Лекція 3. Логічна форма функції вибору (ЛФФВ).

Функція вибору, яка визначена на множині з n елементів, має множину визначення з 2^n елемента (кількість підмножин). Уже для досить малого n представлення функції вибору є дуже громіздким.

Зручним апаратом для представлення довільної функції вибору є булеві функції.

Нехай $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$, $X \subseteq \Omega$. Визначимо для кожної підмножини $X \subseteq \Omega$ характеристичну вектор-функцію $\beta(X) = (\beta_1(X), ..., \beta_n(X))$, компоненти якого визначаються наступним чином

$$\beta_i(X) = \begin{cases} 1, & x_i \in X, \\ 0, & x_i \notin X. \end{cases}$$

Розглянемо множину з n бульових функцій від $n-1$ змінної $f_1(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}), ..., f_n(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}))$, які будуються за наступним правилом:

$$\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X) \Leftrightarrow \beta_i(C(X)) = 1;$$

де

$$f_i(\beta) = f_i(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, ..., \beta_n),\ i \neq 1, n;$$

$$f_1(\beta) = f_1(\beta_2, ..., \beta_n),\ f_n(\beta) = f_n(\beta_1, ..., \beta_{n-1}).$$

Означення. Логічною формулою функції вибору C називається сімейство функцій $(f_1, ..., f_n)$ від $n-1$ змінних, яка побудована за C з допомогою заданих формул. Задання функції вибору еквівалентно заданню ЛФФВ.

За логічною формою функції вибору легко отримати формулу для кількості всіх функцій вибору, заданих на множині Ω з n елементів. Очевидно, що різних бульових функцій від *n-1* змінної $2^{2^{n-1}}$ (кількість наборів змінних довжини *n-1* дорівнює 2^{n-1}, на кожному наборі функція приймає 2 значення), логічна форма функції вибору містить n функцій, отже $\left|C(\Omega)\right| = \left(2^{2^{n-1}}\right)^n = 2^{n2^{n-1}}$.

Завдання. Операції над функціями вибору та прості властивості самостійно вивчити по підручнику.

Прості властивості функції вибору. Функція вибору C називається:

- рефлексивною, якщо $C(\{x_i\}) = \varnothing$ для $\forall x_i \in \Omega$;

- антирефлексивною, якщо $C(\{x_i\}) \neq \varnothing$ для $\forall x_i \in \Omega$;

- повною, якщо $C(X) \neq \varnothing$, для $\forall\ X \neq \varnothing$;

- транзитивною, якщо з умови: $C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \neq \varnothing$, $C(X_2 \cup X_3) = C(X_2) \neq \varnothing$ випливає $C(X_1 \cup X_3) = C(X_1)$ $\forall\ X_1$, X_2, X_3.

Приклад. Нехай за результатами сесії серед студентів групи *A* і *B* кращими виявились два студенти групи *A*, кращими серед студентів *B* і *C* – 3 студенти з групи *B*. Тоді кращими серед студентів групи *A* і *C* будуть вказані студенти з групи *A*, при цьому вони будуть кращими і серед усіх трьох груп.

- ациклічною, якщо з умови: $C\left(X_k \bigcup X_{k+1}\right)=C\left(X_k\right)\neq\varnothing,\quad k=\overline{1,n-1}$, випливає: $X_1\neq X_n$ для $\forall\ X_k,\ k=\overline{1,n}$.

Приклад. $C\left(A\bigcup B\right)=C\left(A\right)\neq\varnothing,\ C\left(B\bigcup C\right)=C(B)\Rightarrow A\neq C$.

Властивості функції вибору. Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості і відповідні їм класи функцій вибору.

1) Властивість спадковості (СП)

$$X'\subseteq X\Rightarrow C(X)\cap X'\subseteq C(X'),\ \forall X,X'\subseteq\Omega.$$

Приклад. Якщо проводиться міжнародний конкурс проєктів, то умова СП означає: «Якщо переможцем став проєкт з України, то він повинен бути переможцем конкурсу в Україні».

В термінах ЛФФВ $\beta^1\leq\beta^2\Rightarrow f_i\left(\beta^1\right)\geq f_i\left(\beta^2\right)$.

2) Властивість незалежності від відкинутих альтернатив (Н)

$$C(X)\subseteq X'\subseteq X\Rightarrow C(X')=C(X).$$

Приклад. Якщо проведено конкурс, в якому проєкт *x* не увійшов в число кращих, то в конкурсі, в якому приймають участь ті самі проєкти за виключенням *x*, склад переможців залишиться тим, що був.

В термінах ЛФФВ $\beta_i^2\wedge f_i\left(\beta^2\right)\leq\beta_i^1\leq\beta_i^2\Rightarrow\beta_i^2\wedge f_i\left(\beta^2\right)=\beta_i^1\wedge f_i\left(\beta^1\right)$.

3) Властивість згоди (З)

$$\bigcap_i C(X_i)\subseteq C(\bigcup_i X_i),\ \forall X_i\subseteq\Omega;$$

В термінах ЛФФВ $\underset{k}{\wedge} f_i\left(\beta^k\right)\leq f_i\left(\underset{k}{\vee}\beta^k\right)$.

4) Властивість квазісуматорності (незалежності вибору від шляху) (КС)

$$C(X_1\bigcup X_2)=C(C(X_1)\bigcup C(X_2)),\ \forall X_1,X_2\subseteq\Omega.$$

Приклад. Якщо проводиться міжнародний конкурс проєктів, то можна спочатку вибрати переможців національних конкурсів, а потім проводити конкурс серед них.

В термінах ЛФФВ

$$\left(\beta_i^1\vee\beta_i^2\right)\wedge f_i\left(\beta^1\wedge\beta^2\right)=\left(\beta_i^1\wedge f_i\left(\beta^1\right)\right)\vee\left(\beta_i^2\wedge f_i\left(\beta^2\right)\right)\wedge$$
$$f_i\left(\left(\beta_1^1\wedge f_1\left(\beta^1\right)\right)\vee\left(\beta_1^2\wedge f_1\left(\beta^2\right)\right),\ldots,\left(\beta_n^1\wedge f_n\left(\beta^1\right)\right)\vee\left(\beta_n^2\wedge f_n\left(\beta^2\right)\right)\right).$$

5) Властивість суматорності (СМ)

$$C(X_1\bigcup X_2)=C(X_1)\bigcup C(X_2),\ \forall X_1,X_2\subseteq\Omega.$$

Приклад. На дошці пошани Університету представлені співробітники, які були обрані на факультетах.

В термінах ЛФФВ $f_i\left(\beta\right)\equiv 0\vee f_i\left(\beta\right)\equiv 1$.

6) Властивість мультиплікаторності (МП)

$$C(X_1\bigcap X_2)=C(X_1)\bigcap C(X_2),\ \forall X_1,X_2\subseteq\Omega;$$

В термінах ЛФФВ $f_i\left(\underset{k}{\wedge}\beta^k\right)=\underset{k}{\wedge} f_i\left(\beta^k\right)$.

7) Властивість монотонності (M)

$$X'\subseteq X \Rightarrow C(X')\subseteq C(X),\ \forall X, X'\subseteq\Omega.$$

В термінах ЛФФВ $\beta^1\le\beta^2 \Rightarrow f_i\left(\beta^1\right)\le f_i\left(\beta^2\right)$.

В теорії прийняття рішень важливі також функції вибору, які пропонуються нижче.

Функція вибору C на Ω називається *загальною скалярною* функцією вибору, якщо існує числова функція g на Ω така, що $C(X)=\arg\max\limits_{X\subseteq\Omega} g(x)$ і *просто скалярною* функцією, якщо $g(x)$ є взаємооднозначною.

Функція вибору *C*, яка являється об'єднанням скалярних, називається *сукупно-екстремальною* (клас сукупно-екстремальних функцій позначають через СЕ).

Функція вибору *C* на Ω називається *паретівською* (Клас П), якщо існує вектор-функція $g=(g_1,...,g_m)$, що

$$C(x)=\{x \mid \{y\in X: g_i(y)\ge g_i(x), i=\overline{1,m};\ g(y)\ne g(x)\}=\varnothing\}.$$

Позначимо через $A^{\overline{\varnothing}}=\left\{C\in A:\ C(X)\ne\varnothing,\ \forall X\subseteq\Omega\right\}$ – підмножину "повних" функцій вибору із множини *A*.

Співвідношення класів функцій вибору. Зв'язки між класами функцій вибору встановлюють такі твердження.

Твердження 1. Клас нормальних функцій вибору $N=СП\cap З$.

Твердження 2. Клас $СЕ=(СП\bigcap Н)^{\overline{\varnothing}}=СП^{\overline{\varnothing}}\bigcap Н^{\overline{\varnothing}}$.

Твердження 3. Клас *КС=СП*$\bigcap$*Н.*

Твердження 4. Клас $П=(СП\bigcap Н\bigcap З)^{\overline{\varnothing}}$.

Твердження 5. Клас $СМ\subset СП\bigcap Н\bigcap З$.