Лекція 2
Розділ 2. Диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної
2.1. Поняття диференціального рівняння, його порядок.

<u>Означення 2.1.</u> Рівняння вигляду

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

називається диференціальним рівнянням (наявність похідних тут обов'язкова).

<u>Означення 2.2.</u> Найбільший порядок похідної, яка входить в диференціальне рівняння (2.1) називається порядком диференціального рівняння.

<u>Означення 2.3.</u> Функція $y(x)$ називається розв'язком (або інтегралом) диференціального рівняння (2.1), якщо вона *n*-раз неперервно-диференційована на деякому інтервалі $(a,b) = I$ і задовольняє диференціальному рівнянню (2.1) $\forall\ x \in I$.

<u>Приклад 2.1.</u> $y'' + 3xy' + 2y = x^2$ - диференціальне рівняння другого порядку.

При $n = 1$ диференціальне рівняння (2.1) називається диференціальним рівнянням першого порядку і позначається

$$F(x, y, y') = 0 \ . \qquad (2.2)$$

Диференціальне рівняння (2.2) називається розв'язаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \ . \qquad (2.3)$$

Припускаємо, що $f(x, y)$ однозначна і неперервна в деякій області *D* змінних *x*,*y*. Цю область називають областю визначення диференціального рівняння (2.3).

Якщо в деякій області функція $f(x, y)$ перетворюється в ∞, то розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \ .$$

Множину таких точок, а також тих, в яких $f(x, y)$ не визначена, але може бути довизначена до неперервності, будемо приєднувати до області визначення диференціального рівняння (2.3).

Поряд з (2.3) будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціалах

$$dy - f(x, y)dx = 0, \qquad (2.4)$$

або в більш загальному виді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (2.5)$$

Інколи розглядатимемо диференціальне рівняння в симетричній формі

$$\frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)} \qquad (2.6)$$

Функції $M(x,y), \mathrm{N(x,y), X(x,y), Y(x,y)}$ будемо вважати неперервними в деякій області.

Означення 2.4. Розв'язком диференціального рівняння (2.3) в інтервалі I назвемо функцію $y=\varphi(x)$, визначену і неперервно-диференційовану на *I*, яка не виходить з області означення функції $f(x,y)$ і яка перетворює диференціальне рівняння (2.3) в тотожність $\forall\ x \in I$, тобто

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)), \quad \mathrm{x \in I}$$

Розв'язок $y=\varphi(x)$ називається розв'язком, записаним в явній формі (вигляді).

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням.

Не завжди можна отримати розв'язок в явному вигляді.

Означення 2.5. Будемо говорити, що рівняння

$$\Phi(x,y)=0 \tag{2.7}$$

визначає в неявній формі розв'язок диференціального рівняння (2.3), якщо воно визначає $y=y(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння (2.3).

При цьому на розв'язках диференціального рівняння (2.3) виконується

$$\Phi'_x(x,y)+\Phi'_y(x,y)\frac{dy}{dx}=\Phi'_x(x,y)+\Phi'_y(x,y)f(x,y)\equiv 0, \ \ \mathrm{x \in I}\ . \tag{2.8}$$

Означення 2.6 Будемо говорити, що співвідношення

$$x=\varphi(t), \ \mathrm{y}=\psi(\mathrm{t}) \tag{1.9}$$

визначають розв'язок диференціального рівняння (2.3) в параметричній формі на інтервалі (t_0,t_1), якщо

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f(\varphi(t),\psi(t)), \quad \mathrm{t \in (t_0, t_1)} \quad . \tag{2.10}$$

2.2. Задача Коші.

Розглянемо диференціальне рівняння (2.3). Задача Коші заключається в тому, щоб серед всіх розв'язків диференціального рівняння (2.3) знайти такий $y=y(x)$, який проходить через задану точку

$$y(x_0)=y_0 \tag{2.11}$$

Тут x_0 - початкове значення незалежної змінної, y_0 - функції.

Розв'язати задачу Коші з геометричної точки зору означає (рис. 2.1) : знайти серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння (2.3) ту, яка проходить через задану точку $M(x_0,y_0)$.

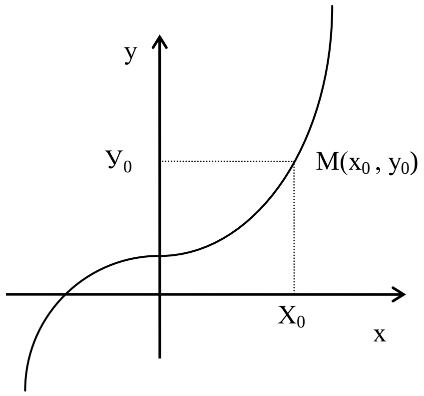

Рис. 2.1.

<u>Означення 2.7.</u> Будемо говорити, що задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний розв’язок, якщо $\exists$ число $h>0$, що на відрізку $|x-x_0|\le h$ визначений розв’язок $y=y(x)$ такий, що $y(x_0)=y_0$ і не існує другого розв’язку, визначеного в цьому ж інтервалі $|x-x_0|\le h$ і не співпадаючого з розв’язком $y=y(x)$ хоча б в одній точці інтервалу $|x-x_0|\le h$, відмінній від точки $x=x_0$.

Якщо задача Коші (2.3), (2.11) має не один розв’язок або ж зовсім його не має, то говорять, що в точці (x_0, y_0) порушується єдиність розв’язку задачі Коші.

При постановці задачі Коші ми припускаємо, що x_0, y_0 - обмежені числа, а диференціальне рівняння (2.3) в точці (x_0, y_0) задає деякий напрямок поля, який не паралельний осі ОУ.

Якщо права частина диференціального рівняння (2.3) в точці М приймає нескінченне значення, необхідно розглянути диференціальне рівняння (2.3) і знайти розв’язок $x=x(y)$ (рис. 2.2)

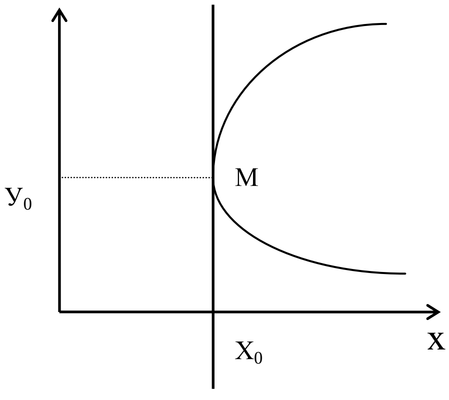

Рис. 2.2

Якщо ж в точці М права частина диференціального рівняння (2.3) має невизначеність, наприклад, типу $\frac{0}{0}$, тоді звичайна постановка задачі Коші не має смислу, так як через точку М не проходить жодна інтегральна крива. В цьому випадку задача Коші ставиться так : знайти розв’язок $y=y(x)$ (або

$x = x(y)$), який примикає до точки М.

В деяких випадках треба шукати розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умовам $y \to y_0 \neq \infty$ при $x \to \infty$; $y \to \infty$ при $x \to x_0 \neq \infty$ і т.д.

Теорема Пікара. (без доведення) Припустимо, що функція $f(x, y)$ в диференціальному рівнянні (2.3) визначена і неперервна в обмеженій області

$$D = \{x, y : |x - x_0| \le a; |\mathrm{y} - \mathrm{y}_0| \le b\} \ (\mathrm{a} > 0, \mathrm{b} > 0)$$

і, отже, вона є обмеженою

$$|f(x, y)| \le M, \quad \forall(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{D} \quad (\mathrm{M} > 0); \tag{2.12}$$

функція $f(x, y)$ має обмежену частинну похідну по *у* на *D*

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \le K, \ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{D} \quad (\mathrm{K} > 0) \quad . \tag{2.13}$$

При цих умовах задача Коші (2.3), (2.11) має єдиний неперервно-диференційований розв'язок в інтервалі

$$|x - x_0| \le h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}. \quad (2.14$$

Зауваження 2.1. В сформульованій теоремі умову (2.13) можна послабити (замінити) на те, щоб функція $f(x, y)$ по змінній *у* задовольняла умові Ліпшіца, тобто

$$\left|f(x, y^{(1)}) - f(x, y^{(2)})\right| \le L\left|y^{(1)} - y^{(2)}\right| \qquad \forall(\mathrm{x}, \mathrm{y}^{(1)}) \text{ і } (\mathrm{x}, \mathrm{y}^{(2)}) \in \mathrm{D} . \tag{2.15}$$

Тут *L>0* - найменша константа яка задовольняє (2.15) і називається константою Ліпшиця .

Теорема Пеано. (про існування розв'язку). Якщо функція $f(x, y)$ є неперервною на *D*, то через кожну точку $(x_0, y_0) \in D$ проходить, по крайній мірі, одна інтегральна крива.

Якщо функція диференційована і задовольняє (2.13), то вона задовольняє умові Ліпшиця, з *L*=*K*.

Функція може задовольняти умові Ліпшиця, але не бути диференційованою і, отже, не буде задовольняти (2.13). Наприклад, $y = |x| \ (\mathrm{L} = 1)$.

2.3. Поняття загального розв'язку, форми його запису.

На прикладах можна переконатися, що диференціальне рівняння (2.3) має нескінченну множину розв'язків, яка залежить від деякого параметру c

$$y = u(x, c). \tag{2.16}$$

Це сімейство і називається загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3). При кожному c (2.16) дає інтегральну криву.

Для розв'язування задачі Коші (2.3), (2.11) параметр *с* можна знайти з рівняння $y_0 = u(x_0, c)$.

Дамо точне визначення загального розв'язку. Припустимо, що на *D* виконуються умови теореми Пікара.

Означення 2.8. Функцію

$$y=\varphi(x,c), \qquad (2.17)$$

визначену в деякій області змінних x і c, і яка має неперервну частинну похідну по x будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) в області D, якщо рівняння (2.17) можна розв'язати відносно c в області D

$$c=\psi(x,y) \qquad (2.18)$$

і функція (2.17) є розв'язком диференціального рівняння (2.3) при всіх значеннях довільної сталої c, які визначаються формулою (2.18) коли $(x,y)\in D$.

Суть означення 2.8 в наступному. Припустимо, що задано сімейство кривих F на області D, яке залежить від одного параметра C. Якщо будь-яка крива із F є інтегральною кривою диференціального рівняння (2.3) і всі криві із F в сукупності покривають D, то F є розв'язком диференціального рівняння (2.3) в області D (рис. 2.3).

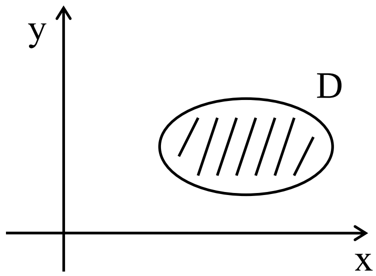

Рис. 2.3

Для розв'язування задачі Коші константу C
можна знайти згідно

$$C_0=\psi(x_0,y_0)\ . \qquad (2.18)$$

Інколи в формулі (2.17) роль C грає y_0, тоді говорять, що розв'язок представлений у формі Коші

$$y=y(x,x_0,y_0)\ . \qquad (2.19)$$

<u>Приклад 2.2.</u> Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},\ y(x_0)=y_0$$

у формі Коші. Загальний розв'язок $y=Cx,\ 0<x<\infty,\ -\infty<y<+\infty$. В указаній області виконуються умови теореми Пікара. Звідки

$C=\frac{y}{x},\quad C_0=\frac{y_0}{x_0},\qquad y=\frac{y_0}{x_0}x$ - розв'язок в формі Коші.

В більшості випадків при інтегруванні диференціального рівняння (2.3) ми отримуємо загальний розв'язок в неявній формі

$$\Phi(x,y,C)=0\ \ (\text{або}\ \psi(x,y)=C)\ , \qquad (2.20)$$

який називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2.3).

<u>Означення 2.9.</u> Будемо називати співвідношення (2.20) загальним розв'язком в неявній формі або загальним інтегралом в області D, якщо співвідношенням (2.20) визначається загальний розв'язок (2.17) диференціального рівняння (2.3) в області D.

З означення випливає, що (2.18) - загальний інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

Інколи при інтегруванні отримуємо сімейство інтегральних кривих, залежне від *C*, в параметричній формі.

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C) \\ y = \psi(t, C) \end{cases}. \tag{2.21}$$

Таке сімейство інтегральних кривих будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (2.3) в параметричній формі.

Якщо в (2.21) виключити *t*, то отримаємо загальний розв'язок в неявній або явній формі.

2.4. Частинні і особливі розв'язки. Знаходження кривих, підозрілих на особливість розв'язку, по диференціальному рівнянню

<u>Означення 2.10.</u> Розв'язок, який складається з точок єдиності розв'язку задачі Коші називається частинним і його можна отримати з загального при фіксованому *C*.

Розв'язок задачі Коші, який задовольняє теоремі Пікара, є частинний розв'язок.

<u>Означення 2.11.</u> Розв'язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, будемо називати особливим.

Геометрично особливому розв'язку відповідають інтегральні криві, які не містяться в загальному розв'язку. Тому особливий розв'язок не може існувати всередині області *D* існування загального розв'язку. Його не можна отримати з формули загального розв'язку ні при яких числових значеннях *C*, включаючи $\pm\infty$. Його можна отримати з загального розв'язку лиш при $C = C(x)$.

Існують ні частинні ні особливі розв'язки. Їх можна отримати шляхом склеювання кусків частинних і особливих розв'язків.

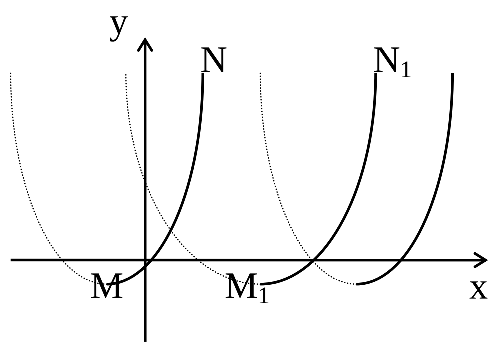

Рис. 2.4

<u>Приклад 2.3.</u> Знайти особливий розв'язок диференціального рівняння

$$y' = 2\sqrt{y}\ ,$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx\,, \quad \mathrm{y} = (\mathrm{x} + \mathrm{C})^2, \quad \mathrm{x} + \mathrm{C} \ge 0\ .$$

Отримали загальний розв'язок в області $-\infty < x < \infty,\ 0 < \mathrm{y} < \infty,$ в якій виконуються умови теореми Пікара. Але розв'язком буде $y=0$, який ми отримуємо при $C=-x$. Він не міститься в загальному розв'язку при жодному фіксованому *C*. Отже, згідно означення $y(0)\equiv 0$ - особливий розв'язок.

Якщо $f(x,y)$ неперервна на *D*, то умови підозрілі на особливий розв'язок : необмеженість похідної $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Знайшовши таку криву в подальшому треба переконатися :

1) вона являється інтегральною кривою;
2) перевірити, що в кожній її точці порушується єдиність розв'язку.

В прикладі 2.2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{y}}\equiv\infty$ при $y\equiv 0$. Оскільки $y=0$ - розв'язок і через нього проходять інтегральні криві з загального розв'язку, то $y\equiv 0$ - особливий розв'язок.

<u>Приклад 2.4.</u> Розглянемо диференціальне рівняння

$$y'=2\sqrt{y}+1,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\equiv\infty$$

при $y\equiv 0$. Але $y\equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння, тому і не є особливим розв'язком.

Припустимо, що диференціальне рівняння має одно-параметричне сімейство інтегральних кривих $\Phi(x,y,C)=0$. Тоді, якщо це сімейство має обвідну, тобто лінію, яка в кожній точці дотикається сімейства і ні на якому участку не співпадає ні з одною кривою сімейства. Ця обвідна і буде особливим розв'язком. Дійсно через довільну її точку проходить по крайній мірі два розв'язки : обвідна і сам розв'язок.

2.5. Два означення інтегралу. Теореми про загальний вигляд інтегралу та залежність двох інтегралів одного диференціального рівняння.

Нехай

$$y=\varphi(x,C) \tag{2.22}$$

загальний розв'язок загального диференціального рівняння (2.3) в області *D*, в якій виконуються умови теореми Пікара. Тоді на *D* рівняння (2.22) можна розв'язати відносно *C*

$$\psi(x,y)=C\ . \tag{2.23}$$

Функція $\psi(x,y)$ приймає постійні значення на довільному частинному розв'язку з *D*, причому значення постійної визначається частинним розв'язком

$$\psi(x,\varphi(x,C))=C\ . \tag{2.24}$$

<u>Означення 2.12.</u> (перше означення інтегралу) Функція $f(x,y)$, визначена на *D* і яка не зводиться до константи, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*, якщо на довільному частинному розв'язку з *D*, ця функція приймає постійні значення.

Припустимо, що $\psi(x,y)$ - диференційована функція. Тоді на довільному частинному розв'язку

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=0 \qquad (2.25)$$

або

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}f(x,y)dx=0 \qquad (2.26)$$

При цьому $\frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ на *D* так як в противному $\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$. А це означає, що поле диференціального рівняння (2.3) в відповідній точці не задано.

Означення 2.13. (друге означення інтегралу). Функція $\psi(x,y)$, визначена і неперервна з частинними похідними в області *D* і така, що $\frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ в області *D*, називається інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*, якщо повний її диференціал, взятий в силу диференціального рівняння (2.3), тотожно дорівнює нулю в області *D*.

З (2.26) випливає, що

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}f(x,y) \qquad (2.27)$$

Функція, яка є інтегралом в смислі означення 2.12 буде інтегралом і в смислі означення 2.13. Навпаки не завжди так.

Якщо диференціальне рівняння (2.3) має один інтеграл, то воно має безліч інтегралів.

Теорема 2.1. (про загальний вигляд інтегралу) Якщо $\psi_1(x,y)$ інтеграл диференціального рівняння (2.3) в області *D* і функція $\psi_1(x,y)$ диференційована в *D*, а $\Phi(z)$ - довільна функція визначена і неперервно-диференційована в області зміни функції $\psi_1(x,y)$ коли $(x,y)\in D$, то

$$\psi(x,y)=\Phi(\psi_1(x,y)) \qquad (2.28)$$

є інтегралом диференціального рівняння (2.3) в області *D*.

Доведення.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y},$$

причому $\frac{\partial\psi}{\partial y}\neq 0$ в області *D*. Маємо

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=\frac{d\Phi}{d\psi_1}\quad \mathrm{d}\psi_1\equiv 0 \qquad (2.29)$$

З (2.29) випливає, що $\psi(x,y)$ - інтеграл диференціального рівняння (2.3) згідно означення.

Теорема 2.2. (про залежність двох інтегралів) Нехай $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ два інтеграли диференціального рівняння (2.3). Тоді існує неперервно диференційована функція *F*, що

$$\psi_2(x,y)=F(\psi_1(x,y)) \,. \qquad (2.30)$$

Доведення. Оскільки $\psi_1(x,y)$ і $\psi_2(x,y)$ інтеграли, то

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\underbrace{f(x,y)dx}_{dy} = 0 \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\underbrace{f(x,y)dx}_{dy} = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

З (2.31) випливає, що

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (2.32)$$

Формально (2.32) можна отримати визначаючи *dy* з одного рівняння системи (2.31) і підставляючи в друге рівняння. З функціонального аналізу відомо, що з умови (2.32) витікає (2.30).