Київський університет імені Тараса Шевченка

Мащенко С.О.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

спеціальність 124 – «Системний аналіз»

2020

Зміст

Лекція 1. Постановка задачі прийняття рішень

Вступ. Можна сказати, що "життя – це процес прийняття рішень".

Рішення приймають політики, військові, виробники, споживачі, продавці, покупці, водії, рішення приймають навіть студенти ("йти чи не йти на лекцію, а якщо йти, то що робити – слухати лектора, розмовляти з сусідом і т.д. і т.п.).

Рішення приймаються колективні (вибори президента), індивідуальні (за якого кандидата голосувати), стратегічні ("куди піти вчитися"), тактичні ("брати чи не брати з собою парасольку"), миттєві (воротар – "в який кут стрибати"), розтягнуті в часі і просторі, важливі (з точки зору цивілізації, партії, окремого індивіда), несуттєві ("яку програму по телевізору дивитися"). Рішення приймаються на основі знань, досвіду, інтуїтивно, за допомогою випадкового механізму, за підказкою інших, за бажанням, за необхідністю і т.д. і т.п.

В абсолютній більшості ситуацій будемо мати на увазі наявність особи, що приймає рішення - ОПР, хоча деякі моделі допускають і його відсутність.

Хоча вивченням окремих задач прийняття рішень людство займалось давно, теорія прийняття рішень як наукова дисципліна сформувалось в другій половині XX ст., що пов'язано в значній мірі з розвитком обчилювальної техніки та інформатики.

Термін "прийняття рішень" зустрічається в багатьох дисциплінах, прийняття рішень є одним з основних напрямків прикладної математики. Моделі і методи теорії прийняття рішень знайшли застосування, в першу чергу, в економіці, військовій справі, політиці, медицині.

Загальна постановка задачі прийняття рішень (ЗПР).

1. ПР має сенс, якщо існують різні варіанти альтернативних дій ОПР.

Можна сказати, що прийняття рішення є вибором якого небудь варіанту є існуючих. В теорії прийняття рішення вони називаються альтернативами. Альтернативи в ЗПР утворюють множину альтернатив. Наприклад

{брати квиток в транспорті, не брати},

{виробляти виріб 1, виріб 2, виріб 3},

{використовувати 1 обладнання, 2 одиниці, 3}.

2. Вибір тієї чи іншої альтернативи (дії) може приводити до різних наслідків (результатів)

{проїзд з квитком, без квитка, штраф, перевірка квитка},

{низький прибуток, середній, високий, надприбуток}.

На це впливають об'єктивні умови. Наприклад, з'явиться контролер чи ні, на вироби, що випускаються, впливає попит. Об'єктивні умови в ЗПР представляються множиною станів природи, один з яких може мати місце.

3. У ОПР повинна бути ціль (мета) - одержати деякий наслідок (результат) чи множину наслідків. Іноді ціль формулюється явно, іноді ні, але вона повинна бути присутня у той чи іншій формі.

Ці складові ЗПР є головними і тому можна сказати, що ЗПР це така задача, яка може бути сформульована у термінах: цілі, альтернатив, наслідків та також зв"язку між альтернативами та наслідками.

В процесі розв'язку загальної задачі прийняття рішень, як правило, беруть участь три групи осіб: особи, що приймають рішення (ОПР), експерти (Е) та консультанти (К).

ОПР називають людину (або колективний орган такий, як науковий заклад, Верховна рада тощо), що має (формує) ціль, котра служить мотивом постановки задачі та пошуку її розв'язання. ОПР визначає також, які засоби є допустимими (недопустимими) для досягнення мети.

Експерт – це спеціаліст у своїй галузі, що володіє інформацією про задачу, але не несе прямої відповідальності за результати її розв'язання. Експерти допомагають ОПР на всіх стадіях постановки і розв'язання ЗПР.

Аналітиками (консультантами, дослідниками тощо) називають спеціалістів з теорії прийняття рішень. Вони розробляють модель (математичну, інформаційну і т.п.) ЗПР, процедури прийняття рішень, організовують роботу ОПР і експертів при розв'язку проблеми.

В найпростіших ситуаціях ОПР може виступати одним в трьох ролях, в більш складних – ОПР може поєднувати функції аналітика, звертаючись до спеціалістів з вузьким профілем для вирішення часткових проблем. В загальному випадку ОПР (наприклад, президент або профільний комітет Верховної ради) залучає до вирішення державних проблем аналітиків –консультантів, які, в свою чергу, звертаються до експертів.

Класифікація ЗПР.

1. Класифікація ЗПР по типу зв'язку наслідків та альтернатив. Розглянемо основні типи залежності між альтернативами та наслідками.

1. Найпростіший тип залежності – *детермінований*, коли кожна альтернатива приводить до єдиного наслідку. При цьому між альтернативами та наслідками існує функціональна залежність і такі ЗПР *називаються ЗПР в умовах визначеності*. Наявність функціональної залежності приводить до того, що ЗПР достатньо описувати тільки у термінах цілі та альтернатив.

2. Такий тип залежності називається *недетермінованим*. При цьому між альтернативами та наслідками не існує функціональної залежності і такі ЗПР називаються *ЗПР в умовах невизначеності*. Невизначеність є проявом впливу на наслідок зовнішнього середовища, як ще кажуть – природи.

2.1. *ЗПР в умовах повної невизначеності* (відсутня інформація про розподіл ймовірностей на множині станів природи або ця інформація є, але використовувати її не коректно).

2.2. *ЗПР в умовах повної ризику* (відома інформація про розподіл ймовірностей на множині станів природи та використовувати її коректно).

2.3. *ЗПР в умовах конфлікту* (якщо невизначеність є проявом впливу на наслідок інших ОПР, які мають свої цілі).

3. Інколи, як множини альтернатив, наслідків, так і зв"язок між ними є нечітким. При цьому між альтернативами та наслідками також не існує

функціональної залежності і такі ЗПР називаються *ЗПР в умовах нечіткої інформації*. Нечіткість, як правило, є проявом суб"єктивності ОПР, експертів та аналітиків, які формулюють ЗПР.

2. Класифікація ЗПР по опису цілі. Розглянемо основні типи цілей та способи їх формалізації в теорії прийняття рішень.

1. *„Якісна" ціль* характеризується тим, що всякий результат або повністю задовольняє цій цілі або повністю не задовольняє, причому результати, що задовольняють цій цілі нерозрізненні між собою точно так, як нерозрізненні між собою і результати, що не задовольняють цій цілі.

Наприклад, ціль – стати чемпіоном. І якщо ціль досягнуто, то немає значення, як її досягнуто.

Якісну ціль можна формалізувати у вигляді деякої підмножини *B* множини всіх можливих наслідків, де всякий результат $a \in B$ задовольняє цій цілі, а всякий результат $a \notin B$ не задовольняє їй. Множина *B* при цьому називається цільовою підмножиною. Так, якщо ціль „зайняти призове місце", то цільова множина *B* – перші три місця з усіх можливих.

2. *"Кількісна" ціль* є результатом вибору на множині наслідків, що описуються кількісно, з допомогою деякої дійснозначної функції $f\colon Z \rightarrow R^1$. ЗПР в цьому випадку зводиться до находження оптимуму (максимуму чи мінімуму) функції *f* на множині Z.

Якщо *цільова функція є векторною*, тобто кожен результат описується набором чисел, що характеризують його показники - "вартість", "ефективність", "надійність" тощо, то маємо *задачу багатокритеріальної оптимізації.*

3. *Ціль, яка задана відношенням переваги*. Основною характеристикою будь-якої цілі є відношення переваги на множині наслідків, що з нею пов"язане. Якщо ми розуміємо ціль, але не можемо побудувати числові оцінки наслідків, то принаймні, можемо вказати, що є краще, а що є гірше по відношенню до цієї цілі. В цьому випадку ми можемо побудувати відношення переваги, яке задає ціль.

Найбільш загальний випадок завдання цілі – відношення переваги. Для будь-якої кількісної цілі можна побудувати адекватне їй відношення переваги, але не навпаки. Кількісна ціль, в свою чергу, узагальнює поняття якісної цілі, у цьому випадку функція *f* є бульовою.

Якщо ціль якісна чи кількісна, то вона відповідає ЗПР з числовою оцінкою наслідків, у протилежному випадку – це ЗПР з ціллю, що задана відношенням переваги.

Приклади ЗПР.

Прилад 1 (ЗПР в умовах визначеності із числовою оцінкою наслідків). Щоб попасти з пункту А в пункт В автомобіль повинен проїхати спочатку по лузі, потім по шосе. Відомі: відстань від точки А до шосе, швидкості руху по лугу та по шосе. Треба прийняти рішення – маршрут автомобіля.

Приклад 2 (ЗПР в умовах невизначеності із числовою оцінкою наслідків). Студент вирішує- брати квиток у транспорті чи ні. Його виграш, у залежності від появи контролера, оцінюється за таблицею:

	З	НЗ
Б	-0.5	-0.6
НБ	-10	0

Приклад 3 (ЗПР в умовах конфлікту із числовою оцінкою наслідків). Поліція підозрює двох злочинців у бандитизмі, але єдиний шлях доведення цього – це зізнання. Виграші злочинців наведені у таблиці:

	З	НЗ
З	-7 -7	0 -10
НЗ	-10 0	-1 -1

Лекція 2. ЗПР з ціллю, що задана відношенням переваги

Нехай задана множина альтернатив Ω, числові оцінки альтернатив невідомі, але ОПР може їх порівняти попарно і вказати, яка з них пари краща за іншу. У цьому випадку можна задати бінарному відношення на множині альтернатив.

Бінарні відношення. *Бінарним відношенням R* на множині альтернатив Ω називається довільна підмножина *R* декартового добутку $\Omega \times \Omega$ (декартовим добутком двох множин *A* і *B* називається множина пар елементів (a,b), де $a,b \in \Omega$). Якщо пара елементів *x* і *y* знаходиться у бінарному відношенні *R*, то будемо позначати цей факт як *xRy*.

Крім безпосередньо завдання всіх пар, для котрих виконується відношення *R*, існує три основних способи завдання відношень: матрицею, графом, перерізами. Нехай множина Ω містить *n* елементів: $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$.

1. Матриця бінарного відношення *A(R)* задається елементами a_{ij}, $i, j = \overline{1,n}$: $a_{ij}(R) = 1$, якщо $x_i R x_j$; $a_{ij}(R) = 0$, якщо не виконується $x_i R x_j$.

2. Завдання бінарного відношення *R* графом. Елементам скінченої множини $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ ставиться у взаємно-однозначну відповідність вершини графа *G*. Проведемо дугу від вершини x_i до вершини x_j тоді і лише тоді, коли виконується $x_i R x_j$.

3. Універсальним способом завдання відношень (зокрема, на нескінченних областях) є завдання з допомогою перерізів.

Верхнім переріз $R^+(x)$ називається множина елементів $y \in \Omega$ таких, що $(y,x) \in R$: $R^+(x) = \{y \in \Omega : (y,x) \in R\}$. Аналогічно задається *нижній переріз*:

$R^{-}(x)=\{y\in\Omega:\ (x,y)\in R\}$.

Завдання. Операції та властивості бінарних відношень вивчити по підручнику.

Відношення переваги байдужності та домінування та їхні властивості. Нехай *X* - задана множина альтернатив. *Відношенням нестрогої переваги* на *X* будемо називати будь-яке задане на цій множині рефлексивне бінарне відношення.

Рефлексивність відношення нестрогої переваги R відбиває той природний факт, що будь-яка альтернатива $x\in X$ не гірше за себе.

За заданим на множині X відношенням переваги R можна однозначно визначити три відповідних йому відношення:

строгої переваги “$\succ$” $S=R\setminus R^{-1}$,де R^{-1} - обернене до відношення R;

еквівалентності (подібності) “$\approx$”, визначене як $Q=R\bigcap R^{-1}$;

байдужості(толерантності) “~” $P=[X\times X\setminus(R\bigcup R^{-1})]\bigcup Q$.

Байдужість може виникати декількома шляхами.

По-перше, ОПР може щиро вважати, що фактично немає жодної різниці між *x* і *y,* тобто бажано мати *x* в такій само мірі, як і *y*, і навпаки.

По-друге, байдужість може наступити, коли ОПР не впевнена у своїй перевазі між *x* і *y*. Вона може вважати факт порівняння *x* з *y* важким і може відмовлятися судити про строгу перевагу, не будучи впевненою, чи розглядає вона *x* і *y* як однаково бажані (або небажані).

По-третє, запис виду $x\ \sim\ y$ може виникнути у випадку, коли ОПР вважає *x* і *y* зовсім не порівнянними за перевагою.

Максимальні елементи та мажоранти за бінарним відношенням.

1) Елемент $x\in\Omega$ називається максимальним за відношенням нестрогої переваги *R*, якщо *xRy* для $\forall\ y\in\Omega$.

Максимальні елементи за відношенням R на заданій множині Ω можуть безперечно вважатися розв’язком ЗПР з ціллю що задана відношенням переваги.

Але вони можуть як існувати, так і не існувати, у випадку існування можуть бути не єдиними. Так, для відношення „більше або рівне” на множині дійсних чисел не існує максимуму.

Теорема. Відношення нестрогої переваги *R* має максимальний елемент на скінченій множині *X*, коли воно є квазіпорядком (рефлексивним та транзитивним).

2) Якщо не існує максимального максимального елемента, то принаймні не треба вибирати ті, для яких існують строго кращі.

Нехай $S=R\setminus R^{-1}$ - це відповідне відношення строгої переваги для відношення нестрогої переваги *R*. Елемент $x\in\Omega$ називається мажорантою за відношенням строгої переваги S, якщо $y\bar{S}x$ для $\forall\ y\in\Omega$.

Теорема. Відношення строгої переваги S має мажоранту на скінченій множині X тоді й лише тоді, коли транзитивне замикання (перетин усіх транзитивних відношень, які містять S) є строгим порядком (транзитивним та асиметричним відношенням).

Множина $\Omega_{+}(R)$ грає важливу роль у теорії прийняття рішень. У цій теорії вона називається також множиною недомінованих за R елементів або множиною Парето.

Функції вибору та її властивості. Нехай задано скінчену множину альтернатив $\Omega=\{x_1,...,x_n\}$ і ОПР, користуючись своїм особистим уявленням про кращі альтернативи, для кожної множини $X\subseteq\Omega$ вибирає підмножину кращих *C(X).* Єдина вимога, яка накладається на вибір: $C(X)\subseteq X$ – кращі альтернативи можна вибирати з того, що пропонують, зокрема, $C(\varnothing)=\varnothing$.

Уже на множині з двох альтернатив $\Omega=\{x_1,x_2\}$ можна зробити 16 виборів! На множині з 7 альтернатив виборів більше за 10^{120}.

Тобто описувати явно вибір, задаючи вибір кращих альтернатив *C(X)* на кожній підмножині X „універсальної" множини Ω, неможливо вже у найпростіших випадках! Що ж робити? Як здійснювати „розумний", „логічний" вибір? Один із шляхів цього – задавати „принципи логічності" і вивчати результуючий вибір (множини альтернатив, що задовольняють цим принципам).

Наприклад, нехай Ω – групи факультету кібернетики третього курсу. „Логічно" вважати, що краща група на курсі повинна бути кращою на своїй спеціальності (спеціальність „прикладна математика" – 4 групи, „інформатика" – 3, „соціальна інформатика" – 4).

Формально ця умова („спадковості") записується наступним чином: $Y\subseteq X$, $x\in Y\bigcap C(X)\Rightarrow x\in C(Y)$.

Будемо називати *функцією вибору* C, що задана на Ω, відображення, яке зпівставляє кожній підмножині $X\subseteq\Omega$ її підмножину $C(X)$, тобто $C:\ 2^{\Omega}\to 2^{\Omega}$, $C(X)\subseteq X$, для $\forall\ X\subseteq\Omega$.

Якщо на Ω задане деяке бінарне відношення *R*, то розглядаючи звуження цього бінарного відношення на будь-яку підмножину $X\subseteq\Omega$ можна задати множину мажорант на множині *X*, яка певним чином характеризує вибір ОПР. Ця ідея формалізації вибору приводить до такого означення.

Означення. Функція вибору $C^R(X)$, яка задана на Ω і породжена деяким бінарним відношенням R називається нормальною та визначається наступним чином: $C^R(X)=\{x\in X:\ y\overline{R}x,\forall y\in X\}$, $\forall X\subseteq\Omega$.

Довільна функція вибору *C* не обов'язково є нормальною.

Приклад. Розглянемо наступну функцію вибору на $\Omega=\{x,y\}$:

$C(x) = x$, $C(y) = \varnothing$, $C(x, y) = \{x, y\}$

(3.1)

Нехай існує бінарне відношення *R*, яке породжує цю функцію вибору. Тоді із $C^R(y) = \varnothing$ випливає, що yRy вірно й невірно $y\overline{R}y$, тобто $y \notin C^R(x, y)$, що суперечить (3.1).

Цікаво відмітити, що не існує чисельної оцінки кількості нормальних функцій вибору при фіксованому *n*. Відмітимо також, що одну і ту ж нормальну функцію вибору можуть породжувати різні бінарні відношення. Доцільно у останньому випадку виділяти „мінімальне" відношення, граф якого має мінімальне число дуг.

Для формального описання класу нормальних функцій вибору визначимо для $X \subseteq \Omega$ покриваюче сімейство $\{X_i\}$, $X_i \subseteq \Omega$, $i \in J$, таке, що $X \subseteq \bigcup\limits_{i \in J} X_i$.

Теорема. Функція вибору *C* є нормальною тоді і лише тоді, коли для будь-якої множини $X \subseteq \Omega$ і будь-якого покриваючого її сімейства $\{X_i\}_{i \in J}$ виконується відношення: $X \setminus C(X) \subseteq X \setminus \bigcap\limits_{i \in J} C(X_i)$.

Отже, якщо функція вибору нормальна, то всякий об'єкт із *X*, що не є кращим у *X*, не є кращим хоча б для однієї множини з покриваючого сімейства. Зокрема, якщо елемент не вибирається з деякої підмножини *X*, то він не повинен вибиратись з будь-якої множини, що її містить.

Теорема. $C^R(X) \neq \varnothing$, для $\forall X \subseteq \Omega$ тоді і лише тоді, коли відношення *R* є ациклічним.

Лекція 3. Логічна форма функції вибору (ЛФФВ).

Функція вибору, яка визначена на множині з n елементів, має множину визначення з 2^n елемента (кількість підмножин). Уже для досить малого n представлення функції вибору є дуже громіздким.

Зручним апаратом для представлення довільної функції вибору є булеві функції.

Нехай $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$, $X \subseteq \Omega$. Визначимо для кожної підмножини $X \subseteq \Omega$ характеристичну вектор-функцію $\beta(X) = (\beta_1(X), ..., \beta_n(X))$, компоненти якого визначаються наступним чином

$$\beta_i(X) = \begin{cases} 1, & x_i \in X, \\ 0, & x_i \notin X. \end{cases}$$

Розглянемо множину з n бульових функцій від $n-1$ змінної $f_1(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}), ..., f_n(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}))$, які будуються за наступним правилом:

$$\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X) \Leftrightarrow \beta_i(C(X)) = 1;$$

де

$$f_i(\beta) = f_i(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, ..., \beta_n),\ i \neq 1, n;$$

$$f_1(\beta) = f_1(\beta_2, ..., \beta_n),\ f_n(\beta) = f_n(\beta_1, ..., \beta_{n-1}).$$

Означення. Логічною формулою функції вибору C називається сімейство функцій $(f_1, ..., f_n)$ від $n-1$ змінних, яка побудована за C з допомогою заданих формул. Задання ФВ еквівалентно заданню ЛФФВ.

Розглянемо приклад на побудову ЛФФВ(С).

Нехай $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$ і задано функцію вибору C наступним чином: $C(x_i) = x_i$, $C(x_i, x_j) = x_k$, де $k = \min\{i, j\}$, $C(\Omega) = x_1$.

X	$C(X)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X))$
x_1	x_1	*(1,0,0)*	*(1,0,0)*
x_2	x_2	*(0,1,0)*	*(1,0,0)*
x_3	x_3	*(0,0,1)*	*(1,0,0)*
x_1, x_2	x_1	*(1,1,0)*	*(1,0,0)*
x_1, x_3	x_1	*(1,0,1)*	*(1,0,0)*
x_2, x_3	x_2	*(0,1,1)*	*(0,1,0)*
x_1, x_2, x_3	x_1	*(1,1,1)*	*(1,0,0)*

Побудуємо таблиці, що задають булькові функції f_i, $i = \overline{1,3}$.

β_2	β_3	f_1
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

β_1	β_3	f_2
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

β_1	β_2	f_3
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Побудуємо розклад функцій у досконалу диз'юнктивну нормальну форму:
$f_1(\beta_2,\beta_3)\equiv 1$, $f_2(\beta_1,\beta_3)=\overline{\beta}_1\overline{\beta}_3 \vee \overline{\beta}_1\beta_3=\overline{\beta}_1(\overline{\beta}_3\vee\beta_3)=\overline{\beta}_1$, $f_3(\beta_1,\beta_2)=\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2$.

Розглянемо приклад на „відновлення" функції вибору за її логічною формою. Нехай $\Omega=\{x_1,x_2,x_3\}$ і задано сімейство бульових функцій: $f_1(\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_1$, $f_2(\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_2$, $f_3(\gamma_1,\gamma_2)\equiv 0$. Перенумеруємо змінні у відповідності з (3.4): $f_1(\beta_2,\beta_3)=\beta_2$, $f_2(\beta_1,\beta_3)=\beta_3$, $f_3(\beta_1,\beta_2)\equiv 0$,
отримані функції зведемо у табл.

β_2	β_3	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

β_1	β_3	f_2
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

β_1	β_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Далі отримаємо табл.

X	β_1	β_2	β_3	$\beta_1\ f_1$	$\beta_2\ f_2$	$\beta_3\ f_3$	$C(X)$
x_1	1	0	0	0	0	0	$\varnothing$
x_2	0	1	0	0	0	0	$\varnothing$
x_3	0	0	1	0	0	0	$\varnothing$
x_1,x_2	1	1	0	1	0	0	x_1
x_1,x_3	1	0	1	0	0	0	$\varnothing$
x_2,x_3	0	1	1	0	1	0	x_2
x_1,x_2,x_3	1	1	1	1	1	0	x_1,x_2

За логічною формою функції вибору легко отримати формулу для кількості всіх функцій вибору, заданих на множині Ω з *n* елементів. Очевидно, що різних бульових функцій від *n-1* змінної $2^{2^{n-1}}$ (кількість наборів змінних довжини *n-1* дорівнює 2^{n-1}, на кожному наборі функція приймає 2 значення), логічна форма функції вибору містить *n* функцій, отже $\left|C(\Omega)\right|=\left(2^{2^{n-1}}\right)^n=2^{n2^{n-1}}$.

Завдання. Операції над функціями вибору та прості властивості самостійно вивчити по підручнику.

Властивості функції вибору. Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості і відповідні їм класи функцій вибору.

1) Властивість спадковості (СП)

$$X'\subseteq X \Rightarrow C(X)\cap X'\subseteq C(X'),\ \forall X,X'\subseteq\Omega;$$

2) Властивість незалежності від відкинутих альтернатив (Н)

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X);$$

3) Властивість згоди (З)

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcap_i X_i),\ \forall X_i \subseteq \Omega;$$

4) Властивість квазісуматорності (незалежності вибору від шляху) (КС)

$$C(X_1 \bigcup X_2) = C(C(X_1) \bigcup C(X_2)),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega;$$

5) Властивість суматорності (СМ)

$$C(X_1 \bigcup X_2) = C(X_1) \bigcup C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega;$$

6) Властивість мультиплікаторності (МП)

$$C(X_1 \bigcap X_2) = C(X_1) \bigcap C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega;$$

7) Властивість монотонності (М)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X') \subseteq C(X),\ \forall X, X' \subseteq \Omega.$$

В теорії прийняття рішень важливі також функції вибору, які пропонуються нижче.

Функція вибору C на Ω називається *загальною скалярною* функцією вибору, якщо існує числова функція g на Ω така, що $C(X) = \arg\max\limits_{X \subseteq \Omega} g(x)$ і *просто скалярною* функцією, якщо $g(x)$ є взаємнооднозначною.

Функція вибору *С*, яка являється об'єднанням скалярних, називається *сукупно-екстремальною* (клас сукупно-екстремальних функцій позначають через СЕ).

Функція вибору C на Ω називається *паретівською* (Клас П), якщо існує вектор-функція $g = (g_1, ..., g_m)$, що

$$C(x) = \{x \mid\ \{y \in X : g_i(y) \geq g_i(x), i = \overline{1,m};\ g(y) \neq g(x)\} = \varnothing\}.$$

Позначимо через $A^{\overline{\varnothing}} = \{C \in A\colon\ C(X) \neq \varnothing,\ \forall X \subseteq \Omega\}$ – підмножину "повних" функцій вибору із множини *A*.

Співвідношення класів функцій вибору. Зв'язки між класами функцій вибору встановлюють такі твердження.

Твердження 1. Клас нормальних функцій вибору $N = \textit{СП} \cap \textit{З}$.

Твердження 2. Клас $\textit{СЕ} = (\textit{СП} \bigcap H)^{\overline{\varnothing}} = \textit{СП}^{\overline{\varnothing}} \bigcap H^{\overline{\varnothing}}$.

Твердження 3. Клас $\textit{КС}=\textit{СП} \bigcap H$.

Твердження 4. Клас $\textit{П} = (\textit{СП} \bigcap H \bigcap \textit{З})^{\overline{\varnothing}}$.

Твердження 5. Клас $\textit{СМ} \subset \textit{СП} \bigcap H \bigcap \textit{З}$.

Лекція 4. Основи теорії корисності

Нехай маємо множину об’єктів, які ОПР може порівнювати за їх перевагою для себе. При цьому виникає питання: чи можна в цих умовах, спираючись тільки на результати зроблених порівнянь, так приписати об’єктам, що порівнюються, кількісні оцінки, щоб більш переважному об’єкту відповідала більша оцінка? Функція, яка встановлює таку відповідність і називається *функцією корисності*.

Відношення переваги. Нехай X - задана множина альтернатив. *Відношенням нестрогої переваги* на X будемо називати (див. Розділ 1) будь-яке задане на цій множині рефлексивне бінарне відношення.

Рефлексивність відношення нестрогої переваги (далі будемо казати – відношення переваги і позначати як “$\geq$” чи $R_{\geq}$) відбиває той природний факт, що будь-яка альтернатива $x \in X$ не гірше за себе.

За заданим на множині X відношенням переваги $R_{\geq}$ можна однозначно визначити три відповідних йому відношення:

байдужості $R_{\sim} = (X \times X \setminus (R_{\geq} \cup R_{\geq}^{-1})) \cup (R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1})$ (далі будемо позначати як “~”), інколи, це відношення називають *толерантністю* ;

еквівалентності (подібності) “$\approx$”, визначене як $R_{\approx} = R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1}$;

строгої переваги $R_{>} = R_{>} \setminus R_{\geq}^{-1}$ (далі будемо позначати як ”>”),

де $R_{\geq}^{-1}$ - відношення, що є оберненим до відношення $R_{\geq}$, позначається через $R_{\leq}$, тобто “$\leq$”.

Байдужість може виникати декількома шляхами.

По-перше, ОПР може щиро вважати, що фактично немає жодної різниці між x і y, тобто бажано мати x в такій само мірі, як і y, і навпаки.

По-друге, байдужість може наступити, коли ОПР не впевнена у своїй перевазі між x і y. Вона може вважати факт порівняння x з y важким і може відмовлятися судити про строгу перевагу, не будучи впевненою, чи розглядає вона x і y як однаково бажані (або небажані).

По-третє, запис виду $x \sim y$ може виникнути у випадку, коли ОПР вважає x і y зовсім не порівнянними за перевагою.

Відношення строгої переваги розподіляють, як мінімум, на два типи:

- *слабке впорядкування* (асиметричне і від’ємне транзитивне відношення, а тому транзитивне);
- *строге впорядкування* (слабко зв’язане (для $\forall x, y, x \neq y$ або xRy або yRx) слабке впорядкування).

С л а б к е в п о р я д к у в а н н я. Основною рисою слабкого впорядкування є асиметричність. Якщо для вас елемент x є кращим за елемент y, то водночас не може бути y кращим за x.

Транзитивність є наслідком асиметричності та від’ємної транзитивності і представляється розумним критерієм істинності для індивідуальних переваг. Якщо для вас x переважніше, ніж y, а y переважніше, ніж z, то здоровий глузд підказує, що x переважніше, ніж z.

Якщо відношення строгої переваги “<” є слабким упорядкуванням, а байдужість “~” визначається як відсутність строгої переваги, то від супротивного легко показати, що відношення “$\approx$” є еквівалентністю (рефлексивне, симетричне і транзитивне).

Однак концепція слабкого порядку в цілому вразлива для критики тому, що наділяє ОПР занадто необмеженою можливістю судження про перевагу, використовуючи транзитивність. Щоб показати, як транзитивність може порушуватися, розглянемо приклад.

Приклад. Припустимо, що при вкладанні капіталу в яку-небудь справу ви відчуваєте, що сума в 1000 у.о. є найкращим вкладенням. Ваша перевага зменшується, якщо ви відхиляєтеся від 1000 у.о. у будь-який бік. Хоча для вас переважніше 955 у.о. ніж 950 у.о., може виявитися, що ви не можете впевнено вибрати кращу суму між 950 і 1080 у.о. або між 955 і 1080 у.о. Але тоді одержимо:

$$955 \text{ у.о.} > 950 \text{ у.о.},$$
$$950 \text{ у.о.} \sim 1080 \text{ у.о.},$$
$$955 \text{ у.о.} \sim 1080 \text{ у.о.},$$

що суперечить транзитивності відношення байдужності. У цьому прикладі відношення байдужності не є транзитивним.

Строге впорядкування. Це відношення строгої переваги є слабко зв’язаним слабким упорядкуванням ($x \neq y \Rightarrow (xRy \ \vee \ yRx), \ \forall x, y \in X$). Воно відповідає реалії більш, ніж слабке впорядкування, оскільки враховує нетранзитивну байдужість, що з'являється через “недосконалість здатності людського розуму, що розрізняє, чому нерівності встановлюються лише при досить великій різниці величин” [4].

Надалі ми будемо враховувати цю властивість шляхом відмовлення від безумовної вимоги транзитивності відношення байдужості.

Функції корисності на зліченних множинах. Найбільш прості умови існування функцій корисності можна сформулювати у випадку зліченної множини альтернатив.

Теорема 1. (про функцію корисності для строгих часткових упорядкувань). Якщо відношення “<” на X є строгим частковим упорядкуванням, а множина $X_{\approx}$ класів еквівалентності на X за відношенням “$\approx$” є зліченною, то існує дійснозначна функція u на X, для якої: $x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y); \ \ x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y), \ \ \forall x, y \in X$.

Функції корисності на незліченних множинах. Поширимо теорему про функцію корисності для слабких упорядкувань на випадок, коли множина $X_{\sim}$ класів еквівалентності на X за відношенням “~” є не обов'язково зліченною. Введемо для цього так звану умову *сепарабельності*, яка має відношення до поняття щільності множини щодо впорядкування.

Нехай R є бінарним відношенням на множині Y. Множина $Z \subseteq Y$ називається R - *щільною у множині* Y, якщо для будь-яких x и y, що належать Y, але не належать Z і для яких xRy, знайдеться таке $z \in Z$, що (xRz, zRy).

Наприклад, оскільки між двома будь-якими дійсними числами мається раціональне число, то зліченна множина раціональних чисел є “<” – щільною у E^1.

Наприклад, ця умова може порушуватись для відношення “<” – якщо воно є лексикографічним впорядкуванням:

$$(x_1,\ x_2) < (y_1,\ y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1,\ x_2 < y_2).$$

Теорема 2 (про функцію корисності для строгих часткових упорядкувань на незліченних множинах). Припустимо, що відношення “<” на множині *X* є строгим частковим впорядкуванням та існує зліченна підмножина множини $X_{\approx}$ класів еквівалентності на *X* за відношенням “$\approx$”, яка є “ <* “ - щільною у $X_{\approx}$, де $a <^* b \Leftrightarrow \exists x \in a,\ \exists y \in b\ :\ x < y$ - строге часткове впорядкування (асиметричне та транзитивне) на множині класів еквівалентності $X_{\sim}$. Тоді існує u - така дійснозначна функція на *X*, що

$$x < y \Leftrightarrow u(x) < u(y),\ \ x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y),\ \ \forall x, y \in X.$$

Побудова функції корисності.

1. Нехай P – слабке впорядкування (асиметричне, транзитивне) на скінченій множині альтернатив $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Нехай $x \in X$. Позначимо через $\tilde{N}(x) = \left|\left\{ y \in X \,|\, yPx \right\}\right|$. Тоді $F(x) = |X| - \tilde{N}(x)$ буде функцією корисності.

Лекція 5. ЗПР в умовах визначеності

Ми будемо розглядати ЗПР в умовах визначеності при числовій оцінці наслідків, тобто коли зв'язок між альтернативами й наслідками детермінований (кожній альтернативі відповідає тільки один наслідок) і ціль ототожнюється з максимізацією чи мінімізацією деякої дійснозначної функції, яка визначена на множині всіх наслідків.

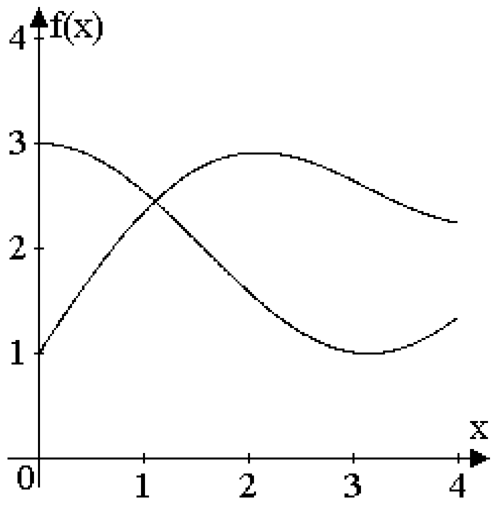
Оскільки кожній альтернативі відповідає тільки один наслідок і "корисність" (по відношенню до цілі задачі) цього наслідку оцінюється деякою єдиною числовою оцінкою, а нас цікавить у кінцевому підсумку найкраща оцінка і відповідна їй альтернатива, то можна встановити прямий зв'язок альтернатива – числова оцінка відповідного наслідку, минаючи саме наслідок.

В результаті такого підходу отримаємо дійснозначну функцію *f*, яка визначена на множині альтернатив і будемо називати її цільовою функцією

Оскільки ціль в ЗПР при числовій оцінці наслідків полягає у знаходженні такого наслідку, що максимізує чи мінімізує числову оцінку, то під оптимальним розв'язком задачі в умовах визначеності природно розуміти ту альтернативу, яка забезпечує цільовій функції мінімальне чи максимальне значення.

Таким чином, можна зробити висновок: *математичною моделлю ЗПР в умовах визначеності при числовій оцінці наслідків є задача оптимізації (максимізації чи мінімізації) дійсної функції, що задана на множині альтернатив*.

Якщо функція *f* є скалярною (тобто наслідки оцінюються тільки по якомусь одному показнику - критерію), то приходимо до "звичайної" задачі оптимізації, для якої існує єдина концепція оптимальності – оптимальною буде така альтернатива, яка забезпечує цільовій функції мінімальне чи максимальне значення.



Мал.1.

Припустимо, що маємо таку ЗПР, наслідки якої оцінюються не по одному, а за двома показниками f_1, f_2, а ціль полягає в максимізації цієї пари показників (критеріїв) одночасно, тобто за вектором $f = (f_1, f_2)$. Зрозуміло, що тільки у виключних випадках точки максимумів цих функцій можуть співпасти. Наприклад, це можна побачити на Мал.1. Такі задачі не мають розв'язку у звичайному сенсі (є некоректними). Тому спочатку треба визначити принцип оптимальності.

Постановка задачі багатокритеріальної оптимізації (БКО). Нехай $M = \{1,2,...,m\}$ – множина критеріїв $f_i(x),\ i \in M$, (показників, цільових функцій, що за замовченням максимізуються), m – їхня кількість, $m \ge 2$. За цими критеріями особа, що приймає рішення (ОПР), вибирає альтернативу (рішення) $x = (x_1,...,x_n) \in X$, де X –множина альтернатив, n – розмірність простору альтернатив. Таким чином, виникає задача багатокритеріальної оптимізації (БКО): «Яку єдину альтернативу треба вибрати ОПР, щоб вона «одночасно» максимізувала всі його критерії»? Ця задача формулюється у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &f_i(x) \to \max,\ i \in M, \\ &x \in X. \end{aligned} \tag{1}$$

Інколи задачу БКО зручно розглядати у так званому просторі оцінок і тоді вона має вигляд:

$$\begin{aligned} &y_i \to \max,\ i \in M, \\ &y = (y_1,...y_m) \in Y, \end{aligned} \tag{2}$$

де $y = (y_1,...y_m)$ – вектор оцінки, а $Y = \{y = (y_1,...y_m) \mid\ y_i = f_i(x),\ i \in M;\ x \in X\}$ – множина оцінок.

Абсолютно-оптимальні оцінки і альтернативи. В задачах багатокритеріальної оптимізації принцип оптимальності залежить від задання відношення переваги на множині оцінок (від способу порівняння оцінок).

Означення. Будемо говорити, що оцінка $y = (y_1,...y_m)$ переважає (нестрого) оцінку $y' = (y'_1,...y'_m)$ і позначимо це $y \succeq y'$, якщо $y_i \ge y'_i,\ i \in M$.

Таке відношення переваги буде рефлексивним та транзитивним (називається квазіпорядком). Відповідно до максимального елементу за цим відношенням визначається абсолютно-оптимальна оцінка.

Означення. Оцінка y^* називається абсолютно-оптимальною, якщо вона переважає будь-яку іншу оцінку, тобто $y^* \succeq y$ для $\forall y \in Y$. Позначимо множину абсолютно-оптимальних оцінок через $Q(Y)$.

Означення. Альтернатива x^* називається абсолютно-оптимальною, якщо їй відповідає абсолютно-оптимальна оцінка $y^* = (y_1^*,...,y_m^*) \in Q(Y)$, де $y_i^* = f_i(x^*),\ i \in M$. Очевидно, що $f_i(x^*) \ge f_i(x)\ \ \forall i \in M$, для $\forall x \in X$.

Позначимо множину абсолютно-оптимальних альтернатив через $Q(X)$.

Умови існування абсолютно-оптимальних альтернатив установлює наступна теорема. Позначимо $X^i = \operatorname{Arg}\max\limits_{x \in X} f_i(x)$ – множину оптимальних альтернатив за критерієм $i \in M$.

Теорема. Нехай множини оптимальних альтернатив за кожним критерієм задачі (2.1) є не порожніми, тобто $X^i \ne \varnothing,\ i \in M$. Тоді множина абсолютно-оптимальних альтернатив $Q(X) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} X^i$.

Доведення. Спочатку покажемо, що $Q(X) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} X^i$, що очевидне коли $Q(X) = \varnothing$. Нехай $Q(x) \neq \varnothing$ і виберемо $\bar{x} \in Q(X)$. Тоді за визначенням абсолютно-оптимальної альтернативи отримаємо наступний ланцюг імплікацій:

$$\forall x \in X,\ \bar{x} \geq x \ \Rightarrow \ \bar{y} = f(\bar{x}) \geq f(x) = y \ \Rightarrow \ f_i(\bar{x}) \geq f_i(x),\ i = 1,2,...,m \ \Rightarrow$$

$$f_i(\bar{x}) = \max_{x \in X} f_i(x),\ i = 1,2,...,m \ \Rightarrow \ \bar{x} \in X^i,\ i = 1,2,...,m \ \Rightarrow \ \bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} X^i.$$

Тепер покажемо, що $Q(X) \supseteq \bigcap_{i=1}^{m} X^i$, що очевидне коли $\bigcap_{i=1}^{m} X^i = \varnothing$. Нехай $\bigcap_{i=1}^{m} X^i \neq \varnothing$ і виберемо $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} X^i$. Тоді отримаємо наступний ланцюг відношень:

$$\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{m} X^i \ \Rightarrow \ \bar{x} \in X^i,\ i = 1,2,...,m \ \Rightarrow f_i(\bar{x}) = \max_{x \in X} f_i(x),\ i = 1,2,...,m \ \Rightarrow$$

$$f_i(\bar{x}) \geq f_i(x),\ i = 1,2,...,m \ \Rightarrow \ \bar{y} = f(\bar{x}) \geq f(x) = y \ \Rightarrow \ \forall x \in X,\ \bar{x} \geq x$$

$$\Rightarrow \ x \in Q(x).$$

Теорему доведено.

Абсолютно-оптимальні альтернативи і відповідно абсолютно-оптимальні оцінки, як уже відзначалося, безумовно, можуть вважатися оптимальними, однак практично вони майже ніколи не існують.

Ефективні оцінки і альтернативи. Розглянемо інші відношення переваги на множині оцінок.

Означення. Будемо говорити, що оцінка $y = (y_1,...y_m)$ строго переважає (домінує) оцінку $y' = (y'_1,...y'_m)$ і позначимо це $y \succ y'$, якщо $y_i \geq y'_i \ \ \forall i \in M$ і хоча б одна нерівність є строгою, тобто $y \neq y'$.

Це означення є настільки природним, що у всіх моделях прийняття індивідуальних рішень вводиться як аксіома і називається (сильною) аксіомою Парето. Таке відношення переваги буде асиметричним та від’ємно транзитивним (називається нестрогим частковим порядком).

Відповідно до максимального елементу за цим відношенням визначається ефективна оцінка.

Означення. Оцінка y^* називається ефективною (оптимальною за Парето), якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y \succ y^*$. Позначимо множину ефективних оцінок через $P(Y)$.

Означення. Альтернатива $x*$ називається ефективною (оптимальною за Парето), якщо їй відповідає ефективна оцінка $y^* = (y_1^*,...,y_m^*) \in P(Y)$, де

$y_i^* = f_i(x^*),\ i \in M$.

Очевидно, що $\nexists x \in X$, для якого $f_i(x) \geq f_i(x^*)\ \ \forall i \in M$, та хоча б одна нерівність була строгою, тобто $\exists i \in M : f_i(x) > f_i(x^*)$.

Позначимо множину ефективних альтернатив через $P(X)$.

Умови існування ефективних альтернатив установлює наступна теорема.

Теорема (Подиновський). Оцінка $y^0 \in Y$ є ефективною тоді і лише тоді, коли для кожного $i \in M$:

$$y_i^0 = \max_{y \in Y^i} y_i, \tag{1}$$

де $Y^i = \left\{ y \in Y \,\middle|\, y_j \geq y_j^0,\ j \in M;\ j \neq i \right\}$. (2)

Якщо $y^0 \in Y$ є ефективною, то вона є єдиною в Y точкою, що задовольняє (1) при кожному $i \in M$.

Доведення. Доведемо достатність. Нехай $y_i^0 = \max_{y \in Y^i} y_i$. Припустимо супротивне, що $y^0 \notin P(Y)$. Тоді знайдеться така оцінка $\bar{y} \in Y$, що $\bar{y}_i \geq y_i^0$, $\forall i \in M$; $\exists j \in M : \bar{y}_j > y_j^0$. Таким чином $\bar{y} \in Y^i$, $\bar{y}_i > y_i^0$. Звідси слідує, що $\bar{y}_i > y_i^0 = \max_{y \in Y^i} y_i$. Одержали суперечність.

Доведемо необхідність. Нехай $y^0 \in P(Y)$. Побудуємо множини $Y^i,\ \forall i \in M$ за умовами (2). Помітимо, що $Y^i \neq \varnothing,\ \forall i \in M$. Припустимо супротивне, що $\exists i \in M : \max_{y \in Y^i} y_i > y_i^0$. Тоді для оцінки $\bar{y} \in Y^i$, $\bar{y}_i = \max_{y \in Y^i} y_i$ маємо $\bar{y}_j \geq y_j^0$, $\forall j \in M$; $\bar{y}_i > y_i^0$. Звідси, за означенням ефективної оцінки, одержимо $y^0 \notin P(Y)$.

Для строго опуклих задач БКО буває корисною наступна теорема.

Теорема. Нехай множина альтернатив X є опуклою, а $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ є строго опуклою вгору вектор-функцією. Для ефективності альтернативи x^* необхідно і достатньо, щоб існував вектор $\lambda \in L^{\geq 0} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) | \sum_{i \in M} \lambda_i = 1;\ \ \lambda_i > 0,\ \ i \in M \right\}$, при якому скалярний добуток $\langle \mu, f(x^*) \rangle = \max_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle$.

Лекція 6. Слабко ефективні оцінки і альтернативи

В деяких випадках, зокрема в моделях прийняття групових рішень, відношення переваги на множині оцінок Y повинне відбивати “групову думку”, яка агрегує індивідуальні. Очевидно, в різних ситуаціях підсумок порівняння оцінок y і y' може залежати від того, скільки строгих нерівностей виконується при порівнянні їхніх компонент. Однак самим слабким є припущення, яке полягає в тім, що в для всієї групи оцінка y переважніше y' якщо всі нерівності є строгими. Це припущення називається слабкою аксіомою Парето.

Означення. Будемо говорити, що оцінка $y=(y_1,...y_m)$ сильно переважає (строго домінує) оцінку $y'=(y'_1,...y'_m)$ і позначимо це $y \succ\succ y'$, якщо $y_i > y'_i$. Таке відношення переваги буде асиметричним та транзитивним (називається строгим частковим порядком).

Відповідно до визначення максимального елементу за цим відношенням введемо поняття слабко ефективної оцінки.

Означення. Оцінка y^* називається слабко ефективною (оптимальною за Слейтером), якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y \succ\succ y^*$. Позначимо множину слабко ефективних (оптимальних за Слейтером) оцінок через $S(Y)$.

Означення. Альтернатива x^* називається слабко ефективною (оптимальною за Слейтером), якщо їй відповідає слабко ефективна оцінка, тобто $y_i^* = f_i(x^*),\ i \in M$. Очевидно, що $\nexists x \in X : f_i(x) > f_i(x^*)\ \ \forall i \in M$.

Позначимо множину ефективних альтернатив через $S(X)$.

Теорема. (Гермейер). Припустимо, що $y^0 \in Y$ і $y_i^0 > 0\ \ \forall i \in M$. Оцінка y^0 є слабко ефективною тоді і тільки тоді, коли існує вектор $\lambda \in L^{>0} = \left\{ \lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m) \middle| \sum_{i \in M} \lambda_i = 1;\ \ \lambda_i > 0,\ \ i \in M \right\}$ такий, що

$$\min_{i \in M} \lambda_i y_i^0 = \max_{y \in Y} \min_{i \in M} \lambda_i y_i \qquad (1)$$

Для слабко ефективної оцінки $y^0 \in Y$ можна прийняти $\lambda = \lambda^0$, де $\lambda^0 \in L^+$ – вектор з компонентами

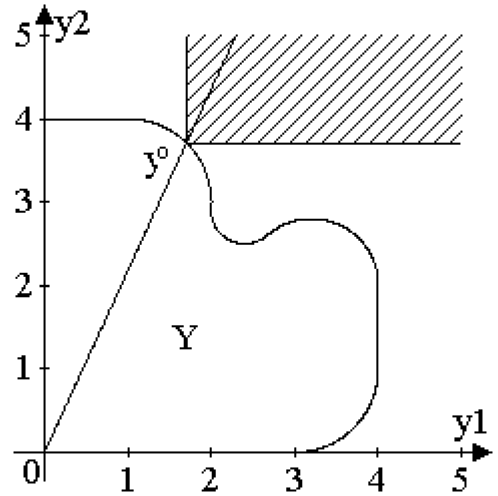
$$\lambda_i^0 = \xi^0 / y_i^0,\ \ i \in M;\ \ \xi^0 = 1 \Big/ \sum_{k \in M} \frac{1}{y_k^0}, \qquad (2)$$

і тоді $\max_{y \in Y} \min_{i \in M} \lambda_i^0 y_i = \xi^0$.

Доведення. З рівності (1) випливає, що для кожного $y \in Y$ існує номер $i \in M$ такий, що $y_i^0 \geq y_i$. Тому $\neg \exists y \in Y : y >> y^0$. Звідси y^0 є слабко ефективною оцінкою.

Доведемо необхідність. Для цього візьмемо вектор з компонентами, які визначені формулами (2). Відмітимо, що $\lambda^0 \in L^{>0}$. З $y^0 \in S(Y)$ випливає, що для кожного $y \in Y$ існує $j \in M$, при якому виконується нерівність

$y_j^0 \ge y_j$, а виходить, і нерівність $\lambda_j^0 y_j^0 \ge \lambda_j^0 y_j$. Оскільки $\lambda_j^0 y_j^0 = \lambda^0 = 1 \Big/ \sum_{i \in M} \frac{1}{y_i^0} = const$, то $\forall y \in Y$, $\min_{i \in M} \lambda_i^0 y_i^0 \ge \min_{i \in M} \lambda_i^0 y_i$. Звідси слідує (1).♦

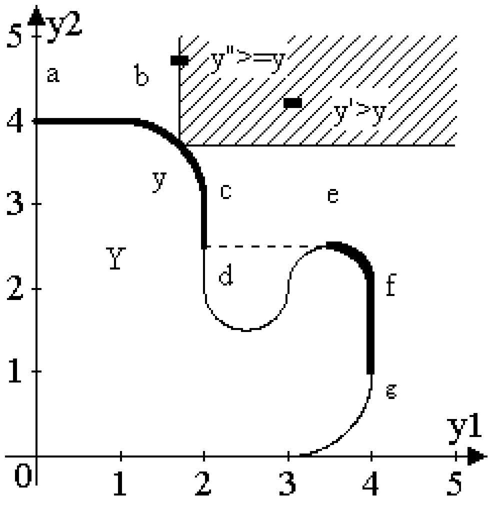


Мал. 5.

Геометрично наочно бачимо, що $y^0 \in S(Y)$ тоді і тільки тоді, коли у внутрішністю ортанта $E_{\ge 0}^m$, зсунутого у точку y^0 не попадає жодна точка з Y (див. малюнок 5). Оскільки гіперповерхня $\min_{i \in M} \lambda_i y_i = \lambda$ при $\lambda = 0$ і додатних λ_i представляє собою границю цього ортанту, зсув якого в y^0 можна здійснити присвоєнням відповідних значень параметрам λ_i і λ, то з'являється можливість сформульований геометричний факт виразити в термінах функції $\min_{i \in M} \lambda_i y_i$. Ця можливість і реалізована в теоремі.

Для опуклих задач БКО буває корисною наступна теорема.

Теорема. Нехай множина альтернатив X є опуклою, а $f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ є опуклою вгору вектор-функцією. Для ефективності альтернативи x^* необхідно і достатньо, щоб існував вектор $\lambda \in L^{\ge 0} = \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m) \middle| \sum_{i \in M} \lambda_i = 1;\ \ \lambda_i \ge 0,\ \ i \in M \right\}$, при якому скалярний добуток $\langle \mu, f(x^*) \rangle = \max_{x \in X} \langle \mu, f(x) \rangle$.



Мал.3.

Порівняння ефективних та слабко ефективних оцінок. Оскільки з $y \succ\succ y'$ слідує $y \succ y'$, то будь-яка ефективна векторна оцінка є слабко ефективною, так, що $P(Y) \subseteq S(Y)$. Дійсно, якщо y^0 не є слабко ефективною, то для якоїсь $y \in Y$ буде виконуватися $y \succ\succ y^0$, а тому й $y \succ y^0$, так що y^0 не може бути ефективною.

Геометрично, при $m = 2$, $P(Y)$ є північно-східною границею множини Y (без горизонтальних та вертикальних ділянок, чи ділянок, що знаходяться у досить крутих й глибоких проваллях), а $S(Y)$ може додатково містити в собі вертикальні й горизонтальні ділянки границі, що прилягають до Р(У). Так, на малюнку 3 множина $P(Y)$ (ефективна границя Y) утворена кривими bc, ef, а $S(Y)$ складається з двох частин - abcd (включаючи d) і efg.

У цьому легко переконатися, якщо помітити, що точки, які є кращими, ніж у, у змісті відношення ">", заповнюють прямий кут, сторони якого паралельні вісям координат із вершиною у точці у (особисто точка у виключається); а точки, що є кращими за у, у сенсі відношення ">>", складають внутрішність цього ж кута.

Методи багатокритеріальної оптимізації. Висновок, який можна зробити з попереднього розділу, полягає в тім, що вибір альтернативи, яка буде розв'язком задачі багатокритеріальної оптимізації, треба робити з множини ефективних альтернатив (чи слабко ефективних альтернатив, чи власно ефективних альтернатив, - в залежності від вимог ОПР і предметної області в якій приймається рішення.

Але яку, власне, ефективну альтернативу вибирати? Звичайно, якщо множина абсолютно-оптимальних альтернатив не є порожньою, то будь-яка з них (слід нагадати, що всі абсолютно-оптимальні альтернативи рівноцінні між собою) може вважатися розв'язком багатокритеріальної задачі. Як було з'ясовано вище, на практиці такі задачі зустрічаються досить не часто. Таким чином нам треба вирішити, що робити у випадку, коли множина абсолютно-оптимальних альтернатив є порожньою. Оскільки ефективні альтернативи є непорівняними між собою за перевагою, яка задається критеріями задачі, а ми усе ж таки хочемо їх якимось чином порівняти, то для цього потрібна додаткова інформація окрім тієї, яка є при порівнянні альтернатив за кожним критерієм окремо. Точніше, для порівняння ефективних альтернатив потрібна додаткова інформація про перевагу не на множині альтернатив, а на множині критеріїв, тобто інформація наступного типу: скількома одиницями виграшу по одних критеріях можна компенсувати програш по інших критеріях. Джерелом такої інформації може бути як ОПР, так і специфіка предметної області, в якій розв'язується задача прийняття рішення.

Правила вибору ефективних альтернатив. Те, що у рамках постановки багатокритеріальної задачі проблема вибору єдиної ефективної альтернативи не може бути розв'язана, потребує уведення деякого правила (позначимо його через *R*) вибору єдиної альтернативи з множини ефективних альтернатив.

Нехай $R(X, f)$ множина альтернатив багатокритеріальної задачі:

$$\max_{x \in X} \{ f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) \},$$

яка задовольняє правилу вибору *R*. Сформулюємо умови, яким це правило повинно задовольняти у загальному випадку (так звані умови раціональності).

По-перше, вибір повинен бути зробленим завжди, тобто $R(X, f) \neq \varnothing$.

По- друге, вибирати потрібно ефективну альтернативу, тобто $R(X, f) \subseteq P(X)$.

По-третє, єдиність вибору потрібно розуміти не буквально, що обов'язково вибрати тільки одну альтернативу. Ми будемо вважати, що правило вибору R повинно однозначно визначати розв'язок багатокритеріальної задачі, якщо усі альтернативи, що задовольняють йому є рівноцінними, тобто якщо $x',\ x'' \in R(X, f)$, то $x' \sim x''$.

По-четверте, більше того, якщо ми вибираємо якусь альтернативу до якої у множині альтернатив є рівноцінна, то і вона повинна вибиратися цим правилом вибору, тобто якщо $x' \in R(X, f),\ x'' \in X,\ x'' \sim x'$, то $x'' \in R(X, f)$.

По-п'яте, якщо розглянути дві ситуації прийняття рішення за одним і тим же вектором критеріїв *f*, але на множинах альтернатив, що одна *X'* є підмножиною іншої *X*, то вибір $R(X, f)$ з більш широкої множини альтернатив *X*, якщо він належить більш вузькій множині альтернатив $R(X, f) \subseteq X'$, повинен бути вибором з цієї множини. Тобто, якщо $R(X, f) \cap X' \neq \varnothing$, то $R(X, f) \cap X' = R(X', f)$.

Звичайно, що правил вибору, які задовольняють цим умовам можна побудувати необмежену кількість, але в цьому немає нічого поганого, оскільки дає можливість пристосуватися до будь-якої ОПР і специфіки предметної області. Не зважаючи на такий широкий спектр різних можливих правил вибору серед них можна виділити певні класи.

1. Правила вибору, які безпосередньо визначені на множині ефективних альтернатив, тобто $R(X, f) = R(P(X), f)$. Перевагою таких правил є їх простота, а суттєвим недоліком – необхідність побудови усієї множини ефективних альтернатив.
2. Правила вибору, які є суперпозицією двох правил вибору: правила вибору $R'(X, f)$, яке визначено на множині альтернатив і вибирає деяку підмножину альтернатив, яка містить як ефективні, так і неефективні альтернативи, і правила вибору $R(R'(X, f), f)$, яке визначено на множині вже попередньо вибраних альтернатив і вибирає тільки ефективну альтернативу. Таке розподілення правила вибору на два правила в деяких практичних ситуаціях дозволяє реалізувати досить ефективний вибір.
3. Діалогові процедури вибору. Цей клас правил вибору враховує той факт, що формалізація правила вибору в багатьох практичних ситуаціях прийняття рішень ускладняється наявністю "людського" фактору. Справа у тім, що хоча ми припускаємо існування у ОПР якоїсь системи переваг, ОПР може не завжди її усвідомлювати, ця система переваг може усвідомлюватися (формуватися) тільки у процесі прийняття рішення і ця система переваг може з часом змінюватися. Тому, якщо ми вибрали якусь альтернативу, її вже після вибору треба перевірити на відповідність перевагам ОПР (які вже можуть змінитися) і при необхідності відкоригувати правило вибору.

Ці міркування приводять до необхідності створення правил вибору у вигляді діалогової процедури, яка уявляє собою ітеративний процес взаємодії між ОПР і комп'ютером. Кожна ітерація *i*, *i*=1,2,… складається з двох етапів:

1. Обчислювальний етап. На цьому етапі комп'ютер використовує отриману від ОПР з попереднього кроку інформацію для побудови (корекції) правила вибору, визначає ефективну альтернативу $x^i = R^i(X, f)$ і формує допоміжну інформацію для визначення переваг ОПР.
2. Етап прийняття рішення. ОПР аналізує отриману від комп'ютера ефективну альтернативу і допоміжну інформацію. Якщо вона її задовольняє, то вона приймає рішення про вибір x^i, в протилежному випадку дає нову інформацію для комп'ютеру, завдяки якій буде робитися інший вибір і т.д.

Класифікація методів багатокритеріальної оптимізації. Методи багатокритеріальної оптимізації являють собою чисельну реалізацію певного правила вибору ефективної (слабко ефективної, власно ефективної) альтернативи, тому цілком природно класифікувати їх за типами інформації, яку дає ОПР для формування правила вибору. Розглянемо наступну класифікацію:

- Методи, які не використовують інформацію про перевагу на множині критеріїв.
- Методи, які використовують один тип інформації про перевагу на множині критеріїв.
- Методи, які використовують різні типи інформації про перевагу на множині критеріїв.
- Спеціальні методи

Згідно з цією класифікацією наведемо як приклад.

Метод ідеальної точки. Цей метод не використовує допоміжну інформацію від ОПР про перевагу на множині критеріїв. Це може відбуватися, коли у ОПР ця інформація відсутня чи, якщо вона є, то її не можна застосувати по деяких причинах. В цьому випадку робиться припущення про наявність, так званого "оптимального" розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації, який може бути знайдений шляхом перетворення багатокритеріальної задачі у відповідну скаляризовану (однокритеріальну) задачу.

Ідеальною називається точка $a = (a_1, ..., a_m) \in E_s^m$, $a_i = \max_{y \in Y} y_i$, $i \in M$.

Правило вибору компромісу R у цьому методі полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку найближчу до ідеальної точки в деякій метриці.

Визначимо відстань $\rho_s(y,a) = (\sum_{i=1}^{m} |y_i - a_i|^s)^{\frac{1}{s}}$ між точками y, a у метричних просторах E_s^m з показником метрики $s \ge 1$. Тоді згідно з цим методом знайдемо компромісну оцінку як розв'язок так званої скаляризованої задачі $y^* = \arg\min_{y \in Y} (\sum_{i=1}^{m} |y_i - a_i|^s)^{1/s}$. Значення показника метрики s вибирається в залежності від предметної області. На практиці в основному використовують значення $s = 1, 2, \infty$.

Вибирають $s = 2$ (Евклідів простір) у випадках, коли критерії мають зміст відстані чи інших фізичних величин для яких Евклідова метрика є змістовною. В цьому випадку компромісна альтернатива x^* знаходиться як розв'язок скаляризованої задачі:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in M} (f_i(x) - a_i)^2 . \tag{3}$$

При $s = 1, \infty$ критерії можуть мати будь-який інший зміст (наприклад, вартість, надійність, тривалість і т.д.) і скаляризовані задачі приймуть відповідно вигляд:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in M} | f_i(x) - a_i | = \max_{x \in X} \sum_{i \in M} f_i(x) , \tag{4}$$

$$\min_{x \in X} \max_{i \in M} | f_i(x) - a_i | = \max_{x \in X} \min_{i \in M} \left(f_i(x) - a_i \right). \tag{5}$$

Задача (4) вибирається, коли ОПР оцінює "відстань" до ідеалу як сумарну нев'язку по усіх критеріях і така оцінка має певний зміст у предметній області, в якій розв'язується задача (наприклад, у двохкритеріальній задачі, де максимізуються прибуток фірми і заробітна платня її працівників цільова функція задачі (4) має зміст частини доходу фірми).

Задача (5) вибирається, коли ОПР оцінює "відстань" до ідеалу як максимальну нев'язку по усіх критеріях (тобто по "найгіршому" по значенню показнику).

Лекція 7. ЗПР в умовах невизначеності

Найважливішим застосуванням теорії очікуваної корисності є можливість формалізації процесу прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності.

В загальному випадку задача прийняття рішень (ЗПР) є визначеною на наступній тріаді множин: X – множина альтернатив; Y-множина наслідків; S – множина станів.

Множина S є проявом стохастичної невизначеності в прийнятті рішень, причому конкретна інтерпретація станів залежить від формулювання задачі (наприклад, попит на ту чи іншу продукцію, погода і т.п.). Множину S також називають множиною "станів природи" чи "станів зовнішнього середовища", щоб підкреслити властиву їй невизначеність і незалежність від ОПР.

Відомі (див. §2) дві форми взаємозв'язку тріади множин, кожній з яких відповідає своє визначення множини станів і свій підхід до оцінки очікуваної корисності альтернатив. Це – екстенсивна та нормальна форми.

Нормальна форма ЗПР в умовах невизначеності. Для ЗПР у нормальній формі альтернативи $x \in X$ визначаються як відображення станів у наслідки $x : S \to Y$. Цей підхід був сформульований Л. Севіджем. Тут множина станів S явно фігурує в ЗПР, а стохастична невизначеність описується за допомогою одного незалежного від альтернатив розподілу ймовірностей на S і задається відповідною щільністю $p(s),\ s \in S$. Переваги ОПР, як і у попередньому випадку, задаються функціями корисності, але тепер вони будуються не на множині наслідків Y, а на множині $X \times S$, оскільки будь-який наслідок однозначно визначається парою $(x,s) \in X \times S$. Для ЗПР у нормальній формі очікувана корисність альтернативи x може бути оціненою деякою функцією корисності (функціоналом) $E(x) = E(u(x,s), p(x))$.

При наявності фундаментальної погодженості (коли невизначеність вважається викликаною тими самими причинами) екстенсивна та нормальна форми ЗПР еквівалентні з погляду очікуваної корисності розглянутих альтернатив.

Критерії прийняття рішень в умовах невизначеності. Розглянемо конкретні види функцій корисності (критеріїв) для нормальної форми ЗПР, які найбільш часто вживаються в методах прийняття рішень.

Критерій Вальда (мінімаксний). Мінімаксний критерій (ММ) використовує функцію корисності альтернатив $E_{MM}(x) = \min\limits_{s \in S} u(x,s)$, що відповідає позиції крайньої обережності. Шукана альтернатива вибирається з умови $x^* \in \mathrm{Arg}\max\limits_{x \in X} E_{MM}(x) = \mathrm{Arg}\max\limits_{x \in X} \min\limits_{s \in S} u(x,s)$. Обрані таким чином альтернативи цілком виключають ризик. Це означає, що які б стани природи $s \in S$ не реалізувалися, відповідний результат не може виявитися гіршим за $E_{MM}(x^*)$. Ця властивість робить мінімаксний критерій одним із фундаментальних. Тому в практичних задачах він застосовується найчастіше.

	s_1	s_2	$E_{MM}(x)$
x_1	1	100	1
x_2	1.1	1.1	1.1
		Max	1.1

Приклад. Нехай числові оцінки наслідків альтернатив x_1, x_2 при станах s_1, s_2 задаються нижче приведеною табл.

Хоча альтернатива x_1 здається більш вигідною, оптимальною за ММ – критерієм буде альтернатива x_2. Ухвалення рішення за цим критерієм може, однак, виявитися ще менш розумним, якщо:

стан s_2 зустрічається частіше ніж s_1;

рішення реалізується багаторазово.

Вибираючи альтернативу, що пропонується за ММ -критерієм, щоправда, уникаємо невдалого значення 1, що реалізується при альтернативі x_1 при стані s_1, одержуючи замість нього при цьому стані не набагато кращий результат 1.1, зате в стані s_2 втрачаємо виграш 100, одержуючи всього лише 1.1. Цей приклад показує, що в численних практичних ситуаціях песимізм мінімаксного критерію може виявитися дуже невигідним.

Застосування ММ – критерію буде виправданим, якщо ситуація, у якій приймається рішення, характеризується такими обставинами:

про можливості появи зовнішніх станів нічого не відомо;

необхідно рахуватися з появою різних станів природи $s \in S$;

рішення реалізується лише один раз;

необхідно виключити будь-який ризик, тобто при жодних $s \in S$ не допускається отримання результату, меншого за $E_{MM}(x^*)$.

Критерій Севіджа. За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується $E_{SE}(x) = \max_{s \in S}(\max_{z \in X} u(z,s) - u(x,s))$.

Цю величину можна інтерпретувати як максимальні втрати (штрафи), що виникають при заміні оптимальної альтернативи на альтернативу *x*. Тоді логічно приймати рішення за умовою мінімізації цих втрат:

$$x^* \in \mathrm{Arg}\min_{x \in X} E_{SE}(x) = \mathrm{Arg}\min_{x \in X} \max_{s \in S}(\max_{z \in X} u(z,s) - u(x,s)).$$

До ситуації прийняття рішень за цим критерієм висуваються такі ж самі вимоги, що і у випадку ММ – критерію.

Критерій Гурвіца. Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Л. Гурвіц запропонував критерій GW, функція корисності якого забезпечує компроміс між граничним оптимізмом і крайнім песимізмом. За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується величиною $E_{GW}(x) = \alpha \max_{s \in S} u(x,s) + (1-\alpha)\min_{s \in S} u(x,s)$, де $\alpha \in [0,1]$ – ваговий коефіцієнт, що характеризує схильність ОПР до ризику.

Рішення приймається з умови:

$x^* \in \mathrm{Arg}\max_{x \in X} E_{GW}(x) = \mathrm{Arg}\max_{x \in X}(\alpha \max_{s \in S} u(x,s) + (1-\alpha)\min_{s \in S} u(x,s))$ Для

$\alpha = 0$ GW-критерій перетворюється в ММ-критерій. Для $\alpha = 1$ він перетворюється в критерій азартного гравця. На практиці вибрати цей коефіцієнт буває так само важко, як правильно вибрати сам критерій. Навряд чи можливо знайти кількісну характеристику для тих часток оптимізму й песимізму, що присутні при прийнятті рішення. Тому найчастіше $\alpha = 0.5$ без заперечень приймається в якості деякої "середньої" точки зору.

Інколи величина α використовується для обґрунтування вже прийнятого рішення. Для рішення, що сподобалося, обчислюється ваговий коефіцієнт α і він інтерпретується як показник співвідношення оптимізму та песимізму. Таким чином, позиції, виходячи з яких приймаються рішення, можна розсортувати принаймні заднім числом.

Вибір відповідно до GW – критерію може, незважаючи на цілком урівноважену точку зору, приводити до нераціональних рішень. Розглянемо приклад, побудований так, що оптимальне (відповідно до GW – критерію) рішення є незалежним від α .

Приклад. Нехай вибирається одна з двох альтернатив, які мають оцінки, наведені у таблиці.

	s_1	s_2	$\dots$	s_{n-1}	s_n
x_1	10000	1	$\dots$	1	1
x_2	9999	9999	$\dots$	9999	0.99

З цієї таблиці бачимо, що x_1 буде вибраним за GW – критерієм при будь-якому $\alpha \in [0,1]$, але більш вдалим вибором буде x_2 .

GW – критерій висуває до ситуації, у якій приймається рішення, наступні вимоги:

- про ймовірності появи станів нічого не відомо;
- з появою нових станів необхідно рахуватися;
- реалізується мала кількість рішень;
- допускається деякий ризик.

Лекція 8. Критерії прийняття рішень в умовах ризику

Критерій Байеса – Лапласа. На відміну від мінімаксного критерію, цей критерій враховує кожен із можливих наслідків альтернативи.

Нехай $p(s)$ - ймовірність появи стану $s \in S$, тоді для BL – критерію корисність кожної альтернативи характеризується математичним сподіванням корисностей її наслідків

$$E_{BL}(x) = \int_{s \in S} p(s)u(x,s)ds.$$

Шукана альтернатива вибирається з умови:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\max_{x \in X} E_{BL}(x) = \operatorname{Arg}\max_{x \in X} \int_{s \in S} p(s)u(x,s)ds.$$

При цьому вважається, що ситуація, у якій приймається рішення, характеризується наступними обставинами:

ймовірності появи станів відомі і не залежать від часу;

рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів;

для малого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

При досить великій кількості реалізацій середнє значення корисностей альтернативи x наближається до математичного сподівання корисностей її наслідків. Тому при повній (нескінченній) реалізації будь-який ризик практично виключається. BL – критерій є більш оптимістичним, ніж ММ – критерій, однак він вимагає вищого рівня інформованості та досить тривалої реалізації.

Критерій мінімізації дисперсії оцінки. Цей критерій використовують, коли ОПР, зацікавлена в отриманні "стійкого" щодо станів середовища рішення і відомо, що ймовірності станів середовища мають нормальний розподіл. При виборі цього критерію кожна альтернатива оцінюється дисперсією функції корисності її наслідків при всіх станах середовища, яка мінімізується:

$$E_D(x) = \int_{s \in S} p(s)\Big(\int_{s \in S} p(s)u(x,s)ds - u(x,s)\Big)^2 ds = \int_{s \in S} p(s)(E_{MM}(x) - u(x,s))^2 ds$$

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min_{x \in X} E_D(x) = \operatorname{Arg}\min_{x \in X} \int_{s \in S} p(s)(E_{MM}(x) - u(x,s))^2 ds.$$

Інші умови такі ж самі, як і для попереднього критерію.

Критерій максимізації ймовірності. При використанні цього критерію ОПР фіксує величину оцінки функції корисності наслідків $u^* : \min_{x \in X}\min_{s \in S} u(x,s) \le u^* \le \max_{x \in X}\max_{s \in S} u(x,s)$, яку він хоче найбільш ймовірно досягти. Для кожної альтернативи x визначається ймовірність $p\{u(x,s) \ge u^*\}$ того, що функція корисності наслідків буде не менша за u^* для кожного стану середовища $s \in S$. Критерій полягає у максимізації ймовірності досягнення значення заданої оцінки

$$E_F(x) = \int\limits_{\substack{s\in S,\\ u(x,s)\geq u^*}} p(s)ds\,,\ x^* \in \mathrm{Arg}\max_{x\in X} E_F(x) = \mathrm{Arg}\max_{x\in X} \int\limits_{\substack{s\in S,\\ u(x,s)\geq u^*}} p(s)ds\,.$$

Умови застосування цього критерію такі ж самі, як і для BL – критерію.

Критерій Гермейєра. За підходом Ю.Гермейера до відшукання слабко ефективних рішень у задачах багатокритеріальної оптимізації (див. Розділ 4) можна запропонувати ще один критерій (GE).

Нехай множина станів є скінченною, а саме $S = \{s_1,...,s_n\}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати $p(s) > 0,\ \forall s \in S$, $u(x,s) > 0,\ \forall x \in X\ ,\forall s \in S$, тоді функція корисності альтернатив за GE – критерієм визначається як $E_{GE}(x) = \min_{s\in S} u(x,s)\,/\,p(s)$, а рішення приймається з умови:

$$x^* \in \mathrm{Arg}\max_{x\in X} E_{GE}(x) = \mathrm{Arg}\max_{x\in X}\min_{s\in S} u(x,s)\,/\,p(s)\,.$$

Величини, які обернені до ймовірностей станів природи $p(s) > 0,\ \ s \in S$, в цьому критерії можна інтерпретувати як вагові коефіцієнти функцій корисності $u(x,s),\ s \in S$, наслідків, які хочемо одночасно максимізувати. За теоремою Ю. Гермейєра про необхідну й достатню умови слабкої ефективності фактично шуканий розв'язок x^* визначається як одна (відповідна ваговим коефіцієнтам $p(s),\ s \in S$) із слабко ефективних альтернатив задачі: $u(x,s) \to \max_{x\in X},\ s \in S$.

В певному відношенні GE – критерій узагальнює MM – критерій. У випадку рівномірного розподілу ймовірностей вони стають ідентичними. Умови його застосовності такі:

множина станів є скінченною;

ймовірності появи станів відомі;

із появою тих або інших нових станів потрібно рахуватися;

допускається деякий ризик;

рішення може реалізуватися один або багато разів.

Якщо функція розподілу відома не дуже надійно, а реалізацій рішення мало, то за GE – критерієм одержують невиправдано великий ризик. Таким чином, залишається деяка воля для суб'єктивних дій.

Лекція 9. Прийняття рішень в умовах конфлікту

Гра у нормальній формі. Нехай $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множина гравців (агентів, осіб, що приймають рішення), n – їхня кількість, $n \geq 2$.

Кожен гравець $i \in N$ має можливість вибрати свою стратегію (рішення, дію), яку ми будемо позначати x_i. Усі стратегії гравця $i \in N$ утворюють множину X_i.

Коли всі гравці вибрали свої стратегії x_i, $i \in N$, утворюється так звана ситуація гри, яка описується вектором $x = (x_1, ..., x_n)$. Множину всіх ситуацій будемо позначати X. Очевидно, що $X = \prod_{i \in N} X_i$.

В теорії ігор ситуацію гри позначають різними способами:

$x = (x_1, ..., x_n) = (x_i)_{i \in N}$ – для скорочення запису;

$x = (x_1, ..., x_n) = (x_i, x_{N \setminus i})$ – коли хочуть виділити стратегію деякого гравця $i \in N$, у цьому записі використовується позначення $x_{N \setminus i} = (x_j)_{j \in N \setminus \{i\}} =$ $= (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$;

$x = (x_1, ..., x_n) = (x_T, x_{N \setminus T})$ – коли хочуть виділити набір стратегій деякої коаліції (підмножини) $T \subset N$ гравців $i \in T$, у цьому записі використовуються позначення $x_T = (x_j)_{j \in T}$, $x_{N \setminus T} = (x_j)_{j \in N \setminus T}$.

На множині ситуацій гри X для кожного гравця $i \in N$ визначена його функція виграшу (корисності) $u_i : X \to R^1$, яка за замовченням максимізується. Таким чином, виникає наступна задача: «Яку стратегію треба вибрати кожному гравцю, щоб утворилася ситуація, яка максимізувала б його функцію виграшу»?

Якщо задана: N – множина гравців, X_i – множина стратегій гравця $i \in N$, $u_i(x)$ – функція виграшу гравця $i \in N$, то сукупність $(X_i, u_i; i \in N)$ називають грою у нормальній формі. Відомі й інші форми гри: розгорнута і характеристична.

Якщо множини стратегій гравців скінчені, то можна вважати, що множиною стратегій гравця $i \in N$ є $X_i = \{1, ..., m_i\}$. За означенням гри для кожної ситуації гри $(j_1, ..., j_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i$ визначене число $u_i(j_1, ..., j_n)$ – виграш гравця $i \in N$. Тому якщо гравців двоє ($n = 2$), то можна визначити матриці виграшів гравців $U^i = \{u^i_{j_1 j_2}\}_{j_1 \in X_1, j_2 \in X_2}$, $i = 1, 2$. У цьому випадку гра називається біматричною.

Якщо в грі двох осіб сума функцій виграшу гравців дорівнює нулю, то гра називається антагоністичною. В цьому випадку її нормальна форма задається сукупністю $G = (X_1, X_i, u)$, де $u(x)$ є функцією виграшу першого гравця. Якщо ж множини стратегій гравців є скінченими, то ця гра називається матричною антагоністичною грою.

Класифікація ігор

За характером поведінки

1. Кооперативні ігри досліджують прийняття рішень у випадках, коли існує той чи інший механізм покарання або заохочення гравців, який забезпечує виконання спільно обраної ситуації гри. Основна задача теорії кооперативних ігор полягає у виборі такої ситуації гри, для якої можна побудувати сценарій взаємодії гравців, який забезпечить стабільність цієї ситуації для будь-якої коаліції гравців (зокрема для кожного гравця окремо та всієї спільноти гравців). Суттєвим обмеженням таких відомих принципів оптимальності кооперативних ігор, як α,β,γ-ядра, є вимога достатньо великої кількості реалізацій гри. Ядро, N-ядро гри та вектор Шеплі обґрунтовані лише у тих іграх, де гравці можуть обмінюватися своїми виграшами (так звані, трансферабельні виграші).

2.Некооперативні (бескоаліційні) ігри досліджують прийняття рішень в умовах конфлікту у припущенні, що гравці діють незалежно один від іншого. Угоди між гравцями хоча в принципі можливі, але мають обмежений і необов'язковий характер. Кожен може порушити угоду без покарання.

За видом інформованості

Застосування того чи іншого принципу оптимальності в некооперативних іграх суттєво залежить від інформованості гравців.

1. В умовах повної неінформованості гравців (кожен гравець знає лише свою функцію виграшу, гра відбувається лише один раз) відомі: недоміновані та домінуючі стратегії; обережні стратегії.

2. В умовах "несиметричної" інформованості гравців (деякі гравці повністю інформовані, а інші неінформовані) використовують принцип рівноваги за Штакельбергом та його узагальнення.

3. Для випадку повної інформованості гравців (кожен гравець знає не лише свою функцію виграшу, а й функції виграшу інших гравців, гра може відбувається будь-яку кількість разів) відомі основні принципи оптимальності: рівновага у домінуючих стратегіях, складна рівновага; рівновага за Нешем; коаліційна рівновага; рівновага за Бержем.

Обережна поведінка гравців. Обережна поведінка гравців обгрунтована в умовах їхньої ізольованості та повної неінформованості. В цих умовах кожен з них вибирає свою стратегію незалежно, вони не обмінюються інформацією, кожен гравець знає лише свою функцію виграшу, гравцям невідома передісторія гри.

Нехай задана гра G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$.

Означення. Стратегія $\hat{x}_i$ гравця $i \in N$ називається обережною, якщо

$$\hat{x}_i = \arg\max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}).$$

Позначимо $O_i = A\text{rg}\max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ множину обережних стратегій i - го гравця. Величина $\alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ називається максимальним гарантованим виграшем гравця $i \in N$.

Вибираючи обережну стратегію, гравець $i \in N$ вважає, що інші гравці діють найгіршим для нього чином і його «раціональність» в умовах ізольованості та повної неінформованості полягає у виборі на множині своїх стратегій такої, яка максимізує його гарантований виграш.

Для скінченної гри існування обережних стратегій гравців очевидне. У випадку нескінченої гри справедлива така теорема.

Теорема. Нехай множини стратегій гравців X_i компактні, а функції виграшу u_i неперервні на множині ситуацій гри, $i \in N$. Тоді множини обережних стратегій O_i гравців $i \in N$ не порожні і компактні.

Означення. Гра називається несуттєвою, якщо не існує такої ситуації $y \in X$, для якої виконуються наступні умови:

$$\begin{cases} \forall i \in N \quad \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) = \alpha_i \le u_i(y), \\ \exists j \in N \qquad \alpha_j < u_j(y). \end{cases}$$

Обережні стратегії в несуттєвій грі є оптимальними в подальшому сенсі.

Теорема. Припустимо, що гра G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ несуттєва. Нехай $\hat{x}_i$ – обережна стратегія гравця $i \in N$, а $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i \in N}$ є відповідною ситуацією гри. Тоді:

1) $u_i(\hat{x}) = \alpha_i \le u_i(\hat{x}_i, x_{N\setminus i})$ для $\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$, $\forall i \in N$ (якщо деякі гравці $j \ne i$ відмовляться від обережних стратегій, то це буде вигідно лише гравцю i, який має гарантований виграш);

2) для будь-якої коаліції гравців $S \subseteq N$ і будь-якого набору стратегій $x_S \in X_S$ наступна система умов є несумісною:

$$\begin{cases} \forall i \in S \quad u_i(\hat{x}) \le u_i(x_S, \hat{x}_{N\setminus S}), \\ \exists j \in S \quad u_j(\hat{x}) < u_j(x_S, \hat{x}_{N\setminus S}) \end{cases}$$

(жоден окремий гравець і жодна коаліція гравців, включаючи всю спільноту гравців, не мають причин для однобічного відходу від обережних стратегій).

Гра двох осіб з нульовою сумою. Розглянемо антагоністичну гру G (гра двох осіб з нульовою сумою функцій виграшу гравців) в нормальній формі (X_1, X_2, u), де X_1, X_2 – множини стратегій відповідно першого і другого гравця, $u(x)$ – функція виграшу першого гравця, яку він максимізує. Оскільки гра є антагоністичною, то другий гравець максимізує функцію $-u(x)$. Якщо вважати $u(x)$ функцією програшу другого гравця, то він буде її мінімізувати.

Обережні стратегії $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ кожного гравця визначаються співвідношеннями:

$$\hat{x}_1 = \arg \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2),$$

$$\hat{x}_2 = \arg \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2).$$

Позначимо $O_1 = Arg\max_{x_1 \in X_1}\min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2)$ та $O_2 = Arg\min_{x_2 \in X_2}\max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2)$ множину обережних стратегій відповідно першого та другого гравця. Величина $\alpha_1 = \max_{x_1 \in X_1}\min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2)$ називається максимальним гарантованим виграшем першого гравця, а величина $\alpha_2 = \min_{x_2 \in X_2}\max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2)$ – мінімальним гарантованим програшем другого гравця.

Теорема. В антагоністичній грі максимальний гарантований виграш першого гравця не перебільшує мінімального гарантованого програшу другого гравця, тобто $\alpha_1 \le \alpha_2$.

Означення. Величина α називається ціною антагоністичної гри, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Якщо $\alpha_1 < \alpha_2$, то відповідна гра не має ціни.

Означення. Ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ називається сідловою точкою антагоністичної гри, якщо

$$u(x_1, \hat{x}_2) \le u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \le u(\hat{x}_1, x_2), \text{ для } \forall x_1 \in X_1,\ \forall x_2 \in X_2. \qquad (1)$$

Будемо позначати множину сідлових точок $\hat{X}$.

Нерівності (3.1) іноді зручно записувати у вигляді системи двох взаємозв’язаних задач оптимізації:

$$u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, \hat{x}_2), \qquad (2)$$

$$u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \min_{x_2 \in X_2} u(\hat{x}_1, x_2). \qquad (3)$$

З означення випливає, що коли стратегії гравців утворюють сідлову точку антагоністичної гри, то кожному з них окремо не вигідно їх змінювати на будь-які інші.

Теорема. 1) Для того щоб антагоністична гра мала сідлову точку, необхідно й достатньо, щоб вона мала ціну.

2) Нехай антагоністична гра має ціну. Ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ тоді й лише тоді буде сідловою точкою, коли $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ будуть обережними стратегіями відповідно першого та другого гравця.

Таким чином, обережні стратегії в антагоністичній грі, яка має ціну, є оптимальними в наступному сенсі. По-перше, для кожного гравця є виключеним ризик (оскільки стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ є обережними). По-друге, кожному гравцю окремо не вигідно змінювати стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ на будь-які інші (оскільки ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ є сідловою точкою). По-третє, обом гравцям разом не вигідно змінювати стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ на будь-які інші. Це пояснюється тим, що в антагоністичній грі виграш першого гравця дорівнює програшу другого. Тому при збільшенні виграшу першого гравця збільшиться програш другого, і навпаки.

Достатні умови існування сідлових точок встановлює наступна теорема.

Теорема. Нехай X_1, X_2 є опуклими компактами відповідних евклідових просторів, а функція $u(x_1, x_2)$ неперервна на $X_1 \times X_2$. Припустимо, що

$u(x_1, x_2)$ є опуклою вгору за x_1 при довільному $x_2 \in X_2$ та опуклою вниз за x_2 при довільному $x_1 \in X_1$. Тоді антагоністична гра G в нормальній формі (X_1, X_2, u) має хоча б одну сідлову точку.

Лекція 10. Рівновага за Нешем

Розглянемо випадок повної інформованості гравців, коли кожен з них знає функції виграшу – свою і суперників. Гра може повторюватись будь-яку кількість разів.

Рівновага за Нешем. Ідея стабільної угоди приводить до наступного визначення.

Означення. Для гри G в нормальній формі $\left(X_i, u_i; i \in N\right)$ ситуація x^* називається рівновагою за Нешем, якщо

$$u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x^*_{N\setminus i}) \quad \forall x_i \in X_i \quad \forall i \in N. \tag{1}$$

Іншими словами, в рівновазі за Нешем x^* гравець $i \in N$ розглядає стратегії інших гравців $x^*_{N\setminus i}$ заданими і максимізує на множині своїх стратегій $x_i \in X_i$ власну функцію виграшу u_i.

Будемо позначати $NE(G)$ множину рівноваг за Нешем гри G.

Нерівності (1) іноді зручно записувати у вигляді системи взаємозв'язаних задач оптимізації:

$$u_i(\hat{x}) = \max_{x_i \in X_i} u(x_i, \hat{x}_{N\setminus i}), \ i \in N. \tag{2}$$

Приклад. Нехай кожен з двох гравців має дві стратегії – підтримувати зміни в суспільстві (“перебудова” – П) або ні (“консерватизм”– К):

X_2 / X_1	$П_2$	$К_2$
$П_1$	2,2	0,3
$К_1$	3,0	1,1

Лише від ситуації $\left(К_1, К_2\right)$ невигідно відхилятись будь-якому одному гравцю, хоча в ситуації $\left(П_1, П_2\right)$ їхні виграші більші. Цю модель можна назвати дилемою між стабільністю (“нічого не міняти”) і ефективністю (ситуація $\left(П_1, П_2\right)$ є Паретівською або ефективною).

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	2,2	2,1	1,5
b_1	2,3	3,3	2,2
c_1	5,1	2,2	3,2

Приклад. Аналізуючи таблицю знаходимо дві нешівські точки $\left(b_1, b_2\right)$ і $\left(c_1, c_2\right)$. Звернемо увагу, що перша з них ефективна, друга – домінується першою. Отже, можливі різні ситуації – нешівські ситуації не є ефективними (“Дилема в'язня”), деякі з них ефективні, деякі ні.

Концепція рівноваги за Нешем мотивується таким сценарієм гри: гравці разом обговорюють, яку ситуацію вибрати основою для необов’язкової угоди; потім гравці розходяться, обмін інформацією між ними припиняється і кожен приймає рішення самостійно (при цьому угоду можна порушити). Тоді і тільки тоді, коли обрана ситуація є рівновагою Неша, вона є стабільною угодою.

Властивості *NE*–рівноваг.

1. Ситуація x називається індивідуально-раціональною, якщо виграш кожного гравця у ній не менший за гарантований, тобто

$$u_i(x) = \sup_{y_i \in X} \inf_{y_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, y_{N\setminus i}) = \alpha_i$$

Теорема. Нешівські рівноваги індивідуально раціональні.

Доведення. Нехай $x^* \in NE$, тоді $u_i(x^*) \geq u_i(x_i, x^*_{N\setminus i})$, для $\forall$ $i \in N$, $\forall$ $x_i \in X_i$. Оскільки $x^*_{N\setminus i}$ – фіксоване, то $u_i(x_i, x^*_{N\setminus i}) \geq \inf_{x_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ для $\forall$ $x_i \in X_i$. Взявши супремум по x_i в останній нерівності, отримаємо необхідне.

2. *NE*– ситуації можуть бути паретівськими. Співіснування декількох різних паретівських ситуацій порушує боротьбу за лідерство, що “вбиває” будь-яку надію знайти “оптимальні” стратегії. Ця обставина ілюструється наступним прикладом.

Приклад “Перехрестя”. Два автомобіля рухаються по двох перпендикулярних дорогах і одночасно зустрічаються на перехресті. Кожен з них може або зупинитись (стратегія З) або продовжувати рухатись (Р).

X_2 / X_1	*З*	*Р*
Р	1,1	1-ε,2
У	2,1-ε	0,0

Обидві *NE*– ситуації (З,Р) та (Р,З) є паретівськими, хоча вони і не взаємозамінні. Для кожного гравця оптимальною стратегією є зупинка, якщо інший вирішив переїхати перехрестя, і навпаки. Отже, задача кожного полягає у виборі першим стратегії рухатись і отримати виграш у 2 одиниці – маємо боротьбу за лідерство. Кожному гравцю вигідно демонструвати, що він може переключитись із стратегії Р на стратегію З (наприклад, прикинутись п’яним або крикнути, що у нього відмовили гальма), і в той же час уважно спостерігати за супротивником, щоб вияснити, а може той і дійсно не може зупинитись. Дивно, що найбільш вигідним є нераціональна поведінка, яка в той же час виявляється цілком розумною.

3. Нешівська рівновага може не бути Паретівською.

	З	НЗ
З	-7 -7	0 -10
НЗ	-10 0	-1 -1

Приклад (Дилема бандитів). Поліція підозрює двох злочинців у бандитизмі, але єдиний шлях доведення цього – це зізнання. Виграші злочинців наведені у таблиці:

Розглянемо питання існування NE та їх пошуку.

Теорема (Неш [1951]). Нехай множини стратегій гравців X_i, $i \in N$, є опуклими та компактними підмножинами відповідних топологічних векторних просторів. Нехай для кожного гравця $i \in N$ його функція виграшу u_i є неперервною на множині ситуацій X і опуклою вгору за його стратегіями x_i на X_i для кожного набору стратегій всіх інших гравців $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Тоді множина рівноваг за Нешем є непорожньою та компактною.

Знаходження рівноваг Неша. Теорема Неша стверджує, що в умовах теореми множина *NE* не порожня. Для того щоб його обчислити, необхідно розв'язати систему рівнянь: $u_i\left(x^*\right) = \max\limits_{x_i \in X_i} u_i\left(x_i, x^*_{N\setminus i}\right),\ i \in N$.

Оскільки u_i угнута по x_i, то наведена вище задача глобальної оптимізації може бути еквівалентна локальній задачі. Наприклад, якщо x_i – внутрішня точка множини X_i і функція u_i диференційована по x_i, то умовами рівноваги будуть $\left.\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|_{x^*} = 0$, $i \in N$.

Приклад ("Дуополія Курно з призначенням випусків"). Два гравця поставляють на ринок один і той же товар в кількості x_i, *i=1,2*, по ціні $p\left(x_1 + x_2\right) = 1 - \left(x_1 + x_2\right)$. Максимальні виробничі можливості кожного гравця дорівнюють $\dfrac{1}{2}$.

Розглядаються 2 варіанти відносно передумов про функцію витрат:

а) постійні витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва (оцінюються величиною $\dfrac{1}{2}x$ на виробництво x одиниць продукції);

б) спадаючі витрати (оцінюються величиною $\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}x^2$).

Для випадку а) маємо гру:

$$\begin{cases} u_i\left(x_1, x_2\right) = x_i\left(1 - x_1 - x_2\right) - \dfrac{1}{2}x_i \to \max,\ i = 1,2, \\ X_1 = X_2 = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Оскільки множини стратегій компактні, функції виграшу диференційовані та угнуті отримуємо оптимальні відповіді *i*-го гравця на фіксовані *j*-го ($j \neq i$) з системи: $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$, *i=1,2*. Маємо:

$$R_i = \left\{ x_i = \alpha\left(x_j\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2\right),\ 0 \le x_j \le \frac{1}{2} \right\},\ i=1,2.$$

Єдина *NE*– ситуація знаходиться як перетин множини R_i :

$$NE = R_1 \cap R_2 = \left\{ \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \right\}.$$

Для випадку б) маємо задачу:

$$\begin{cases} u_i\left(x_1,x_2\right)=x_i\left(1-x_1-x_2\right)-\left(\dfrac{1}{2}x_i-\dfrac{3}{4}x_i^2\right)\to \max,\ i=1,2, \\ X_1=X_2=\left[0,\dfrac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

При знаходженні оптимальних відповідей гравців на фіксовані стратегії супротивника, врахувавши крайові оптимуми, матимемо $R_i=\left\{x_i=\beta\left(x_j\right),\ 0\le x_j\le \dfrac{1}{2}\right\}$, де $\beta\left(x\right)=\begin{cases} 1/2,\ 0\le x\le \dfrac{1}{4} \\ 1-2x,\ \dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$

В результаті маємо три NE– ситуації: $NE=R_1\bigcap R_2=\left\{\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right),\left(\dfrac{1}{2},0\right),\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\right\}$.

Лекція 11. Умови несиметричної інформованості гравців та змішане розширення гри

В багатьох економічних, політичних і соціальних ситуаціях природним чином виникає несиметричний розподіл інформації. Розглянемо найпростішу модель такого виду – поведінка типу „лідер-підлеглий”. Першим подібну модель розглянув економіст Г. Штакельберг на початку XX сторіччя при описанні стратегій фірм, що конкурують на одному і тому ж ринку. В таких ситуаціях нерідко одна з фірм виявляється сильнішою за інших і нав’язує їм свою стратегію, наприклад, призначає ціну. Безліч подібних прикладів можна знайти в політиці, в армії, в сім’ї.

Нехай для даної гри двох осіб $G=\left(X_1, X_2, u_1, u_2\right)$, R_j – множина кращих (оптимальних) відповідей *j*-го гравця на задані (фіксовані) стратегії *i*-го ($j \neq i$): $R_j=\left\{\left(x_1, x_2\right) \in X_1 \times X_2 \;\middle|\; u_j\left(x_1, x_2\right)=\sup\limits_{y_j \in X_j} u_j\left(x_i, y_i\right),\ j \neq i\right\}$.

Визначення. Ситуація (x_1, x_2) називається *i*-рівновагою Штакельберга, якщо: $\left(x_1, x_2\right) \in R_j$, $u_i\left(x_1, x_2\right)=\sup\limits_{\left(y_1, y_2\right) \in R_j} u_i\left(y_1, y_2\right)$, *i,j=1,2, i* $\neq$ *j* .

Множину *i*-рівноваг Штакельберга позначимо через $ШЕ_i$.

Можна інтерпретувати 1-рівновагу Штакельберга на основі наступного сценарію:

Гравець 1 (лідер) знає обидві функції виграшу u_1 і u_2 і використовує цю інформацію для передбачення реакції гравця 2.

Гравець 2 (підлеглий) сприймає стратегію гравця 1 як задану екзогенно (ззовні) і максимізує власний виграш (вибираючи свою максимізуючу стратегію).

Таким чином, гравець 1 маючи перший хід і передбачаючи „розумність” реакцій на нього гравця 2, сам поступаючи „розумно”, буде розв’язувати задачу (3.24).

Розглянемо приклад:

X_2 / X_1	a_2	b_2	c_2
a_1	1,3	5,1	1,5
b_1	4,1	2,2	3,2
c_1	1,1	2,4	3,3

($ШЕ_1=\left\{\left(b_1, c_2\right)\right\}$), $ШЕ_2=\left\{\left(c_1, c_2\right)\right\}$. Отже, при несиметричному розподілі інформації вибір обома гравцями буде детермінованим в першому випадку (лідер–1) – $\left(b_1, c_2\right)$, в другому (лідер–2)– $\left(c_1, c_2\right)$. Звернемо увагу, що лідер–1 при розумному підлеглому може забезпечити собі лише 3 одиниці виграшу, хоча потенційно він міг отримати і 4 ($\left(b_1, a_2\right)$) і 5 ($\left(a_1, b_2\right)$).

Теорема (про існування рівноваг за Штакельбергом). Нехай $G=\left(X_1, X_2, u_1, u_2\right)$ – скінченна гра двох осіб, причому функції u_1 і u_2

взаємнооднозначні на $X_1 \times X_2$. Тоді існує єдина 1-рівновага Штакельберга, яку позначимо $\left(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right)$.

Змішане розширення гри.

Означення. Гра G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ називається скінченною, якщо множини стратегій гравців X_i, $i \in N$, є скінченними.

Означення. Змішаною стратегією гравця $i \in N$ в скінченній грі G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ називається розподіл ймовірностей $\mu_i = (\mu_i(x_i))_{x_i \in X_i}$ на множині його стратегій X_i, де $\mu_i(x_i)$ – ймовірність вибору i-м гравцем його «чистої» стратегії $x_i \in X_i$.

Множиною змішаних стратегій гравця $i \in N$ є одиничний симплекс

$$M_i = \{\mu_i = (\mu_i(x_i))_{x_i \in X_i} \mid \mu_i(x_i) \in [0,1],\ x_i \in X_i;\ \sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) = 1\}$$

у просторі $R^{|X_i|}$ його стратегій.

Означення. Змішаним розширенням скінченної гри G у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ називається гра GM у нормальній формі $(M_i, \bar{u}_i, i \in N)$, де $\bar{u}_i(\mu) = \sum_{x \in X} u_i(x) \prod_{j \in N} \mu_j(x_j)$, $\mu \in M$, – математичне сподівання виграшу гравця $i \in N$; $\mu = (\mu_i)_{i \in N}$ – ситуація гри у змішаних стратегіях; $M = \prod_{j \in N} M_j$ – множина змішаних ситуацій гри.

Означення. Чиста стратегія $x_i \in X_i$ гравця $i \in N$ у скінченній грі G ототожнюється зі змішаною стратегією $\delta_{x_i} \in M_i$, у якій x_i вибирається з ймовірністю одиниця: $\delta_{x_i}\left(x_i\right) = 1$; а всі інші стратегії – з ймовірністю нуль: $\delta_{x_i}\left(y_i\right) = 0,\ \forall y_i \neq x_i$.

У цьому випадку $\bar{u}_i\left(\delta_x\right) = u_i\left(x\right)\ \ \forall x \in X$, де $\delta_x = (\delta_{x_i})_{i \in N}$. Тому будемо розглядати X_i як підмножину M_i, а $\bar{u}_i$ – як розширення функції u_i з області визначення X на M.

Гра де Монмора. У кінці 18-го сторіччя французький математик Рене де Монмор розглянув наступну ситуацію. Для того, щоб зробити подарунок своєму сину, батько пропонує: „Я візьму золоту монету у праву (*П*) або ліву (*Л*) руку, а ти назвеш одну з них. Якщо монета у мене у правій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш одну золоту монету. Якщо ж монета у мене у лівій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш дві монети; інакше ти не отримаєш нічого”.

$X_1 \backslash X_2$	Л	П
Л	2	0
П	0	1

Матриця виграшів сина у грі де Монмора наведена у таблиці 4.1. Де Монмор питає, як можна оцінити для сина цей подарунок, беручи до уваги, що „якщо у цій грі гравці однаково проникливі й спостережливі, то немає можливості виробляти правило поведінки” (не існує оптимальної стратегії).

Ця гра не має ціни ($\sup_{x_1}\inf_{x_2} u(x_1,x_2)=0 \neq \inf_{x_2}\sup_{x_1} u(x_1,x_2)=1$), у жодного з гравців немає оптимальної стратегії. Але знання стратегії супротивника дозволяє домогтися хорошого результату. Отже, виникає боротьба за другий хід, у якій кожен гравець хоче приховати свій кінцевий стратегічний вибір і у той же час розвідати наміри супротивника. Але навіть найглибшої секретності не досить, щоб не дозволити розумному противнику вгадати стратегічний вибір.

Єдиним способом зробити власний вибір непередбачуваним полягає у тому, щоб зробити його випадковим: замість вибору так званої чистої стратегії x_1 з множини $\{Л, П\}$ син може використати рандомізовану (випадкову) стратегію μ_1, вибираючи значення $Л$ і $П$ відповідно з ймовірностями p_1, $1-p_1$, $0 \le p_1 \le 1$. Очікуваний виграш (математичне сподівання) сина при цьому буде не меншим за:

$$v_1 = \inf\{2p_1, 1-p_1\} = \begin{cases} 2p_1, \ 2p_1 \le 1-p_1 \Rightarrow p_1 \le 1/3, \\ 1-p_1, \ 1-p_1 \le 2p_1 \Rightarrow p_1 \ge 1/3. \end{cases}$$

Отже, гарантований виграш сина дорівнює $\alpha_1 = 2/3$ (при $p_1 = 1/3$). Програш батька при виборі стратегій $\{Л, П\}$ з ймовірностями p_2, $1-p_2$ відповідно буде не більшим за $v_2 = 2/3$ і гарантований програш $\alpha_2 = 2/3$.

Таким чином, внесення тактичної невизначеності у стратегічний вибір приводить до ціни $\alpha = 2/3$. Це означає, що якщо гра буде повторятись багато разів (теоретично – нескінченно) і батько й син будуть вибирати стратегії з ймовірністю $1/3$, то у кожних трьох випадках її реалізації син буде отримувати 2 монети.

З теорії ігор двох осіб з нульовою сумою відомо, що у змішаному розширенні гри завжди існує її ціна і сідлова точка. Аналогічна ситуація мається і для рівноваг Неша.

Теорема. Якщо X_i – скінченні множини стратегій для всіх $i \in N$, то множина рівноваг Неша у грі $\bar{G}$ є непорожнім компактом в M_N і містить множину рівноваг Неша у початковій грі *G*: $NE(G) \subseteq NE(\bar{G}) \neq \varnothing$.

Теорема. Гарантований виграш гравця *i* у початковій грі не перевищує його гарантований виграш у змішаному розширенні гри:

$$\forall i \in N: \sup_{x_i \in X_i} \inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) \le \sup_{\mu_i \in M_i} \inf_{\mu_{N\setminus i} \in M_{N\setminus\{i\}}} \bar{u}_i(\mu_i, \mu_{N\setminus i}).$$

Якщо початкова гра *G* має ціну й у кожного гравця мається оптимальна стратегія, то змішане розширення гри $\bar{G}$ має ту ж ціну й довільні випуклі комбінації оптимальних стратегій у грі *G* є оптимальними стратегіями у грі $\bar{G}$. Якщо ж гра *G* не має ціни й, отже, у гравців немає оптимальних стратегій, то у грі $\bar{G}$ кожен гравець має хоча б одну оптимальну змішану стратегію й ціна гри лежить на відрізку $\left[\tilde{v},\tilde{\tilde{v}}\right]$. Типовим прикладом є гра де Монмора зі змішаною ціною $2/3$ й оптимальними обережними стратегіями обох гравців $\left(1/3Л + 2/3П\right)$.

Лекція 12. Кооперативні ігри

У некооперативних іграх явний обмін інформацією між гравцями був відсутній. Це, як правило, приводить до неефективності (домінованості) рівноважних ситуацій ("Дилема бандита").

У випадку можливості обміну інформацією можна сподіватись на кооперацію в процесі прийняття рішень (вибору стратегій).

Умови кооперації визначаються гравцями в ході переговорів, в яких можуть взаємно з'ясовуватись функції виграшу, різноманітні психологічні аспекти поведінки супротивників (колег), проводяться торги тощо. В результаті гравці приходять до кооперативної домовленості, яка може бути обов'язковою (коли підписується контракт про використання певних стратегій і виконання цього контракту забезпечується деяким контролюючим органом, якому підкоряються всі гравці) або необов'язковою (коли такого органа не існує і тому домовленість нагадує міжнародні договори, які діють до тих пір, поки не вигідно їх порушувати).

Ми будемо розглядати саме необов'язкові домовленості з точки зору їх стабільності, яка розуміється як невигідність відхилення від неї гравцями.

Стабільність є не таким вже простим поняттям, як може здатись на перший погляд. Дійсно, відхилення деяких гравців від домовленості (необов'язкової) може заставити інших гравців (котрі спочатку не збирались порушувати домовленість) змінити свої стратегії. Ці зміни важко передбачити незалежно від того, чи ми передбачаємо їх чи ні.

Виникає два питання:

1) яку ситуацію вибрати як основу домовленості;
2) що зробити, щоб вона була стабільною.

Сильна рівновага Неша. Розглянемо приклад:

X_2 / X_1	a_2	b_2
a_1	1,1	1,0
b_1	0,1	2,2

Маємо дві нешівські рівноваги – $\left(a_1,a_2\right)$ і $\left(b_1,b_2\right)$. Але, якщо від ситуації $\left(a_1,a_2\right)$ невигідно відхилятись будь-якому (але одному! – стратегія другого є фіксованою), то від $\left(b_1,b_2\right)$ невигідно відхилятись обом одночасно (якщо від ситуації $\left(a_1,a_2\right)$ одночасно відхиляться обоє, то вони перейдуть в ситуацію $\left(b_1,b_2\right)$, вигіднішу для обох).

Означення. Для гри $G=\left(X_i,u_i,i\in N\right)$ ситуація x^* є сильною рівновагою Неша, якщо не існує коаліції гравців, для яких було б вигідно відхилятись від даної ситуації у випадку, коли доповнювальна коаліція не реагує на відхилення: $\forall\ T\subset N$, $\forall\ x_T\in X_T$ не виконується

$$\begin{cases}\forall i\in T\ u_i\left(x_T,x^*_{N\backslash T}\right)\ge u_i\left(x^*\right),\\ \forall j\in T\ u_j\left(x_T,x^*_{N\backslash T}\right)>u_j\left(x^*\right)\end{cases}$$

Множину сильних рівноваг в грі *G* позначатимемо через *SNE(G)*. Ця множина може бути порожньою.

Покладаючи у формулах $T=\{i\}$, $i\in N$, маємо, що сильна рівновага Неша є просто рівновагою Неша, тобто $SNE\left(G\right)\subseteq NE\left(G\right)$. Покладаючи *T=N*, отримуємо, що сильна рівновага є Парето–оптимальною (ефективною) ситуацією. Отже, для *n=2* сильні рівноваги Неша – це ефективні рівноваги Неша.

В прикладі дві рівноваги Неша – $\left(a_1,a_2\right)$, $\left(b_1,b_2\right)$, але лише $\left(b_1,b_2\right)$ є сильною рівновагою.

α **– ядро.** Для гри в нормальній формі $(X_i,u_i;i\in N)$ α - ядром називається множина C_α таких ситуацій $\hat{x}$, що для будь-якої коаліції $T\subseteq N$ і будь-якої коаліційної стратегії $x_T\in X_T$, знайдеться така стратегія $x_{N\backslash T}\in X_{N\backslash T}$ (погроза $\xi_{N\backslash T}(x_T)=x_{N\backslash T}$) доповнючої коаліції $N\setminus T$, що не може бути сумісною наступна система нерівностей:

$$\forall i\in T\ u_i(x_T,x_{N\backslash T})\ge u_i(\hat{x}),\ \exists j\in T\ u_j(x_T,x_{N\backslash T})>u_j(\hat{x}).$$

Сильна рівновага міститься у α – ядрі: $SE\left(G\right)\subset C_\alpha\left(G\right)$.

Приклад, як ти, так і я у дилемі в'язня.

β **– ядро.** β *– ядром* гри $G=\left(X_i,u_i;i\in N\right)$ називається множина $C_\beta\left(G\right)$ ситуацій x^*, що задовольняють наступній властивості. Для будь-якої коаліції $T\subset N$, існує спільна стратегія доповнювальної коаліції $x_{N\backslash T}\in X_{N\backslash T}$ (погроза $\xi_{N\backslash T}(x_T)=x_{N\backslash T}$) така, що для $\forall\ x_T\in X_T$ не може бути виконаною наступна система нерівностей:

$$u_i\left(x_T,\xi_{N\backslash T}\left(x_T\right)\right)\ge u_i\left(x^*\right)\text{ для }\forall\ i\in T,\ \exists j\in T: u_j\left(x_T,\xi_{N\backslash T}\left(x_T\right)\right)>u_j\left(x^*\right).$$

Стабільність ситуацій з β – ядра є більш сильною, ніж стабільність ситуацій з α – ядра. Коаліція *N\T* може попередити відхилення коаліції *T*, навіть якщо члени коаліції *T* вибирають свою спільну стратегію таємно. Порівнюючи означення маємо $SE\left(G\right)\subseteq C_\beta\left(G\right)\subseteq C_\alpha\left(G\right)$.

Поділи. Основою домовленості вибирається ситуація з максимальним сумарним виграшем, який ділиться так, щоб кожному було не вигідно відмовитися.

Для наочності гра $G=\left(X_i,u_i;i\in N\right)$ представляється у характеристичні формі.

Означення. Будемо казати, що кооперативна гра задана у *характеристичній формі* (N,v), якщо задано $N=\{1,...,n\}$ – множину гравців й функцію гарантованого виграшу $v(S)=\sup_{x_S\in X_S}\inf_{x_{N\setminus S}\in X_{N\setminus S}}\sum_{i\in S}u_i(x_S,x_{N\setminus S})$, котра зв'язує з кожною коаліцією $S\subseteq N$ її гарантований виграш $v(S)\geq 0$.

Ядро гри. *Ядром* гри (N,c) називається поділ максимального сумарного виграшу $y=(y_i)_{i\in N}$, $\sum_{i\in N}y_i=v(N)$, що задовольняє умові: $\sum_{i\in S}y_i\geq v(S),\forall S\subseteq N$, тобто гарантований виграш будь-якої коаліції не повинен бути менше ніж, якщо вона захоче обслуговуватись самостійно.

Приклад (побудова сусідніми трьома містечками спільної системи водопостачання). Опишемо витрати на будівництво. Місто A окремо – 120 одиниць витрат $c(A)=120$, $c(B)=140$, $c(C)=120$. Якщо міста A й B об'єднають свої зусилля, то $c(A,B)=170$; $c(B,C)=190$; $c(A,C)=160$. Якщо проект буде реалізуватись спільно всіма, то $c(A,B,C)=255$.

Нехай про співпрацю домовились A і B, тоді економія витрат $\Delta c(A,B)$ для них дорівнює $c(A)+c(B)-c(A,B)=90$. Якщо A й B домовились поділити $\Delta c(A,B)=90$ порівну (егалітарне рішення), то остаточні витрати будуть $c_A=120-45=75$, $c_A=140-45=95$.

Оскільки загальні витрати будуть рівними $290=170+120$ (C будує самостійно), то при раціональній поведінці всіх гравців їм потрібно кооперуватись (щоб мати витрати 255 одиниць).

Нехай усі три гравці співпрацюють, економія $\Delta c(A,B,C)=c(A)+c(B)+c(C)-c(A,B,C)=125$ ділиться порівну. Тоді $c_A=120-\frac{1}{3}(125)=78\frac{1}{3}$, $c_B=140-\frac{1}{3}(125)=98\frac{1}{3}$, $c_C=120-\frac{1}{3}(125)=78\frac{1}{3}$. Хоча загальні витрати у даному випадку менші за попередній варіант, але „раціонально мислячі" A й B на нього не погодяться! Адже вони несуть витрати більші ($c_A+c_B=176\,{}^1\!/_3$), ніж у попередньому випадку, коли „відділяться" ($c(A,B)=170$). Отже, егалітарний поділ спільної економії у даному випадку нелогічний.

Знайдемо розподіл витрат з ядра гри (при такому розподілі, якщо він існує, будь-якій коаліції гравців не вигідно відділятись). Ядро визначається наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=255,\ x_1\leq 120,\ x_2\leq 140,\ x_3\leq 120,\\ x_1+x_2\leq 170,\ x_2+x_3\leq 190,\ x_1+x_3\leq 160.\end{cases}$$

Для того, щоб представити розв'язок системи (2.3) більш наглядно, зробимо заміну змінних $y_i=c(i)-x_i$ (y_i – „економія" витрат гравця i). Отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 125, \ y_i \ge 0, \ i = 1,2,3, \\ y_1 + y_2 \ge 90, \ y_2 + y_3 \ge 70, \ y_1 + y_3 \ge 80. \end{cases}$$

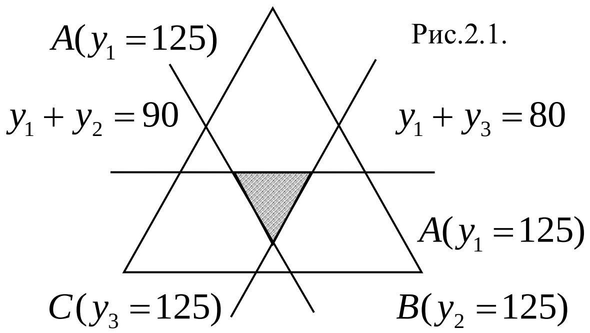


Рис.2.1.

Використаємо барицентричні координати – виділимо на площині три точки, яким відповідають розв’язки системи (2.4), одержимо $(y_1, y_2, y_3) = (125,0,0)$, $(0,125,0)$, $(0,0,125)$ (відповідно вершини трикутника ABC (Рис. 2.1). Тоді рівнянню $y_1 + y_2 = 80$ буде відповідати пряма, паралельна стороні AC, $y_1 + y_3 = 90$ -паралельна AB, $y_2 + y_3 = 70$ – паралельна BC. Ядром гри будуть точки заштрихованого трикутника. Логічно вибрати за розв’язок центр цього трикутника (центр описаного кола) - егалітарний розв’язок $y^* = (51\tfrac{2}{3}, 41\tfrac{2}{3}, 31\tfrac{2}{3})$. Повертаючись до змінних x_i, матимемо $x^* = (68\tfrac{1}{3}, 98\tfrac{1}{3}, 88\tfrac{1}{3})$.

Відмітимо, що ядро кооперативної гри може бути порожнім, тобто „повна кооперація” неможлива – існує хоча б одна коаліція, якій вигідно відділитись. Так, нехай витрати всіх власних коаліцій у нашому прикладі залишають без змін, витрати максимальної коаліції $c(A,B,C) > 260$. Тоді з $\{x_1 + x_2 \le 170, \ x_2 + x_3 \le 190, \ x_1 + x_3 \le 160\} \Rightarrow 2(x_1 + x_2 + x_3) \le 520$, що суперечить $x_1 + x_2 + x_3 > 260$.

Вектор Шеплі. Розглянемо вибір поділу, у якому доля кожного гравця у максимальному сумарному виграші $\sum_{i=1}^{n} y_i = v(N)$ залежить від його "внеску" у прибуток кожної коаліції, тобто від величини $(v(S \cup i) - v(S))$, $i \notin S$ (прибуток коаліції S з гравцем i та без нього, так званий "маргінальний прибуток").

Означення. Для гри (N, v) *вектором Шеплі* σ називається наступний поділ: $\sigma_i = \sum_{0 \le s \le n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{S \subseteq N \setminus i, \ |S| = s} (v(S \cup i) - v(S))$, $i = \overline{1,n}$, $v(\varnothing) = 0$.

Змістовно ця формула пояснюється таким чином. Нехай гравці з N упорядковані $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ випадково з рівною ймовірністю для кожного упорядкування. Вага внеску i-го гравця у коаліцію S відповідає ймовірності того, що у черзі $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ перед гравцем i стоять в точності елементи з множини S. Ця ймовірність, очевидно, дорівнює $s!(n-s-1)!/n!$, де $s = |S|$.

Приклад („Внески користувачів”). Об’єднання з n авіакомпаній розподіляють витрати на будівництво злітної смуги. Витрати на будівництво пропорційні довжині смуги. Для i - ї авіакомпанії досить, щоб довжина смуги була рівною c_i. Без обмеження загальності нехай: $c_n \le c_{n-1} \le \ldots \le c_2 \le c_1$.

Маємо наступну гру розподілу витрат: $c(S) = \max_{i \in S}\{c_i\}$, $\forall S \subseteq \{1,\ldots,n\}$.

Формула (2.10) дає наступний результат: $\sigma_n = \frac{1}{n}c_n$,

$$\sigma_{n-1} = \frac{1}{n}c_n + \frac{1}{n-1}(c_{n-1} - c_n),\ \ldots,\ \sigma_i = \sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}(c_j - c_{j+1}),\ i = \overline{1,n},\ c_{n+1} = 0.$$

Тобто у будівництві найкоротшої смуги беруть участь всі компанії (і ділять витрати порівну), у будівництві відрізка смуги $(c_n - c_{n-1})$ бере участь $(n-1)$ - а компанія (крім з номером n) і теж ділять витрати порівну і т.д.

Лекція 13. Прийняття рішень в умовах нечіткої інформації

У класичній математиці під множиною розуміється сукупність елементів (об'єктів), що мають деяку спільну властивість. При цьому, для будь-якого елемента множини розглядаються лише дві можливості: або цей елемент належить даній множині (тобто має дану властивість), або не належить даній множині (тобто не має даної властивості). В основі поняття нечіткої множини лежить уявлення про те, що елементи, які складають дану множину і мають деяку спільну властивість, можуть мати цю властивість в різному ступені і, отже, належати даній множини з "різним ступенем". Один з найпростіших способів математичного опису нечіткої множини – характеризація ступеня належності елемента множині числами з інтервалу [0, 1].

Поняття нечіткої множини. Нехай X – деяка множина елементів (у звичайному розумінні). Будемо називати її *універсальною множиною* і розглядати підмножини цієї множини.

Означення. *Нечіткою множиною* C на множині X називається сукупність пар $(x, \mu_C(x))$, де $x \in X$, а μ_C- функція, $\mu_C : X \to [0,1]$, що називається *функцією належності* нечіткої множини C. Значення μ_C для конкретного x називається *ступенем належності* цього елемента нечіткій множині C.

Універсальну множину X можна описати функцією належності виду $\mu_X(x) \equiv 1$, а порожню – функцією належності $\mu_\varnothing(x) \equiv 0$.

Означення. Нехай A і B – нечіткі множини з X, а $\mu_A(x)$ і $\mu_B(x)$ – їхні функції належності відповідно.

Об'єднанням A і B називається нечітка множина $A \cup B$ з функцією належності $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $x \in X$.

Перетином A і B називається нечітка множина $A \cap B$ з функцією належності $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $x \in X$.

Різницею A і B називається нечітка множина $A \setminus B$ з функцією належності $\mu_{A\backslash B}(x)=\max\{0,\mu_A(x)-\mu_B(x)\},\ x\in X$.

Доповненням A називається нечітка множина $\overline{A}$ з функцією належності $\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x),\ x\in X$.

Означення. Множиною рівня $\alpha\in[0,1]$ нечіткої множини A з X називається чітка множина $A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_A(x)\geq\alpha\}$, яка складається з $x\in X$ зі ступенями належності нечіткій множині *A* не меншими за α .

Нечітку множину A завжди можна *декомпозувати* (розкласти) за її множинами рівня у вигляді $A=\bigcup\limits_{\alpha\in[0,1]}\alpha A_\alpha$, де $\mu_{\alpha A_\alpha}(x)=\alpha\mu_{A_\alpha}(x)$.

Приклад. Нехай $X=\{1,2,...,5\}$, а функція належності нечіткої множини *A* у *X* задана табл. 1. Декомпозувати A на множини рівня.

Таблиця 1.

x	1	2	3	4	5
$\mu_A(x)$	0,2	0,3	0,5	1	0,5

Розв'язання. *A* можна декомпозувати на наступні множини рівня:

$$A_{0,2}=\{1,...,5\},\ A_{0,3}=\{2,..,5\},\ A_{0,5}=\{3,5\},\ A_{1,0}=\{5\}$$

і представити у наступному вигляді

$$A=0,2\{1,...,5\}\cup 0,3\{2,...,5\}\cup 0,5\{3,4,6\}\cup 1,0\{4\}.$$

Відображення нечітких множин.

Означення. Нехай $\phi: X\to Y$ - задане відображення з універсальної множини X в універсальну множину Y і нехай *A* – деяка нечітка множина з X із функцією належності $\mu_A(x)$. Відповідно до *принципу узагальнення Заде образом A* при відображенні ϕ називається нечітка множина B в Y з функцію належності $\mu_B(y)=\max\limits_{x\in\phi^{-1}(y)}\mu_A(x)$ де $\phi^{-1}(y)\{x\in X \mid \phi(x)=y\}, y\in Y$.

При такому підході *нечітке відображення чіткої множини* X можна описати як відображення, при якому елементові $x\in X$ ставиться у відповідність нечітка множина з *Y*. Це нечітке відображення описується функцією належності $\mu_\phi: X\times Y\to[0,1]$ так, що функція $\mu_\phi(x_0,y)$ (при фіксованому $x=x_0$) є функцією належності нечіткої множини з Y і представляє собою нечіткий образ елемента x_0 при даному відображенні.

Означення. *Образом* в Y *нечіткої множини* A в X *при нечіткому відображенні* $\mu_\phi: X\times Y\to[0,1]$ називається нечітка множина B з функцією належності $\mu_B(y)=\max\limits_{x\in X}\min\{\mu_\phi(x,y),\mu_A(x)\}$.

Означення. *Прообразом A нечіткої множини B в Y при нечіткому відображенні* $\mu_\phi: X\times Y\to[0,1]$ називається об'єднання всіх нечітких множин, образи яких при цьому відображенні належать нечіткій множині *B*.

Функція належності прообразу має вигляд:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \min\limits_{y \in N_x} \mu_B(y), & x \in X_0, \\ 1, & x \in X \setminus X_0, \end{cases}$$

де $X_0 = \{x \in X \mid \exists y \in Y,\ \mu_\phi(x,y) > \mu_B(y)\}$, $N_x = \{y \in Y \mid \mu_\phi(x,y) > \mu_B(y)\}$.

Приклад. Нехай в універсальній множині $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ нечітка множина A задається функцією належності $\mu_A(x)$ (табл. 2), а нечітке відображення $\phi: X \to Y$ функцією належності $\mu_\phi(x,y): X \times Y \to [0,1]$ (табл. 3). Знайти образ *B* в Y нечіткої множини *A* при нечіткому відображенні φ.

Розв'язання. Для зручності позначимо $M(x,y) = \min\{\mu_A(x), \mu_\phi(x,y)\}$ і складемо табл. 4. З останнього рядка цієї таблиці отримаємо функцію належності $\mu_B(y)$ образу B нечіткої множини A при відображенні φ.

Таблиця 2.

x	$\mu_A(x)$
x_1	0,4
x_2	0,6
x_3	1,0

Таблиця 3.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,7	1,0	0,1	0,3	0,6
x_2	0,7	0,4	0,7	0,5	0,6
x_3	0,3	0,4	0,1	0,2	1,0

Таблиця 4.

x	$M(x,y_1)$	$M(x,y_2)$	$M(x,y_3)$	$M(x,y_4)$	$M(x,y_5)$
x_1	0,4	0,4	0,1	0,3	0,4
x_2	0,6	0,4	0,6	0,5	0,6
x_3	0,3	0,4	0,1	0,2	1,0
$\mu_B(y)$	0,6	0,4	0,6	0,5	1,0

Приклад. Нехай $\phi: X \to Y$ – нечітке відображення з універсальної множини $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ в універсальну множину $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ з функцією належності $\mu_\phi(x,y): X \times Y \to [0,1]$ (табл. 3). Знайти прообраз A^* нечіткої множини B^* із функцією належності $\mu_{B^*}(y)$ (табл. 5).

Таблиця 5.

y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
$\mu_{B^*}(y)$	0,6	0,4	0,6	0,5	1,0

Розв'язання. Побудуємо: $X_0 = \{x \in X \mid \exists y \in Y,\ \mu_\phi(x,y) > \mu_{B^*}(y)\} = \{x_1, x_2\}$. Відмітимо, що елемент x_3 множини *X* не буде належати множині X_0, оскільки, при будь-яких y числа у відповідних комірках рядка x_3 табл. 4.3 є не більшими за числа у відповідних комірках стовпчика $\mu_{B^*}(y)$ табл. 4.5. Тому одразу можна записати, що $\mu_{A^*}(x_3) = 1$, і не будувати множину N_{x_3}.

Для x_1, x_2 визначимо відповідно множини:

$$N_{x_1} = \left\{ y \in Y \,\middle|\, \mu_\phi(x_1, y) > \mu_B(y) \right\} = \left\{ y_1, y_2 \right\},$$

$$N_{x_2} = \left\{ y \in Y \,\middle|\, \mu_\phi(x_2, y) > \mu_B(y) \right\} = \left\{ y_1, y_3 \right\}.$$

Нарешті, за табл. 5 знайдемо $\mu_{A*}(x_1) = \min\left\{0,3;0,4\right\} = 0,3$, $\mu_{A*}(x_2) = \min\left\{0,3;0,7\right\} = 0,3$.

Лекція 14. Нечіткі бінарні відношення

Аналогічно "звичайним" бінарним відношенням можна ввести *поняття нечіткого бінарного відношення* на множині X як нечітку підмножину декартового добутку $X \times X$ з функцією належності $\mu_R(x, y)$.

Операції об'єднання, перетину, доповнення вводяться аналогічно введеним поняттям та операціям для нечітких множин наступним чином:

- об'єднанням нечітких відношень $\mu_R(x,y)$ і $\mu_S(x,y)$ називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R\cup S}(x,y) = \max\left\{\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\right\}, \quad \forall x, y \in X \ ;$$

- перетином нечітких відношень $\mu_R(x,y)$ і $\mu_S(x,y)$ називається нечітке відношення з функцією належності

$$\mu_{R\cap S}(x,y) = \min\left\{\mu_R(x,y), \mu_S(x,y)\right\}, \quad \forall x, y \in X \ ;$$

- доповненням нечіткого бінарного відношення $\mu_R(x,y)$ на множині X називається нечітка множина $\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y), \ \forall x, y \in X$.

Операція ж композиції (добутку) може бути введеною різними способами:

- для максмінної композиції нечітких відношень R і S

$$\mu_{R\times S}(x,y) = \sup_{z\in X} \min(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y));$$

- для мінмаксної композиції $\mu_{R\times S}(x,y) = \inf_{z\in X} \max(\mu_R(x,z), \mu_S(z,y));$

- для максимультиплікативної композиції

$$\mu_{R\times S}(x,y) = \sup_{z\in X}(\mu_R(x,z) \circ \mu_S(z,y)).$$

Для оберненого відношення R^{-1} маємо: $\mu_{R^{-1}}(x,y) = \mu_R(y,x), \forall x, y.$

Якщо задавати бінарне відношення матрицею, то її елементи будуть довільними числами з відрізка [0,1].

Найважливішими властивостями нечітких бінарних відношень, що використовуються в теорії прийняття рішень є:

рефлексивність $(\mu_R(x,x) = 1, \forall x, y)$,

антирефлексивність $(\mu_R(x,x) = 0, \forall x, y)$,

симетричність $(\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x), \forall x, y)$,

антисиметричність $(\min((\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)) = 0, \forall x \neq y)$,

транзитивність ($R \circ R \subseteq R$).

Слід відмітити, що оскільки операція композиції може бути уведена трьома способами (максмінна композиція, мінмаксна композиція, максимультипликативна композиція), то і властивість транзитивності одержується відповідною.

Нечіткі відношення переваги, байдужності, подібності і строгої переваги. Нехай X - задана множина альтернатив. *Нечітким відношенням нестрогої переваги* на X будемо називати будь-яке задане на цій множині рефлексивне нечітке бінарне відношення, тобто $\mu_{\geq}(x,x)=1, \ \ \forall x \in X$.

Якщо $\mu_{\geq}$ нечітке відношення переваги на множині альтернатив X, то для будь-якої пари альтернатив $x, \ \ y \in X$ значення $\mu_{\geq}(x,y)$ розуміється як ступінь переваги “x не гірше за y” або $x \geq y$.

Рівність $\mu_{\geq}(x,y)=0$ може означати або те, що з позитивним ступенем має місце зворотна перевага $y \geq x$, тобто, що $\mu_{\geq}(y,x)>0$, або те, що альтернативи x і y є не порівнянні між собою з жодним позитивним ступенем, тобто, що і $\mu_{\geq}(y,x)=0$.

За заданим на множині X нечітким відношенням переваги $\mu_{\geq}$ можна однозначно визначити три відповідних йому нечітких відношення:

байдужності $R_{\sim}=(X \times X \setminus R_{\geq} \cup R_{\geq}^{-1}) \cup (R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1})$,

$$\mu_{\sim}(x,y)=\max\left\{1-\max\left\{\mu_{\geq}(x,y),\mu_{\geq}(y,x)\right\},\ \min\left\{\mu_{\geq}(x,y),\mu_{\geq}(y,x)\right\}\right\}=$$
$$=\max\left\{\min\left\{1-\mu_{\geq}(x,y),\ 1-\mu_{\geq}(y,x)\right\},\ \min\left\{\mu_{\geq}(x,y),\ \mu_{\geq}(y,x)\right\}\right\}.$$

подібності (квазіеквівалентності) $R_{\approx}=R_{\geq} \cap R_{\geq}^{-1}$,

$$\mu_{\approx}=\min\left\{\mu_{\geq}(x,y),\ \mu_{\geq}(y,x)\right\}.$$

строгої переваги $R_{>}=R_{>} \setminus R_{\geq}^{-1}$,

$$\mu_{>}(x,y)=\begin{cases}\mu_{\geq}(x,y)-\mu_{\geq}(y,x), & \mu_{\geq}(x,y)\geq\mu_{\geq}(y,x),\\ 0, & \mu_{\geq}(x,y)\leq\mu_{\geq}(y,x).\end{cases}$$

де $R_{\geq}^{-1}$ - зворотне до відношення $R_{\geq}$, позначається через $R_{\leq}$ і описується функцією належності $\mu_{\leq}(x,y)=\mu_{\geq}(y,x), \ \ \forall(x,y)\in X \times X$.

За визначеннями перетину, об'єднання й різниці нечітких множин, одержимо наступні вирази для функції належності цих відношень:

1. Нечітке відношення байдужності:

$$\mu_{\sim}(x,y)=\max\left\{1-\max\left\{\mu_{\geq}(x,y),\mu_{\geq}(y,x)\right\},\ \min\left\{\mu_{\geq}(x,y),\mu_{\geq}(y,x)\right\}\right\}=$$
$$=\max\left\{\min\left\{1-\mu_{\geq}(x,y),\ 1-\mu_{\geq}(y,x)\right\},\ \min\left\{\mu_{\geq}(x,y),\ \mu_{\geq}(y,x)\right\}\right\}.$$

2. Нечітке відношення подібності:

$$\mu_{\approx}=\min\left\{\mu_{\geq}(x,y),\ \mu_{\geq}(y,x)\right\}.$$

3. Нечітке відношення строгої переваги:

$$\mu_{>}(x,y)=\begin{cases}\mu_{\geq}(x,y)-\mu_{\geq}(y,x), & \mu_{\geq}(x,y)\geq\mu_{\geq}(y,x),\\ 0, & \mu_{\geq}(x,y)\leq\mu_{\geq}(y,x).\end{cases}$$

Задача прийняття рішень із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги.

Якщо інформація про ситуацію прийняття рішення описана у формі звичайного відношення переваги, раціональним природно вважати вибір недомінованих альтернатив.

1. Отже, нехай *X* - звичайна (чітко описана) множина альтернатив і $\mu_{\geq}$ задане на ньому нечітке відношення нестрогої переваги, а $\mu_{>}$ відповідне нечітке відношення строгої переваги. Визначимо нечітку підмножину недомінованих альтернатив множини *X* за відношенням $\mu_{\geq}$.

Відповідно до визначення відношення строгої переваги $\mu_{>}$, для будь-яких альтернатив x, $y\in X$ величина $\mu_{>}(x,y)$ є ступінь, із якою альтернатива *y* домінується альтернативою *x*. Отже, при фіксованому $y\in X$ визначену на *X* функцію $\mu_{>}(y,x)$ можна розглядати як функцію належності нечіткої множини "усіх" альтернатив *x*, що строго домінуються альтернативою *y*.

Неважко зрозуміти, що множина "усіх" альтернатив *x*, що не домінуються альтернативою *y*, являє собою доповнення в *X* уведеної множини $\mu_{>}(y,x)$. Звідси одержуємо, що ця нечітка множина описується функцією належності виду $1-\mu_{>}(y,x),\ \forall x\in X$.

Для виділення в *X* підмножини "усіх" альтернатив, кожна з яких не домінується жодною альтернативою з *X*, потрібно взяти перетин нечітких множин виду $1-\mu_{>}(y,x)$ по усім $y\in X$. Цей перетин ми і назвемо *нечіткою підмножиною недомінованих (ефективних) альтернатив (нечітка множина Парето)* і позначимо його через $\mu^{P}(x)=\inf_{y\in X}\{1-\mu_{>}(y,x)\}=1-\sup_{y\in X}\mu_{>}(y,x)=1-\sup_{y\in X}(\mu_{\geq}(y,x)-\mu_{\geq}(x,y)),\ x\in X$ Значення $\mu^{P}(x)$ являє собою ступінь, із якою альтернатива *x* не домінується жодною з альтернатив множини *X*. Нехай $\mu^{P}(x^{*})=\alpha$ для деякої альтернативи x^{*}. Тоді x^{*} може домінуватися іншими альтернативами, але із ступенем не вище $1-\alpha$.

Оскільки величина $\mu^{P}(x)$ є ступінь "недомінованості" альтернативи *x*, то раціональним при заданій нечіткій інформації природно вважати вибір альтернатив, що мають по можливості більший ступінь належності нечіткій множині $\mu^{P}(x)$.

Множина таких альтернатив $X^P = \left\{ x \in X \,\middle|\, \mu^P(x) = \sup\limits_{y \in X} \mu^P(y) \right\}$ *називається множиною максимальних недомінованих альтернатив* множини X за нечітким відношенням переваги $\mu_{\geq}$.

Приклад 1. Нехай на множині $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, задане за наступною таблицею нечітке відношення переваги $\mu_{\geq}(x_i, x_j)$.

$\mu_{\geq}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.2	0.3	0.1
x_2	0.5	1	0.2	0.6
x_3	0.1	0.6	1	0.3
x_4	0.6	0.1	0.5	1

За визначенням отримаємо нечітке відношення Парето (див. наступну таблицю).

	x_1	x_2	x_3	x_4
μ^P	0.5	0.6	0.8	0.5

Звідси видно, що найбільший ступінь недомінованості, рівну 0.8, має альтернатива x_3, тому вибір її як рішення варто вважати раціональним у рамках розглянутого підходу.

2. Розглянемо тепер задачу прийняття рішень із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги у випадку, коли множина альтернатив є нечіткою.

Нехай на універсальній множині X задана нечітка множина альтернатив $\mu_D : X \to [0,1]$ із нечіткою ціллю $\mu_{\geq} : X \times X \to [0,1]$.

Відміна цієї задачі від попередньої полягає в тім, що більш переважними слід вважати альтернативи, які мають більшу ступінь переваги як за нечітким відношенням $\mu_{\geq}$, так і за функцією належності μ_D. Для вирішення цієї проблеми побудуємо ще одне відношення переваги $\eta_{\geq}$, що є індукованим функцією належності μ_D :

$$\eta_{\geq}(x, y) = \begin{cases} 1, & \mu_D(x) \geq \mu_D(y), \\ 0, & \mu_D(x) < \mu_D(y). \end{cases}$$

Тепер, якщо вважати відношення $\mu_{\geq}$ і $\eta_{\geq}$ рівноцінними для ОПР їх можна агрегувати в одне відношення переваги, яке визначимо як їх перетин $\omega_{\geq}(x, y) = \min\{\mu_{\geq}(x, y), \eta_{\geq}(x, y)\}$ і розв'язати задачу прийняття рішень у попередній постановці (на чіткій множині альтернатив із ціллю, що задана нечітким відношенням переваги).

Лекція 15. Задачі оптимізації в умовах нечіткої інформації

Задача прийняття рішень із нечітко визначеною ціллю (підхід Белмана-Заде). В основі цього підходу є визначення цілі задачі прийняття рішень як нечіткої множини універсальної множини альтернатив.

Означення. Нехай X – універсальна множина альтернатив. *Нечіткою ціллю* у X будемо називати нечітку множину G в X з функцією належності $\mu_G : X \to [0,1]$.

Нечітка множина альтернатив також може описуватися нечіткою підмножиною універсальної множини альтернатив X. Позначимо її через D з функцією належності $\mu_D : X \to [0,1]$.

Означення. *Нечіткою множиною розв'язків задачі досягнення нечіткої цілі* G в X на нечіткій множині альтернатив D в X називається нечітка множина альтернатив X^* в X з функцією належності $\mu(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_D(x)\}$.

При наявності кількох цілей $G_1,...,G_m$ які мають різну вагу для ОПР, з функціями належності і ваговими коефіцієнтами відповідно $\mu_{G_i}(x)$ і $\lambda_i > 0,\ i = \overline{1,m},$ нечіткий множина розв'язків X^* описується функцією належності: $\mu(x) = \min\{\lambda_1\mu_{G_1}(x),...,\lambda_m\mu_{G_m}(x), \mu_D(x)\}$.

Якщо виникає потреба у визначенні конкретної альтернативи, яку слід вважати розв'язком задачі з нечіткою ціллю, то вибирають *максимізуючу альтернативу* x^* за умовою $\mu(x^*) = \max\limits_{x\in X} \mu(x)$.

Приклад. Нехай універсальна множина альтернатив $X = \{1,2,...,10\}$, функції належності нечіткої цілі і множини допустимих альтернатив задаються в табл. 1. Знайти нечітку множину розв'язків і максимізуючу альтернативу.

Таблиця 1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	0,9	0,7	0,5
$\mu_D(x)$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0,8	0,6	0,4	0,2	0

Розв'язання. За означенням отримаємо функцію належності нечіткої множини розв'язків у табл. 1. Максимізуюча альтернатива: $x = 6$.

Таблиця 2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(x)$	0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,8	0,6	0,4	0,2	0

Приклад. На універсальній множині альтернатив $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le 5,\ x_{1,2} \in [0,4]\}$ задані нечітка ціль G з функцією належності $\mu_G(x) = (3x_1 + x_2)/13$ та нечітка множина альтернатив D з функцією належності $\mu_D(x) = (x_1 + 2x_2)/9$. Знайти максимізуючу альтернативу.

Розв'язання. За означенням для знаходження максимізуючої альтернативи розв'язуємо задачу

$$\min\{\mu_G(x), \mu_D(x)\} = \min\{(3x_1 + x_2)/13, (x_1 + 2x_2)/9\} \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

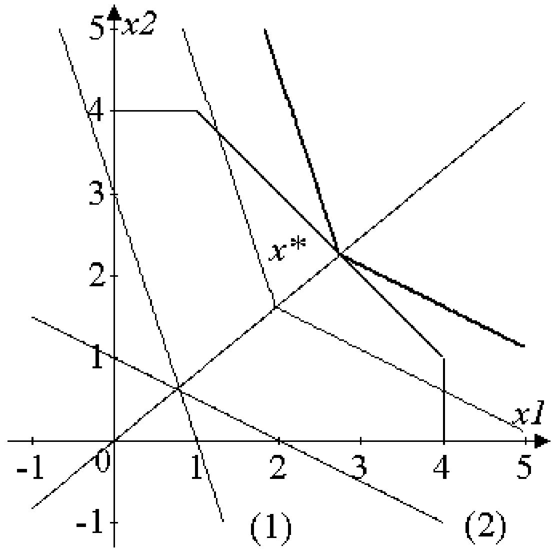


Рис. 4.6.

На рис. бачимо, що лінії рівня цільової функції скаляризованої задачі мають вигляд кутів, вершини яких знаходяться на прямій $14x_1 - 17x_2 = 0$. Ця пряма задається умовою рівності аргументів функції $\min\{...\}$, а бокові сторони паралельні лініям рівня (1) та (2) відповідно функцій належності $\mu_G(x)$ та $\mu_D(x)$. Максимум досягається в точці $x^* = (2\frac{23}{31},\ 2\frac{8}{31})$.

Задача максимізації функції на нечіткій множині. Нехай X – універсальна множина альтернатив, а f – функція $X \to R^1$, значеннями якої оцінюються результати вибору елементів із множини X. У множині X задана нечітка множина D з функцією належності $\mu_D : X \to [0,1]$, яку ми назвемо нечіткою множиною альтернатив. Задача полягає у "максимізації" у деякому сенсі функції f на нечіткій множині D.

Під "максимізацією" за підходом С.О. Орловського розуміють вибір нечіткої підмножини X^* множини D, якій відповідають найбільші значення як функції f, так і функції належності μ_D нечіткої множини альтернатив. Ці альтернативи у задачах багатокритеріальної оптимізації називаються оптимальними за Парето.

Нехай P – множина всіх оптимальними за Парето альтернатив двох-критеріальної задачі:

$$f(x) \to \max,\ \mu_D(x) \to \max,\ x \in X.$$

Означення. Розв'язком задачі математичного програмування з нечіткою множиною альтернатив називається нечітка множина X^* з функцією належності

$$\mu(x) = \begin{cases} \mu_D(x), & x \in P; \\ 0, & x \notin P. \end{cases}$$

Якщо ж опис розв'язку задачі у вигляді нечіткої множини є не прийнятним ОПР, то під розв'язком задачі варто розуміти деякий компроміс між бажанням одержати найбільші значення як функції f, так і функції належності μ_D. Цей компроміс може бути знайдений будь-яким із методів багатокритеріальної оптимізації.

Приклад. На універсальній множині альтернатив $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le 5,\ x_{1,2} \in [0,4]\}$ задана нечітка множина альтернатив D з функцією належності $\mu_D(x) = (x_1 + 2x_2)/9$. Максимізувати функцію $f(x) = 3x_1 + x_2$ на нечіткій множині D. Для знаходження розв'язку використати метод ідеальної точки ($s = 1$).

Розв'язання. За означенням для знаходження максимізуючої альтернативи розв'язуємо задачу

$$\min\{\mu_G(x), \mu_D(x)\} = \min\left\{(3x_1 + x_2)/13, (x_1 + 2x_2)/9\right\} \to \max,$$

$$x_1 + x_2 \le 5,$$

$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

Лекція 16. Постановка задачі колективного прийняття рішень

Більшість суспільних рішень приймається на основі голосування. Хоча практика голосування нараховує тисячі років, фактичне його вивчення почалося близько двохсот років тому у працях французів Борда ([1733–1799] та Кондорсе ([1745–1794] у 1792 р.

Нехай $N = \left\{\overline{1,n}\right\}$ – множина „виборців”, $A = \{a, b, c, ...\} = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ – множина „кандидатів”. Кожен виборець задає „індивідуальну перевагу” на множині кандидатів у вигляді строгого ранжування, тобто задає лінійний порядок $L(A)$ (повне, транзитивне, асиметричне бінарне відношення). Система всіх індивідуальних переваг називається *профілем*. Розглянемо наступний профіль:

Кількість голосів	5	3	5	4
Впорядкування кандидатів	a	a	b	c
	d	d	c	d
	c	b	d	b
	b	c	a	a

Рис.1.

Цей профіль містить інформацію про те, що 5 перших виборців на перше місце поставили кандидата a, на друге – d, на третє – c, на четверте (останнє) – b. Аналогічно, наступні 3 виборці розташували кандидатів у послідовності – a, d, b, c і т.д. Отже, маємо n=17 виборців і m=4 кандидата.

Правило відносної більшості. Перемагає той кандидат, за якого проголосувала більшість виборців (випадок рівності голосів поки що не розглядаємо).

Правило відносної більшості з вибуванням Якщо деякий кандидат набрав більше половини голосів, то він – переможець. Інакше у другий тур проходять два кандидати, що набрали відносну більшість голосів.

5	3	5	4
a	a	b	b
b	b	a	a

Для нашого профілю у другий тур проходять кандидати a і b. Після „відсіювання”, маємо такий профіль У другому турі $n_a = 8$, $n_b = 9$, тобто перемагає кандидат b (випадок рівності голосів поки що виключаємо).

Правило Борда („підрахунку очок”). У цьому правилі за останнє місце кандидата йому нараховується 0 балів (очок), за передостаннє – 1 бал, ..., за перше – (m-1). Розглянемо профіль:

5	3	5	4	S
a	a	b	c	3
d	d	c	d	2
c	b	d	b	1
b	c	a	a	0

Маємо: $n_a = 24$, $n_b = 22$, $n_c = 27$, $n_d = 29$. Перемагає кандидат, що набрав найбільшу кількість балів, у нашому випадку – це кандидат d.

Правило Кондорсе. За Кондорсе переможцем оголошується той кандидат, що „перемагає” всіх інших у парних порівняннях. Так у попередньому профілі: 8 виборців поставило кандидата a вище за b, 9 виборців поставило a нижче за b (позначимо це $a:b = 8:9$). Маємо $b:c = 8:9$, $c:d = 9:8$, $a:c = 8:9$, $b:d = 5:12$, $a:d = 8:9$. Єдиний кандидат, який „перемагає” всіх інших – це кандидат c.

Парадокси голосування. Правило Кондорсе видається вельми логічним – переможець перемагає всіх інших у єдиноборствах. А як бути, якщо кожен з кандидатів у когось перемагає, а комусь програє? У цьому випадку за визначенням переможця за Кондорсе не існує.

Це *один з так званих „парадоксів голосування*”. Найпростіший випадок маємо при n=m=3: для першого виборця a кращий за b і c, b кращий за c (позначимо це $a \succ b \succ c$); для другого $b \succ c \succ a$; для третього $c \succ a \succ b$. Цей профіль називається „Циклом Кондорсе”. Маємо – $a:b = 2:1$, $a:c = 1:2$, $b:c = 2:1$ (у кожного по одному виграшу і по одному програшу).

Другий „парадокс голосування”. Наведені вище (чи подібні до них) правила є досить логічними, кожне з них має свої „переваги”. Але їх застосування до одного і того ж профілю (Рис.1) дає абсолютно різні результати!

Лекція 17. Теорема Ероу

„**Парадокс Ерроу**” (Р. Ерроу, американський математик, економіст, лауреат Нобелівської премії), з якого власне і почалась сучасна теорія голосування.

Розглянемо більш загальну задачу. Нехай на основі індивідуальних преваг необхідно знайти не лише „колективного” („спільного”) переможця, а й „колективний порядок”. Причому, нехай, як і раніше індивідуальні переваги будуть строгими (кандидати в індивідуальних перевагах не повинні „ділити” місця), колективний же порядок може бути і нестрогим.

Найпростіший метод побудови колективного порядку за даним правилом голосування є наступний – переможець виключається з профілю, для отриманого профілю знову знаходиться переможець, який займає друге місце у колективній

Рис.2

5	3	5	4
d	d	b	c
c	b	c	d
b	c	d	b

перевазі, і т.д. Так, для профілю (Рис.1) для правила відносної більшості маємо профіль (Рис.2), після виключення переможця a. Для цього профілю переможцем буде кандидат d, після його виключення маємо профіль (Рис. 3), для якого переможцем буде c. Отже, правило відносної більшості дає колективну перевагу $a \succ d \succ c \succ b$.

Рис.3.

5	3	5	4
c	b	b	c
b	c	c	b

Аналогічно, правило абсолютної більшості (відносна більшість у два тури) дає колективну перевагу $b \succ c \succ d \succ a$ (зверніть увагу, ця перевага „повністю протилежна” попередній).

Правило Борда дає: $d \succ c \succ b \succ a$, Кондорсе: $d \succ c \succ b \succ a$.

Отже, „достатньо розумні” правила побудови колективного порядку (колективної переваги, колективного ранжування) приводять до різних результатів (аж до протилежних).

Підемо іншим шляхом. Задамо „розумні” апріорні вимоги до колективного ранжування у вигляді аксіом.

Аксіома А1 (повнота). Для будь-яких кандидатів a і b колективний порядок установлює, що або $a \succ b$, або $a = b$, або $a \prec b$ (скорочено – $\forall\ a,b \in A$: $(a \succ b) \vee (a = b) \vee (a \prec b)$).

Аксіома А2 (транзитивність): $\forall\ a,b,c \in A$: $(a \geq b) \wedge (b \geq c) \Rightarrow a \geq c$.

Аксіома А3 (одностайність): якщо для всіх виборців $a \geq b$, то й у колективному порядку також $a \geq b$.

Цю аксіому можна назвати і „паретовість” і „ефективність”.

Аксіома А4 (незалежність). Розташування будь-яких двох кандидатів a і b у колективному порядку залежить лише від їх взаємного розташування в індивідуальних порядках і не залежить від розташування інших кандидатів.

Відмова від першої аксіоми може привести до ситуації – „вибори не відбулися”, відмова від транзитивності теж виглядає досить дивною, порушення аксіоми одностайності однозначно свідчить про „фальсифікацію” виборів, відмова від аксіоми незалежності приводить до можливості маніпулювання шляхом зняття чи введення кандидатів.

Теорема („Парадокс Ерроу”, 1951 р.). Єдиним колективним порядком, що задовольняє аксіомам А1–А4, є „диктаторський”, тобто існує виборець $k \in N$ такий, що колективний порядок співпадає з його індивідуальним порядком.

Парадокс Ерроу у свій час вразив науковий світ. Можливо він дає пояснення, чому наша цивілізація пройшла через диктаторські режими (а у деяких країнах ще й зараз існують диктатури). Хоча не все так сумно, теорема Ерроу стверджує не лише те, що колективний порядок „задається” індивідуальним порядком „диктатора”, але й те, що індивідуальний порядок деякого виборця („прихованого диктатора”) співпадає з колективним порядком. У такій інтерпретації теорема Ерроу стверджує про існування „провидців” (колективного вибору). Це і є свобода вибору, що дається людині Богом, – вибирати „диктаторів” чи „провидців”.

Узагальнення правила Борда. Задамо не спадаючу послідовність дійсних чисел $s_0 \le s_1 \le ... \le s_{m-1}$, $s_0 < s_{m-1}$. Виборці ранжують кандидатів, причому s_0 балів дається за останнє місце, s_1 – за передостаннє і т.д. Вибирається кандидат з максимальною сумою балів. Тим самим отримуємо „узагальнене правило Борда” або „метод голосування з підрахуванням балів”.

Правило відносної більшості таким чином є частинним випадком методу голосування з підрахунком очок (у ньому $s_0 = s_1 = ... = s_{m-2} = 0$, $s_{m-1} = 1$). І, звичайно, саме правило Борда є частинним випадком цього методу ($s_0 = 0, s_1 = 1, ..., s_{m-1} = m-1$).

Цікаво порівняти правила Кондорсе й Борда (узагальнене правило Борда). У певному сенсі вони є „несумісними”.

Теорема. (Фішберн [1973]). Існують профілі, при яких переможець Кондорсе не може бути переможцем Борда ні при якій системі балів.

3	2	1	1	S
c	a	a	b	s_2
a	b	c	c	s_1
b	c	b	a	s_0

Розглянемо профіль Нехай спочатку $s_0 < s_1 < s_2$ (нерівності строгі). Для цього профілю c – переможець Кондорсе (переконайтесь у цьому). З іншого боку сума балів кандидата a більша за суму c: $n_a = 3s_2 + 3s_1 + s_0 > n_c = 3s_2 + 2s_1 + 2s_0$.

Теорема залишається справедливою і для випадку неспадаючої послідовності балів. „Найменший” відомий приклад для цього випадку містить 17 виборців і 3 кандидата.

6	3	4	4	S
a	c	b	b	s_2
b	a	a	c	s_1
c	b	c	a	s_0

Нехай, $s_0 \le s_1 \le s_2$, $s_2 > s_0$. Тут також a – переможець Кондорсе, але маємо $n_a = 6s_2 + 7s_1 + 4s_0$, $n_b = 8s_2 + 6s_1 + 3s_0$, і $n_b - n_a = 2s_2 - s_1 - s_0 = (s_2 - s_1) + (s_2 - s_0) > 0$, оскільки число $s_2 - s_0$ невід’ємне, $s_2 - s_0$ – додатне.

Узагальнення правила Кондорсе.

Правило Копленда. Позначимо через $K(a,x)$ число виборців, для яких кандидат a кращий за x, $a \neq x$. Порівняємо кандидата a з будь-яким іншим кандидатом x. Припишемо $K(a,x)=+1$, якщо для більшості виборців a кращий за x, інакше $K(a,x)=-1$, 0 при рівності. Оцінка Копленда кандидата a є $K(a) = \sum_{x \neq a} K(a,x)$. Переможцем Копленда (переможцем за Коплендом) називається кандидат (кандидати) з найвищою оцінкою Копленда.

Правило Сімпсона. Аналогічно $S(a,x)$ – число виборців, для яких кандидат a кращий за x, $a \neq x$. Оцінкою Сімпсона кандидата a називається число $S(a) = \min_{x \neq a} S(a,x)$. Переможцем Сімпсона називається кандидат (кандидати) з найвищою оцінкою Сімпсона.

Список літератури

1. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2- ге вид., перероб. та допов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010.
2. Мащенко С. О. Збірник задач з теорії прийняття рішень: навч. посіб. – К.: «Видавництво Людмила», 2018. – 192 с.
3. Макаров И.М., Виноградская Т.М и др. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. -Москва: Наука. 1982.
4. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач. - Москва: Наука, 1982.-254 с.
5. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – Москва: Мир, 1985.
6. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. - Москва: Мир, 1991.
7. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - Москва: Наука, 1981.