямую сумму подпространств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N}.$$

Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ имеет место единственное разложение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_M} + \mathbf{x_N},$$

где $\mathbf{x_M} \in \mathbf{M}$, $\mathbf{x_N} \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим операторы $B \in \mathcal{B}(\mathbf{M})$ и $C \in \mathcal{B}(\mathbf{N})$. Оператор A, определяемый равенством

$$A\mathbf{x} = B\mathbf{x_M} + C\mathbf{x_N}$$

называется *прямой суммой* операторов B и C и обозначается

$$A = B \dotplus C.$$

Если одно из подпространств $\mathbf{M}$ или $\mathbf{N}$ тривиальное, то и прямая сумма называется *тривиальной*.

Легко видеть, что $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Оператор A может быть представлен в виде прямой суммы операторов, определенных на подпространствах $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, единственным образом. Действительно, для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ имеем:

$$A\mathbf{x} = B\mathbf{x}.$$

Аналогично, для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{N}$ имеем:

$$A\mathbf{x} = C\mathbf{x}.$$

Это означает, что $B = A\restriction_{\mathbf{M}}$ и $C = A\restriction_{\mathbf{N}}$ и

$$A = A\restriction_{\mathbf{M}} \dot{+} A\restriction_{\mathbf{N}}.$$

Рассмотрим теперь произвольный линейный оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$. Если векторное пространство $\mathbf{V}$ раскладывается в прямую сумму подпространств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, инвариантных относительно оператора A, то и сам оператор A можно разложить в прямую сумму. Действительно, построим индуцированные операторы $A\restriction_{\mathbf{M}}$ и $A\restriction_{\mathbf{N}}$. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, такого, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathbf{M}} + \mathbf{x}_{\mathbf{N}},$$

где $\mathbf{x}_{\mathbf{M}} \in \mathbf{M}$, $\mathbf{x}_{\mathbf{N}} \in \mathbf{N}$, мы имеем:

$$A\mathbf{x} = A\restriction_{\mathbf{M}}\mathbf{x}_{\mathbf{M}} + A\restriction_{\mathbf{N}}\mathbf{x}_{\mathbf{N}}.$$

Если инвариантные подпространства $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ нетривиальные, то оператор A называется *разложимым*. В этом случае, согласно теореме 5.1.3, характеристический многочлен оператора A равен произведению характеристических многочленов индуцированных операторов $A\restriction_{\mathbf{M}}$ и $A\restriction_{\mathbf{N}}$.

Разложение оператора A в прямую сумму можно осуществить с помощью произвольного операторного многочлена. Пусть

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k$$

— многочлен из $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$. Обозначим, как и выше,

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_{p^m(A)} = \operatorname{Ker} p^m(A), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

В силу утверждения 5.4.1, $\mathbf{K}_m$ — инвариантные относительно оператора A подпространства и

$$\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2 \subset \mathbf{K}_3 \subset \ldots .$$

Утверждение 6.1.1. *Если $\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_{r+1}$ для некоторого r, то $\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_r$ для любого $m > r$.*

Доказательство. Пусть $m > r$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{K}_m$. Тогда

$$\mathbf{0} = p^m(A)\mathbf{x} = p^{r+1}(p^{m-r-1}(A)\mathbf{x}).$$

Следовательно, $p^{m-r-1}(A)\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{r+1} = \mathbf{K}_r$. Поэтому

$$p^r(p^{m-r-1}(A)\mathbf{x}) = p^{m-1}(A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

т.е. $\mathbf{x} \in \mathbf{K}_{m-1}$. Поэтому, $\mathbf{K}_{m-1} = \mathbf{K}_m$. Рассуждая аналогично, получим:

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_{m-1} = \mathbf{K}_{m-2} = \cdots = \mathbf{K}_{r+1} = \mathbf{K}_r. \qquad \square$$

Пространство $\mathbf{V}$ конечномерно. Поэтому размерности подпространств $\mathbf{K}_m$ не могут неограничено возрастать. Обозначим через r — наименьшее натуральное число, для которого

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{K}_{r+1}.$$

Тогда имеем

$$\mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{K}_r = \mathbf{K}_{r+1} = \mathbf{K}_{r+2} = \ldots.$$

Обозначим

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{R}_{p^m(A)} = \operatorname{Ran} p^m(A), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Утверждение 6.1.2. *Имеет место равенство*

$$\mathbf{K}_r \cap \mathbf{R}_r = \{\mathbf{0}\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{K}_r \cap \mathbf{R}_r$. Тогда $p^r(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{x} = p^r(A)\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Следовательно,

$$p^{2r}(A)\mathbf{y} = p^r(A)(p^r(A)\mathbf{y}) = p^r(A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

т.е. $\mathbf{y} \in \mathbf{K}_{2r} = \mathbf{K}_r$. Следовательно,

$$\mathbf{x} = p^r(A)\mathbf{y} = \mathbf{0}. \qquad \square$$

Утверждение 6.1.3. *Имеет место равенство*

$$\mathbf{K}_r \dotplus \mathbf{R}_r = \mathbf{V}.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.2.2,

$$\dim \mathbf{K}_r + \dim \mathbf{R}_r = \dim \operatorname{Ker} p^r(A) + \dim \operatorname{Ran} p^r(A) = \dim \mathbf{V}.$$

С другой стороны, в силу утверждения 6.1.2, $\mathbf{K}_r \cap \mathbf{R}_r = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому

$$\mathbf{K}_r \dotplus \mathbf{R}_r = \mathbf{V}. \qquad \square$$

Замечание 6.1.4. Отметим следующие полезные факты.

- Подпространства $\mathbf{K}_r$ и $\mathbf{R}_r$ инвариантны относительно оператора A, поэтому его можно разложить в прямую сумму операторов $A\restriction_{\mathbf{K}_r}$ и $A\restriction_{\mathbf{R}_r}$. Однако это разложение может быть тривиальным.
- Все собственные векторы оператора A должны находиться в подпространствах $\mathbf{K}_r$ и $\mathbf{R}_r$. При этом те из них, которые соответствуют собственным значениям $\lambda \in \sigma(A)$, для которых $p(\lambda) = 0$, принадлежат $\mathbf{K}_r$, а те из них, которые соответствуют собственным значениям $\lambda \in \sigma(A)$, для которых $p(\lambda) \neq 0$, принадлежат $\mathbf{R}_r$.
- Каждый корень характеристического многочлена оператора $A\restriction_{\mathbf{K}_r}$ является корнем многочлена $p(z)$; ни один из корней характеристического многочлена оператора $A\restriction_{\mathbf{R}_r}$ не является корнем многочлена $p(z)$.

Теорема 6.1.5. *Пусть характеристический многочлен $P_A(z)$ оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ разложен в произведение многочленов $p(z)$ и $q(z)$, не имеющих общих корней. Тогда оператор A единственным образом можно разложить в прямую сумму операторов B и C с характеристическими многочленами $P_B(z) = p(z)$ и $P_C(z) = q(z)$.*

Доказательство. Рассмотрим разложение оператора A в прямую сумму с помощью многочлена $p(z)$:

$$A = A\restriction_{\mathbf{K}_r} \dotplus A\restriction_{\mathbf{R}_r}$$

Так как

$$P_{A\restriction_{\mathbf{K}_r}}(z) P_{A\restriction_{\mathbf{R}_r}}(z) = P_A(z)$$

и $P_{A\restriction_{\mathbf{K}_r}}(z) = p(z)$, $P_{A\restriction_{\mathbf{R}_r}}(z) = q(z)$, то по крайней мере одно разложение указанного вида существует.

Предположим, что пространство $\mathbf{V}$ разложено каким-либо другим образом в прямую сумму инвариантных подпространств $\mathbf{K}$ и $\mathbf{R}$ оператора A:

$$\mathbf{V} = \mathbf{K} \dotplus \mathbf{R},$$

причем $P_{A\restriction_{\mathbf{K}}}(z) = p(z)$ и $P_{A\restriction_{\mathbf{R}}}(z) = q(z)$.

Согласно теореме 5.4.4, если все собственные значения индуцированного на $\mathbf{K}$ оператора $A\restriction_{\mathbf{K}}$ являются корнями многочлена $p(z)$, то существует такое k_0, что

$$\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_{p^k(A)} = \operatorname{Ker} p^k(A) = \mathbf{K}_k$$

для всех натуральных значений $k \geqslant k_0$. Поэтому $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_r$. Оператор $p(A)$ является невырожденным на $\mathbf{R}$, поэтому

$$p(A)\mathbf{R} = \mathbf{R}.$$

Следовательно, $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}_m$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ и потому $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}_r$. Но

$$\mathbf{V} = \mathbf{K} \dotplus \mathbf{R} = \mathbf{K}_r \dotplus \mathbf{R}_r.$$

Поэтому включения $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_r$ и $\mathbf{R} \subset \mathbf{R}_r$ возможны лишь в случае, когда

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_r, \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_r. \qquad \square$$

6.2 Корневые подпространства оператора

Представим характеристический многочлен $P_A(z)$ оператора A в каноническом разложении:

$$P_A(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)^{k_1} \ldots (z - \lambda_m)^{k_m},$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — попарно различные собственные значения оператора A, кратности которых $k_1, \ldots, k_m$ соответственно, и

$$k_1 + \cdots + k_m = n = \dim \mathbf{V}.$$

Кратность k_i числа λ_i как корня характеристического многочлена $P_A(z)$ называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_i.

Упражнение 6.2.1. Если линейные операторы A и B подобны, то алгебраические кратности соответствующих собственных значений этих операторов равны.

Рассмотрим многочлены

$$p_{k_i}(z) = (z - \lambda_i)^{k_i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Они являются делителями характеристического многочлена $P_A(z)$ и никакая пара из них не имеет общих корней. Тогда непосредственно из теоремы 6.1.5 получаем следствие.

Следствие 6.2.2. *Для любого оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ существуют такие инвариантные подпространства $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_m$, что*

(i) $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathbf{W}_m$;

(ii) $\dim \mathbf{W}_i = k_i$, $i = 1, \ldots, m$;

(iii) $P_{A\restriction_{\mathbf{W}_i}}(z) = p_{k_i}(z) = (z - \lambda_i)^{k_i}$;

(iv) $A = A\restriction_{\mathbf{W}_1} \dotplus \cdots \dotplus A\restriction_{\mathbf{W}_m}$;

(v) *В базисе векторного пространства* $\mathbf{V}$, *составленного как последовательное объединение любых базисов инвариантных подпространств* $\mathbf{W}_i$, $i = 1, \ldots, m$, *матрица* $[A]$ *оператора* A *имеет квазидиагональный вид*

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_{11}] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [A_{mm}] \end{pmatrix} = [A_{11}] \oplus \cdots \oplus [A_{mm}],$$

где матрицы $[A_{ii}]$, *стоящие на главной диагонали, имеют порядок* k_i *и являются матрицами индуцированных операторов* $A\restriction_{\mathbf{W}_i}$.

Определение 6.2.3. Инвариантные подпространства $\mathbf{W}_i$ называются *корневыми подпространствами* оператора A, соответствующими собственным значениям λ_i. Векторы корневых подпространств $\mathbf{W}_i$ называются *корневыми векторами* оператора A. Разложение (iv) называется *спектральным разложением* оператора A.

Утверждение 6.2.4. $\mathbf{W}_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{k_i}$.

Доказательство. Согласно теореме 6.1.5,

$$\mathbf{W}_i = \operatorname{Ker} p_{k_i}^r(A) = \operatorname{Ker}((A - \lambda_i I)^{k_i})^r.$$

Покажем, что в данном случае можно положить $r = 1$.

Рассмотрим операторы $(A - \lambda_i I)^j$ для $j = 1, 2, \ldots$. Пусть j_i — наименьшее натуральное число, для которого

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{j_i} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{j_i+1}.$$

Тогда корневое подпространство $\mathbf{W}_i$ будет совпадать с подпространством $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{j_i}$. Так как размерности подпространств $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^j$, $j = 1$, 2, ..., монотонно возрастают, а размерность подпространства $\mathbf{W}_i$ равна k_i, то $j_i \leqslant k_i$. Поэтому,

$$\mathbf{W}_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{k_i}. \qquad \square$$

Замечание 6.2.5. Каждый оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ разлагается в прямую сумму одноточечных операторов $A\restriction_{\mathbf{W}_k}$, $k = 1, \dots, m$, сосредоточенных в попарно различных точках спектра $\sigma(A)$ оператора A. Это разложение единственно с точностью до порядка слагаемых.

Рассмотрим гомоморфизм

$$\psi_A \colon \mathcal{P}[\mathbb{C}] \to \mathcal{B}(\mathbf{V})$$

алгебры многочленов $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ в алгебру операторов $\mathcal{B}(\mathbf{V})$, $\dim \mathbf{V} = n$. Так как размерность

$$\dim \mathcal{B}(\mathbf{V}) = n^2,$$

то первые $n^2 + 1$ элемента последовательности операторов $\{A^j\}_{j=0}^{\infty}$ линейно зависимы. Поэтому существует такой многочлен $p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ степени $m \leqslant n^2$, что $p(A) = 0$.

Определение 6.2.6. Многочлен $p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ называется аннулирующим многочленом оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, если $p(A) = 0$.

Следующая теорема показывает, что характеристический многочлен $P_A(z)$ оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ является аннулирующим многочленом оператора A.

Теорема 6.2.7. *(Теорема Кели-Гамильтона)*

$$P_A(A) = 0.$$

Доказательство. Представим характеристический многочлен $P_A(z)$ оператора A в каноническом разложении:

$$P_A(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_m)^{k_m},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — попарно различные собственные значения, кратности которых $k_1, \dots, k_m$, и

$$k_1 + \dots + k_m = n = \dim \mathbf{V}.$$

Так как

$$P_A(A) = (-1)^n (A - \lambda_1 I)^{k_1} \dots (A - \lambda_r I)^{k_m},$$

и для любого $\mathbf{x}_i \in \mathbf{W}_i$ в силу утверждения 6.2.4, имеет место равенство:

$$(A - \lambda_i I)^{k_i} \mathbf{x}_i = \mathbf{0},$$

то в силу коммутируемости операторных многочленов от оператора A, имеем, что
$$P_A(A)\restriction_{\mathbf{W}_i}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$
Пусть теперь $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ — произвольный вектор. Представим его в виде
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbf{W}_i,\ i = 1, \dots, m.$$
Тогда
$$P_A(A)\mathbf{x} = P_A(A)\restriction_{\mathbf{W}_1}\mathbf{x}_1 + \dots + P_A(A)\restriction_{\mathbf{W}_r}\mathbf{x}_m = \mathbf{0}.$$
Следовательно, $P_A(A) = 0$. $\square$

Рассмотрим идеалы алгебры $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$.

Утверждение 6.2.8. *Для любого фиксированного многочлена* $q_0(z)$ *из* $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ *множество*
$$\mathbf{L} = \{p(z)q_0(z) : p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]\}$$
является идеалом алгебры $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$.

Доказательство. Так как алгебра $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ коммутативна, то достаточно показать, что $\mathbf{L}$ — левый идеал. Пусть $p(z) \in \mathbf{L}$. Тогда
$$p(z) = p_1(z)q_0(z)$$
для некоторого $p_1(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$. Тогда для любого многочлена $q(z)$ из $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ имеем:
$$q(z)p(z) = q(z)p_1(z)q_0(z) = [q(z)p_1(z)]q_0(z) \in \mathbf{L},$$
так как $q(z)p_1(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$. Следовательно, $\mathbf{L}$ — идеал алгебры $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$. $\square$

Обозначим идеал $\mathbf{L}$, порожденный многочленом $q_0(z)$, через
$$\mathbf{L} = \mathbf{L}[q_0(z)].$$

Оказывается, любой ненулевой идеал алгебры $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ имеет такую структуру.

Утверждение 6.2.9. *Для любого ненулевого идеала* $\mathbf{L}$ *алгебры* $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ *существует такой многочлен* $q_0(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$, *что*
$$\mathbf{L} = \mathbf{L}[q_0(z)] = \{p(z)q_0(z) : p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]\}.$$

Доказательство. Пусть $q_0(z)$ — многочлен минимальной степени k, принадлежащий идеалу $\mathbf{L}$, отличный от нуля. Пусть $q(z)$ — произвольный многочлен из идеала $\mathbf{L}$. Разделим многочлен $q(z)$ на $q_0(z)$ с остатком:

$$q(z) = p(z)q_0(z) + r(z),$$

где $p(z), r(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ и остаток $r(z)$ — многочлен, степень которого меньше чем k. Так как $q_0(z) \in \mathbf{L}$ и $\mathbf{L}$ — идеал, то

$$p(z)q_0(z) \in \mathbf{L}.$$

Следовательно,

$$r(z) = q(z) - p(z)q_0(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}].$$

Но тогда $r(z) \equiv 0$ и потому

$$q(z) = p(z)q_0(z).$$

Таким образом, $q(z) \in \mathbf{L}[q_0(z)]$ и $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}[q_0(z)]$. Так как обратное включение очевидно, то

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}[q_0(z)].$$ □

Замечание 6.2.10. Многочлен $q_0(z)$ определяется идеалом $\mathbf{L}$ однозначно с точностью до числового коэффициента. Действительно, если

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}[q_0(z)] = \mathbf{L}[q_1(z)],$$

то

$$q_1(z) = p_1(z)q_0(z), \quad q_0(z) = p_0(z)q_1(z),$$

и потому

$$q_1(z) = p_1(z)p_0(z)q_1(z).$$

Следовательно, $p_1(z)p_0(z) \equiv 1$, то есть $p_0(z)$ и $p_1(z)$ — константы, и потому многочлены $q_0(z)$ и $q_1(z)$ отличаются друг от друга числовым множителем.

Утверждение 6.2.11. *Пусть многочлены $q_1(z), \ldots, q_m(z)$ из $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ не все равные нулю, не имеют общих делителей степени $\geqslant 1$. Тогда существуют такие многочлены $p_1^0(z), \ldots, p_m^0(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$, что*

$$\sum_{k=1}^{m} p_k^0(z)q_k(z) = p_1^0(z)q_1(z) + \cdots + p_m^0(z)q_m(z) \equiv 1.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathbf{L}$ многочленов $p(z)$, представимых в виде
$$p(z) = p_1(z)q_1(z) + \dots + p_m(z)q_m(z),$$
где $p_k(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$, $k = 1, \dots, m$. Легко видеть, что $\mathbf{L}$ — идеал алгебры $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$. В силу утверждения 6.2.9, существует многочлен $q_0(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ такой, что
$$\mathbf{L} = \mathbf{L}[q_0(z)].$$
Так как $q_1(z), \dots, q_m(z) \in \mathbf{L}$, то найдутся такие многочлены $s_1(z), \dots, s_m(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$, что
$$q_1(z) = s_1(z)q_0(z), \quad \dots, \quad q_m(z) = s_m(z)q_0(z).$$
Следовательно, $q_0(z)$ — общий делитель многочленов $q_1(z), \dots, q_m(z)$. Но тогда степень $q_0(z)$ равна нулю. т.е.
$$q_0(z) \equiv a_0 \neq 0.$$
С другой стороны, $q_0(z) \in \mathbf{L}$, и потому существуют такие многочлены $p_1(z), \dots, p_m(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$, что
$$q_0(z) = p_1(z)q_1(z) + \dots + p_m(z)q_m(z) \equiv a_0.$$
Полагая
$$p_k^0(z) = \frac{1}{a_0}p_k(z), \quad k = 1, \dots, m,$$
получим, что
$$p_1^0(z)q_1(z) + \dots + p_m^0(z)q_m(z) \equiv 1. \qquad \square$$

Рассмотрим теперь множество всех многочленов, аннулирующих оператор A. Так как
$$\mathbf{L} = \operatorname{Ker}\psi_A = \{p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] : p(A) = 0\}$$
является идеалом алгебры $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$, то в силу утверждения 6.2.9, существует многочлен $q_0(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$, такой что $\mathbf{L} = \mathbf{L}[q_0(z)]$. Поэтому среди всех многочленов, аннулирующих оператор A, существует многочлен $q_0(z)$ минимальной степени с коэффициентом при старшей степени не равным нулю. Этот многочлен называется *минимальным многочленом* оператора A. Минимальный многочлен единственный с точностью до числового множителя и его степень не превосходит размерности векторного пространства $\dim \mathbf{V} = n$. При этом любой аннулирующий многочлен $p(z)$ оператора A делится на минимальный многочлен $q_0(z)$. Минимальный многочлен оператора A со старшим коэффициентом, равным единице, будем обозначать $Q_A(z)$.

Замечание 6.2.12. Характеристический многочлен оператора A совпадает, с точностью до коэффициента, с его минимальным многочленом тогда и только тогда, когда степень минимального многочлена равна $\dim \mathbf{V} = n$.

Определение 6.2.13. *Аннулирующим многочленом вектора* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ относительно оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется такой многочлен $p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$, что

$$p(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Аннулирующий многочлен вектора $\mathbf{x}$ минимальной степени с коэффициентом 1 при старшей степени называется *минимальным многочленом вектора* $\mathbf{x}$ относительно оператора A и обозначается $Q_{\mathbf{x},A}(z)$.

Утверждение 6.2.14. *Минимальный многочлен $Q_{\mathbf{x},A}(z)$ вектора $\mathbf{x}$ относительно оператора A является делителем минимального многочлена $Q_A(z)$ оператора A.*

Доказательство. Разделим многочлен $Q_A(z)$ на $Q_{\mathbf{x},A}(z)$:

$$Q_A(z) = q(z)Q_{\mathbf{x},A}(z) + r(z),$$

причем степень многочлена $r(z)$ меньше степени многочлена $Q_{\mathbf{x},A}(z)$. Тогда

$$r(A)\mathbf{x} = Q_A(A)\mathbf{x} - q(A)Q_{\mathbf{x},A}(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $r(z)$ — аннулирующий многочлен вектора $\mathbf{x}$ относительно оператора A, степень которого меньше степени минимального многочлена. Следовательно, $r(z) \equiv 0$ и потому многочлен $Q_A(z)$ делится на многочлен $Q_{\mathbf{x},A}(z)$. □

Теорема 6.2.15. *Для любого оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ существует вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, минимальный многочлен которого относительно оператора A совпадает с минимальным многочленом оператора A:*

$$Q_{\mathbf{x},A}(z) = Q_A(z).$$

Доказательство. Рассмотрим для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ множество

$$\mathbf{L}_{\mathbf{x}} = \{p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] : p(A)\mathbf{x} = 0\}.$$

Так как $\mathbf{L}_{\mathbf{x}}$ — идеал алгебры $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$, то в силу утверждения 6.2.9, существует многочлен $q_{\mathbf{x}}(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ со старшим коэффициентом, равным 1, такой что

$$\mathbf{L}_{\mathbf{x}} = \mathbf{L}[q_{\mathbf{x}}(z)].$$

Так как $Q_A(z) \in \mathbf{L}_\mathbf{x}$, то $q_\mathbf{x}(z)$ — делитель минимального многочлена $Q_A(z)$. Но многочлен $Q_A(z)$ имеет лишь конечное число делителей $p_1(z), \ldots, p_k(z)$, каждый из которых является минимальным многочленом некоторого вектора $\mathbf{x}_i$ относительно оператора A, и любой идеал $\mathbf{L}_\mathbf{x}$ совпадает с одним из идеалов $\mathbf{L}_{\mathbf{x_i}}$, $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим подпространства

$$\mathbf{V}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} : p_i(A)\mathbf{x} = 0\}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Так как

$$\mathbf{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathbf{V}_i,$$

то существует такой номер $j \in \{1, \ldots, k\}$, что $\mathbf{V} = \mathbf{V}_j$. Тогда

$$p_j(A)\mathbf{V} = 0,$$

поэтому многочлен $p_j(z)$ делится на $Q_A(z)$, и, значит, совпадает с ним. Следовательно, минимальный многочлен $Q_A(z)$ оператора A совпадает с минимальным многочленом $p_j(z) = Q_{\mathbf{x}_j,A}(z)$ вектора $\mathbf{x}_j$. $\square$

Упражнение 6.2.16. Докажите следующие утверждения.

- Если оператор A представим в виде прямой суммы

  $$A = A_1 \dotplus \cdots \dotplus A_m,$$

  то

  $$\sigma(A) = \bigcup_{k=1}^{m} \sigma(A_k).$$

- Если оператор A представим в виде прямой суммы одноточечных операторов

  $$A = A_1 \dotplus \cdots \dotplus A_m,$$

  сосредоточенных в попарно различных точках λ_k, $k = 1, \ldots, m$, то $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ и $A_k = A\restriction_{\mathbf{W}_k}$, где $\mathbf{W}_k$ — соответствующее корневое подпространство оператора A.

- Оператор A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда

  $$A = \lambda_1 I\restriction_{\mathbf{N}_{\lambda_1}} \dotplus \cdots \dotplus \lambda_m I\restriction_{\mathbf{N}_{\lambda_m}},$$

  где $I\restriction_{\mathbf{N}_{\lambda_k}}$ — единичный оператор в k-ом собственном подпространстве $\mathbf{N}_{\lambda_k}$ оператора A, $k = 1, \ldots, m$. Данное представление называется *спектральным разложением* оператора A простой структуры.

Упражнение 6.2.17. Пусть $[A] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $[B] \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Доказать, что если $[A][X] = [X][B]$, $[X] \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, то $[X] = 0$;

6.3 Неразложимые операторы. Клетки Жордана

Определение 6.3.1. Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется *неразложимым*, если векторное пространство $\mathbf{V}$ невозможно представить в виде прямой суммы нетривиальных подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dot{+} \mathbf{N},$$

инвариантных относительно оператора A.

Утверждение 6.3.2. *Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ является неразложимым тогда и только тогда, когда из условия*

$$RA = AR, \quad R^2 = R$$

следует, что $R = 0$ или $R = I$.

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор A неразложим и

$$RA = AR, \quad R^2 = R.$$

Допустим, что $R \neq 0$ и $R \neq I$. Рассмотрим два нетривиальных подпространства:

$$\mathbf{M} = \operatorname{Ker} R \quad \text{и} \quad \mathbf{N} = \operatorname{Ran} R.$$

Если $\mathbf{x} \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$, то $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и существует $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$, что $\mathbf{x} = R\mathbf{y}$. Тогда

$$R\mathbf{x} = R(R\mathbf{y}) = R^2\mathbf{y} = R\mathbf{y} = \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

и так как

$$\dim \mathbf{M} + \dim \mathbf{N} = \dim \mathbf{V},$$

то

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dot{+} \mathbf{N}.$$

Покажем, что подпространства $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ инвариантны относительно оператора A.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{M} = \operatorname{Ker} R$. Тогда $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и

$$R(A\mathbf{x}) = AR\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

т.е. $A\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.

Пусть теперь $\mathbf{x} \in \mathbf{N} = \operatorname{Ran} R$. Следовательно, $\mathbf{x} = R\mathbf{y}$ для некоторого $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Поэтому

$$A\mathbf{x} = A(R\mathbf{y}) = R(A\mathbf{y}) \in \mathbf{N}.$$

Полученное противоречие с неразложимостью оператора A показывает, что $R = 0$ или $R = I$.

Достаточность. Пусть оператор A разложим, т.е. существует разложение

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N},$$

где подпространства $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ нетривиальны и инвариантны относительно оператора A. Покажем, что тогда существует оператор R, такой что

$$R^2 = R, \quad RA = AR, \quad R \neq 0, \quad R \neq I.$$

Действительно, оператор R можно определить следующим образом: для каждого $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{M}$, $\mathbf{z} \in \mathbf{N}$

$$R\mathbf{x} = R(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{z}.$$

Тогда

$$R^2 = R, \quad R \neq 0, \quad R \neq I.$$

Кроме того,

$$AR\mathbf{x} = AR(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = A\mathbf{z}$$

и

$$RA\mathbf{x} = RA(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = R(A\mathbf{y} + A\mathbf{z}) = A\mathbf{z}.$$

Следовательно, $AR = RA$. □

Примером неразложимого оператора служит клетка Жордана

$$A = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.3.3. *Оператор A является неразложимым тогда и только тогда, когда он подобен клетке Жордана $J_n(\lambda)$.*

Доказательство. Необходимость.

1). Пусть оператор A неразложим. Тогда он одноточечный, т.е. его спектр содержит единственное собственное значение λ. Действительно, если это не так, то точек спектра должно быть не менее двух. Пусть, например

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}.$$

Тогда, в силу теоремы 5.3.21, пространство $\mathbf{V}$ можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_{\lambda_1}^{(p_1)}(A) \dotplus \dots \dotplus \mathbf{N}_{\lambda_k}^{(p_k)}(A),$$

где каждое из подпространств $\mathbf{N}_{\lambda_i}^{(p_i)}(A)$ состоит из собственных и присоединенных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ_i, $i = 1, \dots, k$. Таким образом, в этом случае оператор A неразложимым быть не может. Следовательно, оператор A — одноточечный, т.е. его спектр состоит из единственного собственного значения λ. Тогда, в силу утверждения 5.3.16 и следствия 5.3.17, оператору A однозначно соответствует конечная цепь инвариантных подпространств:

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{N}_{\lambda}^{(1)}(A) \subset \dots \subset \mathbf{N}_{\lambda}^{(p)}(A) = \mathbf{V}.$$

Все члены этой цепи различны.

2). Покажем, что $\dim \mathbf{N}_{\lambda}^{(1)}(A) = 1$. Обозначим $\dim \mathbf{N}_{\lambda}^{(k)}(A) = m_k$. Тогда

$$0 = m_0 < m_1 < \dots < m_{p-1} < m_p = n = \dim \mathbf{V}.$$

Положим

$$\mathbf{N}_{\lambda}^{(k)}(A) = \mathbf{N}_k.$$

Пусть

$$m_p - m_{p-1} = n_1 > 0.$$

Рассмотрим линейно независимые векторы $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_1}\} \subset \mathbf{N}_p$, линейная оболочка которых в прямой сумме с $\mathbf{N}_{p-1}$ дает $\mathbf{N}_p$. Такие векторы называют *линейно независимыми над* $\mathbf{N}_{p-1}$, т.е. из

$$\alpha_1\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{n_1}\mathbf{f}_{n_1} \in \mathbf{N}_{p-1}$$

следует, что

$$\alpha_1\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{n_1}\mathbf{f}_{n_1} = \mathbf{0}$$

и потому

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_1} = 0.$$

Ясно, что векторы $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_1}\} \subset \mathbf{N}_p \setminus \mathbf{N}_{p-1}$, и, по утверждению 5.3.14, являются присоединенными векторами оператора A $(p-1)$-го порядка, отвечающими собственному значению λ.

Векторы
$$\{(A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}\}$$
лежат в подпространстве $\mathbf{N}_{p-1}$ и линейно независимы над $\mathbf{N}_{p-2}$. Действительно, в силу утверждения 5.3.15,
$$(A-\lambda I)(\mathbf{N}_p) \subset \mathbf{N}_{p-1}.$$
Поэтому из $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_1}\} \subset \mathbf{N}_p$ следует, что
$$\{(A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}\} \subset \mathbf{N}_{p-1}.$$
С другой стороны, если
$$\alpha_1(A-\lambda I)\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{n_1}(A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1} = \mathbf{g} \in \mathbf{N}_{p-2},$$
то
$$(A-\lambda I)^{p-2}[\alpha_1(A-\lambda I)\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{n_1}(A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}] =$$
$$= (A-\lambda I)^{p-1}(\alpha_1\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{n_1}\mathbf{f}_{n_1}) = (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{g} = \mathbf{0}.$$
Следовательно, $\alpha_1\mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_{n_1}\mathbf{f}_{n_1} = \mathbf{g} \in \mathbf{N}_{p-1}$. Но векторы $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_1}\} \subset \mathbf{N}_p$ и линейно независимы над $\mathbf{N}_{p-1}$. Поэтому
$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{n_1} = 0.$$
Следовательно, векторы
$$\{(A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}\}$$
лежат в подпространстве $\mathbf{N}_{p-1}$ и линейно независимы над $\mathbf{N}_{p-2}$.

Из приведенных рассуждений непосредственно следует, что
$$n_1 = m_p - m_{p-1} \leqslant m_{p-1} - m_{p-2} = n_2.$$
Дополним систему векторов
$$\{(A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}\},$$
если это необходимо, до максимальной системы векторов из $\mathbf{N}_{p-1}$, линейно независимой над $\mathbf{N}_{p-2}$, векторами $\{\mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_2}\}$. Получим систему векторов
$$\{(A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}, \mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_2}\},$$

линейно независимую над $\mathbf{N}_{p-2}$. Применяя ко всем векторам этой системы оператор $(A-\lambda I)$, получим систему векторов

$$\{(A-\lambda I)^2\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)^2\mathbf{f}_{n_1}, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_2}\},$$

принадлежащих $\mathbf{N}_{p-2}$, и линейно независимых над $\mathbf{N}_{p-3}$. Отсюда непосредственно следует, что

$$n_2 = m_{p-1} - m_{p-2} \leqslant m_{p-2} - m_{p-1} = n_3,$$

и можно построить в подпространстве $\mathbf{N}_{p-2}$ векторы $\{\mathbf{f}_{n_2+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_3}\}$ такие, что векторы

$$\{(A-\lambda I)^2\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)^2\mathbf{f}_{n_1}, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_2}, \mathbf{f}_{n_2+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_3}\}$$

образуют максимальную систему векторов из $\mathbf{N}_{p-2}$, линейно независимую над $\mathbf{N}_{p-3}$.

Переходя последовательно к подпространствам

$$\mathbf{N}_{p-3}, \mathbf{N}_{p-4}, \dots, \mathbf{N}_0 = \{\mathbf{0}\},$$

получим полную линейно независимую систему, т.е. базис в пространстве $\mathbf{N}_p = \mathbf{V}$. Запишем этот базис в виде

$$\begin{gathered}
\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_1},\\
(A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}, \mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_2},\\
(A-\lambda I)^2\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)^2\mathbf{f}_{n_1}, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_2}, \mathbf{f}_{n_2+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_3},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_{n_1}, \dots, \mathbf{f}_{n_{p-1}+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_p}\}.
\end{gathered}$$

Векторы $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_1}\}$ являются присоединенными векторами оператора A $(p-1)$-го порядка, векторы

$$\{(A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}, \mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_2}\}$$

— присоединенными векторами оператора A $(p-2)$-го порядка, и т.д., векторы

$$\{(A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_{n_1}, \dots, \mathbf{f}_{n_{p-1}+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_p}\}$$

— собственными векторами оператора A, и поэтому переводятся оператором $(A-\lambda I)$ в $\mathbf{0}$.

Векторы каждого столбца этой последовательности векторов определяют инвариантное подпространство оператора A:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1,A} &= \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_1, \rangle,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathbf{M}_{n_1,A} &= \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_{n_1}, (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_{n_1}, \dots, \mathbf{f}_{n_1}\rangle,\\
\mathbf{M}_{n_1+1,A} &= \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_{n_1+1}, (A-\lambda I)^{p-3}\mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_1+1}\rangle,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathbf{M}_{n_2,A} &= \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_{n_2}, (A-\lambda I)^{p-3}\mathbf{f}_{n_2}, \dots, \mathbf{f}_{n_2}\rangle,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathbf{M}_{n_{p-1}+1,A} &= \mathbb{C}\langle \mathbf{f}_{n_{p-1}+1}\rangle,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathbf{M}_{n_p,A} &= \mathbb{C}\langle \mathbf{f}_{n_p}\rangle.
\end{aligned}
$$

Первые n_1 подпространств

$$\mathbf{M}_{1,A}, \dots, \mathbf{M}_{n_1,A}$$

имеют размерность p, следующие $(n_2 - n_1)$ подпространств

$$\mathbf{M}_{n_1+1,A}, \dots, \mathbf{M}_{n_2,A}$$

имеют размерность $(p-1)$, и.т.д., последние $(n_p - n_{p-1})$ подпространств

$$\mathbf{M}_{n_{p-1}+1,A}, \dots, \mathbf{M}_{n_p,A}$$

одномерные. Все пространство $\mathbf{V}$ есть прямая сумма этих подпространств:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}_{1,A} \dotplus \dots \dotplus \mathbf{M}_{n_p,A}.$$

Подпространства $\mathbf{M}_{1,A}, \dots, \mathbf{M}_{n_p,A}$ называются *циклическими* инвариантными подпространствами оператора A, отвечающими собственному значению λ. Так как векторы

$$(A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, \dots, (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_{n_1}, \dots, \mathbf{f}_{n_{p-1}+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_p}\}$$

— линейно независимые собственные векторы оператора A, то оператор A неразложим лишь в случае, когда

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}_{1,A} = \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_1, \rangle,$$

т.е. когда $\dim \mathbf{N}_\lambda^{(1)}(A) = 1$. В этом случае $p = n$ и оператор A имеет, с точностью до постоянного множителя, один собственный вектор

$$\mathbf{e}_1 = (A - \lambda I)^{n-1}\mathbf{f}_1,$$

один присоединенный вектор 1-го порядка

$$\mathbf{e}_2 = (A - \lambda I)^{n-2}\mathbf{f}_1$$

и т.д., один присоединенный вектор $(n-1)$-го порядка

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{f}_1.$$

Векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют базис векторного пространства $\mathbf{V}$, в котором матрица оператора A имеет вид

$$[A] = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Достаточность. Допустим, что оператор A подобен оператору $J_n(0)$. Тогда существует базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ векторного пространства $\mathbf{V}$, в котором матрица оператора A имеет вид:

$$A = J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Для векторов базиса имеем:

$$A\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \quad \ldots, \quad A\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n-1}.$$

Допустим, что оператор A разложим, т.е. векторное пространство $\mathbf{V}$ можно представить в виде прямой суммы нетривиальных подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dotplus \mathbf{N},$$

инвариантных относительно оператора A. Так как $\dim \mathbf{V} = n$, то существует вектор $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, n-я координата которого отлична от нуля. Пусть, без ограничения общности, таким вектором является вектор

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n \in \mathbf{M}, \quad \alpha_n \neq 0.$$

Так как подпространство $\mathbf{M}$ инвариантно относительно A, то последовательно имеем:

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \alpha_1\, A\mathbf{e}_1 + \alpha_2\, A\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\, A\mathbf{e}_n = \alpha_2\, \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\, \mathbf{e}_{n-1} \in \mathbf{M},\\
A^2\mathbf{x} &= \alpha_2\, A\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\, A\mathbf{e}_{n-1} = \alpha_3\, \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\, \mathbf{e}_{n-2} \in \mathbf{M},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A^{n-2}\mathbf{x} &= \alpha_{n-2}\, A\mathbf{e}_1 + \alpha_{n-1}\, A\mathbf{e}_2 + \alpha_n\, A\mathbf{e}_3 = \alpha_{n-1}\, \mathbf{e}_1 + \alpha_n\, \mathbf{e}_2 \in \mathbf{M},\\
A^{n-1}\mathbf{x} &= \alpha_{n-1}\, A\mathbf{e}_1 + \alpha_n\, A\mathbf{e}_2 = \alpha_n \mathbf{e}_1 \in \mathbf{M}.
\end{aligned}$$

Так как $\alpha_n \neq 0$, то $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{M}$. Следовательно,

$$\alpha_n\, \mathbf{e}_2 = (\alpha_{n-1}\, \mathbf{e}_1 + \alpha_n\, \mathbf{e}_2) - \alpha_{n-1}\, \mathbf{e}_1 \in \mathbf{M},$$

Откуда $\mathbf{e}_2 \in \mathbf{M}$. Рассуждая аналогично, последовательно получим, что $\mathbf{e}_3 \in \mathbf{M}$, и т.д., $\mathbf{e}_n \in \mathbf{M}$. Таким образом, $\mathbf{M} = \mathbf{V}$, что противоречит предположению о разложимости оператора A. Следовательно, оператор $A = J_n(0)$ неразложим.

Если

$$A = J_n(\lambda) = \lambda I + J_n(0),$$

то неразложимость оператора A следует из неразложимости $J_n(0)$. $\square$

6.4 Нормальная форма Жордана оператора, имеющего единственное собственное значение

Если A — оператор простой структуры, то его матрица $[A]$ в любом базисе подобна диагональной. В общем случае выбор соответствующего базиса, в котором матрица $[A]$ имеет наиболее “простую” форму, является весьма важной задачей. В этом параграфе мы рассмотрим каноническую форму Жордана матрицы линейного оператора.

Если оператор A имеет k различных собственных значений:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\},$$

то, согласно теореме 5.3.21, пространство $\mathbf{V}$ можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_{\lambda_1}^{(p_1)}(A) \dotplus \cdots \dotplus \mathbf{N}_{\lambda_k}^{(p_k)}(A),$$

где каждое из подпространств $\mathbf{N}_{\lambda_i}^{(p_i)}(A)$ состоит из собственных и присоединенных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ_i, $i = 1, \ldots, k$. При этом каждому собственному значению λ_i соответствует конечная цепь инвариантных подпространств

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{N}_{\lambda_i}^{(1)}(A) \subset \cdots \subset \mathbf{N}_{\lambda_i}^{(p_i)}(A).$$

Наша цель — выбрать в каждом из инвариантных подпространств $\mathbf{N}_{\lambda_i}^{(p_i)}(A)$ соответствующий базис.

Пусть оператор A одноточечный, т.е. его спектр состоит из единственного собственного значения λ. Тогда

$$\{\mathbf{0}\} \subset \mathbf{N}_{\lambda}^{(1)}(A) \subset \cdots \subset \mathbf{N}_{\lambda}^{(p)}(A) = \mathbf{V}.$$

Все члены этой цепи различны.

Так же, как в доказательстве теоремы 6.3.3, можно показать, что существует базис векторного пространства $\mathbf{V}$:

$$\begin{gathered}\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n_1},\\ (A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \ldots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}, \mathbf{f}_{n_1+1}, \ldots, \mathbf{f}_{n_2},\\ (A-\lambda I)^2\mathbf{f}_1, \ldots, (A-\lambda I)^2\mathbf{f}_{n_1}, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1+1}, \ldots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_2}, \mathbf{f}_{n_2+1}, \ldots, \mathbf{f}_{n_3},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, \ldots, (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_{n_1}, \ldots, \mathbf{f}_{n_{p-1}+1}, \ldots, \mathbf{f}_{n_p}\},\end{gathered}$$

такой, что векторы

$$\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n_1}\}$$

являются присоединенными векторами оператора A $(p-1)$-го порядка, векторы

$$\{(A-\lambda I)\mathbf{f}_1, \ldots, (A-\lambda I)\mathbf{f}_{n_1}, \mathbf{f}_{n_1+1}, \ldots, \mathbf{f}_{n_2}\}$$

— присоединенными векторами оператора A $(p-2)$-го порядка, и т.д., векторы

$$\{(A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, \ldots, (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_{n_1}, \ldots, \mathbf{f}_{n_{p-1}+1}, \ldots, \mathbf{f}_{n_p}\}$$

— собственными векторами оператора A, и поэтому переводятся оператором $(A-\lambda I)$ в $\mathbf{0}$.

Все пространство $\mathbf{V}$ есть прямая сумма циклических инвариантных подпространств оператора A:

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}_{1,A} \dotplus \cdots \dotplus \mathbf{M}_{n_p,A},$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{1,A} &= \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_1, \rangle, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{M}_{n_1,A} &= \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_{n_1}, (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_{n_1}, \dots, \mathbf{f}_{n_1}\rangle, \\
\mathbf{M}_{n_1+1,A} &= \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_{n_1+1}, (A-\lambda I)^{p-3}\mathbf{f}_{n_1+1}, \dots, \mathbf{f}_{n_1+1}\rangle, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{M}_{n_2,A} &= \mathbb{C}\langle (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_{n_2}, (A-\lambda I)^{p-3}\mathbf{f}_{n_2}, \dots, \mathbf{f}_{n_2}\rangle, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{M}_{n_{p-1}+1,A} &= \mathbb{C}\langle \mathbf{f}_{n_{p-1}+1}\rangle, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{M}_{n_p,A} &= \mathbb{C}\langle \mathbf{f}_{n_p}\rangle.
\end{aligned}
$$

Найдем матрицу оператора $(A-\lambda I)$ в подпространстве $\mathbf{M}_{1,A}$, выбирая в качестве базиса векторы

$$\{(A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, (A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_1\}.$$

Так как первый вектор $(A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1$ этого базиса — собственный вектор оператора A, второй $(A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_1$ — присоединенный вектор первого порядка, и т.д., последний вектор $\mathbf{f}_1$ — присоединенный вектор $(p-1)$-го порядка, то

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda I)((A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1) &= (A-\lambda I)^{p}\mathbf{f}_1 = \mathbf{0}, \\
(A-\lambda I)((A-\lambda I)^{p-2}\mathbf{f}_1) &= (A-\lambda I)^{p-1}\mathbf{f}_1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(A-\lambda I)((A-\lambda I)\mathbf{f}_1) &= (A-\lambda I)^{2}\mathbf{f}_1, \\
(A-\lambda I)(\mathbf{f}_1) &= (A-\lambda I)\mathbf{f}_1,
\end{aligned}
$$

и матрица оператора $(A-\lambda I)$ в этом базисе имеет вид

$$[(A-\lambda I)\restriction_{\mathbf{M}_{1,A}}] = J_p(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогичный вид имеют матрицы оператора $(A-\lambda I)$ в остальных инвариантных подпространствах $\mathbf{M}_{2,A}$, $\dots$, $\mathbf{M}_{n_p,A}$, векторы базисов которых выбраны так же, как и в подпространстве $\mathbf{M}_{1,A}$, причем

$$[(A-\lambda I)\restriction_{\mathbf{M}_{n_{p-1}+1,A}}] = \dots = [(A-\lambda I)\restriction_{\mathbf{M}_{n_p,A}}] = [0].$$

Матрица $[A-\lambda I]$ оператора $(A-\lambda I)$ во всем пространстве в данном базисе будет квазидиагональной с указанными блоками на диагонали:

$$[A-\lambda I] = \begin{pmatrix} [(A-\lambda I)\restriction_{\mathbf{M}_{1,A}}] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [(A-\lambda I)\restriction_{\mathbf{M}_{n_p,A}}] \end{pmatrix} =$$
$$= [(A-\lambda I)\restriction_{\mathbf{M}_{1,A}}] \oplus \cdots \oplus [(A-\lambda I)\restriction_{\mathbf{M}_{n_p,A}}].$$

Так как $A = (A-\lambda I)+\lambda I$, то матрица $[A\restriction_{\mathbf{M}_{1,A}}]$ оператора $A\restriction_{\mathbf{M}_{1,A}}$ имеет вид $[A\restriction_{\mathbf{M}_{1,A}}] = \lambda I + J_p(0) = J_p(\lambda)$. Аналогичный вид имеют матрицы оператора A в остальных инвариантных подпространствах $\mathbf{M}_{2,A}, \ldots, \mathbf{M}_{n_p,A}$.

Матрица $[A]$ оператора A во всем пространстве $\mathbf{V}$ будет квазидиагональной:

$$[A] = [A\restriction_{\mathbf{M}_{1,A}}] \oplus \cdots \oplus [A\restriction_{\mathbf{M}_{n_p,A}}].$$

Отметим, что в матрице $[A]$ число блоков Жордана $J_p(\lambda)$ размерности $p\times p$ равно n_1, число блоков $J_{p-1}(\lambda)$ размерности $(p-1)\times(p-1)$ равно (n_2-n_1), и т.д., размерности 2×2 равно $(n_{p-1}-n_{p-2})$, и наконец блоков $J_1(\lambda) = [\lambda]$ размерности 1×1 равно $(n_p - n_{p-1})$. При этом, если $n_{p-j+1} = n_{p-j}$, то в матрице $[A]$ блоки $J_j(\lambda)$ размерности $j\times j$ будут отсутствовать.

Сформулируем полученные нами результаты в виде теоремы.

Теорема 6.4.1. *(Спектральная теорема для одноточечного оператора) Для любого одноточечного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ существует базис векторного пространства $\mathbf{V}$, в котором матрица $[A]$ оператора A имеет вид:*

$$[A] = \underbrace{J_p(\lambda)\oplus\cdots\oplus J_p(\lambda)}_{n_1} \oplus \underbrace{J_{p-1}(\lambda)\oplus\cdots\oplus J_{p-1}(\lambda)}_{n_2-n_1} \oplus \ldots$$
$$\oplus \underbrace{J_2(\lambda)\oplus\cdots\oplus J_2(\lambda)}_{n_{p-1}-n_{p-2}} \oplus \underbrace{J_1(\lambda)\oplus\cdots\oplus J_1(\lambda)}_{n_p-n_{p-1}}. \qquad (6.1)$$

Определение 6.4.2. Вид (6.1) матрицы одноточечного оператора A называется *нормальной формой Жордана* или *матрицей Жордана* оператора A, а соответствующий базис — *базисом Жордана.*

6.5 Нормальная форма Жордана линейного оператора

Пусть оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ имеет k различных собственных значений:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}.$$

Тогда векторное пространство $\mathbf{V}$ представимо в виде прямой суммы

$$\mathbf{V} = \mathbf{N}_{\lambda_1}^{(p_1)}(A) \dotplus \cdots \dotplus \mathbf{N}_{\lambda_k}^{(p_k)}(A),$$

причем для любого $i = 1, \ldots, k$ оператор $A\restriction_{\mathbf{N}_{\lambda_i}^{(p_i)}}$ имеет только одно собственное значение λ_i. Используя результаты предыдущего пункта, получим следующую теорему.

Теорема 6.5.1. *(Спектральная теорема) Если оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ имеет k различных собственных значений:*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\},$$

то существует базис векторного пространства $\mathbf{V}$, в котором матрица $[A]$ оператора A имеет вид:

$$\begin{aligned}
[A] &= [A\restriction_{\mathbf{N}_{\lambda_1}^{(p_1)}}] \oplus [A\restriction_{\mathbf{N}_{\lambda_2}^{(p_2)}}] \oplus \cdots \oplus [A\restriction_{\mathbf{N}_{\lambda_k}^{(p_k)}}] = \\
&= J(A) = \underbrace{J_{p_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{p_1}(\lambda_1)}_{n_{1,1}} \oplus \underbrace{J_{p_1-1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{p_1-1}(\lambda_1)}_{n_{1,2}-n_{1,1}} \oplus \cdots \\
&\quad \oplus \underbrace{J_2(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_2(\lambda_1)}_{n_{1,p_1-1}-n_{1,p_1-2}} \oplus \underbrace{[\lambda_1] \oplus \cdots \oplus [\lambda_1]}_{n_{1,p_1}-n_{1,p_1-1}} \oplus \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad \oplus \underbrace{J_{p_k}(\lambda_k) \oplus \cdots \oplus J_{p_k}(\lambda_k)}_{n_{k,1}} \oplus \underbrace{J_{p_k-1}(\lambda_k) \oplus \cdots \oplus J_{p_k-1}(\lambda_k)}_{n_{k,2}-n_{k,1}} \oplus \cdots \\
&\quad \oplus \underbrace{J_2(\lambda_k) \oplus \cdots \oplus J_2(\lambda_k)}_{n_{k,p_k-1}-n_{k,p_k-2}} \oplus \underbrace{[\lambda_k] \oplus \cdots \oplus [\lambda_k]}_{n_{k,p_k}-n_{k,p_k-1}}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Определение 6.5.2. Матрица вида (6.2) называется *нормальной формой Жордана* или *матрицей Жордана* оператора A, а соответствующий базис — *базисом Жордана.*

Замечание 6.5.3. Для матрицы Жордана $J(A)$ оператора A имеем следующее.

- Число $n(A)$ жордановых клеток, с учетом повторов одних и тех же клеток, равно максимальному числу линейно независимых собственных векторов оператора A.
- Оператор A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда $n(A) = n = \dim \mathbf{V}$.
- Число жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ, совпадает с его геометрической кратностью, т.е. с $\dim \mathbf{N}_\lambda(A)$.
- Сумма порядков всех жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ, совпадает с его алгебраической кратностью.
- Порядок наибольшей жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ, совпадает с кратностью числа λ как корня минимального многочлена оператора A.

Замечание 6.5.4. Оператор

$$B = B_1 \dotplus \cdots \dotplus B_k,$$

где $B_i = (A - \lambda_i I)\restriction_{\mathbf{N}^{(p_i)}_{\lambda_i}}$, нильпотентный. Действительно,

$$B^n = B_1^n \dotplus \cdots \dotplus B_k^n,$$

и при $n > p_i$

$$B_i^n = B^{p_i} B^{n-p_i} = 0.$$

Следовательно, при достаточно больших n имеем $B^n = 0$.

Упражнение 6.5.5. Любой оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ однозначно представим в виде

$$A = S + B,$$

где S — оператор простой структуры, а B — нильпотентный оператор, причем операторы S и B коммутируют:

$$SB = BS.$$

Такое представление оператора A называется *разложением Данфорда.*

Пример 6.5.6. Рассмотрим матрицы Жордана некоторых операторов.

- Пусть P — идемпотент: $P^2 = P$. Тогда его матрица Жордана $J(P)$ диагональная. Действительно, так как $P^2 = P$, то в силу следствия 5.2.4,
$$\sigma(P) \subset \{0, 1\}.$$
Предположим сначала, что в разложении матрицы $J(P)$ содержится клетка Жордана $J_r(0)$, где $r \geqslant 2$. Тогда
$$J_r(0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \neq J_r(0),$$
что противоречит условию $P^2 = P$.
Пусть теперь в разложении матрицы $J(P)$ содержится клетка Жордана $J_r(1)$, где $r \geqslant 2$. Тогда
$$J_r(1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & 0 \\ & 1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \neq J_r(1),$$
что также противоречит условию $P^2 = P$. Следовательно, матрица $J(P)$ диагональная.

- Пусть S — инволюция: $S^2 = I$. Покажем, что $J(S)$ диагональная. Действительно, так как $S^2 = I$, то в силу следствия 5.2.4,
$$\sigma(P) \subset \{-1, 1\}.$$
Предположим сначала, что в разложении матрицы $J(S)$ содержится клетка Жордана $J_r(-1)$, где $r \geqslant 2$. Тогда
$$J_r(-1)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & 1 & -2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \neq I_r,$$

что противоречит условию $S^2 = I$.

Пусть теперь разложение матрицы $J(S)$ содержит клетку Жордана $J_r(1)$, где $r \geqslant 2$. Тогда аналогично $J_r(1)^2 \neq I_r$, что также противоречит условию $S^2 = I$. Следовательно, матрица $J(S)$ диагональная.

Упражнение 6.5.7. Клетки Жордана $J_n(\lambda_1)$ и $J_n(\lambda_2)$ подобны тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2$.

Следующее утверждение показывает, что с точностью до преобразования подобия оператор A определяется своей матрицей Жордана однозначно. Напомним, что подобные операторы имеют одинаковые следы, характеристические многочлены, собственные значения, геометрические кратности собственных значений.

Утверждение 6.5.8. *Два оператора A и B подобны тогда и только тогда, когда их матрицы Жордана $J(A)$ и $J(B)$ равны с точностью до перестановки клеток Жордана.*

Доказательство. Необходимость. Пусть операторы A и B подобны. Тогда существует обратимый оператор S, что

$$B = S^{-1}AS.$$

Тогда в любом базисе $\mathfrak{B}$ векторного пространства $\mathbf{V}$

$$[B] = [S]^{-1}[A][S].$$

Если $[C_1]$ и $[C_2]$ — матрицы перехода базиса $\mathfrak{B}$ к базисам Жордана операторов A и B, то

$$J(A) = [C_1]^{-1}[A][C_1], \quad J(B) = [C_2]^{-1}[B][C_2].$$

Следовательно,

$$J(B) = [C_2]^{-1}[S]^{-1}[A][S][C_2] = [C_2]^{-1}[S]^{-1}[C_1]J(A)[C_1]^{-1}[S][C_2] = \\ = [C]^{-1}J(A)[C],$$

где $[C] = [C_1]^{-1}[S][C_2]$, т.е. матрицы $J(A)$ и $J(B)$ подобны. Докажем, что $J(A)$ и $J(B)$ имеют одни и те же наборы жордановых клеток. Так как для подобных операторов собственные значения с учетом кратностей совпадают, то достаточно убедится в совпадении жордановых клеток (с учетом кратности) для одноточечных операторов. Таким образом, без ограничения общности, можно считать, что операторы A и B одноточечные, т.е.

каждый из них имеет только одно собственное значение λ. Так как число жордановых клеток, отвечающих этому собственному значению λ, совпадает с его геометрической кратностью, а операторы A и B подобны, то матрицы $J(A)$ и $J(B)$ имеют одно и то же число жордановых клеток. Пусть клетки расположены так, что их порядки не возрастают:

$$\begin{gathered} J(A) = J_{n_1}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda), \quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k, \\ J(B) = J_{m_1}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{m_k}(\lambda), \quad m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_k, \\ n_1 + \cdots + n_k = m_1 + \cdots + m_k = n. \end{gathered}$$

Если $n_1 = m_1$, то $J_{n_1}(\lambda) = J_{m_1}(\lambda)$. Тогда можно перейти к матрицам

$$\begin{gathered} J_1(A) = J_{n_2}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda), \\ J_1(B) = J_{m_2}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{m_k}(\lambda). \end{gathered}$$

Сравнивая последовательно n_2 с m_2, n_3 с m_3 и т.д., мы получим, что все соответствующие пары клеток Жордана равны, либо встретим первую пару клеток разного порядка.

Будем считать, что $n_1 > m_1$. Так как $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_k$, $m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_k$, то

$$(J(B) - \lambda I)^{m_1} = 0,$$

но

$$(J(A) - \lambda I)^{m_1} \neq 0,$$

Так как

$$J(B) = [C]^{-1} J(A) [C],$$

то

$$J(A) - \lambda I = [C](J(B) - \lambda I)[C]^{-1}$$

Следовательно,

$$(J(A) - \lambda I)^{m_1} = [C](J(A) - \lambda I)^{m_1}[C]^{-1} = [C]0[C]^{-1} = 0,$$

вопреки предположению. Следовательно, $n_j = m_j$ для любого $j = 1, \ldots, k$ и потому $J(A) = J(B)$.

Достаточность. Допустим, что $J(A) = J(B)$. Так как матрицы операторов A и B в соответствующих базисах Жордана равны, то эти операторы подобны. □

Замечание 6.5.9. Доказанное утверждение дает основания называть форму Жордана оператора нормальной или канонической формой.

6.6 Матрицы, коммутирующие с данной

Выясним, как устроены все матрицы X, коммутирующие с данной матрицей A:

$$AX = XA.$$

Мы рассмотрим более общее матричное уравнение

$$AX = XB,$$

где A и B — квадратные матрицы разных размеров: $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, а X — прямоугольная матрица размерности $m \times n$, $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, так как решить это матричное уравнение не сложнее, чем уравнение $AX = XA$. Пусть $J(A)$ и $J(B)$ — жордановы формы матриц A и B, C и S — соответствующие невырожденные матрицы:

$$A = C^{-1}J(A)C, \quad B = S^{-1}J(B)S.$$

Тогда

$$(CAC^{-1})(CXS^{-1}) = C(AX)S^{-1} = C(XB)S^{-1} = (CXS^{-1})(SBS^{-1}),$$

т.е. данное матричное уравнение сводится к уравнению

$$J(A)X' = X'J(B),$$

где $X' = CXS^{-1}$. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что матрицы A и B уже имеют вид Жордана:

$$A = J(A) = A_1 \oplus \dots \oplus A_p, \quad B = J(B) = B_1 \oplus \dots \oplus B_q,$$

$A_1, \dots, A_p$ и $B_1, \dots, B_q$ — соответствующие клетки Жордана.

Разобьем строки матрицы X на p блоков в соответствии с разбиением матрицы A, а столбцы матрицы X разобьем на q блоков в соответствии с разбиением матрицы B:

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{p1} & \dots & X_{pq} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$AX = \begin{pmatrix} A_1X_{11} & \dots & A_1X_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ A_pX_{p1} & \dots & A_pX_{pq} \end{pmatrix}, \quad XB = \begin{pmatrix} X_{11}B_1 & \dots & X_{1q}B_q \\ \vdots & & \vdots \\ X_{p1}B_1 & \dots & X_{pq}B_q \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матричное уравнение $AX = XB$ равносильно системе уравнений

$$A_i X_{ij} = X_{ij} B_j, \quad i = 1, \ldots, p, \ j = 1, \ldots, q,$$

где A_i и B_j — клетки Жордана.

Теорема 6.6.1. *Пусть $A = J_m(\lambda)$, $B = J_n(\mu)$ и матрица X удовлетворяет матричному уравнению*

$$AX = XB.$$

Тогда

(i) *Если $\lambda \neq \mu$, то $X = 0$;*

(ii) *Если $\lambda = \mu$, то*

$$X = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & Y \end{pmatrix}, & \text{если } m < n, \\ Y, & \text{если } m = n, \\ \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{если } n < m, \end{cases}$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{m-1} & y_m \\ & y_1 & y_2 & & y_{m-1} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & y_1 & y_2 \\ 0 & & & & y_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C})$$

Доказательство. Пусть

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

— две нильпотентные матрицы порядка m и n соответственно. Тогда

$$A = J_m(\lambda) = \lambda I_m + N_m, \quad B = J_n(\mu) = \mu I_n + N_n$$

и

$$(\lambda I_m + N_m)X = X(\mu I_n + N_n).$$

Следовательно,

$$N_m X - X N_n = (\mu - \lambda) X.$$

Пусть матрица X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя $N_m X$ и $X N_n$, получим:

$$N_m X = \begin{pmatrix} x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad X N_n = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} & \dots & x_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_{m1} & \dots & x_{m,n-1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} - x_{11} & \dots & x_{2n} - x_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} - x_{m-1,1} & \dots & x_{mn} - x_{m-1,n-1} \\ 0 & -x_{m1} & \dots & -x_{m,n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= (\mu - \lambda) \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m-1,1} & x_{m-1,2} & \dots & x_{m-1,n} \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Получили систему

$$\begin{aligned} x_{21} &= (\mu - \lambda) x_{11}, \\ x_{22} - x_{11} &= (\mu - \lambda) x_{12}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2n} - x_{1,n-1} &= (\mu - \lambda) x_{1n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m,1} &= (\mu - \lambda) x_{m-1,1}, \\ x_{m,2} - x_{m-1,1} &= (\mu - \lambda) x_{m-1,2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m,n} - x_{m-1,n-1} &= (\mu - \lambda) x_{m-1,n}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= (\mu-\lambda)x_{m,1},\\
-x_{m,1} &= (\mu-\lambda)x_{m,2},\\
-x_{m,2} &= (\mu-\lambda)x_{m,3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-x_{m,n-1} &= (\mu-\lambda)x_{m,n}.
\end{aligned}
$$

(i). Если $\lambda \neq \mu$, то последовательно имеем:

$$
\begin{aligned}
x_{m,1} &= 0, & x_{m-2,1} &= 0,\\
x_{m,2} &= 0, & &\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots & x_{m-2,n} &= 0,\\
x_{m,n} &= 0, & &\cdots\cdots\\
x_{m-1,1} &= 0, & x_{11} &= 0,\\
x_{m-1,2} &= 0, & x_{12} &= 0,\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
x_{m-1,n} &= 0, & x_{1,n} &= 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, в этом случае $X = 0$.

(ii). Если $\lambda = \mu$, то

$$
\begin{aligned}
x_{21} &= 0, & &\cdots\cdots\\
x_{22} &= x_{11}, & x_{m,1} &= 0,\\
x_{23} &= x_{12}, & x_{m,2} &= x_{m-1,1},\\
&\cdots\cdots & x_{m,3} &= x_{m-1,2},\\
x_{2n} &= x_{1,n-1} & &\cdots\cdots\\
x_{31} &= 0, & x_{m,n} &= x_{m-1,n-1},\\
x_{32} &= x_{21}, & 0 &= x_{m,1},\\
x_{33} &= x_{22}, & 0 &= x_{m,2},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
x_{3,n} &= x_{2,n-1}, & 0 &= x_{m,n-1}.
\end{aligned}
$$

(ii.1). Если $m < n$, то обозначим

$$
\begin{aligned}
x_{1,n} &= y_m\\
x_{1,n-1} &= x_{2,n} = y_{m-1}\\
x_{1,n-2} &= x_{2,n-1} = x_{3,n} = y_{m-2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{1,n-m+1} &= x_{2,n-m+2} = \cdots = x_{m,n} = y_1.
\end{aligned}
$$

Все остальные матричные элементы равны нулю. Следовательно, в этом случае матрица X имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & Y \end{pmatrix},$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{m-1} & y_m \\ & y_1 & y_2 & & y_{m-1} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & y_1 & y_2 \\ 0 & & & & y_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C}).$$

(ii.2). Если $m > n$, то

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{22} = \dots = x_{n,n} = y_1, \\ x_{12} &= x_{23} = \dots = x_{n,n-1} = y_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_{1,n} &= y_n. \end{aligned}$$

Все остальные матричные элементы равны нулю. Следовательно, в этом случае матрица X имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $Y \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

(ii.3). Если $m = n$, то $X = Y \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$. □

При $A = B = J_n(\lambda)$ имеет место следующее следствие.

Следствие 6.6.2. *Если оператор $X \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ коммутирует с оператором $A = J_n(\lambda)$, то его матрица в Жордановом базисе оператора A имеет верхнетреугольный вид*

$$[X] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ & x_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & x_2 \\ 0 & & & x_1 \end{pmatrix},$$

т.е. $[X] \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, где $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ — алгебра верхнетреугольных тёплицевых матриц.

Упражнение 6.6.3. Для любого многочлена $p(z)$ матрица $p(J_n(\lambda))$ принадлежит алгебре $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

Опишем множество операторов $X \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, коммутирующих с оператором $A = J_m(\lambda) \oplus J_n(\mu)$. Рассмотрим случаи

- $(m, \lambda) = (n, \mu)$;
- $m \neq n,\ \lambda = \mu$;
- $m = n, \lambda \neq \mu$;
- $m \neq n, \lambda \neq \mu$.

Случай 1. Пусть $(m, \lambda) = (n, \mu)$, т. е.

$$A = J_m(\lambda) \oplus J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_m(\lambda) \end{pmatrix}$$

и

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

с соответствующим разбиением на блоки. Так как $AX = XA$, то мы имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} J_m(\lambda)X_{11} &= X_{11}J_m(\lambda), \\ J_m(\lambda)X_{12} &= X_{12}J_m(\lambda), \\ J_m(\lambda)X_{21} &= X_{21}J_m(\lambda), \\ J_m(\lambda)X_{22} &= X_{22}J_m(\lambda). \end{aligned}$$

В силу следствия 6.6.2, $X_{ij} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C})$ и поэтому оператор X в жордановом базисе оператора A имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

где

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} t_1^{(ij)} & t_2^{(ij)} & \dots & t_m^{(ij)} \\ & t_1^{(ij)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_2^{(ij)} \\ 0 & & & t_1^{(ij)} \end{pmatrix}, \quad i, j = 1, 2.$$

Случай 2. Пусть $m \neq n$, $\lambda = \mu$, т. е.

$$A = J_m(\lambda) \oplus J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

и

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

с соответствующим разбиением на блоки. Так как $AX = XA$, то мы имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} J_m(\lambda)X_{11} &= X_{11}J_m(\lambda), \\ J_m(\lambda)X_{12} &= X_{12}J_n(\lambda), \\ J_n(\lambda)X_{21} &= X_{21}J_m(\lambda), \\ J_n(\lambda)X_{22} &= X_{22}J_n(\lambda). \end{aligned}$$

В силу следствия 6.6.2, $X_{11} = T_{11} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C})$ и $X_{22} = T_{22} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$. Структура X_{12} и X_{21} зависит от соотношения между m и n.

2.1). Пусть $m > n$. Так как $J_m(\lambda)X_{12} = X_{12}J_n(\lambda)$, то

$$X_{12} = \begin{pmatrix} T_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

где

$$T_{12} = \begin{pmatrix} t_1^{(12)} & t_2^{(12)} & \dots & t_n^{(12)} \\ & t_1^{(12)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_2^{(12)} \\ 0 & & & t_1^{(12)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}).$$

Так как $J_n(\lambda)X_{21} = X_{21}J_m(\lambda)$, то

$$X_{21} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & T_{21} \end{pmatrix},$$

где

$$T_{21} = \begin{pmatrix} t_1^{(21)} & t_2^{(21)} & & t_n^{(21)} \\ & t_1^{(21)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_2^{(21)} \\ 0 & & & t_1^{(21)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}).$$

Поэтому оператор X в жордановом базисе оператора A имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} T_{11} & \begin{bmatrix} T_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & T_{21} \end{bmatrix} & T_{22} \end{pmatrix},$$

где $T_{11} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C})$, $T_{12}, T_{21}, T_{22} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

2.2). Пусть $m < n$. Так как $J_m(\lambda)X_{12} = X_{12}J_n(\lambda)$, то

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \end{pmatrix}$$

где

$$T_{12} = \begin{pmatrix} t_1^{(12)} & t_2^{(12)} & \dots & t_m^{(12)} \\ & t_1^{(12)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_2^{(12)} \\ 0 & & & t_1^{(12)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C}).$$

Так как $J_n(\lambda)X_{21} = X_{21}J_m(\lambda)$, то

$$X_{21} = \begin{pmatrix} T_{21} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где

$$T_{21} = \begin{pmatrix} t_1^{(21)} & t_2^{(21)} & \dots & t_m^{(21)} \\ & t_1^{(21)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_2^{(21)} \\ 0 & & & t_1^{(21)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C}).$$

Поэтому оператор X в жордановом базисе оператора A имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} T_{11} & \begin{bmatrix} 0 & T_{12} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} T_{21} \\ 0 \end{bmatrix} & T_{22} \end{pmatrix},$$

где $T_{11}, T_{12}, T_{21} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C})$, $T_{22} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

Случай 3. Пусть $m = n$, $\lambda \neq \mu$, т. е.

$$A = J_m(\lambda) \oplus J_m(\mu) = \begin{pmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_m(\mu) \end{pmatrix}$$

и

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

с соответствующим разбиением на блоки. Так как $AX = XA$, то мы имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} J_m(\lambda)X_{11} &= X_{11}J_m(\lambda), \\ J_m(\lambda)X_{12} &= X_{12}J_m(\mu), \\ J_m(\mu)X_{21} &= X_{21}J_m(\lambda), \\ J_m(\mu)X_{22} &= X_{22}J_m(\mu). \end{aligned}$$

Так как $\lambda \neq \mu$, то $X_{12} = X_{21} = 0$. Поэтому оператор X в жордановом базисе оператора A имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$T_{ii} = \begin{pmatrix} t_1^{(ii)} & t_2^{(ii)} & \dots & t_m^{(ii)} \\ & t_1^{(ii)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_2^{(ii)} \\ 0 & & & t_1^{(ii)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C}), \quad i = 1, 2.$$

Случай 4. Пусть $m \neq n$, $\lambda \neq \mu$, т. е.

$$A = J_m(\lambda) \oplus J_n(\mu) = \begin{pmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_n(\mu) \end{pmatrix}$$

и

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

с соответствующим разбиением на блоки. Так как $AX = XA$, то мы имеем следующую систему:

$$\begin{aligned} J_m(\lambda)X_{11} &= X_{11}J_m(\lambda), \\ J_m(\lambda)X_{12} &= X_{12}J_n(\mu), \\ J_n(\mu)X_{21} &= X_{21}J_m(\lambda), \\ J_n(\mu)X_{22} &= X_{22}J_n(\mu). \end{aligned}$$

Так как $\lambda \neq \mu$, то $X_{12} = X_{21} = 0$. Поэтому оператор X в жордановом базисе оператора A имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$T_{11} = \begin{pmatrix} t_1^{(11)} & t_2^{(11)} & \dots & t_m^{(11)} \\ & t_1^{(11)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_2^{(11)} \\ 0 & & & t_1^{(11)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_m(\mathbb{C}),$$

$$T_{22} = \begin{pmatrix} t_1^{(22)} & t_2^{(22)} & \dots & t_n^{(22)} \\ & t_1^{(22)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t_2^{(22)} \\ 0 & & & t_1^{(22)} \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}).$$

Замечание 6.6.4. Если $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, то для любого многочлена $p(z)$ оператор $p(A)$ коммутирует с A:

$$[A, p(A)] = Ap(A) - p(A)A = 0.$$

Пусть теперь заданы операторы $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ и известно, что они коммутируют. В этом случае совсем не обязательно, чтобы оператор B был многочленом от A. Это не так, например, для $A = I$, которая коммутирует с любой матрицей, а $p(A) = p(I) = p(1)I$ не может быть нескалярным оператором.

Определение 6.6.5. Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется *оператором с простым спектром*, если любое его собственное значение имеет геометрическую кратность, равную 1.

Если $J(A)$ — матрица Жордана оператора A, то геометрическая кратность собственного значения λ равна числу отвечающих ему жордановых клеток. Поэтому оператор A — оператор с простым спектром тогда и только тогда, когда для каждого его собственного значения имеется только одна жорданова клетка $J_k(\lambda)$. Оператор A — оператор с простым спектром, если, например, он имеет n различных собственных значений или если собственное значение только одно и его геометрическая кратность равна 1.

Теорема 6.6.6. *Если $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ — оператор с простым спектром, то оператор $B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ коммутирует с A в том и только в том случае, когда $B = p(A)$ для некоторого многочлена $p(z)$ степени не выше $(n-1)$.*

Доказательство. Если $B = p(A)$ для некоторого многочлена $p(z)$ степени не выше $(n-1)$, то, конечно, A коммутирует с B. Докажем обратное. Пусть $[A]$ — матрица оператора A в некотором базисе, $J = J(A)$ — его матрица Жордана и

$$[A] = SJS^{-1}.$$

Если $AB = BA$, то

$$BSJS^{-1} = SJS^{-1}B$$

и
$$(S^{-1}BS)J = J(S^{-1}BS).$$
Если мы докажем, что $S^{-1}BS = p(J)$, то будет
$$B = S\,p(J)\,S^{-1} = p(SJS^{-1}) = p(A).$$
Таким образом, достаточно считать, что $[A] = J$. Так как спектр оператора A — простой, то
$$J(A) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$
где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные собственные значения оператора A. Для оператора B рассмотрим блочное разбиение $B = [B_{ij}]$, согласованное с данным разбиением матрицы $J(A)$:
$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \ldots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & \ldots & B_{rr} \end{pmatrix}$$
Так как $AB = BA$, то
$$J_{n_i}(\lambda_i)B_{ij} = B_{ij}J_{n_j}(\lambda_j), \quad i \neq j.$$
Собственные значения λ_i и λ_j матриц $J_{n_i}(\lambda_i)$ и $J_{n_j}(\lambda_j)$ различны, поэтому $B_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Следовательно, матрица B имеет блочно-диагональный вид:
$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{rr} \end{pmatrix},$$
где $B_{ii} \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$. В силу предположения о коммутативности,
$$J_{n_i}(\lambda_i)B_{ii} = B_{ii}J_{n_i}(\lambda_i)$$
для всех $i = 1, \ldots, r$. Поэтому матрицы B_{ii} должны быть верхнетреугольными тёплицевыми матрицами:
$$B_{ii} = \begin{pmatrix} b_1^{(i)} & b_2^{(i)} & \ldots & b_{n_i}^{(i)} \\ & b_1^{(i)} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_2^{(i)} \\ 0 & & & b_1^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Если мы для каждого $i = 1, \ldots, r$ построим многочлен $p_i(z)$ степени не выше $(n-1)$ такой, что

$$p_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ B_{ii}, & i = j, \end{cases}$$

то многочлен

$$p(z) = p_1(z) + \cdots + p_r(z)$$

будет искомым. Положим

$$q_i(z) = \prod_{j=1, j\neq i}^{r} (z - \lambda_j)^{n_j}.$$

Степень многочлена $q_i(z)$ равна

$$\deg q_i(z) = n - n_i.$$

Так как $(J_{n_j}(\lambda_j) - \lambda_j I)^{n_j} = 0$, то при $i \neq j$ имеем $q_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = 0$.

Несмотря на то, что матрица $q_i(J_{n_i}(\lambda_i))$ может и не совпадать с B_{ii}, она невырожденная (все λ_j различны), и, как и каждый многочлен от клетки Жордана $J_{n_i}(\lambda_i)$, принадлежит алгебре $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ верхнетреугольных тёплицевых матриц. Для любой такой матрицы обратная матрица тоже принадлежит $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ и произведение матриц из $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ также принадлежит $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$. Поэтому матрица

$$[q_i(J_{n_i}(\lambda_i))]^{-1} B_{ii}$$

есть верхнетреугольная тёплицева матрица. Любую такую матрицу можно записать как многочлен от $J_{n_i}(\lambda_i)$. Действительно, например для матрицы B_{ii} имеем:

$$B_{ii} = b_1^{(i)}(J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I)^0 + b_2^{(i)}(J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I)^1 + \cdots + b_{n_i}^{(i)}(J_{n_i}(\lambda_i) - \lambda_i I)^{n_i - 1}.$$

Таким образом, имеется многочлен $r_i(z)$ степени не выше $(n_i - 1)$ такой, что

$$[q_i(J_{n_i(\lambda_i)})]^{-1} B_{ii} = r_i(J_{n_i}(\lambda_i)).$$

Если теперь положить

$$p_i(z) = q_i(z) r_i(z),$$

то получим многочлен степени не выше $(n-1)$, для которого при $i \neq j$ будем иметь

$$p_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = q_i(J_{n_j}(\lambda_j)) \cdot r_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = 0 \cdot r_i(J_{n_j}(\lambda_j)) = 0$$

и

$$p_i(J_{n_i}(\lambda_i)) = q_i(J_{n_i}(\lambda_i)) \cdot r_i(J_{n_i}(\lambda_i)) = B_{ii}. \qquad \square$$

Замечание 6.6.7. Доказанная теорема позволяет охарактеризовать операторы с простым спектром: оператор $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ является оператором с простым спектром тогда и только тогда, когда любой оператор, коммутирующий с A, является многочленом от A.

Упражнение 6.6.8. Если A и B — такие операторы из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$, что любой оператор $C \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, коммутирующий с оператором A, коммутирует и с оператором B, то $B = g(A)$ для некоторого многочлена $g(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$.

6.7 Функции от операторов

Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ и $f(z)$ —некоторая функция скалярного аргумента:

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

Рассмотрим вопрос о том, что следует понимать под функцией $f(A)$ от оператора A.

Если $f(z)$ — многочлен из $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$:

$$f(z) = p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k,$$

то

$$f(A) = p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_k A^k.$$

Определим оператор $f(A)$ в общей ситуации. Для этого рассмотрим характеристический многочлен $P_A(z)$ оператора A:

$$P_A(z) = (-1)^n (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_s)^{k_s},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — попарно различные собственные значения, кратности которых равны $k_1, \dots, k_s$, и

$$k_1 + \dots + k_s = n = \dim \mathbf{V}.$$

Пусть

$$Q_A(z) = \psi(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_s)^{m_s}$$

минимальный многочлен оператора A, степень которого

$$m_1 + \dots + m_s = m \leqslant n = \dim \mathbf{V}.$$

Если многочлены $g(z)$ и $h(z)$ удовлетворяют равенству:

$$g(A) = h(A),$$

то их разность $d(z) = g(z) - h(z)$ является аннулирующим многочленом оператора A, и потому делится на минимальный многочлен $\psi(z)$. Таким образом,

$$\begin{gathered} d(\lambda_1) = 0,\ d'(\lambda_1) = 0,\ \ldots, d^{(m_1-1)}(\lambda_1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d(\lambda_s) = 0,\ d'(\lambda_s) = 0,\ \ldots, d^{(m_s-1)}(\lambda_s) = 0, \end{gathered}$$

поэтому в точках λ_i значения полиномов g, h и их производных до порядка $m_i - 1$ совпадают.

Определение 6.7.1. Если для функции $f(z)$ существуют числа

$$\{f(\lambda_k),\ f'(\lambda_k),\ \ldots,\ f^{(m_k-1)}(\lambda_k),\ k = 1, \ldots, s\},$$

то они называются значениями функции $f(z)$ на спектре $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_s\}$ оператора A; этот набор обозначается $f(\sigma(A))$. В таком случае говорят, что функция $f(z)$ *определена на спектре* $\sigma(A)$ оператора A.

Замечание 6.7.2. Следующие свойства следуют прямо из определения.

- Если $g(A) = h(A)$, то многочлены $g(z)$ и $h(z)$ имеют одни и те же значения на спектре оператора A: $g(\sigma(A)) = h(\sigma(A))$.
- Если $g(\sigma(A)) = h(\sigma(A))$, то $g(A) = h(A)$.
- Если задан оператор A, то многочлены $g(z)$, принимающие они и те же значения на спектре оператора A, определяют один и тот же оператор $g(A)$.

Таким образом, чтобы определение функции $f(A)$ от оператора A в общем случае подчинялось таким же условиям, значения функции $f(z)$ на спектре $\sigma(A)$ оператора A должны полностью определять оператор $f(A)$, т.е. функции $f(z)$, имеющие одни и те же значения на спектре $\sigma(A)$ оператора A должны определять один и тот же оператор $f(A)$. Но тогда, очевидно, для определения $f(A)$ в общем случае достаточно найти такой многочлен $g(z)$, который принимал бы те же значения на спектре $\sigma(A)$ оператора A, что и функция $f(z)$, и положить

$$f(A) = g(A).$$

Определение 6.7.3. Если функция $f(z)$ определена на спектре $\sigma(A)$ оператора A, то

$$f(A) = g(A).$$

для любого многочлена $g(z)$, который принимает те же значения на спектре $\sigma(A)$, что и функция $f(z)$:

$$f(\sigma(A)) = g(\sigma(A)).$$

Утверждение 6.7.4. *Пусть* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$,

$$Q_A(z) = \psi(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_s)^{m_s}$$

минимальный многочлен оператора A*, степень которого*

$$m_1 + \dots + m_s = m \leqslant n = \dim \mathbf{V},$$

и $f(z)$ *— функция, определенная на спектре* $\sigma(A)$ *оператора* A*. Тогда существует единственный многочлен* $r(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ *степени меньше* m*, который принимает те же значения на спектре* $\sigma(A)$ *оператора* A*, что и* $f(z)$*.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$\mathcal{P}_f = \{g(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] : g(\sigma(A)) = f(\sigma(A))\}.$$

Пусть $g(z) \in \mathcal{P}_f$. Разделим его с остатком на минимальный многочлен $\psi(z)$:

$$g(z) = q(z)\psi(z) + r(z).$$

Тогда

$$\begin{gathered}
f(\lambda_1) = g(\lambda_1) = r(\lambda_1), \\
f'(\lambda_1) = g'(\lambda_1) = r'(\lambda_1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f^{(m_1-1)}(\lambda_1) = g^{(m_1-1)}(\lambda_1) = h^{(m_1-1)}(\lambda_1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f(\lambda_s) = g(\lambda_s) = h(\lambda_s), \\
f'(\lambda_s) = g'(\lambda_s) = h'(\lambda_s), \\
\dots\dots\dots\dots\dots, \\
f^{(m_s-1)} = g^{(m_s-1)}(\lambda_s) = h^{(m_s-1)}(\lambda_s),
\end{gathered}$$

и степень многочлена $r(z)$ меньше m. Многочлен $r(z)$ определяется приведенными интерполяционными условиями однозначно. $\square$

Определение 6.7.5. Многочлен $r(z)$ называется *интерполяционным многочленом Лагранжа-Сильвестра* для функции $f(z)$ на спектре оператора A.

Замечание 6.7.6. Если функция $f(z)$ определена на спектре $\sigma(A)$ оператора A, то $f(A) = r(A)$.

Рассмотрим несколько примеров построения оператора $f(A)$.

Пример 6.7.7. Пусть

$$A = J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Минимальный многочлен для оператора A будет $\psi(z) = z^n$. Поэтому значениями функции $f(z)$ на спектре $\sigma(A) = \{0\}$ будут числа

$$f(0),\ f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0),$$

и многочлен $r(z)$ имеет вид:

$$r(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}z^{n-1}.$$

Таким образом,

$$f(A) = f(0)I + \frac{f'(0)}{1!}J_n(0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}J_n^{n-1}(0) =$$
$$= \begin{pmatrix} f(0) & \frac{f'(0)}{1!} & \ldots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(0) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{f'(0)}{1!} \\ 0 & & & f(0) \end{pmatrix}.$$

Пример 6.7.8. Пусть

$$A = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Так как
$$J_n(\lambda) = \lambda I + J_n(0),$$
то
$$J_n(\lambda) - \lambda I = J_n(0).$$
Минимальный многочлен для оператора A будет $\psi(z) = (z-\lambda)^n$. Поэтому значениями функции $f(z)$ на спектре $\sigma(A) = \{\lambda\}$ будут числа
$$f(\lambda),\ f'(\lambda),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(\lambda),$$
и многочлен $r(z)$ имеет вид:
$$r(z) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(z-\lambda) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}(z-\lambda)^{n-1}.$$
Таким образом,
$$f(A) = f(\lambda)I + \frac{f'(\lambda)}{1!}J_n(0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}J_n^{n-1}(0) =$$
$$= \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ldots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & & & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Если, например, $f(z) = e^z$, то для $A = J_n(\lambda)$ имеем:
$$e^A = \begin{pmatrix} e^\lambda & \frac{1}{1!}e^\lambda & \ldots & \frac{1}{(n-1)!}e^\lambda \\ & e^\lambda & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}e^\lambda \\ 0 & & & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.7.9. *Функции от операторов обладают следующими свойствами.*

(i) *Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ и $f(z)$ — функция, определенная на спектре оператора A. Если $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, то*
$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_s)\}.$$

(ii) *Пусть* $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ *и* $f(z)$ *— функция, определенная на спектрах операторов* A *и* B. *Если операторы* A *и* B *подобны и* $A \overset{T}{\sim} B$, *то операторы* $f(A)$ *и* $f(B)$ *тоже подобны и*

$$f(A) \overset{T}{\sim} f(B).$$

(iii) *Если оператор* A *имеет в некотором базисе квазидиагональную матрицу*

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k,$$

и $f(z)$ *— функция, определенная на спектре оператора* A, *то*

$$f(A) = f(A_1) \oplus \cdots \oplus f(A_k).$$

Доказательство. (i). Пусть $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ и $f(z)$ — функция, определенная на $\sigma(A)$. В силу теоремы 5.2.3, для любого многочлена $p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ имеет место равенство:

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Так как $f(A) = r(A)$, где $r(z)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра, то

$$f(\lambda_k) = r(\lambda_k), \quad k = 1, \ldots, s$$

и потому

$$\sigma(f(A)) = \sigma(r(A)) = \{r(\lambda_1), \ldots, r(\lambda_s)\} = \{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_s)\}.$$

(ii). Так как операторы A и B подобны, то они имеют одинаковые минимальные многочлены:

$$Q_A(z) = Q_B(z).$$

Поэтому функция $f(z)$ принимает одни и те же значения на спектрах операторов A и B. Следовательно, существует такой интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра $r(z)$, что

$$f(A) = r(A), \quad f(B) = r(B).$$

Если $A \overset{T}{\sim} B$, то, в силу утверждения 2.5.7, для любого многочлена $p(z) \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ операторы $p(A)$ и $p(B)$ тоже подобны и

$$p(A) \overset{T}{\sim} p(B).$$

Поэтому
$$f(B) = r(B) = T^{-1}r(A)T = T^{-1}f(A)T,$$
т.е. операторы $f(A)$ и $f(B)$ подобны и
$$f(A) \overset{T}{\sim} f(B).$$

(iii). Пусть в некотором базисе
$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k,$$
и $f(z)$ — функция, определенная на спектре оператора A. Если $r(z)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра для функции $f(z)$ на спектре оператора A, то
$$f(A) = r(A) = r(A_1) \oplus \cdots \oplus r(A_k).$$
С другой стороны, минимальный многочлен $Q_A(z)$ является аннулирующим многочленом для каждого оператора A_1, …, A_k. Поэтому из равенства
$$f(\sigma(A)) = r(\sigma(A))$$
следует, что
$$f(\sigma(A_1)) = r(\sigma(A_1)), \quad \ldots, \quad f(\sigma(A_k)) = r(\sigma(A_k)).$$
Поэтому
$$f(A_1) = r(A_1), \quad \ldots, \quad f(A_k) = r(A_k)$$
и
$$f(A) = r(A) = f(A_1) \oplus \cdots \oplus f(A_k).$$ □

Непосредственно из теорем 6.5.1 и 6.7.9 получается важное следствие.

Следствие 6.7.10. *Пусть оператор $A \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ имеет k различных собственных значений:*
$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$$
и $f(z)$ — функция, определенная на спектре оператора A. Если
$$A \overset{T}{\sim} J(A)$$

и

$$J(A) = \underbrace{J_{p_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{p_1}(\lambda_1)}_{n_{1,1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{[\lambda_1] \oplus \dots \oplus [\lambda_1]}_{n_{1,p_1} - n_{1,p_1-1}} \oplus$$
$$\dots \oplus \underbrace{J_{p_k}(\lambda_k) \oplus \dots \oplus J_{p_k}(\lambda_k)}_{n_{k,1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{[\lambda_k] \oplus \dots \oplus [\lambda_k]}_{n_{k,p_k} - n_{k,p_k-1}},$$

то

$$f(A) = Tf(J(A))T^{-1} =$$
$$= T\Big(\underbrace{f(J_{p_1}(\lambda_1)) \oplus \dots \oplus f(J_{p_1}(\lambda_1))}_{n_{1,1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{[f(\lambda_1)] \oplus \dots \oplus [f(\lambda_1)]}_{n_{1,p_1} - n_{1,p_1-1}} \oplus$$
$$\dots \oplus \underbrace{f(J_{p_k}(\lambda_k)) \oplus \dots \oplus f(J_{p_k}(\lambda_k))}_{n_{k,1}} \oplus \dots \oplus \underbrace{[f(\lambda_k)] \oplus \dots \oplus [f(\lambda_k)]}_{n_{k,p_k} - n_{k,p_k-1}}\Big)T^{-1},$$

где каждый блок $f(J_m(\lambda_j))$ имеет вид:

$$f(J_{m_j}(\lambda_j)) = \begin{pmatrix} f(\lambda_j) & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} & \dots & \frac{f^{(m_j-1)}(\lambda_j)}{(m_j-1)!} \\ & f(\lambda_j) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{f'(\lambda_j)}{1!} \\ 0 & & & f(\lambda_j) \end{pmatrix}.$$

Упражнение 6.7.11. Проверьте следующие свойства.

- Доказать, что $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$.
- Доказать, что если $[A, B] = AB - BA = 0$, то $e^{A+B} = e^A e^B$.

Исследуем вид интерполяционного многочлена Лагранжа–Сильвестра $r(z)$ в зависимости от структуры спектра оператора A. Считаем как и выше, что минимальный многочлен оператора A имеет вид:

$$Q_A(z) = \psi(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_s)^{m_s}$$

и его степень равна

$$m_1 + \dots + m_s = m \leqslant n = \dim \mathbf{V}.$$

Случай 1. Характеристический многочлен $P_A(z)$ не имеет кратных корней. В этом случае оператор A имеет n различных собственных значений:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Тогда $m = n$, $m_1 = \dots = m_n = 1$,

$$Q_A(z) = (z - \lambda_1)\dots(z - \lambda_n),$$

и

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $r(z)$ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(z)$ в точках λ_1, ..., λ_n:

$$r(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(z - \lambda_1)\dots(z - \lambda_{k-1})(z - \lambda_{k+1})\dots(z - \lambda_n)}{(\lambda_k - \lambda_1)\dots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})\dots(\lambda_k - \lambda_n)} f(\lambda_k),$$

и тогда

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A - \lambda_1 I)\dots(A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I)\dots(A - \lambda_n I)}{(\lambda_k - \lambda_1)\dots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})\dots(\lambda_k - \lambda_n)} f(\lambda_k).$$

Случай 2. Характеристический многочлен $P_A(z)$ имеет кратные корни, но минимальный многочлен не имеет кратных корней. Пусть оператор A имеет m различных собственных значений:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\},$$

минимальный многочлен имеет вид

$$Q_A(z) = (z - \lambda_1)\dots(z - \lambda_m),$$

и

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad k = 1, \dots, m.$$

Следовательно, $r(z)$ и в этом случае совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(z)$ в точках λ_1, ..., λ_m:

$$r(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(z - \lambda_1)\dots(z - \lambda_{k-1})(z - \lambda_{k+1})\dots(z - \lambda_m)}{(\lambda_k - \lambda_1)\dots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})\dots(\lambda_k - \lambda_m)} f(\lambda_k),$$

и тогда

$$f(A) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(A - \lambda_1 I)\dots(A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I)\dots(A - \lambda_m I)}{(\lambda_k - \lambda_1)\dots(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1})\dots(\lambda_k - \lambda_m)} f(\lambda_k).$$

Случай 3. Общий случай. Пусть характеристический многочлен оператора A имеет вид:

$$P_A(z) = (-1)^n (z-\lambda_1)^{k_1} \dots (z-\lambda_s)^{k_s},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — попарно различные собственные значения, кратности которых равны $k_1, \dots, k_s$ и

$$k_1 + \dots + k_s = n = \dim \mathbf{V},$$

а минимальный многочлен имеет вид:

$$Q_A(z) = \psi(z) = (z-\lambda_1)^{m_1} \dots (z-\lambda_s)^{m_s},$$
$$m_1 + \dots + m_s = m \leqslant n = \dim \mathbf{V}.$$

Разложим правильную рациональную дробь $\frac{r(z)}{\psi(z)}$ на простейшие:

$$\frac{r(z)}{\psi(z)} = \sum_{k=1}^{s} \Big[\frac{\alpha_{k1}}{(z-\lambda_k)^{m_k}} + \dots + \frac{\alpha_{k,m_k}}{z-\lambda_k} \Big]. \tag{6.3}$$

Обозначим

$$\psi_k(z) = \frac{\psi(z)}{(z-\lambda_k)^{m_k}}.$$

Умножая обе части равенства (6.3) на $(z-\lambda_k)^{m_k}$, получим:

$$\frac{r(z)}{\psi_k(z)} = \alpha_{k1} + \alpha_{k2}(z-\lambda_k) + \dots + \alpha_{k,m_k}(z-\lambda_k)^{m_k-1} + (z-\lambda_k)^{m_k} R_k(z), \tag{6.4}$$

$k = 1, \dots, s$, где функция $R_k(z)$ определена в точке $z = \lambda_k$. Подставляя в обе части равенства (6.4) $z = \lambda_k$, получим:

$$\alpha_{k1} = \Big[\frac{r(z)}{\psi_k(z)} \Big]_{z=\lambda_k}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Дифференцируя равенство (6.4) последовательно и подставляя в обе части полученных равенств $z = \lambda_k$, получим

$$\alpha_{k2} = \Big[\frac{r(z)}{\psi_k(z)} \Big]'_{z=\lambda_k}, \quad \dots, \quad \alpha_{k,m_k} = \frac{1}{(m_k-1)!} \Big[\frac{r(z)}{\psi_k(z)} \Big]^{(m_k-1)}_{z=\lambda_k}, \quad k = 1, \dots, s.$$

Коэффициенты $\alpha_{k,j}$, $j = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, s$ выражаются через значения многочлена $r(z)$ на спектре оператора A, которые совпадают с соответствующими значениями функции $f(z)$ и ее производных. Поэтому

$$\alpha_{k1} = \left[\frac{f(z)}{\psi_k(z)}\right]_{z=\lambda_k}, \quad \alpha_{k2} = \left[\frac{f(z)}{\psi_k(z)}\right]'_{z=\lambda_k}, \quad \ldots,$$
$$\alpha_{k,m_k} = \frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{f(z)}{\psi_k(z)}\right]^{(m_k-1)}_{z=\lambda_k}, \quad k = 1,\ldots,s,$$

и

$$r(z) = \sum_{k=1}^{s}\left[\alpha_{k1} + \alpha_{k2}(z-\lambda_k) + \cdots + \alpha_{k,m_k}(z-\lambda_k)^{m_k-1}\right]\psi_k(z).$$

Следовательно,

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s}\left[\alpha_{k1}I + \alpha_{k2}(A-\lambda_k I) + \cdots + \alpha_{k,m_k}(A-\lambda_k I)^{m_k-1}\right]\psi_k(A).$$

Литература

[1] Р. Белман. *Введение в теорию матриц* — Москва: Наука, 1969. — 368 с.

[2] В. В. Воеводин. *Линейная алгебра* — Москва: Наука, 1974. — 336 с.

[3] Ф. Р. Гантмахер. *Теория матриц* — Москва: Наука, 1966. — 576 с.

[4] И. М. Гельфанд. *Лекции по линейной алгебре* — Москва: Наука, 1966. — 280 с.

[5] И. М. Глазман, Ю. И. Любич. *Конечномерный линейный анализ* — Москва: Наука, 1969. — 476 с.

[6] Л. И. Головина. *Линейная алгебра и некоторые ее приложения.* — Москва: Наука, 1979. — 392 с.

[7] А. И. Кострикин. *Введение в алгебру.* — Москва: Наука, 1977. — 495 с.

[8] М. Ф. Кравчук, Я. С. Гольдбаум. Про групи комутативних матриць. *Тр. КАІ*, т. 5, 1936, с. 12-23.

[9] П. Ланкастер. *Теория матриц* — Москва: Наука, 1978. — 280 с.

[10] А. И. Мальцев. *Основы линейной алгебры* — Москва: Наука, 1975. — 400 с.

[11] В. С. Мазорчук. *Жорданова нормальна форма* — Киев: РВЦ “Київський університет”, 1998. — 119 с.

[12] В. В. Прасолов. *Задачи и теоремы линейной алгебры* — Москва, 2008. — 536 с.

[13] Д. К. Фаддеев. *Лекции по алгебре* — Москва: Наука, 1984. — 416 с.

[14] П. Р. Халмош. *Гильбертово пространство в задачах* — Москва: Мир, 1970. — 352 с.

[15] П. Р. Халмош. *Конечномерные векторные пространства* — Москва: Физматгиз, 1963. — 264 с.

[16] Р. Хорн, Ч. Джонс. *Матричный анализ* — Москва: Мир, 1989. — 656 с.

[17] В. С. Чарин. *Линейные преобразоваия и выпуклые можества* — Киев: Вища школа, 1978. — 192 с.

[18] Г. Е. Шилов. *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства* — Москва: Наука, 1969. — 432 с.

Предметный указатель

$\mathcal{B}(\mathbf{V})$, 30, 46
$\mathbb{C}(a,b)$, 8
$\mathbb{C}^n$, 7
$\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, 43
def A, 33
dim($\mathbf{V}$), 13
Ker A, 31
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, 8, 42
$\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, 8
$\mathcal{P}(\mathbb{C})$, 8
$\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, 8, 42
Ran A, 31
rg A, 33
$\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, 43
$\mathbf{T}_n(\mathbb{C})$, 43

Автоморфизм
  алгебры, 46
    внутренний, 52
Алгебра, 41
  $\mathbf{T}_n(\mathbb{C})$, 43
  $\mathcal{B}(\mathbf{V})$, 30, 46
  $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, 43
  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, 42
  $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$, 42
  $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$, 43
  абелева, 42
  автоморфизм, 46
    внутренний, 52
  гомоморфизм, 45
  изомоморфизм, 45
  коммутативная, 42
  многочленов, 42
  мономорфизм, 45
  некоммутативная, 42
  патологическая, 42
  простая, 51
  размерность, 42
  с единицей, 42
  тривиальная, 42
  центр, 42
  элемент
    обратимый, 46
    обратный, 46
  эпиморфизм, 45

Базис
  векторного пространства, 10
  Жордана, 118, 119
  мультипликативный, 50
  собственный, 68
  сопряженный, 25
  треугольного представления, 91
  Шура, 91

Вектор, 7
  координаты, 11
  корневой, 101
  линейная комбинация, 9
  присоединенный
    1-го порядка, 79
    k-го порядка, 80
  сравнимый по модулю, 21
Векторное пространство

$\mathbb{C}(a,b)$, 8
$\mathbb{C}^n$, 7
$\mathcal{M}_n$, 8
$\mathcal{M}_{n,m}$, 8
$\mathcal{P}$, 8
$\mathcal{P}_n$, 8
n-мерное, 13
базис, 10
бесконечномерное, 11
конечномерное, 11
нуль, 6
подпространство, 14
размерность
dim($\mathbf{V}$), 13
векторная, 13
элемент
нулевой, 6
противоположный, 7
Векторы
линейно зависимые, 9
линейно независимые, 9
подсистема, 10
система, 10
Вложение, 46

Гомоморфизм
алгебр, 45

Жордана
базис, 118, 119
матрица, 118, 119
нормальная форма, 119

Идеал
двусторонний, 43
левый, 43
правый, 43
собственный, 43
Идемпотент, 48
Изоморфизм
алгебр, 45
канонический, 27
Инволюция, 75

Канонический базис
$\mathbb{C}^n$, 13
$\mathcal{P}[\mathbb{C}]$, 14
$\mathcal{P}_n[\mathbb{C}]$, 14
Коммутатор, 47

Линейная комбинация
векторов, 9
нетривиальная, 9
тривиальная, 9
Линейная оболочка
множества, 10
Линейный функционал, 24

Матрица
верхнетреугольная, 91, 128
тёплицева, 43
Жордана, 118, 119
линейного оператора, 36
невырожденная, 38
подобная, 39
тёплицева, 128
Фробениуса, 64
Матричная единица, 50
Многочлен
аннулирующий, 102
вектора, 106
Лагранжа-Сильвестра, 139
минимальный, 105
вектора, 106
операторный, 86
от оператора, 86
характеристический, 62
Множество
линейная оболочка, 10
линейно зависимое, 10

линейно независимое, 10
Мономорфизм
алгебр, 45

Оператор
$p(A)$, 31
базис Жордана, 118, 119
дефект def A, 33
дифференцирования, 29
единичный, 29
идемпотентный, 48
индуцированный, 60, 72
интегрирования, 29
коммутатор, 47
коммутирующий, 47
корень из единицы, 70
левого сдвига, 29
линейный, 28
матрица, 36
нильпотентный, 92
нормальная форма, 118, 119
нулевой, 29, 31, 47
образ Ran A, 31
обратимый, 34
обратный, 34
одноточечный, 77
подобный, 39
порождающий, 72
правого сдвига, 29
проектирования, 48
простой структуры, 68
спектральная теорема, 69
спектральное разложение, 107
прямая сумма, 96
тривиальная, 96
разложение
Данфорда, 120
спектральное, 101
разложимый, 57, 97
ранг rg A, 33
с простым спектром, 133
скалярного типа, 68
скалярный, 69
собственное значение, 61
собственный вектор, 61
сосредоточен в точке, 77
спектр, 73
степень, 31
сужение на подпространство, 60, 72
тождественный, 29, 30, 47
умножения на t, 29
число
характеристическое, 61
ядро Ker A, 31

Подалгебра, 41
Подпространство, 14
инвариантное, 56
тривиальное, 56
корневое, 101
пересечение, 15, 18
порожденное, 15
прямая сумма, 16
собственное, 77
сумма, 18
флаг, 16
циклическое, 113
Представление
треугольное, 91
Шура, 91
Проектор, 48
Пространство
n-мерное, 13
бесконечномерное, 11
векторное, 6
$\mathbb{C}(a, b)$, 8
$\mathbb{C}^n$, 7

$\mathcal{M}_n$, 8
$\mathcal{M}_{n,m}$, 8
$\mathcal{P}$, 8
$\mathcal{P}_n$, 8
нулевой элемент, 6
противоположный элемент, 7
векторное сопряженное, 25
конечномерное, 11
линейное, 6
подпространство, 14
размерность, 13
сопряженное, 25

Размерность
алгебры, 42

Свойство (П), 70
Скаляр, 7
След
матрицы, 64
оператора, 64
Смежный класс, 22
Собственное значение
кратность
алгебраическая, 100
геометрическая, 77

Уравнение
вековое, 62
характеристическое, 62

Фактор-алгебра, 45
Фактор-оператор, 60
Факторпространство, 23
Формула
Грассмана, 18
дополнения, 24
Функция
значения на спектре, 137
определенная на спектре, 137
от оператора, 137

Центр
алгебры, 42
Цепь
подпространств, 16
максимальная, 16

Элемент алгебры
обратимый, 46
обратный, 46
Эпиморфизм
алгебр, 45

Учебное издание

Мустафа Абдурешитович Муратов
Василий Львович Островский
Юрий Стефанович Самойленко

Конечномерный линейный анализ
I. Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах (L)

Учебное пособие

Руководитель издательских проектов — Б.А. Сладкевич

Подписано в печать 1.03.2011. Формат 70x100/16. Печать офсетная. Гарнитура Computer Modern. Тираж 500.

Издательство “Центр учебной литературы”. ул. Электриков, 23, г. Киев, 04176
Тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
800-50168-00 (бесплатно в пределах Украины)
e-mail: office@uabook.com
http://www.cul.com.ua
Свидетельство ДК №2458 от 30.03.2006