Лекція 4

Умовна ймовірність, Незалежніть подій

Нехай проводиться n експериментів, n_B - число експериментів, у яких відбулась подія *B*. Нехай серед n_B експериментів разом з B подія *A* відбулась n_{AB} разів. Частотою події *A* по відношенню до експериментів з наслідком *B* є відношення

$$h_n(A/B) = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \frac{h_n(AB)}{h_n(B)}.$$

Ця формула є підґрунтям наступного визначення.

<u>В и з н а ч е н н я.</u> Якщо подія *B* така, що $P(B) > 0$, то ***умовна ймовірність*** події *A* при умові, що відбулась подія *B*, дорівнює

$$P(A/B) \overset{def}{=} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \qquad (1)$$

<u>П р и к л а д 1</u>. Підкинули два гральних кубика. Чому дорівнює ймовірність того, що сума очок дорівнює 8 (подія *A*), якщо відомо, що ця сума є парне число (подія *B*)?

$\Omega = \{(i,j); i = \overline{1,6}; j = \overline{1,6}\}$, $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$, $B = \{(i,j); i + j = 2k, k = \overline{1,6}\}$, $|B| = 18$

$A = \{(i,j); i + j = 8\} = \{(2,6);(6,2);(3,5);(5,3);(4,4)\}$

$P(A) = 5/36$, $P(B) = 1/2$, тому за формулою (1) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{5/36}{1/2} = \frac{5}{18}$.

Для ***умовної ймовірністі*** $P(A/B)$ будемо також використовувати позначення $P_B(A)$. При фіксованому *B* $P_B(\cdot)$ має усі властивості ймовірності:

1) $P_B(A) \geq 0$;

2) $P_B(\Omega) = 1$;

3) $P_B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P_B\left(A_n\right)$, якщо $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\in U$ і $A_i \cap A_j=\varnothing,\quad i\neq j$.

Для $P_B(\cdot) = P(\cdot/B)$ також справедливі наслідки 1, 2 з аксіом.

Рівність (1) можна подати у вигляді

$$P(A\cdot B) = P(B)\, P(A/B). \tag{2}$$

Методом математичної індукції неважко цю рівність узагальнити

$$P(A_n A_{n-1} .. A_1) = P(A_n/A_{n-1}...A_1)\, P(A_{n-1}/A_{n-2}...A_1)...P(A_2/A_1)P(A_1),$$

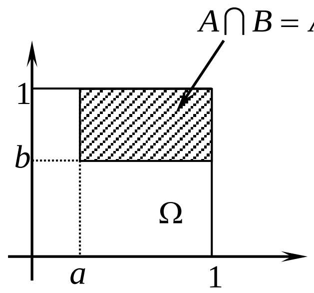
якщо $P(A_{n-1}\cdot ...\cdot A_1) \neq 0$.

Події А і В будемо називати ***незалежними,*** якщо $P(AB)=P(A)P(B)$.

<u>Приклад 2.</u> Нехай подія A полягає у тому, що навмання кинута у квадрат з стороною 1 точка впала в область, що лежить вправо від абсциси a, подія B – у тому, що точка впала в область, що лежить вище ординати b. Очевидно, що

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B).$$

Останнє співвідношення підтвердити наступним рисунком



A

<u>Властивості незалежних подій:</u>

1. Якщо $P(B)>0$, і A, B – незалежні, тоді $P(A/B)=P(A)$.

2. Якщо A і B – незалежні, то незалежними будуть $\overline{A}$ і B, A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ (властивість спадковості).

<u>В и з н а ч е н н я.</u> Події $B_1,...,B_n$ ***незалежні у сукупності,*** якщо для будь-яких індексів $1 \le i_1 < ... < i_r \le n$ $\quad P(B_{i_1} \cap ... \cap B_{i_r}) = \prod_{k=1}^{r} P\left(B_{i_k}\right)$.

<u>П р и к л а д 3 (С. Н. Б е р н ш т е й н).</u> Стохастичний експеримент полягає у тому, що на площину кидається тетраедр. Три грані тетраедра пофарбовані відповідно у червоний, синій і зелений колір, а на четверту нанесені усі три кольори. Нехай A – подія, яка полягає у тому, що при підкиданні тетраедра на площину впала грань, яка має червоний колір, подія B – синій колір, подія C – зелений колір. Треба дослідити систему подій A, B, C на незалежність.

Перевіримо, що A, B, C – попарно незалежні, але не є незалежними у сукупності.

Дійсно

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(B) = P(C)\,,$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A \cap C) = P(C \cap B) = P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(C)P(B)\,,$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \ne P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}\,.$$