Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О. В. МАРИНИЧ
Д. П. ПРОСКУРІН

СКІНЧЕННОВИМІРНИЙ ЛІНІЙНИЙ АНАЛІЗ. ТЕОРІЯ ВИЗНАЧНИКІВ ($\triangle$)

Навчальний посібник

Київ
«Центр навчальної літератури»
2014

УДК 512.64
ББК 22.143
М91

Рекомендовано до друку Вченою Радою факультету кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол №2 від 13.10.2014)

Рецензенти:

Петравчук Анатолій Петрович, доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри алгебри і математичної логіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Островський Василь Львович, доктор фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України.

Рабанович Вячеслав Іванович, кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник відділу функціонального аналізу Інституту математики НАН України.

Маринич О.В.

М91 Скінченновимірний лінійний аналіз. Теорія визначників (Δ): Навчальний посібник / Маринич О.В., Проскурін Д.П. — Київ: Центр навчальної літератури, 2014. — 209 с.

ISBN 000-000-0000-00-0

Навчальний посібник присвячено теорії визначників, яка є складовою курсу вищої математики технічних спеціальностей та курсів алгебри фізико-математичних спеціальностей університетів.

Для математиків, фізиків, а також аспірантів та студентів відповідних спеціальностей.

Бібліографія: 23 назв.

УДК 512.64
ББК 22.143

ISBN 000-000-0000-00-0

ЗМІСТ

Книга, що пропонується на розгляд читача, продовжує серію навчальних посібників “Скінченновимірний лінійний аналіз”. Перші книги цієї серії були присвячені скінченновимірним векторним та гільбертовим просторам і операторам у них.

Водночас змістовний і важливий в застосуваннях розділ лінійного аналізу складає теорія полілінійних функцій, зокрема симетричних та кососиметричних. Предметом цієї книги в серії є визначники — найвідоміші полілінійні кососиметричні функції.

Теорія визначників є класичним розділом математики та становить частину курсу лінійної алгебри для студентів-першокурсників математичних та технічних спеціальностей. Першу половину книги автори відвели ретельній побудові цієї теорії, в другій – зібрано значну кількість фактів, що виходять за межі стандартного університетського курсу. А саме, наведено нестандартні способи обчислення, зроблено огляд деяких важливих застосувань визначників в аналізі, геометрії, теорії графів, комбінаториці, теорії чисел тощо.

Автори книги доклали значних зусиль для того, щоб її аудиторія не була обмежена лише студентами. Впевнений, що посібник зацікавить широке коло читачів, що цікавляться математикою.

Ю. С. Самойленко

Передмова

Теорія визначників – розділ скінченновимірного лінійного аналізу, що має широкі застосування в багатьох галузях математики. Базові поняття цієї теорії викладаються першокурсникам математичних спеціальностей вже в перші місяці навчання, а з тими чи іншими її аспектами студенти регулярно зустрічаються в подальшому при вивченні фактично всіх математичних дисциплін.

В основу цього посібника покладено курс лекцій з алгебри, що читався авторами студентам 1-го курсу факультету кібернетики впродовж багатьох років. Проте, перелік питань, що розглядаються в цій книзі, значно ширший того, що вивчається в стандартному курсі. Добираючи матеріал для книги, ми ставили за мету зробити її корисною та цікавою не лише для студентів, а також для вчителів математики, викладачів вузів, аспірантів та наукових співробітників.

Структурно книга розділена на чотири частини. Перший розділ присвячений загальній теорії визначників. При цьому ми свідомо відмовились від прийнятого в більшості підручників означення визначника, як скалярної функції матричних елементів. Обраний нами функціональний (геометричний) спосіб означення, на нашу скромну думку, краще відображає справжню природу визначника, як "міри" лінійної залежності чи незалежності системи векторів.

У другій частині книги ми наводимо низку загальних методів обчислення визначників n-го порядку. Окрім стандартних способів, що вивчаються в курсі лінійної алгебри, цей розділ містить менш відомі методи, зокрема, метод конденсації, диференціально-різницевий метод та інші. Всі вони супроводжуються прикладами, які, сподіваємось, сприятимуть їх кращому засвоєнню.

Серед широкого спектру застосувань визначників, ми обрали декілька, як нам здається, найбільш показових: з геометрії, комбінаторики та теорії чисел. Третій розділ присвячено цим питанням. Наведений в ньому перелік застосувань в жодному разі не є вичерпним (та продиктований певними вподобаннями авторів) і послуговує, радше, для демонстрації методів теорії визначників у інших математичних дисциплінах.

Ми намагались зробити викладення матеріалу з одного боку максимально незалежним від зовнішніх джерел, а з іншого боку доступним для тих, хто лише почав вивчати лінійну алгебру. Це зумовило появу четвертого розділу, де зібрано необхідні відомості про скінченновимірні арифметичні векторні та евклідові простори. Для більш глибокого ознайомлення з теорією скінченновимірних векторних та гільбертових просторів, а також операторів на них ми радимо читачу звернутись, наприклад, до серії навчальних посібників [9, 10], частиною якої є також наша книга.

Автори висловлюють щиру подяку колективу кафедри дослідження операцій Київського національного університету ім. Т. Шевченка, та особисто її багаторічному завідувачу О.К. Закусилу за створення вкрай сприятливих умов для творчої праці. Ми вдячні також співробітникам відділу функціонального аналізу інституту математики НАН України, зокрема В.Л. Островському та В.І. Рабановичу за плідні дискусії та корисні поради. Окрема наша подяка студентам факультету кібернетики за їх цікаві та нетривіальні питання, які спонукали нас на написання цієї книги.

Ми не можемо не згадати тут про наших вчителів Ю.С. Самойленка та О.М. Іксанова, які були і будуть для нас взірцем вченого, педагога, наставника.

Окремо ми хочемо зазначити велику роль у створенні посібника ініціатора серії “скінченновимірний лінійний аналіз” Ю.С. Самойленка. Його постійна увага була значним стимулом під час написання книги, а без його допомоги друкована версія не побачила б світ.

О. В. М. та Д. П. П.

ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ

$:=$ – дорівнює за визначенням; покладемо;

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ – дійсна пряма $(-\infty, \infty)$;

$\mathbb{R}^+$ – невід'ємна півпряма $[0, \infty)$;

$\mathbb{C}$ – поле комплексних чисел;

$\mathbb{F}_n$ – скінченне поле з n елементів;

$\mathbb{F}^n$ – n-вимірний арифметичний векторний простір над полем $\mathbb{F}$;

$\mathbb{F}[x]$ – кільце многочленів від змінної x з коефіцієнтами з поля $\mathbb{F}$;

$[f_{i,j}]_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$ (або $[f(i,j)]_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$) – прямокутна матриця розміру $n \times m$ з елементом $f_{i,j}$ (або $f(i,j)$) на перетині i-го рядка та j-го стовпчика;

$M_{n,m}(\mathbb{F})$ – множина матриць розміру $n \times m$ з елементами з поля $\mathbb{F}$;

$M_n(\mathbb{F}) := M_{n,n}(\mathbb{F})$;

A^t – транспонування матриці $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$, якщо $A = [a_{i,j}]_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}$, то $A^t = [a_{j,i}]_{1 \le j \le m, 1 \le i \le n}$;

$\mathbb{1}(A)$ – індикатор події A, тобто $\mathbb{1}(A) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } A \text{ виконується,} \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$

Розділ 1

Основні поняття теорії визначників

1.1 Означення визначника

1.1.1 Обчислення орієнтованої площі паралелограма

Означення 1.1.1. Нехай дано два вектори $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $b = (\beta_1, \beta_2)$ на площині. Функція $S(a, b)$, що дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах a, b, у випадку коли найкоротший поворот від a до b відбувається проти годинникової стрілки (додатна орієнтація); та дорівнює цій площі взятій з протилежним знаком в іншому випадку (від'ємна орієнтація), називається орієнтованою площею паралелограма.

Знайдемо, як орієнтована площа виражається через координати векторів. Для цього нам спочатку треба встановити певні властивості функції $S(a, b)$.

Твердження 1.1.2. *Для довільних векторів a, b, c мають місце рівності:*

1. $S(a, b) = -S(b, a)$,
2. $S(\lambda a, b) = \lambda S(a, b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,
3. $S(a + b, c) = S(a, c) + S(b, c)$.

Доведення. Очевидно, що орієнтації пар (a, b) та (b, a) є протилежними, звідки й випливає перша властивість. Друга властивість є наслідком рів-

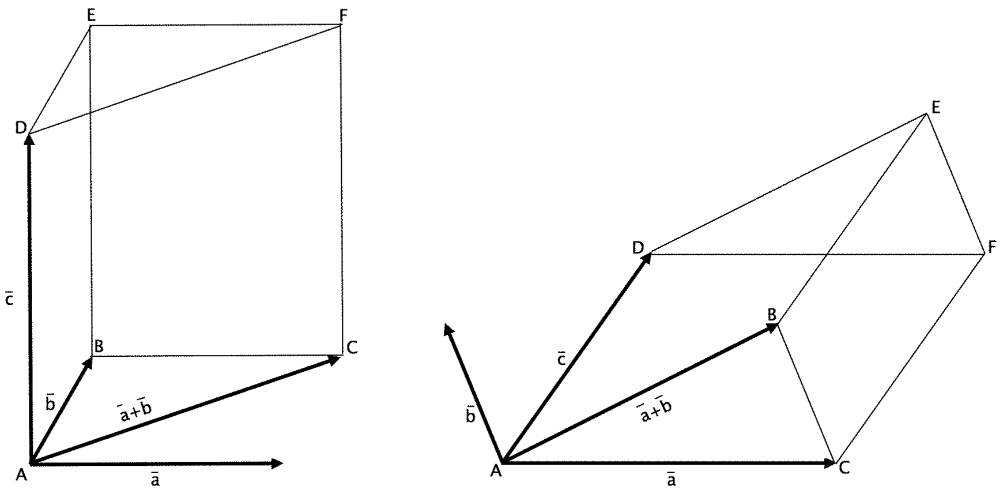

Рис. 1.1: Графічне доведення третьої властивості в твердженні 1.1.2

ності $|S(\lambda a, b)| = |\lambda||S(a, b)|$, а також того, що пари (a, b) та $(\lambda a, b)$ орієнтовані однаково, якщо $\lambda > 0$, і протилежним чином, якщо $\lambda < 0$.

Доведемо, що для довільних векторів a, b, c має місце рівність

$$S(a + b, c) = S(a, c) + S(b, c). \tag{1.1}$$

Враховуючі властивість $S(a, b) = -S(b, a)$, достатньо розглянути два випадки взаємного розташування векторів a, b, c, див. рис. 1.1. А саме, треба довести цю властивість, коли пари (a, c), (b, c) та $(a+b, c)$ орієнтовані однаково, та коли пари (a, c) та $(a + b, c)$ орієнтовані одним чином, а пара (b, c) іншим.

А. Нехай $S(a, c) > 0$, $S(b, c) > 0$ та $S(a + b, c) > 0$, див. ліву частину рис. 1.1. Тоді

$$S(a, c) = S_{BEFC}, \quad S(b, c) = S_{ADEB}, \quad S(a + b, c) = S_{ADFC}$$

й з рівності трикутників ABC та DEF випливає

$$S_{ADFC} = S_{BEFC} + S_{ADEB},$$

що еквівалентно (1.1).

B. Нехай $S(a,c) > 0$, $S(b,c) < 0$ та $S(a+b,c) > 0$, див. праву частину рис. 1.1. Тоді

$$S(a,c) = S_{ADFC}, \quad S(b,c) = -S_{BEFC}, \quad S(a+b,c) = S_{ADEB}.$$

З рівності трикутників ABC та DEF випливає, що

$$S_{ADFC} = S_{ADEB} + S_{BEFC}, \quad \text{тобто} \quad S_{ADEB} = S_{ADFC} - S_{BEFC}.$$

Отже, в цьому випадку рівність (1.1) також виконується. □

Функція, яка задовольняє властивості 1) попереднього твердження називається *кососиметричною*; функція, яка задовольняє властивості 2) та 3) називається *лінійною* за першим аргументом. Довільна кососиметрична та лінійна за першим аргументом функція є лінійною й за другим аргументом (доведіть це!). Функція двох векторів, лінійна за кожним з аргументів, називаєтся *білінійною.*

Розглянемо стандартний базис площини $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Тоді

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2.$$

Тепер ми готові знайти вираз $S(a,b)$ через координати векторів a, b. Сформулюємо більш загальний результат.

Твердження 1.1.3. *Нехай $F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ кососиметрична білінійна функція. Якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ та $b = (\beta_1, \beta_2)$, то*

$$F(a,b) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\, F(e_1, e_2).$$

Доведення. Використовуючи білінійність, дістанемо

$$\begin{aligned} F(a,b) &= F(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = \\ &= \alpha_1\beta_1 F(e_1,e_1) + \alpha_1\beta_2 F(e_1,e_2) + \alpha_2\beta_1 F(e_2,e_1) + \alpha_2\beta_2 F(e_2,e_2). \end{aligned}$$

З кососиметричності випливає, що $F(x,x) = 0$ для довільного $x \in \mathbb{R}^2$. Отже,

$$F(a,b) = \alpha_1\beta_2 F(e_1,e_2) + \alpha_2\beta_1 F(e_2,e_1) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\, F(e_1,e_2),$$

де на останньому кроці ми знову застосували кососиметричність F. $\square$

В подальшому ми будемо використовувати таке позначення:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \tag{1.2}$$

Зауваження 1.1.4.

1. Фактично ми довели, що існує єдина, з точністю до постійного множника $F(e_1,e_2)$, кососиметрична білінійна функція

$$F\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

2. Оскільки $S(e_1,e_2) = 1$, для орієнтованої площі будемо мати

$$S(a,b) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

3. В попередньому твердженні замість $\mathbb{R}$ можна розглядати довільне поле $\mathbb{F}$ з характеристикою відмінною від двох (тобто $1 + 1 \neq 0$). Остання умова є принциповою, оскільки в полях характеристики 2 з рівності $F(x,x) = -F(x,x)$, яка є наслідком кососиметричності, не випливає $F(x,x) = 0$.

Означення 1.1.5. Визначником другого порядку з рядками $a = (\alpha_1, \alpha_2)$, $b = (\beta_1, \beta_2)$ називається число

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Внаслідок твердження 1.1.3 можна дати альтернативне означення визначника другого порядку.

Означення 1.1.6 (функціональне означення визначника другого порядку)**.** Нехай характеристика поля $\mathbb{F}$ не дорівнює двом. Визначником другого порядку над $\mathbb{F}$ називається єдина кососиметрична білінійна функція $D\colon \mathbb{F}^2 \times \mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$ для якої $D(e_1, e_2) = 1$, де $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ утворюють стандартний базис $\mathbb{F}^2$.

1.1.2 Орієнтований об'єм паралелепіпеда

Розглянемо вектори a, b, c з простору $\mathbb{R}^3$. Нагадаємо, що трійка a, b, c називається правою (лівою), якщо найкоротший поворот від вектора a до вектора b відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою), якщо дивитись з кінця вектора c. Функцію $V(a, b, c)$, яка дорівнює об'єму паралелепіпеда, породженого векторами a, b, c, якщо трійка цих векторів права, та об'єму, взятому з протилежним знаком, якщо трійка ліва, називають *орієнтованим об'ємом.*

Використаємо результати попереднього параграфу для знаходження виразу орієнтованого об'єму через координати векторів.

Твердження 1.1.7. *Функція $V(a, b, c)$ є кососиметричною (тобто міняє знак при перестановці двох довільних аргументів) та полілінійною (тобто є лінійною за кожною змінною, якщо інші зафіксовані).*

Доведення. Доведення є цілком аналогічним доведенню подібних властивостей орієнтованої площі паралелограма. □

Розглянемо стандартний базис простору $\mathbb{R}^3$: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Нехай

$$a = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{3} \beta_i e_i, \quad c = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i e_i.$$

Знайдемо, як $V(a,b,c)$ виражається через координати векторів. Зауважимо, що $V(e_1,e_2,e_3)=1$.

Твердження 1.1.8. *Нехай $F\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ кососиметрична та полілінійна функція. Тоді*

$$F(a,b,c)=\left(\alpha_1\begin{vmatrix}\beta_2 & \beta_3\\ \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_3\end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix}\right)F(e_1,e_2,e_3).$$

Доведення. Підставимо замість першого аргументу його розклад за базисом

$$\begin{aligned}F(a,b,c)&=F(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3,b,c)=\\&=\alpha_1F(e_1,b,c)+\alpha_2F(e_2,b,c)+\alpha_3F(e_3,b,c).\end{aligned}\tag{1.4}$$

Вивчимо окремо кожен з доданків. Позначимо через

$$\widetilde{b}=\beta_2e_2+\beta_3e_3,\quad \widetilde{c}=\gamma_2e_2+\gamma_3e_3.$$

Тоді

$$F(e_1,b,c)=F(e_1,\widetilde{b},\widetilde{c}).\tag{1.5}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}F(e_1,b,c)&=F(e_1,\beta_1e_1+\widetilde{b},c)=\beta_1F(e_1,e_1,c)+F(e_1,\widetilde{b},c)=F(e_1,\widetilde{b},c)\\&=F(e_1,\widetilde{b},\gamma_1e_1+\widetilde{c})=\gamma_1F(e_1,\widetilde{b},e_1)+F(e_1,\widetilde{b},\widetilde{c})=F(e_1,\widetilde{b},\widetilde{c}),\end{aligned}$$

звідки випливає рівність (1.5). Очевидно, що вектори $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$ належать площині з базисом e_2, e_3 та мають в цьому базисі наступний координатний вигляд

$$\widetilde{b}=(\beta_2,\beta_3),\quad \widetilde{c}=(\gamma_2,\gamma_3).$$

Розглянемо функцію $\widetilde{F}\colon\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\widetilde{F}(\widetilde{b},\widetilde{c})=F(e_1,\widetilde{b},\widetilde{c})$. Вона є полілінійною та кососиметричною. Дійсно, доведемо, наприклад, лінійність за першим аргументом при фіксованому другому:

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(\mu_1\widetilde{b}_1+\mu_2\widetilde{b}_2,\widetilde{c})&=F(e_1,\mu_1\widetilde{b}_1+\mu_2\widetilde{b}_2,\widetilde{c})=\\&=\mu_1F(e_1,\widetilde{b}_1,\widetilde{c})+\mu_2F(e_1,\widetilde{b}_2,\widetilde{c})=\mu_1\widetilde{F}(\widetilde{b}_1,\widetilde{c})+\mu_2\widetilde{F}(\widetilde{b}_2,\widetilde{c}),\end{aligned}$$

де ми розглядаємо вектори $\widetilde{b}_i$, $\widetilde{c}$ як елементи тривимірного простору, коли вони є аргументами функції $F(e_1, \cdot, \cdot)$, та як елементи двовимірного простору, коли вони є аргументами $\widetilde{F}(\cdot, \cdot)$. Кососиметричність доводиться аналогічно.

Згідно твердження 1.1.3

$$\widetilde{F}(\widetilde{b}, \widetilde{c}) = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \widetilde{F}(e_2, e_3).$$

Зауважимо, що $\widetilde{F}(e_2, e_3) = F(e_1, e_2, e_3)$ за побудовою. Отже,

$$F(e_1, b, c) = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} F(e_1, e_2, e_3).$$

Подібним чином можна довести, що

$$F(e_2, b, c) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} F(e_2, e_1, e_3) = - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} F(e_1, e_2, e_3)$$

та

$$F(e_3, b, c) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} F(e_3, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} F(e_1, e_2, e_3),$$

де другі рівності отримані з кососиметричності функції F. Для доведення твердження залишилось підставити одержані значення $F(e_i, b, c)$, $i = 1, 2, 3$, в формулу (1.4). □

Зауваження 1.1.9.

1. Очевидно, що результат твердження 1.1.8 справедливий для довільного поля $\mathbb{F}$ характеристика якого не дорівнює двом.

2. Оскільки $V(e_1, e_2, e_3) = 1$, для орієнтованого об'єму будемо мати

$$V(a, b, c) = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \qquad (1.6)$$

Означення 1.1.10 (*індуктивне означення визначника 3-го порядку*)**.** Визначником третього порядку з рядками $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ та $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ називається число

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

Як і у випадку визначника другого порядку, твердження 1.1.8 дозволяє сформулювати еквівалентне означення визначника третього порядку. Надалі розглядаються лише поля, характеристика яких не дорівнює двом.

Означення 1.1.11 (*функціональне означення визначника 3-го порядку*)**.** Визначником третього порядку над полем $\mathbb{F}$ називається єдина кососиметрична та полілінійна функція

$$D \colon \mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}$$

така, що $D(e_1, e_2, e_3) = 1$. Де через e_1, e_2, e_3 позначено стандартний базис простору $\mathbb{F}^3$.

Задача 1.1.12. Формула (1.7) називається формулою розкриття визначника за першим рядком. За допомогою функціонального означення 1.1.11 знайдіть формули розкриття визначника третього порядку за другим та третім рядками.

1.1.3 Індуктивне та функціональне означення визначника

В цій частині ми розглянемо визначники довільного порядку та вивчимо їх основні властивості. При цьому ми знову розглядатимемо два підходи до означення цих об'єктів: індуктивний та функціональний. Оскільки ми будемо використовувати базові поняття теорії арифметичних векторних просторів, читачеві варто спочатку ознайомитись з Додатком 4.1.

Дамо спочатку індуктивне означення. Для цього припустимо, що нам вже відомо, що являє собою визначник порядку k, $2 \le k < n$, з елементами, що належать полю $\mathbb{F}$.

Означення 1.1.13 (індуктивне означення визначника)**.** Визначником порядку n з елементами $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$, $i, j = 1, \dots, n$, називається число

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1}M_{1,1} - \alpha_{1,2}M_{1,2} + \dots + (-1)^{k+1}\alpha_{1,k}M_{1,k} + \dots + (-1)^{n+1}\alpha_{1,n}M_{1,n}, \quad (1.8)$$

де через $M_{i,j}$ позначається *мінор елемента* $\alpha_{i,j}$, тобто визначник порядку $n-1$, отриманий викресленням i-го рядка та j-го стовпчика початкового визначника.

Розглянемо систему векторів-рядків

$$a_i = (\alpha_{i,1}, \cdots, \alpha_{i,n}) \in \mathbb{F}^n, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 1.1.14. *Нехай функція*

$$F\colon \underbrace{\mathbb{F}^n \times \dots \times \mathbb{F}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{F}$$

є кососиметричною та полілінійною. Тоді

$$F(a_1, a_2 \dots, a_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \cdot F(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

де через e_k, $k = 1, \dots, n$, позначено стандартний базис $\mathbb{F}^n$.

Доведення. Адаптуйте доведення аналогічного результату для тримісної полілінійної кососиметричної функції (твердження 1.1.8). □

Означення 1.1.15 (функціональне означення визначника)**.** Визначником порядку n називається єдина кососиметрична полілінійна функція

$$D\colon \underbrace{\mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{F}$$

така, що $D(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$.

З теореми 1.1.14 випливає, що означення 1.1.13 та означення 1.1.15 є еквівалентними.

1.2 Властивості визначників

1.2.1 Розкриття визначника за довільним рядком

Означення 1.1.13 являє собою формулу розкриття визначника за елементами першого рядка. Використовуючи кососиметричність, легко одержати аналог цієї формули для довільного рядка визначника.

Розглянемо визначник як функцію своїх рядків.

Теорема 1.2.1. *Для довільного $i = 1, \dots, n$ має місце рівність*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \alpha_{i,k} M_{ik}. \tag{1.9}$$

Доведення. Легко зрозуміти, що мінори елементів i-го рядка визначника $D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ співпадають з відповідними мінорами елементів *першого* рядка визначника $D(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_n)$.

З кососиметричності визначника як функції рядків випливає, що

$$D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = (-1)^{i-1} D(a_i, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_n).$$

Розклавши останній визначник за першим рядком, дістанемо

$$D(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \alpha_{i,k} M_{ik}.$$

$\square$

1.2.2 Елементарні перетворення рядків

Розглянемо систему векторів $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset \mathbb{F}^n$. Нагадаємо, що система $\mathcal{A}' = \{a_1', a_2', \ldots, a_m'\}$ одержується з $\mathcal{A}$ елементарним перетворенням, якщо виконується одна з альтернатив

1. Існує пара (i, j), $i \neq j$, для якої $a_i' = a_j$, $a_j' = a_i$ та $a_k' = a_k$ для всіх $k \notin \{i, j\}$.

2. Для деякого номера i маємо $a_i' = \lambda a_i$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$, та $a_k' = a_k$, для всіх $k \neq i$.

3. Для деякої пари (i, j), $i \neq j$, маємо $a_i' = a_i + \lambda a_j$, $a_k' = a_k$, $k \neq i$.

Іншими словами, елементарним перетворенням системи векторів називається або заміна двох векторів системи місцями (перший тип), або домноження одного вектора системи на ненульове число (другий тип), або додавання до одного вектора системи довільного кратного іншого вектора цієї ж системи (третій тип).

Наступне твердження є безпосереднім наслідком (фактично переформулюванням) функціонального означення визначника 1.1.15.

Твердження 1.2.2.

1. *Якщо поміняти місцями два рядки визначника, він змінює знак на протилежний.*

2. *Якщо рядок визначника помножити на деяке число, значення визначника домножується на те саме число.*

3. *Якщо до деякого рядка додати інший, помножений на будь-яке число, визнанчик не зміниться.*

Доведення. Перші дві властивості є елементами функціонального означення. Доведемо третю властивість. Знову будемо використовувати позначення

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = D(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_i = (\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n}).$$

Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} + \lambda\alpha_{2,1} & \alpha_{1,2} + \lambda\alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{1,n} + \lambda\alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = D(a_1 + \lambda a_2, a_2, \ldots, a_n).$$

За полілінійністю маємо

$$\begin{aligned} D(a_1 + \lambda a_2, a_2, \ldots, a_n) &= D(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \lambda D(a_2, a_2, \ldots, a_n) = \\ &= D(a_1, a_2, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

(нагадаємо, що з кососиметричності випливає $D(a_2, a_2, \ldots, a_n) = 0$). Отже,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} + \lambda\alpha_{2,1} & \alpha_{1,2} + \lambda\alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{1,n} + \lambda\alpha_{2,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Доведення для довільної пари (i, j), $i \neq j$, є тривіальним, враховуючи кососиметричність. $\square$

З геометричних міркувань випливає, що визначник розміру два та три дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його рядки є колінеарними (для розміру 2) або компланарними (для розміру 3). Дійсно, орінтована площа паралелограма, або ж орієнтований об'єм паралелепіпеда є ненульовими, тоді й тільки тоді, коли породжуючі вектори знаходяться у загальному положенні. Нижче ми узагальнемо ці спостереження на випадок визначника довільного розміру.

Нагадаємо спочатку означення лінійно незалежної системи векторів (аналог поняття системи векторів, що знаходяться у загальному положенні), див. Додаток 4.1 для більш детального обговорення поняття та властивостей лінійно незалежних систем векторів.

Означення 1.2.3. Вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ з простору $\mathbb{F}^n$ називаються лінійно незалежними, якщо жоден з них не можна лінійно виразити через інші. Відповідно, система $a_1, a_2, \ldots a_m$ називається лінійно залежною, якщо знайдеться число $k = 1, \ldots, m$ таке, що

$$a_k = \sum_{i \neq k, i=1}^{m} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{F},\ i \neq k.$$

Попереднє означення не надто зручне для перевірки системи векторів на лінійну незалежність. Еквівалентним йому є таке означення:

Означення 1.2.4. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ називається лінійно незалежною, якщо з рівності

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}$$

випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

Задача 1.2.5. Доведіть еквівалентність означень 1.2.3, 1.2.4.

Покажемо, що визначник не дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його рядки утворюють лінійно незалежну систему. Спочатку доведемо допоміжне твердження. Нагадаємо, що через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ми позначаємо стандартний базис простору $\mathbb{F}^n$.

Твердження 1.2.6. *Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору $\mathbb{F}^n$ є лінійно незалежною тоді й тільки тоді, коли за допомогою елементарних перетворень з неї можна отримати стандартний базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору рядків $\mathbb{F}^n$.*

Доведення. Розіб'ємо доведення на два кроки.

Крок 1. Спочатку покажемо, що незалежність системи векторів зберігається при елементарних перетвореннях. Це очевидно для перетворень першого та другого типу. Розглянемо перетворення третього типу. Отже, нехай вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ лінійно незалежні. Доведемо незалежність системи $a_1 + \gamma a_2, a_2, \ldots, a_m$. Нехай

$$\lambda_1(a_1 + \gamma a_2) + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m = \mathbf{0}.$$

Тоді

$$\lambda_1 a_1 + (\lambda_1 \gamma + \lambda_2) a_2 + \cdots + \lambda_m a_m = \mathbf{0},$$

звідки, враховуючи незалежність системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$, випливає, що

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_1\gamma + \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0, \ldots, \lambda_m = 0.$$

Отже, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ та вектори $a_1 + \gamma a_2, a_2, \ldots, a_m$ є лінійно незалежними. Оскільки перетворена система зводиться до початкової також за допомогою одного елементарного перетворення, справедливо й обернене: якщо після елементарного перетворення отримали незалежну систему векторів, то початкова система також є лінійно незалежною.

Крок 2. Перейдемо до доведення твердження. Застосуємо індукцію за розмірністю простору. Припустимо, що вектори $b_1, b_2, \ldots, b_k$ з простору $\mathbb{F}^k$ є лінійно незалежними тоді й тільки тоді, коли елементарними перетвореннями з них можна отримати вектори

$$\widetilde{e_1} = (1, 0, \ldots, 0),\ \widetilde{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots \widetilde{e}_k = (0, 0, \ldots, 1).$$

Розглянемо лінійно незалежну систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ простору $\mathbb{F}^n$. Нехай

$$a_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots \alpha_{i,n}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Оскільки незалежна система не може містити нульовий вектор (перевірте це!), кожен з a_i, $i = 1, \ldots, n$, має принаймні одну ненульову координату. Не втрачаючи загальності, можна припустити, що $\alpha_{n,n} \neq 0$. Домножимо a_n на $\alpha_{n,n}^{-1}$. Одержимо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \widehat{a}_n$, де

$$\widehat{a}_n = (\widehat{\alpha}_{n,1}, \widehat{\alpha}_{n,2}, \ldots, \widehat{\alpha}_{n,n-1}, 1).$$

Згідно з першим пунктом доведення, вектори $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \widehat{a}_n$ є лінійно незалежними. Застосуємо тепер низку елементарних перетворень третього типу: а саме, розглянемо систему $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_{n-1}, \widehat{a}_n$, де

$$\widehat{a}_k = a_k - \alpha_{k,n}\widehat{a}_n, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Зауважимо, що вектори $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_{n-1}, \widehat{a}_n$ лінійно незалежні та

$$\widehat{a}_i = (\widehat{\alpha}_{i,1}, \widehat{\alpha}_{i,2}, \ldots, \widehat{\alpha}_{i,n-1}, 0), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Вектори $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_{n-1}$ також утворюють незалежну систему в $\mathbb{F}^n$: в протилежному випадку система $\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_{n-1}, \widehat{a}_n$ була б залежною. Очевидно, що тоді вектори $\widetilde{a}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, де

$$\widetilde{a}_i = (\widehat{\alpha}_{i,1}, \widehat{\alpha}_{i,2}, \ldots, \widehat{\alpha}_{i,n-1}) \in \mathbb{F}^{n-1},$$

утворюють лінійно незалежну систему. Тоді, за припущенням індукції, за допомогою елементарних перетворень система $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{n-1}$ зводиться до стандартного базису $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \ldots, \widetilde{e}_{n-1}$ простору $\mathbb{F}^{n-1}$. Якщо ці ж перетворення застосувати до системи $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_{n-1}$, дістанемо вектори

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0), \ldots, e_{n-1} = (0, 0, \ldots, 1, 0)$$

простору $\mathbb{F}^n$. При цьому система $e_1, \ldots, e_{n-1}, \widehat{a}_n$, одержана з $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_{n-1}, \widehat{a}_n$ шляхом елементарних перетворень. Остаточно, оскільки

$$\widehat{a}_n - \sum_{k=1}^{n-1} \widehat{\alpha}_{n,k} e_k = e_n,$$

систему $e_1, e_2, \ldots, e_n$ можна отримати з $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_n$, а, отже, з системи $a_1, \ldots, a_n$, шляхом елементарних перетворень. Крок індукції доведено. $\square$

Миттєвим наслідком твердження 1.2.6 є наступний результат.

Наслідок 1.2.7. Визначник

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

з рядками $a_1, \dots, a_n$,

$$a_i = (\alpha_{i,1}, \dots \alpha_{i,n}) \in \mathbb{F}^n, \quad i = 1, \dots, n,$$

не дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли вектори $a_1, \dots, a_n$ є лінійно незалежними.

Доведення. Припустимо, що рядки визначника є залежними. Тоді, наприклад,

$$a_n = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1}.$$

Віднявши від n-го рядка перший, помножений на λ_1; другий, помножений на λ_2 і так далі до $n-1$-го, помноженого на λ_{n-1}; дістанемо визначник, в якого останній рядок є нульовим. Іншими словами:

$$\begin{aligned} D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) &= D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k D(a_1, \dots, a_k, \dots, a_{n-1}, a_k) = 0. \end{aligned}$$

Навпаки, припустимо що рядки $a_1, a_2, \dots, a_n$ визначника є лінійно незалежними. Тоді елементарними перетвореннями рядків визначник зводиться до вигляду

$$D(e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Оскільки при кожному елементарному перетворенні визначник або не змінюється, або міняє знак, або домножеться на ненульове число, будемо мати для деякого $C \in \mathbb{F}$, $C \neq 0$,

$$D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = C \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = C \neq 0.$$

□

1.2.3 Елементарні перетворення стовпчиків

В цій частині ми вивчимо властивості визначника як функції своїх стовпчиків. Як і раніше, рядки визначника позначатимуться через a_i, $i = 1, \ldots, n$. Стовпчики позначатимемемо через

$$\widehat{a}_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{n,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Визначник, як функція стовпчиків позначатиметься наступним чином:

$$\widehat{D}(\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_n).$$

Наша мета – показати, що функція $\widehat{D}$ також є кососиметричною та полілінійною.

Твердження 1.2.8. *Визначник є кососиметричною функцією своїх стовпчиків.*

Доведення. Будемо міркувати індуктивно.

1. **База індукції**. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що визначник порядку два міняє знак при перестановці своїх стовпчиків.

2. **Припущення індукції**. Припустимо, що визначники порядку k, де $2 \le k < n$, є кососиметричними функціями ствопчиків.

3. **Крок індукції**. Очевидно, що достатньо розглянути випадок перестановки двох сусідніх стовпчиків (перевірте, що перестановку будь-якої пари завжди можна реалізувати за допомогою непарної кількості перестановок сусідніх стовпчиків).

Отже, покажемо, що

$$\widehat{D}(\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_{i-2}, \widehat{a}_i, \widehat{a}_{i-1}, \widehat{a}_{i+1}, \ldots, \widehat{a}_n) = -\widehat{D}(\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_{i-2}, \widehat{a}_{i-1}, \widehat{a}_i, \widehat{a}_{i+1}, \ldots, \widehat{a}_n)$$

Розкладемо ліву частину рівності за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,i-2} & \alpha_{1,i} & \alpha_{1,i-1} & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} = \quad & \alpha_{1,1} \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\ + \quad & \cdots + (-1)^{1+i-2}\alpha_{1,i-2} \begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-3} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-3} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\ + \quad & (-1)^{1+i-1}\alpha_{1,i} \begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\ + \quad & (-1)^{1+i}\alpha_{1,i-1} \begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (-1)^{1+i+1}\alpha_{1,i+1}\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i-1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i-1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\
&+ \quad \cdots + (-1)^{1+n}\alpha_{1,n}\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

В кожному доданку крім $(i-1)$-го та i-го у відповідному мінорі маємо пару сусідніх стовпчиків, що утворюють інверсію, тобто другий індекс елементів стовпчика, що стоїть попереду, менший за другий індекс елементів попереднього стовпчика. Якщо поміняти ці стовпчики місцями, за припущенням індукції, знак мінорів зміниться на протилежний. Також поміняємо місцями $i-1$-й та i-й доданки і використаємо очевидну рівність $(-1)^{1+i-1} = -(-1)^{1+i}$. Одержимо

$$
\begin{aligned}
&\widehat{D}(\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_{i-2}, \widehat{a}_i, \widehat{a}_{i-1}, \widehat{a}_{i+1}, \ldots, \widehat{a}_n) \\
&= \quad -\alpha_{1,1}\begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\
&- \quad \ldots (-1)^{1+i-2}\alpha_{1,i-2}\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-3} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-3} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\
&- \quad (-1)^{1+i-1}\alpha_{1,i-1}\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\
&- \quad (-1)^{1+i}\alpha_{1,i}\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- \quad & (-1)^{1+i+1}\alpha_{1,i+1}\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \\
- \quad & \cdots - (-1)^{1+n}\alpha_{1,n}\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i-2} & \alpha_{2,i-1} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,i+1} & \cdots & \alpha_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i-2} & \alpha_{n,i-1} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} \end{vmatrix} \\
= \quad & -D(a_1, \dots, a_n) = -\widehat{D}(\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n).
\end{aligned}
$$

Таким чином, ми довели, що визначник порядку n також є кососиметричною функцією своїх стовпчиків. □

Твердження 1.2.9. *Визначник є полілінійною функцією своїх стовпчиків.*

Доведення. Доведення цього твердження цілком аналогічне доведенню кососиметричності за стовпчиками, тому ми залишаємо його читачам в якості вправи. □

Зауваження 1.2.10. Позначимо через $\widehat{e}_i = e_i^t$, $i = 1, \dots, n$, вектор-стовпчики стандартного базису простору стовпчиків $\mathbb{F}^n$. Очневидно, має місце рівність

$$\widehat{D}(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n) = D(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Звідси випливає, що визначник як функція стовпчиків теж задовольняє всім умовам функціонального означення, зокрема, справедливими є формули розкриття визначника за довільним стовпчиком.

З наведених вище тверджень одразу випливає, що визначник не змінюється при транспонуванні, тобто при записі його рядків по стовпчиках (при цьому автоматично рядками нового визначника стануть стовпчики початкового). Формальною мовою ця рівність записується так

$$D(\widehat{a}_1^t, \dots, \widehat{a}_n^t) = D(a_1, \dots, a_n).$$

Твердження 1.2.11. *Нехай через a_i, $i = 1, \ldots, n$, позначено систему рядків квадратної матриці A, а через $\widehat{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, систему її стовпчиків. Тоді*

$$\det A^t = D(\widehat{a}_1^t, \ldots, \widehat{a}_n^t) = D(a_1, \ldots, a_n) = \det A.$$

Доведення. Розглянемо функцію

$$F(a_1, \ldots, a_n) = D(\widehat{a}_1^t, \ldots, \widehat{a}_n^t) = \widehat{D}(a_1, \ldots, a_n).$$

Оскільки $\widehat{D}$ є полілінійною, кососиметричною та дорівнює одиниці на стандартному базисі, ті ж самі властивості має функція F. Таким чином, $F(a_1, \ldots, a_n)$ задовольняє всі умови функціонального означення визначника. Отже,

$$\det A^t = F(a_1, \ldots, a_n) = D(a_1, \ldots, a_n) = \det A.$$

□

Зауваження 1.2.12. З доведеного твердження зокрема випливає, що довільна властивість визначника як функції рядків, виконується також для визначника як функції стовпчиків.

1.2.4 Теорема про добуток визначників

В цьому параграфі ми доведемо теорему про добуток визначників матриць однакового розміру. Нагадаємо (див. Додаток 4.5), що довільна матриця $A \in M_n(\mathbb{F})$ визначає лінійне відображення

$$\mathcal{A} \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n, \quad \mathcal{A}(x) = Ax,$$

де через x позначено вектор-стовпчик $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{F}^n$. Також нагадаємо, що за одним з означень добутку матриць, для довільних $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

$$A\,B = \big(Ab_1 | Ab_2 | \cdots | Ab_n\big),$$

де через $b_1, \ldots, b_n$ позначено систему стовпчиків матриці B:

$$b = \big(b_1 | b_2 | \cdots | b_n\big).$$

Теорема 1.2.13. *Для довільних $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ має місце рівність*

$$\det A \cdot \det B = \det(AB).$$

Доведення. Розглянемо системи стовпчиків матриць A та B:

$$A = \big(a_1|a_2|\dots|a_n\big), \quad B = \big(b_1|b_2|\dots|b_n\big).$$

Побудуємо функцію

$$\widehat{D}_A(b_1, \dots, b_n) := \widehat{D}(Ab_1, \dots, Ab_n) = \det(AB).$$

Легко перевірити, що функція $\widehat{D}_A$ є кососиметричною та полілінійною. Тоді, за основною теоремою про полілінійні кососиметричні функції (теорема 1.1.14), одержимо

$$\widehat{D}_A(b_1, \dots, b_n) = \widehat{D}(b_1, \dots, b_n)\widehat{D}_A(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n)$$

Оскільки $\widehat{D}(b_1, \dots, b_n) = \det B$ та

$$\widehat{D}_A(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n) = \widehat{D}(A\widehat{e}_1, \dots, A\widehat{e}_n) = \widehat{D}(a_1, \dots, a_n) = \det A.$$

Остаточно одержимо

$$\det(AB) = \widehat{D}_A(b_1, \dots b_n) = \det B \cdot \det A.$$

□

Зауважимо, що при доведенні теореми про добуток визначників, ми користувались лише властивостями визначника як полілінійної та кососиметричної функції стовпчиків. За допомогою цього результату легко довести властивості визначника відносно елементарних перетворень рядків. Вище ми за допомогою індуктивного означення показали, що визначник, заданий як функція стовпчиків, є кососиметричною та полілінійною функцією рядків, однак доведення було досить громіздким. Для спрощення формулювання, в наступному твердженні ми розглядаємо елементарні перетворення конкретних рядків, однак це ніяк не впливає на загальність міркувань, наведених у його доведенні.

Твердження 1.2.14. *Розглянемо визначник*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = D(a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad a_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{n,i} \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, n,$$

як кососиметричну та полілінійну функцію своїх стовпчиків. Тоді

1.
$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{1,1} & \lambda\alpha_{1,2} & \cdots & \lambda\alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

3.
$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} + \lambda\alpha_{2,1} & \alpha_{1,2} + \lambda\alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{1,n} + \lambda\alpha_{2,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

Доведення. Будемо використовувати зв'язок між елементарними перетвореннями та елементарними матрицями. Доведемо третю властивість. З теореми про добуток визначників випливає, що

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}+\lambda\alpha_{2,1} & \alpha_{1,2}+\lambda\alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{1,n}+\lambda\alpha_{2,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

Залишається зауважити, що

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1,$$

де ми використали лінійність за другим стовпчиком.

Аналогічно, для доведення другої властивості використаємо рівність

$$\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

та зауважимо, що з кососиметричності за стовпчиками випливає, що

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Для доведення першої властивості використаємо наступний розклад в добуток

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{1,1} & \lambda\alpha_{1,2} & \cdots & \lambda\alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \lambda.$$

□

Таким чином, з теореми про добуток визначників та полілінійності і кососиметричності визначника як функції стовпчиків, ми одержали властивості визначника відносно елементарних перетворень рядків. Ще раз підкреслимо, що доведення теореми про добуток визначників вимагало лише кососиметричності та полілінійності за стовпчиками!

З попереднього твердження очевидним чином випливає, що визначник, який розглядається як кососиметрична та полілінійна функція стовпчиків, дорівнює нулю, якщо один з його рядків є нульовим.

Покажемо тепер, як можна довести адитивність визначника за рядками, не використовуючи метод математичної індукції. Оскільки вище ми довели кососиметричність визначника за рядками, достатньо розглянути випадок, коли перший рядок зображений в вигляді суми.

Твердження 1.2.15. *З кососиметричності та полілінійності визначника як функції стовпчиків випливає рівність (адитивність за рядками)*

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}+\beta_{1,1} & \alpha_{1,2}+\beta_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n}+\beta_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \tag{1.10}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

Доведення. Розглянемо систему рядків

$$a_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \cdots, \alpha_{i,n}), \quad i = 2, \ldots, n.$$

Якщо система векторів a_i, $i = 2, \ldots, n$, лінійно залежна, всі визначники в формулі (1.10) дорівнюють нулю. Дійсно, в цьому випадку один з цих рядків є лінійною комбінацією інших, а, отже, в усіх визначниках в (1.10), за допомогою елементарних перетворень рядків a_i, $i = 2, \ldots, n$, можна одержати нульовий рядок.

Припустимо, що рядки $a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$ лінійно незалежні. За допомогою елементарних перетворень, з точністю до певної перестановки координат всіх векторів, цю систему можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} a'_2 &= (\alpha'_{2,1}, 1, 0, \dots, 0) \\ a'_3 &= (\alpha'_{3,1}, 0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ a'_n &= (\alpha'_{n,1}, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Оскільки при додаванні до одного рядка кратного іншого рядка визначник не змінюється, при домноженні рядка на ненульове число визначник домножується на це саме число, та при перестановці рядків і стовпчиків визначник домножується на $(-1)^k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$, одержимо для довільного вектора-рядка $c_1 = (\gamma_{1,1}, \gamma_{1,2}, \dots, \gamma_{1,n})$

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} & \cdots & \gamma_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \gamma_{1,\sigma(1))} & \gamma_{1,\sigma(2)} & \gamma_{1,\sigma(3)} & \cdots & \gamma_{1,\sigma(n)} \\ \alpha'_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha'_{3,1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha'_{n,1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \gamma_{1,\sigma(1))} - \sum_{k=2}^n \alpha'_{k,1}\gamma_{1,\sigma(k)} & \gamma_{1,\sigma(2)} & \gamma_{1,\sigma(3)} & \cdots & \gamma_{1,\sigma(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\gamma_{1,\sigma(1)} - \sum_{k=2}^n \alpha'_{k,1}\gamma_{1,\sigma(k)})$$

для деяких $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$, та перестановки $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ набору $(1, 2, \dots, n)$. А саме, σ визначається перестановкою координат векторів, яка використовується при зведенні системи $a_2, a_3, \dots, a_n$ до вигляду $a'_2, a'_3, \dots, a'_n$.

Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda\bigl(\alpha_{1,\sigma(1)} - \sum_{k=2}^{n} \alpha'_{k,1}\alpha_{1,\sigma(k)}\bigr),$$

$$\begin{vmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} = \lambda\bigl(\beta_{1,\sigma(1)} - \sum_{k=2}^{n} \alpha'_{k,1}\beta_{1,\sigma(k)}\bigr)$$

та

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}+\beta_{1,1} & \alpha_{1,2}+\beta_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n}+\beta_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \cdots & \alpha_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\bigl(\alpha_{1,\sigma(1)} + \beta_{1,\sigma(1)} - \sum_{k=2}^{n} \alpha'_{k,1}(\alpha_{1,\sigma(k)} + \beta_{1,\sigma(k)})\bigr),$$

звідки очевидно випливає рівність (1.10). $\square$

1.3 Розгорнута формула для обчислення визначника

В цій частині ми в явному вигляді опишемо визначник, як функцію елементів (а не рядків чи стовпчиків) матриці. Для цього використаємо кососиметричність та полілінійсть за рядками. Нехай $A = [\alpha_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$. Тоді для рядків матриці маємо розклади

$$a_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} e_k.$$

Тоді

$$\det A = D(a_1, a_2, \ldots, a_n) = D(\sum_{k_1=1}^{n} \alpha_{1,k_1} e_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} \alpha_{2,k_2} e_{k_2}, \ldots, \sum_{k_n=1}^{n} \alpha_{n,k_n} e_{k_n}) \tag{1.11}$$

За допомогою полілінійності одержимо рівність

$$\det A = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in\{1,2,\ldots,n\}^n} \alpha_{1,k_1}\alpha_{2,k_2}\cdots\alpha_{n,k_n} D(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}). \tag{1.12}$$

З кососиметричності випливає, що $D(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) \neq 0$ тоді й тільки тоді, коли числа k_s, $s = 1, \ldots, n$, є попарно різними, тобто коли набір $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ утворює перестановку набору $\{1, 2, \ldots, n\}$. Нехай $\mathfrak{S}_n$ позначає множину всіх перестановок набору $\{1, 2, \ldots, n\}$, $|\mathfrak{S}_n| = n!$. Тоді

$$\det A = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in\mathfrak{S}_n} \alpha_{1,k_1}\alpha_{2,k_2}\cdots\alpha_{n,k_n} D(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}). \tag{1.13}$$

Зауважимо, що з кососиметричності випливає, що $D(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) = \pm 1$. В рівності (1.13) маємо, з точністю до знаків доданків, суму добутків елементів матриці, де в кожному добутку береться один елемент з кожного рядка та кожного стовпчика, при цьому перші індекси множників впорядковані канонічно. Залишилось знайти правило обчислення знаку при кожному такому добутку.

Означення 1.3.1. Елементи k_i та k_j набору $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ утворюють інверсію, якщо $i < j$ та $k_i > k_j$. Іншими словами, інверсія має місце, коли більший елемент знаходиться в наборі попереду меншого.

Нехай $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Через $Inv\ \sigma$ будемо позначати кількість пар в наборі σ, що утворюють інверсію (коротко: кількість інверсій в перестановці σ). Знаком перестановки будемо називати число

$\mathbf{sign}\ \sigma = (-1)^{Inv\,\sigma}$. Перестановки, які мають додатний знак, називаються парними, а від'ємний–непарними. Множину парних перестановок на n елементах позначають через A_n.

Транспозицією називається перетворення впорядкованого набору, при якому лише два фіксованих елемента міняються місцями, а всі інші залишаються нерухомими. Нижче нам буде потрібне наступне твердження (доведіть його!).

Твердження 1.3.2. *При будь-якій транспозиції знак перестановки змінюється на протилежний.*

Наслідок 1.3.3. Знак перестановки $\sigma = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathfrak{S}_n$ є додатним, якщо кількість транспозицій, за допомогою яких цей набір зводиться до вигляду $(1, 2, \dots, n)$ є парною, і від'ємним в протилежному разі.

Доведення. Для доведення помітимо, що знак перестановки $(1, 2, \dots, n)$ дорівнює одиниці та використаємо твердження 1.3.2. □

Повернемось тепер до обчислення значення $D(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n})$. Оскільки при кожній транспозиції аргументів ця величина змінює знак на протилежний та $D(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$, очевидним є наступне твердження.

Твердження 1.3.4. *Нехай* $\sigma = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathfrak{S}_n$, *тоді*

$$D(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_n}) = \mathbf{sign}\ \sigma.$$

Остаточно, одержуємо формулу для обчислення визначника як функції матричних елементів, що носить назву *формули Коші*:

$$\det A = \sum_{\sigma=(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\ \sigma\ a_{1,k_1} a_{2,k_2} \cdots a_{n,k_n}. \tag{1.14}$$

Задача 1.3.5. Доведіть, що коли $\sigma_1 = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathfrak{S}_n$ фіксоване, то

$$\det A = \sum_{\sigma_2=(k_1,k_2,\dots,k_n)} (\mathbf{sign}\ \sigma_1)(\mathbf{sign}\ \sigma_2) a_{i_1,k_1} a_{i_2,k_2} \cdots a_{i_n,k_n}$$

1.4 Теорема Крамера та її наслідки

В цій частині ми застосуємо визначники до розв'язання систем лінійних рівнянь. Розглянемо квадратну систему рівнянь

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Нижче позначатимемо через $\Delta := \det A$ визначник основної матриці системи, а через Δ_i, $i = 1, \ldots, n$, визначники, отримані з Δ заміною i-го стовпчика стовпчиком вільних членів $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^t$.

Нам знадобиться допоміжне твердження. Формула розкриття за стовпчиком (рядком) стверджує, що визначник дорівнює сумі добутків елементів стовпчика (рядка) на алгебраїчні доповнення цих елементів. Подивимось, що відбудеться, якщо в цій сумі замінити алгебраїчні доповнення на доповнення відповідних елементів іншого стовпчика (рядка).

Лема 1.4.1. *Нехай $A = [\alpha_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$, позначимо через $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ алгебраїчні доповнення елементів α_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Тоді*

$$\alpha_{1,i} A_{1,j} + \alpha_{2,i} A_{2,j} \cdots + \alpha_{n,i} A_{n,j} = 0, \quad \text{якщо } i \neq j. \tag{1.15}$$

Доведення. Припустимо для визначеності, що $i < j$. З формули розкриття визначника за j-м стовпчиком випливає, що

$$\gamma_1 A_{1,j} + \cdots + \gamma_n A_{n,j} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,i} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \gamma_1 & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i} & \cdots & \alpha_{2,j-1} & \gamma_2 & \alpha_{2,j+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \gamma_n & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Звідки

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1,i}A_{1,j} + \cdots + \alpha_{n,i}A_{n,j}& \\
&= \begin{vmatrix}
\alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,i} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,i} & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\
\alpha_{2,1} & \cdots & \alpha_{2,i} & \cdots & \alpha_{2,j-1} & \alpha_{2,i} & \alpha_{2,j+1} & \cdots & \alpha_{2,n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,i} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,i} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{n,n}
\end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}
$$

оскільки визначник з двома однаковими стовпчиками дорівнює нулю. $\square$

Теорема 1.4.2 (теорема Крамера)**.** *Розглянемо квадратну систему лінійних рівнянь $Ax = b$, де*

$$A = [\alpha_{ij}]_{1 \le i,j \le n}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^t, \quad b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^t.$$

Припустимо, що $\Delta = \det A \neq 0$. Тоді система має єдиний розв'язок та

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доведення. Запишемо систему в явному вигляді:

$$
\begin{cases}
\alpha_{1,1}x_1 & + & \alpha_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}x_n & = & \beta_1, \\
\alpha_{2,1}x_1 & + & \alpha_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}x_n & = & \beta_2, \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{n,1}x_1 & + & \alpha_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{n,n}x_n & = & \beta_n.
\end{cases}
$$

Домножимо перше рівняння на $A_{1,1}$, друге на $A_{2,1}$ і так далі, n-те на $A_{n,1}$. Додамо отримані рівняння, одержимо

$$
\begin{aligned}
(\alpha_{1,1}A_{1,1} + \alpha_{2,1}A_{2,1} + \cdots + \alpha_{n,1}A_{n,1})x_1 + &\\
&+(\alpha_{1,2}A_{1,1} + \alpha_{2,2}A_{2,1} + \cdots + \alpha_{n,2}A_{n,1})x_2 \\
&\cdots \\
&+(\alpha_{1,n}A_{1,1} + \alpha_{2,n}A_{2,1} + \cdots + \alpha_{n,n}A_{n,1})x_n \\
&= \beta_1 A_{1,1} + \beta_2 A_{2,1} + \cdots + \beta_n A_{n,1}.
\end{aligned}
$$

За лемою 1.4.1 коефіцієнти при змінних x_i, $i = 2, \ldots, n$, дорівнюють нулю. Очевидно також, що коефіцієнт при x_1 дорівнює Δ, а вираз в правій частині рівності співпадає з Δ_1. Отже,

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Твердження для довільного i доводиться аналогічно. □

В якості одного із застосувань теореми Крамера, знайдемо формулу для обчислення матричних елементів оберненої матриці (з приводу означення та умов існування оберненої матриці див. Додаток 4.6 Додатку). Отже, нехай $A \in M_n(\mathbb{F})$ та **rank** $A = n$. Тоді існує A^{-1} та $\Delta = \det A \neq 0$. Будемо шукати A^{-1} як розв'язок матричного рівняння $AX = E$. Розіб'ємо X на стовпчики:

$$X = \left(a_1 | a_2 | \cdots | a_n \right),$$

$a_i = (\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \ldots, \alpha_{n,i})^t$. Одержимо рівність

$$\left(Aa_1 | Aa_2 | \cdots | Aa_n \right) = \left(\widehat{e}_1 | \widehat{e}_2 | \cdots | \widehat{e}_n \right). \tag{1.16}$$

Остання рівність розпадається на n систем лінійних рівнянь вигляду

$$Aa_i = \widehat{e}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Розв'яжемо кожну з систем за допомогою теореми Крамера. Одержимо рівності

$$\alpha_{ji} = \frac{\Delta_j^{(i)}}{\Delta},$$

де

$$\Delta_j^{(i)} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = A_{ij},$$

та через $a_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, позначено матричні елементи A, а через $A_{i,j}$ їх алгебраїчні доповнення. Таким чином, маємо наступний результат.

Теорема 1.4.3. *Нехай $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ невироджена матриця та обернена до неї $A^{-1} = [\alpha_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$. Тоді*

$$\alpha_{i,j} = \frac{A_{j,i}}{\Delta}, \quad i, j = 1, \ldots, d.$$

Розділ 2

Методи обчислення визначників

2.1 Обчислення визначників порядку 2, 3 та 4.

2.1.1 Визначники другого порядку.

Вище ми означили визначник другого порядку як функцію рядків

$$a_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}), \quad a_2 = (\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}),$$

що має вигляд

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}, \tag{2.1}$$

Проте, не слід застосовувати цю формулу бездумно. Наприклад, для обчислення визначника

$$\begin{vmatrix} 28423941 & 28523941 \\ 13321818 & 13321818 \end{vmatrix},$$

безпосереднє затосування (2.1) не є доцільним.

Вправи

Задача 2.1.1. Обчислити наведений вище визначник усно.

Задача 2.1.2. Обчислити $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

Задача 2.1.3. Розглянемо матриці над полем $\mathbb{F}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $\det A$ та $\det B$ за формулою (2.1). Чи не суперечить відповідь властивості кососиметричності?

2.1.2 Визначники третього порядку.

Формула Коші для визначника третього порядку записується так

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,3} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1} + \alpha_{1,3}\alpha_{2,1}\alpha_{3,2}$$
$$-\alpha_{1,3}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\alpha_{3,3}. \quad (2.2)$$

Для її запам'ятовування існує мнемонічне правило (правило Сарруса). Воно полягає у наступному: допишемо до початкової матриці справа її перші два стовпчики (Рис. 2.1). Додамо добутки елементів діагоналей, відмічених жирною лінією, та віднімемо від результату добутки елементів діагоналей, відмічених пунктиром. Очевидно, що в результаті цих дій отримаємо вираз в правій частині (2.2).

Для обчислення визначників 3×3 можна використовувати й інші методи, зокрема, метод зведення до трикутного вигляду. Ми не формулюємо цей метод тут, оскільки він наведений нижче для визначників порядку 4×4.

Вправи

Задача 2.1.4. Обчислити $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

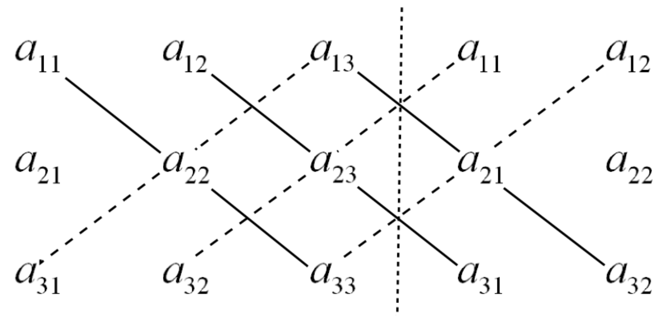

Рис. 2.1: Правило Сарруса

Задача 2.1.5. Обчислити $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix}$, де α, β, γ – корені рівняння

$$x^3 + 3x + 1 = 0.$$

Задача 2.1.6. Обчислити $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 22 \\ 0 & 4 & 17 \\ 17 & 12 & 1 \end{vmatrix}$, вважаючи числа, що входять в нього, елементами скінченного поля $\mathbb{F}_{23}$.

2.1.3 Визначники 4-го порядку.

Для визначників порядку 4 формула Коші містить $4! = 24$ доданки, в кожному з яких є чотири множники. Загальна кількість дій при такому безпосередньому підрахунку складатиме 96 множень та 24 додавань (віднімань). Тому з метою ефективного обчислення визначника використовують, зазвичай, інші методи. Для числових визначників найчастіше застосовують метод зведення до трикутного вигляду. Твердження 1.2.2 та 1.2.11 вказують, як змінюється визначник при елементарних перетвореннях рядків (відповідно, стовпчиків). Очевидно, що такими перетвореннями визначник можна звести до нижнього (відповідно, верхнього) трикутного вигляду, коли елементи під (відповідно, над) головною діагоналлю рівні нулю. Розглянемо такий визначник. З формули розкриття визначника за першим рядком випливають наступні рівності

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\alpha_{1,1} & 0 & 0 & 0\\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & 0 & 0\\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & 0\\ \alpha_{4,1} & \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4}\end{vmatrix} &= \alpha_{1,1}\begin{vmatrix}\alpha_{2,2} & 0 & 0\\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & 0\\ \alpha_{4,2} & \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4}\end{vmatrix}\\ &= \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\begin{vmatrix}\alpha_{3,3} & 0\\ \alpha_{4,3} & \alpha_{4,4}\end{vmatrix} = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}\alpha_{4,4}.\end{aligned}$$

Тобто, трикутний визначник дорівнює добутку своїх діагональних елементів.

Проілюструємо наведений вище метод кількома прикладами.

Приклад 2.1.7.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\boxed{1} & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix} &\overset{\substack{(2)_\mathrm{p}-(1)_\mathrm{p}\\(3)_\mathrm{p}-(1)_\mathrm{p}\\(4)_\mathrm{p}-(1)_\mathrm{p}}}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3\\ 0 & 2 & 5 & 9\\ 0 & 3 & 9 & 19\end{vmatrix} \overset{\substack{(3)_\mathrm{p}-2\cdot(2)_\mathrm{p}\\(4)_\mathrm{p}-3\cdot(2)_\mathrm{p}}}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3\\ 0 & 0 & 3 & 10\end{vmatrix}\\ &\overset{(4)_\mathrm{p}-4\cdot(3)_\mathrm{p}}{=} \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1.\end{aligned}$$

Відповідь: 1.

Приклад 2.1.8.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(2)_\text{р} \leftrightarrow (1)_\text{р}}{=} - \begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{(3)_\text{р} - 2\cdot(1)_\text{р} \\ (4)_\text{р} - 3\cdot(1)_\text{р}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & -5 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{(3)_\text{р} - 3\cdot(2)_\text{р} \\ (4)_\text{р} - 2\cdot(2)_\text{р}}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-10} & -14 \\ 0 & 0 & -9 & -15 \end{vmatrix} \overset{(4)_\text{р} - \frac{9}{10}\cdot(3)_\text{р}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -24/10 \end{vmatrix}$$

$$= -\Big(1 \cdot 1 \cdot (-10) \cdot (-24/10)\Big) = -24.$$

Оскільки елемент початкової матриці, що стоїть в першому рядку та першому стовпчику, рівний нулю, ми не могли обрати його в якості ведучого елемента. Цю перепону ми обійшли, помінявши місцями перший та другий рядок, що пояснює появу знаку “мінус”.
Відповідь: -24.

Зверніть увагу, що в попередньому прикладі, на останньому кроці ми були вимушені проводити обчислення з дробами. Цього можна було уникнути, як буде продемонстровано в наступних прикладах.

Іноді доцільно застосовувати таку модифікацію методу зведення до трикутного вигляду: після кожного кроку, такого, що в матриці утворюється рядок (стовпчик) з єдиним ненульовим елементом, розкривати визначник (див. теорему 1.2.1 та твердження 1.2.11) за цим рядком (стовпчиком). При такому підході ведучий елемент не обов’язково повинен обиратися на діагоналі.

Приклад 2.1.9.

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & \boxed{1} & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{(2)_{\text{ст}} + 5 \cdot (3)_{\text{ст}} \\ (4)_{\text{ст}} - 2 \cdot (3)_{\text{ст}}}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 27 & 4 & -7 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ -2 & 14 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 27 & -7 \\ 5 & 5 & 4 \\ -2 & 14 & -3 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник 3×3 можна було б обчислити за формулою Коші, проте ми продовжимо виконувати елементарні перетворення над рядками та/або стовпчиками. Маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 27 & -7 \\ 5 & 5 & 4 \\ -2 & 14 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{(1)_{\text{ст}} - (3)_{\text{ст}} \\ (2)_{\text{ст}} - (3)_{\text{ст}}}}{=} \begin{vmatrix} 9 & 34 & -7 \\ \boxed{1} & 1 & 4 \\ 1 & 17 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{(2)_{\text{ст}} - (1)_{\text{ст}} \\ (3)_{\text{ст}} - 4 \cdot (3)_{\text{ст}}}}{=} \begin{vmatrix} 9 & 25 & -43 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 16 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= \quad (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 25 & -43 \\ 16 & -7 \end{vmatrix} = -513.$$

Зауважте, що перше елементарне перетворення дало змогу отримати одиниці в другому рядку та уникнути операцій з дробами. Визначник 2×2 обчислено за формулою (2.1).

Відповідь: -513.

Перейдемо тепер до загальних методів обчислення визначників довільного порядку. Зрозуміло, що кожен з них може бути застосований і до визначників фіксованого порядку, але потужність цих методів як раз і полягає в тому, що вони дозволяють отримати замкнені формули (у вигляді функцій від порядку) для значення визначника. Жоден з цих методів не є універсальним і, мабуть, такого універсального методу не існує. Проте, ми маємо надію, що більшість визначників, які можуть зустрітись читачеві у прикладних задачах, можуть бути обчислені одним з наведених тут способів.

2.2 Методи обчислення визначників n-го порядку

Деякі методи, що були описані вище для визначників третього та четвертого порядків, можуть бути узагальнені на випадок визначників n-го порядку. Найпростішим з них є метод Гауса.

2.2.1 Метод Гауса.

Метод Гауса є узагальненням методу зведення до трикутного вигляду, описаного нами для визначників порядку 4.

Отже, нехай потрібно знайти визначник матриці $A = [\alpha_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n}$. Виконаємо наступну послідовність дій:

Крок 1. Якщо $n = 1$, то $\det A = \alpha_{1,1}$. Якщо $n > 1$, перейти на крок 2.

Крок 2. Обрати $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ так, що $\alpha_{i_0,1} \neq 0$. Якщо такого i_0 не існує, то $\det A = 0$.

Крок 3. Взявши $\alpha_{i_0,1}$ ведучим елементом, шляхом елементарних перетворень рядків, отримати нулі в першому стовпчику (зрозуміло, за вийнятком $\alpha_{i_0,1}$).

Крок 4. Розкрити визначник за першим стовпчиком, отриманий визначник порядку $n-1$ обчислювати, повернувшись до кроку 1.

Зауваження 2.2.1. З незмінності визначника при транспонуванні випливає можливість застосовувати наведений вище алгоритм також в термінах дій зі стовпчиками.

Приклад 2.2.2. Обчислити $\det A$, де $A = [\min(i, j)]_{1\leq i,j\leq n}$.

Маємо:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} \overset{\substack{(2)_\text{р}-(1)_\text{р} \\ (3)_\text{р}-(1)_\text{р} \\ \cdots \\ (n)_\text{р}-(1)_\text{р}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{(2)_\text{р}-(1)_\text{р} \\ (3)_\text{р}-(1)_\text{р} \\ \cdots \\ (n-1)_\text{р}-(1)_\text{р}}}{=} \ldots = 1.$$

Відповідь: 1.

Зауваження 2.2.3. Зауважимо, що зовсім не обов'язково понижувати порядок визначника щойно ми одержали рядок чи стовпчик всі елементи якого, за виключенням одного, дорівнюють нулю. Так за допомогою перестановок рядків та стовпчиків завжди можна розташувати перший ведучий елемент зліва згори (тобто на місці $(1,1)$) та за допомогою елементарних перетворень рядків звести визначник до блочно-трикутного вигляду

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Якщо матриця

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

містить хоча б один ненульовий елемент, за допомогою елементарних перетворень рядків та стовпчиків визначник (2.3) можна звести до вигляду

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha'_{1,2} & \alpha'_{1,3} & \cdots & \alpha'_{1,n} \\ 0 & \alpha'_{2,2} & \alpha'_{2,3} & \cdots & \alpha'_{2,n} \\ 0 & 0 & \alpha'_{3,3} & \cdots & \alpha'_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n,3} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Зрозуміло, що на деякому кроці ми одержимо визначник трикутного вигляду. Це зауваження пояснює іншу назву методу Гауса – метод зведення до трикутного вигляду.

Приклад 2.2.4.

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \boxed{1} \end{vmatrix} \\ \overset{\substack{(1)_{\text{р}}-(n)_{\text{р}} \\ (2)_{\text{р}}-(n)_{\text{р}} \\ \cdots \\ (n-1)_{\text{р}}-(n)_{\text{р}}}}{=} &\begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boxed{x-a_n} & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \\ \overset{\substack{(1)_{\text{ст}}-a_1\cdot(n+1)_{\text{ст}} \\ (2)_{\text{ст}}-a_2\cdot(n+1)_{\text{ст}} \\ \cdots \\ (n)_{\text{ст}}-a_n\cdot(n+1)_{\text{ст}}}}{=} &\begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_2-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = \quad &(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\cdot 1. \end{aligned}$$

Відповідь: $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$.

Метод елементарних перетворень.

Варіантом методу Гауса є метод елементарних перетворень рядків/стовпчиків. Його відмінністю від описаного вище методу є те, що виконуючи елементарні перетворення рядків/стовпчиків, ми не обов'язково прагнемо утворити нулі в рядку/стовпчику з ведучим елементом. Наша мета – виходячи зі структурних особливостей матриці під знаком визначника, певним чином спростити її. Найчастіше бувають корисними такі типи перетворень рядків/стовпчиків:

(П1) до одного з рядків/стовпчиків додати всі інші рядки/стовпчики;

(П2) від кожного рядка/стовпчика, починаючи з деякого, відняти попередній (або наступний), домножений на деяке число;

(П3) до кожного рядка/стовпчика, починаючи з першого, додати всі наступні;

Проілюструємо кожен з цих типів перетворень на прикладі.

Приклад 2.2.5 (перетворення типу П1).

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{П1}}{=} \begin{vmatrix} n+4 & n+4 & n+4 & \cdots & n+4 \\ 1 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (n+4) \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 5 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{(2)_\text{р}-(1)_\text{р} \\ (3)_\text{р}-(1)_\text{р} \\ \cdots \\ (n)_\text{р}-(1)_\text{р}}}{=} (n+4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{vmatrix} = (n+4)4^{n-1}.$$

На першому кроці ми додали всі рядки, починаючи з другого, до першого рядка.
Відповідь: $(n+4)4^{n-1}$.

Приклад 2.2.6 (перетворення типу П2).

$$\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ hx & h & -1 & \cdots & 0 \\ hx^2 & hx & h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \cdots & h \end{vmatrix} \overset{\text{П2}}{=} \begin{vmatrix} h & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h+x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & h+x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h+x \end{vmatrix} = h(h+x)^n.$$

На першому кроці від кожного рядка, починаючи з останнього, відняли попередній, домножений на x. Зверніть увагу, що порядок визначника дорівнює $n+1$. Тому у відповіді в показнику степеня маємо число n.
Відповідь: $h(h+x)^n$.

Приклад 2.2.7 (перетворення типу П3).

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ y_1 & -y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & -y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_n \end{vmatrix} \overset{\text{П3}}{=} \begin{vmatrix} x+\sum_{i=1}^n a_i & \sum_{i=1}^n a_i & \sum_{i=2}^n a_i & \cdots & a_n \\ 0 & -y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -y_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n(x+\sum_{i=1}^n a_i)y_1\cdots y_n.$$

На першому кроці до кожного зі стовпчиків додано всі наступні.
Відповідь: $(-1)^n(x+\sum_{i=1}^n a_i)y_1\cdots y_n$.

В складніших прикладах доводиться комбінувати перетворення типів П1-П3, або застосовувати їх декілька раз.

Приклад 2.2.8. Нехай $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальний коефіцієнт. Обчислити $\det([C_{i+j-2}^{j-1}]_{1\le i,j\le n})$. Для розв'язання цього прикладу нам знадобиться відома формула

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1, \ n \geq 1, \tag{2.4}$$

яку неважко одержати безпосередньо з означення C_n^k. Маємо:

$$\begin{aligned}
\Delta_n \quad &:= \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_1^0 & C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_n^{n-1} \\ C_2^0 & C_3^1 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^0 & C_n^1 & C_{n+1}^2 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&\overset{\Pi 2}{=} \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 - C_0^0 & C_2^2 - C_1^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} - C_{n-2}^{n-2} \\ C_1^0 & C_2^1 - C_1^0 & C_3^2 - C_2^1 & \cdots & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-2} \\ C_2^0 & C_3^1 - C_2^0 & C_4^2 - C_3^1 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} - C_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^0 & C_n^1 - C_{n-1}^0 & C_{n+1}^2 - C_n^1 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} - C_{2n-3}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&\overset{(2.4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_2^0 & C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_n^2 & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_2^1 & C_3^2 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^1 & C_n^2 & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&\overset{\Pi 2}{=} \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_2^1 - C_1^1 & C_3^2 - C_2^2 & \cdots & C_n^{n-1} - C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^1 - C_{n-2}^1 & C_n^2 - C_{n-1}^2 & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} - C_{2n-4}^{n-1} \end{vmatrix} \\
&\overset{(2.4)}{=} \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^2 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-2}^0 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-2}^0 & C_{n-1}^1 & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}.
\end{aligned}$$

В цьому ланцюжку перетворень: перше – від кожного зі стовпчиків, починаючи з останнього, відняли попередній; друге – різниці біноміальних коефіцієнтів згорнуті за формулою (2.4); третє – визначник розкладено за першим рядком; четверте – від кожного рядка, починаючи з останнього, відняли попередній; п'яте – ще одне застосування формули (2.4). Таким чином, $\Delta_n = \Delta_{n-1}$ для кожного $n \geq 2$. Враховуючи, що $\Delta_1 = 1$, маємо відповідь.
Відподідь: 1.

Вправи

Задача 2.2.9. За допомогою елементарних перетворень рядків та/або стовпчиків, довести

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{2}n^{n-1}. \tag{2.5}$$

2.2.2 Метод рекурентних співвідношень.

Рекурентні співвідношення скінченної глибини.

Нехай числова послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задана таким чином: для деякого фіксованого $m \in \mathbb{N}$ члени $a_1, a_2, \ldots, a_m$ задані явно, а члени a_k для $k > m$ задані формулою

$$a_k = f_k(a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots, a_{k-m}), \tag{2.6}$$

де $f_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $k > m$, фіксовані функції. Оскільки відображення f_k – функція, то вся послідовність $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ визначена однозначно. У цьому випадку кажуть, що послідовність (a_k) задовольняє рекурентне співвідношення m-го порядку (або задана рекурсією глибини m). Під *розв'язком* рекурсії (2.6) будемо розуміти послідовність $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, яка задовольняє (2.6) та кожен член якої заданий явно, тобто

$$a_k = \phi(k, m, a_1, \ldots, a_m), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Послідовності, задані рекурентними співвідношеннями, можна класифікувати за виглядом функцій $(f_k)_{k>m}$. Ми розглянемо лише найпростіші з них: лінійні рекурентні співвідношення першого та другого порядків.

Тип 1. Лінійне неоднорідне рекурентне співвідношення першого порядку зі змінними коефіцієнтами – це співвідношення вигляду (2.6) з $m = 1$ та функціями f_k, вигляду $f_k(x) = \alpha_k x + \beta_k$ для деяких α_k та β_k. Отже,

$$a_k = \alpha_k a_{k-1} + \beta_k, \quad k \geq 2, \tag{2.7}$$

а початкове значення a_1 відоме.

Для знаходження розв'язку рекурсії (2.7) використаємо техніку ітерації. В рівність $a_n = \alpha_n a_{n-1} + \beta_n$ підставимо вираз $a_{n-1} = \alpha_{n-1} a_{n-2} + \beta_{n-1}$, одержимо

$$a_n = \alpha_n(\alpha_{n-1} a_{n-2} + \beta_{n-1}) + \beta_n = \alpha_n \alpha_{n-1} a_{n-2} + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n.$$

В отриману рівність підставимо $a_{n-2} = \alpha_{n-2} a_{n-3} + \beta_{n-2}$:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha_n \alpha_{n-1}(\alpha_{n-2} a_{n-3} + \beta_{n-2}) + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n \\ &= \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} a_{n-3} + \alpha_n \alpha_{n-1} \beta_{n-2} + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n. \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес далі, на k-му кроці дістанемо

$$\begin{aligned} a_n &= \Big(\prod_{i=0}^{k} \alpha_{n-i}\Big) a_{n-k-1} + \Big(\prod_{i=0}^{k-1} \alpha_{n-i}\Big) \beta_{n-k} + \Big(\prod_{i=0}^{k-2} \alpha_{n-i}\Big) \beta_{n-k+1} \\ &+ \ldots + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n \\ &= \Big(\prod_{i=0}^{k} \alpha_{n-i}\Big) a_{n-k-1} + \sum_{j=0}^{k} \Big(\prod_{i=0}^{k-j-1} \alpha_{n-i}\Big) \beta_{n-k+j}. \end{aligned}$$

Зокрема, при $k = n - 2$, отримаємо

$$a_n = \Big(\prod_{i=0}^{n-2} \alpha_{n-i}\Big) a_1 + \sum_{j=0}^{n-2} \Big(\prod_{i=0}^{n-j-3} \alpha_{n-i}\Big) \beta_{2+j}.$$

або

$$a_n = a_1 \prod_{i=2}^{n} \alpha_i + \sum_{j=2}^{n} \Big(\prod_{i=j+1}^{n} \alpha_i\Big) \beta_j. \tag{2.8}$$

Зауважимо, що вище перехід від 2-го до k-го кроку є прикладом так званої “фізичної індукції”. Проте, завдяки цим міркуванням, ми одержали гіпотетичну формулу (2.8) для обчислення a_n, $n \in \mathbb{N}$.

Наведемо строге доведення формули (2.8). Для цього скористаємось методом математичної індукції. Очевидно, що ця формула справедлива для $n = 1$.[1]

Припустимо, що (2.8) має місце для $n = k$, тобто

$$a_k = a_1 \prod_{i=2}^{k} \alpha_i + \sum_{j=2}^{k} \Big(\prod_{i=j+1}^{k} \alpha_i\Big) \beta_j.$$

Тоді

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \alpha_{k+1}\Big(a_1 \prod_{i=2}^{k} \alpha_i + \sum_{j=2}^{k} \Big(\prod_{i=j+1}^{k} \alpha_i\Big) \beta_j\Big) + \beta_k \\ &= a_1 \prod_{i=2}^{k+1} \alpha_i + \sum_{j=2}^{k} \Big(\prod_{i=j+1}^{k+1} \alpha_i\Big) \beta_j + \beta_k = a_1 \prod_{i=2}^{k+1} \alpha_i + \sum_{j=2}^{k+1} \Big(\prod_{i=j+1}^{k+1} \alpha_i\Big) \beta_j, \end{aligned}$$

тому (2.8) справедлива для $n = k + 1$, отже, й для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Формула (2.8) дає загальний розв’язок лінійного рекурентного співвідношення першого порядку. Цікавими є окремі випадки цієї формули:

- якщо $\alpha_k = \alpha$ для всіх $k \geq 2$ (випадок лінійного рекурентного співвідношення першого порядку *з постійним коефіцієнтом*), то

$$a_n = a_1 \alpha^{n-1} + \sum_{j=2}^{n} \alpha^{n-j} \beta_j; \tag{2.9}$$

[1] Нагадаємо, що порожня сума та добуток за означенням рівні нулю та одиниці, відповідно. Тобто, $\sum_{k=m}^{n} x_k = 0$ та $\prod_{k=m}^{n} x_k = 1$ для $n < m$.

- якщо $\beta_k = 0$ для всіх $k \geq 2$ (випадок лінійного *однорідного* рекурентного співвідношення першого порядку), то

$$a_n = a_1 \prod_{i=2}^{n} \alpha_i \tag{2.10}$$

Тип 2. Лінійні однорідні рекурентні співвідношення другого порядку з постійними коефіцієнтами. Загальний вигляд такого рекурентного співвідношення:

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}, \ \ n > 2, \tag{2.11}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ – фіксовані коефіцієнти, а початкові значення a_1, a_2 – відомі.

Класичний спосіб розв'язання таких співвідношень – метод твірних функцій (див. [7]), але ми наведемо інший, елементарніший спосіб. Спробуємо підібрати $\lambda \in \mathbb{C}$ таке, що послідовність $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє співвідношення (2.11) (без урахування початкових значень). Підставивши λ^n замість a_n в (2.11) та поділивши на λ^{n-2}, отримаємо квадратне рівняння

$$\lambda^2 = \alpha\lambda + \beta, \tag{2.12}$$

яке називається *характеристичним* рівнянням лінійного рекурентного співвідношення (2.11). Покладемо $D := \alpha^2 + 4\beta$ та розглянемо три випадки:

- $D > 0$, тоді рівняння (2.12) має два різні дійсні розв'язки

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{D}}{2},$$

тому $(\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ та $(\lambda_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняють (2.11). Безпосередньою підстановкою можна переконатись, що довільна лінійна комбінація

$$C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \ \ n \in \mathbb{N} \tag{2.13}$$

задовольняє (2.11). Залишається підібрати константи C_1, C_2 так, щоб задовольнити початкові умови. Для цього треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = a_1, \\ C_1\lambda_1^2 + C_2\lambda_2^2 = a_2, \end{cases} \tag{2.14}$$

яка має єдиний розв'язок (перевірте це!).

- $D < 0$, тоді рівняння (2.12) має два комплексні корені

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2} = \sqrt{|\beta|}(\cos\phi \pm \mathrm{i}\sin\phi),$$

де $\phi \in [0, \pi)$, $\tan\phi = \frac{\sqrt{|D|}}{\alpha}$ при $\alpha \neq 0$ та $\phi = \pi/2$ при $\alpha = 0$.

Отже, послідовності $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ та $(\lambda_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняють (2.11). Побудуємо послідовності

$$a_n^{(1)} = \frac{\lambda_1^n + \lambda_2^n}{2}, \quad a_n^{(2)} = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{2\mathrm{i}},$$

які теж є розв'язками (2.11). Скористаємось формулою Муавра

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = \cos n\phi + \mathrm{i}\sin n\phi,$$

отримаємо

$$a_n^{(1)} = |\beta|^{\frac{n}{2}}\cos n\phi, \quad a_n^{(2)} = |\beta|^{\frac{n}{2}}\sin n\phi.$$

Послідовність

$$C_1 a_n^{(1)} + C_2 a_n^{(2)} = C_1|\beta|^{n/2}\cos n\phi + C_2|\beta|^{n/2}\sin n\phi, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.15}$$

теж задовольняє (2.11) для довільних $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Визначимо константи C_1, C_2. Початкові умови набудуть наступного вигляду

$$\begin{cases} C_1\alpha + C_2\sqrt{|D|} = 2a_1, \\ C_1(\alpha^2 - |D|) + 2C_2\alpha\sqrt{|D|} = 4a_2, \end{cases} \tag{2.16}$$

Залишається зауважити, що отримана система рівнянь завжди має єдиний розв'язок.

- $D = 0$, тоді $\beta = -\frac{\alpha^2}{4}$. Рівняння (2.12) має єдиний дійсний розв'язок

$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{2},$$

а співвідношення (2.11) приймає вигляд

$$a_n = \alpha a_{n-1} - \frac{\alpha^2}{4} a_{n-2}, \text{ або } a_n - \lambda_1 a_{n-1} = \lambda_1(a_{n-1} - \lambda_1 a_{n-2}), n > 2.$$

Покладемо $u_n := a_{n+1} - \lambda_1 a_n$, тоді

$$u_1 = a_2 - \lambda_1 a_1, \quad u_n = \lambda_1 u_{n-1}, n > 1.$$

Згідно формули (2.10) маємо

$$u_n = \Big(a_2 - \lambda_1 a_1\Big)\lambda_1^{n-1}, \;\; n \in \mathbb{N}$$

З означення u_n отримуємо

$$a_n = \lambda_1 a_{n-1} + \Big(a_2 - \lambda_1 a_1\Big)\lambda_1^{n-2}, \;\; n > 1.$$

Розв'язок цього рекурентного співвідношення знаходимо за допомогою формули (2.9).

$$a_n = \lambda_1^{n-2}\Big(a_1\lambda_1 + (a_2 - \lambda_1 a_1)(n-1)\Big), \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{2.17}$$

Підсумовуючи, розв'язок (2.11) задається

- формулою (2.13) у випадку $D > 0$;
- формулою (2.15) у випадку $D < 0$;
- формулою (2.17) у випадку $D = 0$.

У формулах (2.13) та (2.15) константи C_1, C_2 визначаються з систем лінійних рівнянь (2.14) та (2.16), відповідно.

Розглянемо приклади

Приклад 2.2.10. Знайти визначник порядку $2n$

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник за першим рядком, отримаємо

$$\Delta_{2n} \quad = \quad a \begin{vmatrix} a & \dots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & \dots & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{2n+1} b \begin{vmatrix} 0 & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \dots & a \\ b & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Отримані визначники порядку $2n-1$ розкладемо за останніми рядками. Дістанемо рекурентне співвідношення

$$\Delta_{2n} = (a^2 - b^2)\Delta_{2n-2} = (a^2 - b^2)\Delta_{2(n-1)},\ n \geq 2$$

з початковою умовою

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2.$$

Позначивши $a_n := \Delta_{2n}$, бачимо, що $a_n = (a^2 - b^2)a_{n-1}$ та $a_1 = a^2 - b^2$. Розв'язок цього рекурентного співвідношення дається формулою (2.10).

Відповідь: $\Delta_{2n} = (a^2 - b^2)^n$.

Приклад 2.2.11. Обчислити визначник

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Розкладемо за останнім стовпчиком

$$\Delta_n = a_n\Delta_{n-1} + (-1)^{n+2}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = a_n\Delta_{n-1} - a_1a_2\cdots a_{n-1},$$

де другий доданок розкладено за останнім рядком. Враховуючи початкову умову $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = -1$, з формули (2.8) отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_n &= (-1)a_2a_3\cdots a_n - \sum_{j=2}^{n}\Big(\prod_{i=j+1}^{n} a_i\Big)a_1a_2\cdots a_{j-1} \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j = -a_1a_2\cdots a_n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\Delta_n = -a_1a_2\cdots a_n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$.

Приклад 2.2.12. Обчислити:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розкривши Δ_n за останнім рядком, а потім визначник у другому доданку за останнім стовпчиком, отримаємо рекуренте співвідношення

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{2.18}$$

з початковими умовами $\Delta_1 = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$. Характеристичне рівняння (2.12) має вигляд $\lambda^2 = 2\lambda - 1$. Дискримінант цього рівняння рівний нулю, а єдиний корінь $\lambda_1 = 1$. Тому розв'язок (2.18) знаходиться за допомогою формули (2.17).

Відповідь: $\Delta_n = 5 + 4(n-1)$.

Приклад 2.2.13. Знайти

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Виконавши ті ж самі дії, що й в прикладі 2.2.12, отримаємо рекурентне співвідношення

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{2.19}$$

з початковими умовами $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Характеристичне рівняння (2.12) має вигляд $\lambda^2 = \lambda - 1$ та $D < 0$. Коренями цього рівняння є комплексні числа:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}.$$

Розв'язок (2.19) дається формулою (2.15), де $\phi = \pi/3$, а C_1, C_2 визначаються з системи (2.16), яка для заданого рекурентного співвідношення приймає вигляд

$$\begin{cases} C_1 + \sqrt{3}C_2 = 2, \\ -2C_1 + 2\sqrt{3}C_2 = 0 \end{cases}$$

та має розв'язок $C_1 = 1, C_2 = \sqrt{3}/3$.

Відповідь: $\Delta_n = \cos(\pi n/3) + \sqrt{3}/3 \sin(\pi n/3)$, або

$$\Delta_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \equiv 1 \pmod 6, \\ 0, & \text{якщо } n \equiv 2 \pmod 6, \\ -1, & \text{якщо } n \equiv 3 \pmod 6, \\ -1, & \text{якщо } n \equiv 4 \pmod 6, \\ 0, & \text{якщо } n \equiv 5 \pmod 6, \\ 1, & \text{якщо } n \equiv 0 \pmod 6. \end{cases}$$

2.2.3 Метод виділення лінійних множників.

Цей метод застосовується до визначників, що залежать від одного чи декількох параметрів. Припустимо, що необхідно обчислити визначник матриці $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$, де $a_{i,j} = a_{i,j}(x, y, z, \ldots, u, v, w)$ залежать від деякої кількості параметрів $x, y, z, \ldots, u, v, w$. Припустимо також, що для всіх i та j елемент матриці $a_{i,j}$ є поліномом з комплексними коефіцієнтами відносно кожної змінної. Очевидно, що тоді визначник $\det A$ буде також поліномом від змінних $x, y, z, \ldots, u, v, w$ (це випливає, наприклад, з формули Коші (1.14)). Ідея методу виділення лінійних множників полягає у наступному: розглянемо $\det A(x, y, z, \ldots, u, v, w)$ як многочлен $p_1(x)$, вважаючи решту змін параметрами. Спробуємо, використовуючи властивості визначника, знайти всі корені полінома $p_1(x) := \det A$. Нехай ці корені $x_1, x_2, \ldots, x_{\deg p_1}$, де через $\deg f(x)$ позначено степінь многочлена $f(x)$. Нагадаємо, що за основною теоремою алгебри, див. [3, с. 106] кількість комплексних коренів полінома, враховуючи кратності, дорівнює його степені. Тоді $\det A$ ділиться на добуток $\prod_{i=1}^{\deg p_1}(x - x_i)$ і частка не залежить від x. Це можна записати у вигляді рівності

$$\det A = Q_1(y, z, \ldots, u, v, w) \prod_{i=1}^{\deg p_1} (x - x_i(y, z, \ldots, u, v, w)), \tag{2.20}$$

де ми підкреслили той факт, що корені x_i можуть залежати від решти змінних $y, z, \ldots, u, v, w$. Тут Q_1 деякий поліном, що не залежить від x.

Розглянемо $Q_1(y, z, \dots, u, v, w)$ як многочлен $p_2(y)$. Його коренями будуть

$$y_j = y_j(z, \dots, u, v, w), \quad j = 1, \dots, \deg p_2(y)$$

такі, що

$$\det A(x, y_j, z, \dots, u, v, w) = 0, \text{для довільного} \quad x \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \det A &= Q_3(z, \dots, u, v, w) \prod_i (x - x_i(y, z, \dots, u, v, w)) \\ &\times \prod_j (y - y_j(z, \dots, u, v, w)), \end{aligned}$$

де поліном Q_3. не залежить ані від x, ані від y. Продовжуючи аналогічним чином прийдемо до формули

$$\begin{aligned} &\det A = C \prod_i (x - x_i(y, z, \dots, u, v, w)) \\ &\times \prod_j (y - y_j(z, \dots, u, v, w)) \cdots \prod_k (w - w_k), \end{aligned} \tag{2.21}$$

де w_k – числа , такі що $\det A(x, y, z, \dots, u, v, w_k) = 0$ для довільних значень змінних $x, y, z, \dots, u, v$ та C – деяка константа, яка не залежить від $x, y, z, \dots, u, v, w$. Знайти цю константу, як правило, нескладно.

Розглянемо декілька прикладів, що пояснюють, наведену вище ідею.

Приклад 2.2.14. Обчислити

$$\Delta(x, a, b, c) = \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що функція $p_1(x) = \Delta(x, a, b, c)$ є поліномом від змінної x не вище четвертого степеня для фіксованих a, b, c. Знайдемо корені цього полінома. Якщо до першого рядка додати решту рядків та покласти

$x = a+b+c$, то перший рядок буде містити лише нулі. Тому $x = a+b+c$ є коренем $p_1(x)$. Якщо від першого рядка відняти другий та четвертий, додати третій та покласти $x = b-c-a$, то побачимо, що $x = b-c-a$ є коренем $p_1(x)$. Третій корінь $x = a-b-c$ отримуємо, додавши до першого рядка другий та віднявши третій та четвертий. Четвертий корінь $x = c-a-b$ знаходиться аналогічно. Отже, згідно з (2.20), можна записати

$$\Delta(x, a, b, c) = Q(a, b, c)(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x-b+a+c)(x-c+a+b). \tag{2.22}$$

Спробуємо знайти $Q(a, b, c)$, прирівнявши коефіцієнти при x^4. Очевидно, що коефіцієнт при x^4 в $\Delta(x, a, b, c)$ рівний 1 (єдиним доданком в розкладі за формулою Коші, див. (1.14), визначника $\Delta(x, a, b, c)$, який містить x^4 буде добуток діагональних елементів). Коефіцієнт при x^4 у правій частині (2.22), очевидно дорівнює $Q(a, b, c)$, тому $Q(a, b, c) = 1$.
Відповідь: $\Delta(x, a, b, c) = (x-a-b-c)(x-a+b+c)(x-b+a+c)(x-c+a+b)$.

У попередньому прикладі всі корені визначника від змінної x були різними. У випадку кратних коренів корисною є наступна

Лема 2.2.15. *Нехай $A(x)$ – матриця розміру $n \times n$, елементами якої є поліноми від змінної x. Для довільного фіксованого $x_0 \in \mathbb{C}$ покладемо $m(x_0) := n - \mathbf{rank}\, A(x_0)$, тоді кратність x_0 як кореня $\det A(x)$ не менша ніж $m(x_0)$.*

Доведення. Нехай $x_0 \in \mathbb{C}$ є коренем $\det A(x)$. Покладемо $m = m(x_0)$. З означення m випливає, що серед векторів, утворених рядками матриці $A(x_0)$, є рівно $n-m$ лінійно незалежних, а інші m рядків з номерами, скажімо, $i_1, i_2, \ldots, i_m$, лінійно виражаються через них. Тому існує матриця C така, що $\det C \neq 0$, а рядки $i_1, i_2, \ldots, i_m$ матриці $CA(x_0)$ нульові. Дійсно, за допомогою послідовності елементарних перетворень рядків матриці $A(x_0)$ на місці рядків з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_m$ можна отримати нулі. Нехай першому з цих перетворень відповідає елементарна матриця E_1, другому –

E_2, і так далі, останньому – елементарна матриця E_k. Тоді (див. Додаток 4.5.2)

$$C = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1.$$

Розглянемо матричні елементи $a_{ij}(x)$ матриці $A(x)$. Подамо поліноми $a_{ij}(x) \in \mathbb{C}[x]$ у наступному вигляді (згадайте теорему Безу)

$$a_{ij}(x) = a_{ij}(x_0) + (x - x_0)b_{ij}(x), \quad b_{ij}(x) \in \mathbb{C}[x], \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тоді

$$A(x) = A(x_0) + (x - x_0)B(x), \tag{2.23}$$

де елементами матриці $B(x)$ є поліноми від x. З рівності (2.23) та теореми про добуток визначників, теорема 1.2.13, випливає, що

$$\det(A(x)) = \det C \det(A(x_0) + (x - x_0)B(x)) = \det(CA(x_0) + (x - x_0)CB(x)).$$

Залишилось помітити, що рядки $i_1, i_2, \ldots, i_m$ матриці, яка стоїть під знаком останнього визначника діляться на $x - x_0$. Винісши m множників $x - x_0$ за знак визначника, отримаємо твердження леми. □

З врахуванням наведеної леми, наступний приклад майже тривіальний.

Приклад 2.2.16. Знайти

$$\Delta(x, a) = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Нехай $p(x) = \Delta(x, a)$, тоді $\deg p = n$. Легко бачити, що коренями p є, зокрема, числа a (очевидно) та $(1 - n)a$ (додайте всі рядки до першого). З леми 2.2.15 випливає, що кратність кореня a не менша ніж $n - 1$. З іншого боку, очевидно, що його кратність не більша ніж $n - 1$. Тому

$$\Delta(a, x) = C(a)(x + (n - 1)a)(x - a)^{n-1}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при x^n, отримаємо $C(a) = 1$.

Відповідь: $\Delta(a, x) = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$.

Приклад 2.2.17. Знайти

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \cdots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \cdots & a^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \cdots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}.$$

Зрозуміло, що $\Delta(x)$ є поліномом степеня n з старшим коефіцієнтом $(-1)^n$, а $x = 0$ є його коренем кратності $n-1$ (див. лему 2.2.15). Залишається знайти ще один корінь. Позначимо його $r(a)$, тоді

$$\Delta(x) = (-1)^n x^{n-1}(x - r(a)). \tag{2.24}$$

Записавши формулу Коші (1.14) для $\Delta(x)$, бачимо, що всі доданки в ній, за вийнятком добутку діагональних елементів, є поліномами степеня не вище $n-2$. Тому коефіцієнт полінома $\Delta(x)$ при x^{n-1} співпадає з відповідним коефіцієнтом добутку $(1-x)(a^2-x)\cdots(a^{2n-2}-x)$. Останній дорівнює $(-1)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} a^{2i}$. Враховуючи формулу (2.24), отримуємо $r(a) = \sum_{i=0}^{n-1} a^{2i} = \frac{a^{2n}-1}{a^2-1}$.

Відповідь: $\Delta(x) = (-1)^n x^{n-1}\left(x - \frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right)$.

Інші приклади застосування можна знайти у підрозділах 2.3.1 та 2.3.2, де метод виділення лінійних множників застосовується для обчислення деяких спеціальних визначників.

Вправи

Обчислити визначники методом виділення лінійних множників:

Задача 2.2.18. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$.

Задача 2.2.19. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Задача 2.2.20. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.[2]

2.2.4 Методи, що грунтуються на теоремі Лапласа.

В першому розділі ми розглянули формули розкладу визначника за довільним рядком (стовпчиком). Виявляється, що ці формули є окремими випадками загального твердження, що носить назву *теореми Лапласа про розклад визначника*.

Теорема 2.2.21. *Нехай в матриці $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ вибрано довільним чином k рядків з номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, тоді*

$$\det A = \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n} (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \overline{M}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}, \qquad (2.25)$$

де
$M^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ *– визначник побудований на рядках $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ та стовпчиках $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ матриці A (мінор);*
$\overline{M}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ *– визначник, отриманий викресленням рядків $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ та стовпчиків $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ з матриці A (доповнюючий мінор).*

Зауваження 2.2.22. Аналогічне твердження має місце й для стовпчиків: якщо в матриці $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ вибрано довільним чином k стовпчиків з номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, тоді

$$\det A = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} M^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \overline{M}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}. \qquad (2.26)$$

[2]Цей приклад показує, що твердження обернене до леми 2.2.15 в загальному випадку невірне.

Доведення. Для довільного фіксованого набору рядків

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$$

позначимо номери всіх інших рядків $i_{k+1} < i_{k+2} < \ldots < i_n$, введемо аналогічне позначення для стовпчиків.

Доведемо формулу (2.25). Позначимо праву частину цієї формули D та підставимо в неї замість $M_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ та $\overline{M}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{j_1,j_2,\ldots,j_k}$ розклади цих визначників за формулою Коші, тоді

$$\begin{aligned} D &= \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_k\le n} (-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k} \\ &\times \Big(\sum_{(\xi_1,\ldots,\xi_k)} (-1)^{Inv(\xi_1,\ldots,\xi_k)} a_{i_1,\xi_1} a_{i_2,\xi_2} \cdots a_{i_k,\xi_k} \Big) \\ &\times \Big(\sum_{(\xi_{k+1},\ldots,\xi_n)} (-1)^{Inv(\xi_{k+1},\ldots,\xi_n)} a_{i_{k+1},\xi_{k+1}} a_{i_{k+2},\xi_{k+2}} \cdots a_{i_n,\xi_n} \Big), \end{aligned}$$

де перша внутрішня сума береться за всіма перестановками $(\xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_k)$ множини $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, друга – за перестановками $(\xi_{k+1}, \xi_{k+2} \ldots, \xi_n)$ множини $\{j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n\}$. Потрійне сумування в цьому виразі еквівалентне сумуванню за всіма перестановками $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ множини $\{1, 2, \ldots, n\}$. Нагадаємо, що множину всіх перестановок на n елементах позначають через $\mathfrak{S}_n$. Дійсно, розглянемо довільну перестановку

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2} \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{S}_n.$$

Поставимо їй у відповідність набори $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, $(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n)$ та

$$(j_1, j_2, \ldots, j_k), \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k,$$

що є впорядкуванням набору $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ за зростанням елементів. В цьому випадку $(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n)$ є перестановкою доповнюючого набору

$$(j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n), \quad j_{k+1} < j_{k+2} < \cdots < j_n.$$

Зрозуміло, що навпаки набір

$$(j_1, j_2, \ldots, j_k), \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_k,$$

його перестановка $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ разом з перестановкою $(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n)$ доповнюючого набору $(j_{k+1}, j_{k+2}, \ldots, j_n)$ визначають перестановку

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{S}_n$$

та відповідність

$$\mathfrak{S}_n \ni \xi \leftrightarrow \{(j_1, \ldots, j_k),\ (\xi_1, \ldots, \xi_k),\ (\xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)\}$$

є взаємно однозначною.

Отже,

$$D = \sum_{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{Inv(i_1, \ldots, i_n) + Inv(\xi_1, \ldots, \xi_n)} a_{i_1, \xi_1} a_{i_2, \xi_2} \cdots a_{i_n, \xi_n}, \tag{2.27}$$

де використано, що

$$Inv(i_1, i_2 \ldots, i_n) = (i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \ldots + (i_k - k), \tag{2.28}$$

коли $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ та $i_{k+1} < i_{k+2} < \ldots < i_n$, а також

$$\begin{aligned} Inv(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) &= Inv(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) + Inv(\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n) \\ &+ (j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \ldots + (j_k - k). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Дійсно, в перестановці $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n)$, де $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ та $i_{k+1} < i_{k+2} < \ldots < i_n$ пара (i_s, i_r), $s < r$, може утворювати інверсію лише коли $s = 1, \ldots, k$ та $r = k + 1, \ldots, n$. Зрозуміло, що i_1 утворює інверсію з $i_1 - 1$-м елементом (це кількість усіх натуральних чисел менших за i_1). Елемент i_2 буде утворювати інверсію з усіма числами, меншими ніж i_2, окрім i_1. Отже, кількість елементів, з якими утворює івнерсію i_2 дорівнює $i_2 - 2$. І так далі, i_k утворює інверсію з усіма елементами меншими за нього, окрім $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$. Кількість таких елементів дорівнює $i_k - k$.

Аналогічно, в правій частині рівності (2.29) маємо кількість інверсій в наборі $(\xi_1, \dots, \xi_k)$, кількість інверсій в наборі $(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ та, в останньому доданку, кількість інверсій, що утворюють пари (ξ_s, ξ_r), де $s = 1, \dots, k$ та $r = k+1, \dots, n$ (нагадаємо, що набір $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ є перестановкою набору $(j_1, \dots, j_k)$, $j_1 < j_2 < \dots < j_k$).

Залишилось помітити, що права частина формули (2.27) є розкладом (за формулою Коші) для $\det A$, отже, $D = \det A$. Доведення завершено. □

Теорему Лапласа зручно застосовувати для обчислення визначників матриць з нульовими блоками, як у наступному прикладі.

Приклад 2.2.23. Обчислити

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & -1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 9 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Застосуємо формулу (2.26) з $k = 2$, $j_1 = 5$ та $j_2 = 6$. Єдиний ненульовий мінор другого порядку, побудований на стовпчиках j_1, j_2 має вигляд $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$. Тому формула (2.26) містить тільки один доданок, що відповідає індексам $i_1 = 1$ та $i_2 = 2$. Отже,

$$\Delta = (-1)^{1+2+5+6} \times (-5) \times \begin{vmatrix} 5 & -5 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник четвертого порядку знову має нульовий блок, тому його також зручно обчислювати за допомогою теореми Лапласа:

$$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 85 \times (-16) = -1760.$$

Відповідь: $\Delta = 8800$.

Приклад 2.2.24. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,2n-2} & a_{1,2n-1} & a_{1,2n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} & 0 \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & a_{2n,3} & \cdots & a_{2n,2n-2} & a_{2n,2n-1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

порядку $2n$.

Як і в попередньому прикладі, застосуємо формулу (2.26), з $k = 2$, $j_1 = 1$ та $j_2 = 2n$. Єдиним ненульовим мінором другого порядку, побудованим на стовпчиках j_1, j_2 буде $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2n} \\ a_{2n,1} & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$. Тому

$$\Delta = (a_{1,1}a_{2n,2n} - a_{1,2n}a_{2n,1}) \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} \\ 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,2n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{2n-2,3} & \cdots & a_{2n-2,2n-2} & 0 \\ a_{2n-1,2} & a_{2n-1,3} & \cdots & a_{2n-1,2n-2} & a_{2n-1,2n-1} \end{vmatrix}.$$

Отриманий визначник порядку $2n - 2$ можна обчислити аналогічно.

Відповідь: $\Delta = \prod_{i-1}^{n}(a_{i,i}a_{2n+1-i,2n+1-i} - a_{i,2n+1-i}a_{2n+1-i,i})$.

Вправи

Обчислити визначники:

Задача 2.2.25.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 2.2.26.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \\ c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Задача 2.2.27. Нехай A, B, C, D – визначники третього порядку, отримані з матриці

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

викресленням відповідно першого, другого, третього та четвертого стовпчиків. Довести, що

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC.$$

Задача 2.2.28. Нехай в матриці $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ є прямокутний нульовий блок розміру $m \times l$ та $m + l > n$. Довести, що $\det A = 0$.

2.2.5 Визначники блочних матриць

Нехай матриця $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ розбита на m^2 прямокутних блоків так, що i-ий по горизонталі та j-ий по вертикалі блок $B_{i,j}$ має розмір $k_i \times k_j$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Якщо для всіх пар (i, j), де $i > j$ $(i < j)$ блок $B_{i,j}$ нульовий, то матриця називається верхньою (нижньою) блочно-трикутною[3]. З теореми Лапласа випливає наступний факт, що дозволяє знаходити визначники таких матриць. Цей факт узагальнює твердження про визначник трикутної матриці.

Твердження 2.2.29. *Визначник блочно-трикутної матриці дорівнює добутку визначників діагональних блоків,* $\det A = \prod_{i=1}^{m} \det B_{i,i}$.

[3]Зауважимо, що в цьому означенні вимагається, щоб блоки, які стоять на діагоналі, були квадратними.

Приклад 2.2.30. З твердження 2.2.29 випливає, що

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & c_{1,1} & a_{1,2} & c_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & c_{1,n} \\ 0 & b_{1,1} & 0 & b_{1,2} & \cdots & 0 & b_{1,n} \\ a_{2,1} & c_{2,1} & a_{2,2} & c_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & c_{2,n} \\ 0 & b_{2,1} & 0 & b_{2,2} & \cdots & 0 & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & c_{n,1} & a_{n,2} & c_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & c_{n,n} \\ 0 & b_{n,1} & 0 & b_{n,2} & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

де перша рівність отримана парною кількістю перестановок рядків та стовпчиків.

Використовуючи твердження 2.2.29, можна довести таку теорему.

Теорема 2.2.31 (Матрична теорема Сильвестра)**.** *Нехай* $A \in M_{p,n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{F})$, E_j *– одинична матриця порядку* j. *Тоді*

$$\det(E_p + AB) = \det(E_n + BA).$$

Доведення. Розглянемо блочну матрицю

$$M = \begin{pmatrix} E_p & -A \\ B & E_n \end{pmatrix}.$$

Мають місце наступні розклади матриці M в добуток

$$M = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p & -A \\ 0 & E_n + BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p + AB & -A \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ B & E_n \end{pmatrix}.$$

З твердження 2.2.29 та теореми про добуток визначників випливає, що

$$\det M = \begin{vmatrix} E_p & 0 \\ B & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_p & -A \\ 0 & E_n + BA \end{vmatrix} = \det(E_n + BA)$$

та

$$\det M = \begin{vmatrix} E_p + AB & -A \\ 0 & E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_p & 0 \\ B & E_n \end{vmatrix} = \det(E_p + AB).$$

Доведення завершено. □

Наслідок 2.2.32 (Матрична лема про визначники). Нехай A – невироджена квадратна матриця $n \times n$, u, v – вектори-стовпчики довжини n, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t$ Тоді

$$\det(A + uv^t) = (1 + v^t A^{-1} u) \det A.$$

Доведення. Зауважимо, що

$$uv^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

та добуток

$$v^t A^{-1} u = (v_1, v_2, \ldots, v_n) A^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \le i,j \le n} b_{ij} v_i u_j,$$

де $A^{-1} = [b_{ij}]_{1\le i,j\le n}$.

З теореми про добуток визначників маємо

$$\det(A + uv^t) = \det\big(A(E_n + A^{-1}uv^t)\big) = \det A \det(E_n + A^{-1}uv^t).$$

Застосувавши теорему 2.2.31 для матриць $A^{-1}u \in M_{n,1}(\mathbb{F})$, $v^t \in M_{1,n}(\mathbb{F})$, одержимо

$$\det(E_n + (A^{-1}u)v^t) = \det\big(E_1 + v^t(A^{-1}u)\big) = 1 + v^tA^{-1}u,$$

що завершує доведення леми. $\square$

Приклад 2.2.33. Обчислити $\det M$, де

$$M = \begin{pmatrix} x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \cdots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & 1 + x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$

Тоді $M = AB - E_n$, та

$$\begin{aligned} \det M &= \det(AB - E_n) = (-1)^n \det(E_n + (-A)B) \\ &= (-1)^n \det(E_2 + B(-A)) = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 - n & -\sum_{i=1}^n x_i \\ -\sum_{i=1}^n y_i & 1 - \sum_{i=1}^n x_iy_i \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n\Big((1-n)(1 - \sum_{i=1}^n x_iy_i) - \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big)\Big), \end{aligned}$$

де третя рівність випливає з теореми 2.2.31.

Розглянемо визначник блочної матриці загального вигляду. Нехай M матриця розміру $nN \times nN$, що розбита на N^2 блоків розміру $n \times n$:

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,N} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \cdots & A_{N,N} \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Природним чином постає питання: за яких умов

$$\det M = \det \Big(\sum_{\sigma=(i_1,i_2,\dots,i_n)\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma A_{1,i_1} A_{2,i_2} \cdots A_{N,i_N} \Big)? \tag{2.31}$$

Наприклад, чи вірно, що для квадратних матриць A, B, C, D розміру $n \times n$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)? \tag{2.32}$$

Перш за все зауважимо, що в силу некомутативності множення матриць, чотири матриці $AD - BC$, $DA - BC$, $AD - CB$ та $DA - CB$ в загальному випадку є попарно різними. Тому *a priori* незрозуміло, чому має бути вірною формула (2.32), а не, скажімо

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(DA - CB).$$

Аналогічне зауваження справедливе і для загальної формули (2.31).

Отже, природною є вимога попарної перестановності матриць $A_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, N$. Виявляється, що ця умова є достатньою для справедливості формули (2.31).

Теорема 2.2.34. *Нехай матриця M розбита на квадратні блоки згідно* (2.30)*. Якщо блоки $A_{i,j}$ попарно комутують, тобто*

$$A_{ij}A_{kl} = A_{kl}A_{ij}, \quad \text{для} \quad i, j, k, l = 1, \dots, N,$$

то виконується формула (2.31)*.*

Доведення. Ми доведемо твердження теореми для $N = 2$ в випадку, коли поле $\mathbb{F}$ містить нескінченну кількість елементів. Розгляд загального випадку можна знайти у статті [22]. Нехай

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in M_n(\mathbb{C})$$

та A, B, C, D попарно комутують. Має місце рівність

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ CD - DC & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Знайдемо визначник лівої та правої частин цієї рівності. За допомогою твердження 2.2.29 та теореми про добуток визначників 1.2.13, отримаємо

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \det D = \det(AD - BC) \det D.$$

Якщо $\det D \neq 0$, доведення завершено.

Припустимо, що $\det D = 0$. Оскільки функція

$$f(\lambda) = \det(D + \lambda E_n)$$

є многочленом степеня n, існує не більше n різних чисел $\lambda \in \mathbb{F}$ таких, що

$$\det(D + \lambda E_n) = 0.$$

Отже, можна розглянути нескінченну послідовність попарно різних чисел $(\lambda_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{F}$ таку, що

$$\det(D + \lambda_m E_n) \neq 0, \quad \text{для всіх } m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, що з попарної перестановності матриць A, B, C, D випливає попарна перестановність матриць A, B, C, $D + \lambda_m E_n$ для довільного натурального m. Оскільки $\det(D + \lambda_m E_n) \neq 0$, за доведеним вище

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \lambda_m E_n \end{pmatrix} = \det(A(D + \lambda_m E_n) - BC), \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.33}$$

Розглянемо функції

$$G(\lambda) = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \lambda E_n \end{pmatrix}, \quad H(\lambda) = \det(A(D + \lambda E_n) - BC).$$

Зауважимо, що $G(\lambda)$ та $H(\lambda)$ є многочленами степеня n з коефіцієнтами, які належать полю $\mathbb{F}$. Оскільки, згідно (2.33)

$$G(\lambda_m) = H(\lambda_m), \quad \text{для всіх} \quad \lambda_m,\ m \in \mathbb{N},$$

та $\lambda_r \neq \lambda_s$ для різних $r, s \in \mathbb{N}$, многочлени $G(\lambda)$ та $H(\lambda)$ тотожньо рівні (нагадаємо, якщо значення двох многочленів степеня n збігаються в більш ніж n точках, ці многочлени тотожньо рівні, див. нижче лему 2.3.5, а також [3, с. 93]). Таким чином, $G(\lambda) = H(\lambda)$ для довільного $\lambda \in \mathbb{F}$. Зокрема

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = G(0) = H(0) = \det(AD - BC).$$

□

Зауваження 2.2.35. З доведення видно, що у випадку $N = 2$ для виконання формули (2.32) досить комутації лише матриць C та D.

Задача 2.2.36. Нехай $a_i \neq 0$ для всіх $i = 1, \ldots, n$. Використовуючи наслідок 2.2.32, обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} x + a_1 & x & \cdots & x \\ x & x + a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & x + a_n \end{vmatrix}.$$

Чи зміниться відповідь, якщо серед чисел a_i є нулі?

2.2.6 Диференціювання визначників і диференціально-різницевий метод їх обчислення.

Протягом цього розділу ми розглядатимемо матриці, елементами яких є гладкі функції дійсного аргументу. Нехай задана така матриця $M(x) =$

$[m_{i,j}(x)]_{1\le i,j,\le n}$. З формули Коші випливає, що функція $x \mapsto \det M(x)$ є диференційовною як скінченна сумма добутків диференційовних функцій. Має місце наступна формула для знаходження похідної $\det M(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,(\det M(x))}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} \det M_i(x), \tag{2.34}$$

де

$$M_i(x) := \begin{pmatrix} m_{1,1}(x) & m_{1,2}(x) & m_{1,3}(x) & \cdots & m_{1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i-1,1}(x) & m_{i-1,2}(x) & m_{i-1,3}(x) & \cdots & m_{i-1,n}(x) \\ m'_{i,1}(x) & m'_{i,2}(x) & m'_{i,3}(x) & \cdots & m'_{i,n}(x) \\ m_{i+1,1}(x) & m_{i+1,2}(x) & m_{i+1,3}(x) & \cdots & m_{i+1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1}(x) & m_{n,2}(x) & m_{n,3}(x) & \cdots & m_{n,n}(x) \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Доведення формули (2.34). Розкладемо $\det M(x)$ за формулою Коші. Використовуючи правило диференціювання добутку, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\det M(x))}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{\sigma=(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma\ m_{1,k_1}(x)m_{2,k_2}(x)\cdots m_{n,k_n}(x)\Big) \\ &= \sum_{\sigma=(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\ m_{1,k_1}(x)m_{2,k_2}(x)\cdots m_{n,k_n}(x)\Big) \\ &= \sum_{\sigma=(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma\Big(\sum_{j=1}^{n} m_{1,k_1}(x)\cdots m_{j-1,k_j}(x)m'_{j,k_j}(x)\times \\ &\qquad \times m_{j+1,k_{j+1}}(x)\cdots m_{n,k_n}(x)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\ \sum_{\sigma=(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma\Big(m_{1,k_1}(x)\cdots m_{j-1,k_j}(x)m'_{j,k_j}(x)\times \\ &\qquad \times m_{j+1,k_{j+1}}(x)\cdots m_{n,k_n}(x)\Big) = \sum_{j=1}^{n}\det M_j(x). \end{aligned}$$

$\square$

Зауваження 2.2.37. Позначимо рядки матриці $M(x)$ через $m_i(x)$:

$$m_i(x) = (m_{i,1}(x), m_{i,2}(x), \dots, m_{i,n}(x)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Нагадаємо, що ми можемо розглядати $\det M(x)$ як полілінійну та кососиметричну функцію рядків $\det M(x) = D(m_1(x), m_2(x), \dots, m_n(x))$. Тоді формула диференціювання визначника набуває наступного вигляду:

$$\frac{\mathrm{d}(\det M(x))}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{n} D\big(m_1(x), \dots, m_{i-1}(x), m_i'(x), m_{i+1}(x), \dots, m_n(x)\big), \tag{2.36}$$

де $m_i'(x) = (m_{i,1}'(x), m_{i,2}'(x), \dots, m_{i,n}'(x))$.

В такому вигляді формула є аналогом формули Лейбніца диференціювання добутку функцій. Нагадаємо, що з формули Лейбніца випливає наступна формула для знаходження k-ї похідної від добутку функцій (див. [11, п. 117].

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big(f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)\big) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_s=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_s!} f_1^{(i_1)}(x) f_2^{(i_2)}(x)\cdots f_s^{(i_s)}(x), \tag{2.37}$$

де сума береться за всіма можливими наборами чисел

$$(i_1, i_2, \dots, i_s) \in \{0, 1, 2, \dots, n\}^s, \quad i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n.$$

За допомогою формули (2.36) можна одержати аналог формули (2.37) для знаходження похідної порядку k від $\det M(x)$.

Твердження 2.2.38. *Нехай елементи матриці $M(x) = [m_{ij}(x)]_{1\le i,j\le n}$ є нескінченно диференційовними функціями. Позначимо рядки $M(x)$ через $m_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, . Тоді*

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\Big(\det M(x)\Big) = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!} D(m_1^{(i_1)}(x), m_2^{(i_2)}(x), \dots, m_n^{(i_n)}(x)), \tag{2.38}$$

де всі індекси сумування $i_r \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Доведення. Доведення цього твердження повторює доведення формули (2.37), ми радимо читачеві провести доведення самостійно. □

Означення 2.2.39. Розглянемо матрицю $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{F})$. Визначник

$$\det(A - xE_n) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - x & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - x & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} - x \end{vmatrix}$$

називається характеристичним многочленом матриці A та позначається нижче через $\chi_A(x)$.

З формули Коші випливає, що

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n-k} x^{n-k}, \quad \alpha_s \in \mathbb{F},\ s = 0, \ldots, n-1.$$

Очевидно, що $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det A$. Припустимо, що $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. За допомогою формули диференціювання визначника можна знайти, як решта коефіцієнтів α_s виражається через елементи матриці A. Дійсно, в цьому випадку

$$\alpha_k = \frac{\chi_A^{(k)}(x)}{k!}, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Перш ніж ми сформулюємо твердження, нагадаємо означення діагональних мінорів визначника.

Означення 2.2.40. Розглянемо матрицю $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{F})$. Зафіксуємо набір $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. Мінор $M^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, що утворений елементами перетину рядків та стовпчиків, номери яких належать множині $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, будемо називати **діагональним мінором** порядку k матриці A.

Розглянемо стандартний базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору рядків $\mathbb{F}^n$. Позначимо через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рядки матриці A. Зафіксуємо набір

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n.$$

Покладемо $b_s = a_s$, для $s \in \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ та $b_s = e_s$, для $s \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Тоді, очевидно

$$M_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{i_1,i_2,\ldots,i_k} = D(b_1, b_2, \ldots, b_n). \tag{2.39}$$

Тобто, щоб одержати діагональний мінор $M_{i_1,i_2,\ldots,i_k}^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$, треба в $\det A$ всі рядки, номери яких належать набору $i_{k+1} < i_{k+2} < \cdots < i_n$, доповнюючому до $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, замінити на $e_{i_{k+1}}, e_{i_{k+2}}, \ldots, e_{i_n}$.

Приклад 2.2.41. Якщо

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix},$$

то $M_{1,3}^{1,3} = D(a_1, e_2, a_3, e_4)$.

Повернемось до задачі пошуку коефіцієнтів характеристичного многочлена.

Твердження 2.2.42. *Нехай*

$$\det(A - xE_n) = \chi_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

характеристичний многочлен матриці $A = [a_{ij}]_{1\le i,j\le n}$. *Тоді для кожного* $k = 1, \ldots, n$

$$\alpha_k = \frac{\chi_A^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_{n-k}\le n} M_{j_1,j_2,\ldots,j_{n-k}}^{j_1,j_2,\ldots,j_{n-k}}. \tag{2.40}$$

Тобто α_k, *з точністю до знаку, дорівнює сумі всіх діагональних мінорів матриці* A *розміру* $n - k$.

Доведення. Як було зазначено вище, $\alpha_0 = \chi_A(0) = \det A$, тобто дорівнює єдиному діагональному мінору A порядку n, що відповідає формулі (2.40).

Доведемо результат для довільного $k = 1, \ldots, n-1$. Розглянемо систему рядків $a_1, \ldots, a_n$ матриці A. Позначимо через $b_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, рядки матриці $A - xE_n$:

$$b_i(x) = a_i - xe_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,i-1}, a_{i,i} - x, a_{i,i+1}, \ldots, a_{i,n}).$$

Очевидно, що

$$b_i'(x) = (0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0) = -e_i, \quad b_i^{(k)}(x) = \mathbf{0}, \ k > 1. \tag{2.41}$$

Далі, за формулою (2.38) одержимо

$$\begin{aligned} \chi_A^{(k)}(x) &= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \det(A - xE_n) \qquad (2.42)\\ &= \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} \frac{k!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} D(b_1^{(i_1)}(x), b_2^{(i_2)}(x), \ldots, b_n^{(i_n)}(x)). \end{aligned}$$

З властивостей (2.41) випливає, що у формулі (2.42) ненульовими є лише доданки, які відповідають наборам $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$,

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k, \quad \text{де кожен} \quad i_s \in \{0, 1\}, \ s = 1, \ldots, n.$$

Очевидно, що для такого набору

$$\frac{k!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} = k!,$$

та кожен такий набір визначається номерами $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k} \le n$ для яких

$$i_s = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad s \in \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\} \\ 1, & \text{коли} \quad s \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\}. \end{cases} \tag{2.43}$$

Отже,

$$\chi_A^{(k)}(x) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k} \le n} k!\, D(b_1^{(i_1)}(x), b_2^{(i_2)}(x), \ldots, b_n^{(i_n)}(x)), \tag{2.44}$$

де кожен набір $(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n$ визначається відповідним набором $(j_1, j_2, \ldots, j_{n-k})$ за допомогою (2.43). Таким чином,

$$b_s^{(i_s)}(x) = \begin{cases} b_s(x) \;=\; a_s - xe_s, & \text{коли} \quad s \in \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\} \\ b_s'(x) \;=\; -e_s, & \text{коли} \quad s \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\}. \end{cases}$$

Зокрема,

$$b_s^{(i_s)}(0) = \begin{cases} b_s(0) = a_s, & \text{коли} \quad s \in \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\} \\ b'_s(0) = -e_s, & \text{коли} \quad s \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}\}. \end{cases}$$

Тоді, якщо $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ відповідає набору $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-k}$, будемо мати, див. (2.39),

$$D(b_1^{(i_1)}(0), b_2^{(i_2)}(0), \ldots, b_n^{(i_n)}(0)) = (-1)^k M_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}}^{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}}. \tag{2.45}$$

Підставимо $x = 0$ в формулу (2.44). Враховуючи (2.45), одержимо

$$\chi_A^{(k)}(0) = k!\,(-1)^k \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k} \le n} M_{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}}^{j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}}$$

□

Зауваження 2.2.43. Зауважимо, що з формули (2.40) випливає рівність

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} M_i^i = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Сума діагональних елементів матриці A називається **слідом** та позначається $\mathbf{tr}\, A$. Отже, $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\, \mathbf{tr}\, A$.

Задача 2.2.44. Вектор-стовпчик $x \in \mathbb{F}^n$ називається **власним вектором** матриці $A \in M_n(\mathbb{F})$, якщо $x \neq \mathbf{0}$ та існує $\lambda \in \mathbb{F}$ для якого

$$A\,x = \lambda\,x.$$

При цьому число λ називається **власним числом** матриці A. За допомогою теореми Крамера доведіть, що множина власних чисел матриці A співпадає з множиною коренів її характеристичного многочлена $\chi_A(x)$. Вкажіть спосіб знаходження власних векторів матриці, що відповідають фіксованому власному числу. Детально про власні вектори та власні числа див. підручники [4, 5, 9, 13].

Зауваження 2.2.45. Зауважимо, що для довільного поля $\mathbb{F}$ можна визначити поняття похідної многочлена

$$\mathbb{F}[x] \ni f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_1 x + f_0,$$

де $f_s \in \mathbb{F}$, $s = 0, \ldots, n$. А саме, за визначенням

$$f'(x) = n f_n x^{n-1} + (n-1) f_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 f_2 x + f_1.$$

Тоді мають місце властивості

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \quad (\lambda f(x))' = \lambda f'(x),\ \lambda \in \mathbb{F}.$$

та

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Звідси випливає, що у випадку, коли матричні елементи є поліномами над довільним полем, теорема про диференціювання визначника залишається вірною. Зокрема, одержані вище формули для знаходження коефіцієнтів характеристичного многочлена матриці справедливі над довільним полем.

Наведемо ще декілька важливих наслідків формули (2.34), які можуть бути корисними для обчислення визначників.

Твердження 2.2.46. *Нехай $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ – квадратна матриця, $A_{i,j}$ – алгебраїчне доповнення її елемента $a_{i,j}$, тоді*

$$D(x) := \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}+x & \cdots & a_{1,n}+x \\ a_{2,1}+x & a_{2,2}+x & \cdots & a_{2,n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+x & a_{n,2}+x & \cdots & a_{n,n}+x \end{vmatrix} = \det A + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}. \qquad (2.46)$$

Доведення. Згідно з формулою (2.34):

$$D'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2}+x & \cdots & a_{1,n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1}+x & a_{k-1,2}+x & \cdots & a_{k-1,n}+x \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{k+1,1}+x & a_{k+1,2}+x & \cdots & a_{k+1,n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+x & a_{n,2}+x & \cdots & a_{n,n}+x \end{vmatrix}.$$

Віднімемо в k-му визначнику цієї суми k-ий рядок, домножений на x, від всіх інших, а потім розкладемо його за k-им рядком. Одержимо

$$D'(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{k,j}.$$

З цієї рівності бачимо, що $D(x)$ – многочлен першого степеня від x

$$D(x) = A_0 + x\sum_{k,j=1}^{n} A_{k,j}.$$

Поклавши $x = 0$, одержимо $A_0 = D(0) = \det A$. Що й треба було довести. $\square$

Приклад 2.2.47. Обчислити

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

Використаємо формулу (2.46) для $x = 1$ та

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A_{i,j} = 0$ для $i \neq j$ та $A_{i,i} = a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n$, шуканий визначник дорівнює $a_1 a_2 \cdots a_n \Big(1 + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big)$.

Наступне твердження лежить в основі диференціально-різницевого методу обчислення визначників. Ідея методу полягає в тому, що коли матриця $M(x)$ задовольняє певному диференціальйному рівнянню, можна одержати вираз $\det M(x)$, якщо відоме значення $\det M(x_0)$ для деякого фіксованого числа x_0. Нижче будемо розглядати матриці, елементи яких є диференційовними функціями дійсного аргументу. Нехай $M(x) = [m_{i,j}(x)]_{1 \leq i,j \leq n}$ – така матриця. Покладемо за визначенням

$$M'(x) := [m'_{i,j}(x)]_{1 \leq i,j \leq n},$$

іншими словами, диференціювання матриці введемо поелементно.

Твердження 2.2.48 (Формула Якобі)**.** *Нехай елементи матриці* $T(x) = [t_{i,j}(x)]_{1 \leq i,j \leq n}$ *є диференційовними функціями. Якщо* $M'(x) = T(x)M(x)$ *то*

$$\frac{\mathrm{d}(\det M(x))}{\mathrm{d}x} = \mathbf{tr}(T(x)) \det M(x), \tag{2.47}$$

де $\mathbf{tr}(T(x)) := \sum_{i=1}^{n} t_{i,i}(x)$ *– слід матриці* $T(x)$*.*

Зокрема, для довільного $x_0 \in \mathbb{R}$ *будемо мати*

$$\det M(x) = \det M(x_0) \exp \Big[\int_{x_0}^{x} \mathbf{tr}\,(T(y))\mathrm{d}y \Big]. \tag{2.48}$$

Доведення. Розглянемо матриці $T_i(x)$, $\;i = 1, \ldots, n$, побудовані так: $T_i(x)$ це одинична матриця в якій i-ий рядок замінено на i-ий рядок матриці

$T(x)$:

$$T_i(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ t_{i,1}(x) & t_{i,2}(x) & \cdots & t_{i,i}(x) & \cdots & t_{i,n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $\det T_i(x) = t_{i,i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді

$$T_i(x)M(x) = \tag{2.49}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{1,1}(x) & m_{1,2}(x) & \cdots & m_{1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i-1,1}(x) & m_{i-1,2}(x) & \cdots & m_{i-1,n}(x) \\ \sum_{k=1}^n t_{i,k}(x)m_{k,1}(x) & \sum_{k=1}^n t_{i,k}(x)m_{k,2}(x) & \cdots & \sum_{k=1}^n t_{i,k}(x)m_{k,n}(x) \\ m_{i+1,1}(x) & m_{i+1,2}(x) & \cdots & m_{i+1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1}(x) & m_{n,2}(x) & \cdots & m_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

З рівності $M'(x) = T(x)M(x)$ випливає, що

$$m'_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n t_{i,k}(x)m_{k,j}(x), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Згадавши означення матриці $M_i(x)$, див. (2.35), легко побачити, що (2.49) набуде вигляду

$$T_i M(x) = M_i(x).$$

З формули (2.34) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\det M(x)}{\mathrm{d}x} &= \sum_{i=1}^n \det M_i(x) = \sum_{i=1}^n \det(T_i(x)M(x)) \\ &= \sum_{i=1}^n \det T_i(x) \det M(x) = \mathbf{tr}\,(T(x)) \det M(x), \end{aligned}$$

де третя рівність випливає з теореми про добуток визначників. Формула (2.47) доведена.

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що (2.48) дає розв'язок диференціального рівняння (2.47). Залишається зауважити, що за умови диференційовності функцій $t_{i,j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, на дійсній осі, диференціальне рівняння (2.47) має єдиний розв'язок, що задовольняє початковому значенню $\big(\det M(x)\big)|_{x=x_0} = \det M(x_0)$ (з приводу умов існування та єдиності розв'язку звичайного диференціального рівняння першого порядку див. [1, теорема 2.3.2]). $\square$

Наведемо приклад застосування диференціально-різницевого методу.

Приклад 2.2.49. Обчислимо визначник

$$\det M(h) = \begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \cdots & a+(n-2)h \\ a+(n-2)h & a+(n-1)h & a & \cdots & a+(n-3)h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+h & a+2h & a+3h & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

Припустимо, що $h > a > 0$. Покладемо $s := na + \frac{n(n-1)}{2}h$ (сума елементів будь-якого рядка чи стовпчика) та визначимо матрицю $T(h)$ рівністю

$$T(h) := \Big(\frac{n-1}{2s} - \frac{1}{nh}\Big) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що

$$T(h)M(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ n-2 & n-1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}M(h)}{\mathrm{d}h}.$$

Застосуємо формулу Якобі з $x_0 = a$. Згідно з рівністю (2.5), виносячи з кожного рядка множник a, отримаємо $\det M(a) = a^n \cdot \frac{(-n)^{n-1}(n+1)}{2}$. Оскільки $\mathbf{tr}\, T(u) = \frac{n(n-1)}{2na+n(n-1)u} + \frac{n-1}{u}$, то

$$\begin{aligned}
\det M(h) &= \det M(a) \exp\Big[\int_a^h \Big(\frac{n(n-1)}{2na+n(n-1)u} + \frac{n-1}{u}\Big)\mathrm{d}u\Big] \\
&= a^n \cdot \frac{n+1}{2}(-n)^{n-1} \exp\Big[\ln\Big(na + \frac{n(n-1)}{2}u\Big)\Big|_a^h + (n-1)\ln u\Big|_a^h\Big] \\
&= a^n \cdot \frac{n+1}{2}(-n)^{n-1} \frac{na + \frac{n(n-1)}{2}h}{\frac{n(n+1)}{2}a}\Big(\frac{h}{a}\Big)^{n-1} \\
&= (-nh)^{n-1}\Big(a + \frac{n-1}{2}h\Big).
\end{aligned}$$

Ця формула дає значення $\det M(h)$ в випадку $h > a > 0$. Таке обмеження зумовлено тим, що умови існування та єдиності розв'язку відповідного диференціального рівняння виконуються лише для вказаних значень h та a. Насправді, неважко зрозуміти, що знайдена формула вірна завжди, проте ми не будемо доводити цього факту.

Відповідь: $\det M(h) = (-nh)^{n-1}\Big(a + \frac{n-1}{2}h\Big)$.

2.2.7 Метод конденсації.

Метод конденсації є різновидом методу рекурентних співвідношень і називається також методом Доджсона[4]. В основі методу лежить так звана тотожність Якобі-Деснано, яка доводиться нижче. Для заданої квадратної матриці $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ позначимо через B_i^j матрицю, яка отримана викресленням i-го рядка та j-го стовпчика у матриці A; $B_{i,k}^{j,l}$ матрицю, отриману викресленням i-го та k-го рядків, а також j-го та l-го стовпчиків матриці A. Матриця $B_{1,n}^{1,n}$ називаєтся *внутрішністю* матриці A.

Має місце наступна

[4]Чарльз Людвіг Доджсон (Льюїс Керрол, 1832 – 1898) – англійський письменник, математик та логік.

Теорема 2.2.50 (Тотожність Якобі-Деснано)**.** *Для довільної квадратної матриці* $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ *справедлива рівність*

$$\det A\ \det B_{1,n}^{1,n} = \det B_1^1\ \det B_n^n - \det B_1^n\ \det B_n^1.$$

Доведення. Позначимо через $A_{i,j}$ алгебраїчне доповнення елемента $a_{i,j}$ матриці A, тобто $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\det B_i^j$. Побудуємо допоміжну матрицю C:

$$C = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{n,1} \\ A_{1,2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{n,2} \\ A_{1,3} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & A_{n,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1,n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & A_{n,n-2} \\ A_{1,n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & A_{n,n-1} \\ A_{1,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$\det C = A_{1,1}A_{n,n} - A_{n,1}A_{1,n} = \det B_1^1\ \det B_n^n - \det B_1^n\ \det B_n^1. \tag{2.50}$$

З безпосереднього обчислення добутку AC випливає рівність

$$AC = \begin{pmatrix} \det A & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & \det A \end{pmatrix}, \tag{2.51}$$

де ми використовуємо тотожності (див. лему 1.4.1)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}A_{j,k} = \det A\,\delta_{i,j},$$

де $\delta_{i,j} = 1$, якщо $i = j$ та $\delta_{i,j} = 0$, якщо $i \neq j$. Очевидно, що

$$\det(AC) = (\det A)^2 \det B_{1,n}^{1,n}. \tag{2.52}$$

З іншого боку, за допомогою теореми 1.2.13 та формули (2.50), отримаємо

$$\begin{aligned} \det(AC) &= \det A \det C \\ &= \det A \Big(\det B_1^1 \det B_n^n - \det B_1^n \det B_n^1 \Big). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Якщо $\det A \neq 0$, прирівнюючи праві частини формул (2.52) та (2.53) та поділивши на $\det A$, одержимо формулу Якобі-Деснано.

Доведемо, що з умови $\det A = 0$ випливає $\det C = 0$. Дійсно, в протилежному випадку $\mathbf{rank}\, C = n$ та $\mathbf{rank}\, A = n - 1$ (оскільки інакше всі мінори $(n-1)$-го порядку матриці A були б рівні нулю, та матриця C мала б нульовий стовпчик, що протирічить припущенню $\det C \neq 0$). З умови $\det A = 0$ та рівності (2.51) випливає, що $\mathbf{rank}\,(A \cdot C) \leq n - 2$, тому

$$\mathbf{rank}\,(A \cdot C) \leq n - 2 < n - 1 = \mathbf{rank}\, A + \mathbf{rank}\, C - n,$$

що протирічить нерівності Сильвестра (див. (4.6)) згідно якої

$$\mathbf{rank}\, A + \mathbf{rank}\, C - n \leq \mathbf{rank}\,(A \cdot C) \leq \min(\mathbf{rank}\, A, \mathbf{rank}\, C).$$

Отже, з рівності $\det A = 0$, випливає $\det C = 0$ та

$$0 = \det A \det B_{1,n}^{1,n} = \det B_1^1 \det B_n^n - \det B_1^n \det B_n^1 = \det C = 0.$$

Таким чином, для вироджених матриць рівність Якобі-Деснано теж справедлива. $\square$

Для заданої матриці $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ називатимемо визначник підматриці, що утворена рядками $k, k+1, \ldots, k+m-1$ та стовпчиками $l, l+1, \ldots, l+m-1$, сполученим мінором m-го порядку, що стартує в (k, l). Враховуючи таке визначення, бачимо, що $\det A$ співпадає з єдиним сполученим мінором порядку n, визначники у правій частині формули

Якобі-Деснано є сполученими мінорами $(n-1)$-го порядку, а $\det B_{1,n}^{1,n}$ є центральним сполученим мінором порядку $n-2$. Переписавши формулу у вигляді

$$\det A = \frac{\det B_1^1 \,\det B_n^n - \det B_1^n \,\det B_n^1}{\det B_{1,n}^{1,n}} = \frac{1}{\det B_{1,n}^{1,n}} \cdot \begin{vmatrix} B_1^1 & B_1^n \\ B_n^1 & B_n^n \end{vmatrix},$$

бачимо, що вона задає рекурентну залежність сполученого мінору порядку n від сполучених мінорів порядків $n-1$ та $n-2$.

Це спостереження дає змогу описати алгоритм методу конденсації обчислення визначника квадратної матриці $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$. Розглянемо уважно перші дві ітерації цього алгоритму.

1. Покладемо $k=1$. Позначимо матрицю A через $A^{(1)} = [a_{i,j}^{(1)}]_{1\le i,j\le n}$. Утворимо матрицю

$$B^{(1)} = [b_{i,j}^{(1)}]_{1\le i,j\le n-1}, \quad b_{i,j}^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{i,j}^{(1)} & a_{i,j+1}^{(1)} \\ a_{i+1,j}^{(1)} & a_{i+1,j+1}^{(1)} \end{vmatrix}, \;\; i,j = 1,\ldots,n-1.$$

Елементами матриці $B^{(1)}$ є сполучені мінори матриці A порядку 2.

Крок 1. Утворимо матрицю $C^{(1)} = [c_{i,j}^{(1)}]_{1\le i,j\le n-2}$ за правилом

$$c_{i,j}^{(1)} = \begin{vmatrix} b_{i,j}^{(1)} & b_{i,j+1}^{(1)} \\ b_{i+1,j}^{(1)} & b_{i+1,j+1}^{(1)} \end{vmatrix}, \;\; i,j = 1,\ldots,n-2.$$

Крок 2. Побудуємо $D^{(1)} = [d_{i,j}^{(1)}]_{1\le i,j\le n-2}$, поділивши кожен елемент матриці $C^{(1)}$ на відповідний елемент внутрішності $A^{(1)}$. Тобто покладемо

$$d_{i,j}^{(1)} = \frac{c_{i,j}^{(1)}}{a_{i+1,j+1}^{(1)}}, \;\; i,j = 1,\ldots,n-2.$$

Зауважимо, що згідно формули Якобі-Деснано, елементи матриці $D^{(1)}$ є сполученими мінорами матриці A порядку 3.

Крок 3. Якщо $n=3$, єдиний елемент матриці $D^{(1)}$ є сполученим мінором матриці A порядку три, тобто $\det A = \det D^{(1)}$. Інакше, покладемо

$$k=2, \quad A^{(2)} := B^{(1)}, \quad B^{(2)} := D^{(1)}.$$

Таким чином, елементами $A^{(2)}$ є сполучені мінори матриці A порядку 2, тоді як елементами $B^{(2)}$ – сполучені мінори матриці A порядку 3.

Зауваження 2.2.51. Розглянемо сполучений мінор матриці A порядку 4, що стартує в (i,j), $i,j = 1,\ldots,n-3$:

$$\det M = \begin{vmatrix} \alpha_{i,j} & \alpha_{i,j+1} & \alpha_{i,j+2} & \alpha_{i,j+3} \\ \alpha_{i+1,j} & \alpha_{i+1,j+1} & \alpha_{i+1,j+2} & \alpha_{i+1,j+3} \\ \alpha_{i+2,j} & \alpha_{i+2,j+1} & \alpha_{i+2,j+2} & \alpha_{i+2,j+3} \\ \alpha_{i+3,j} & \alpha_{i+3,j+1} & \alpha_{i+3,j+2} & \alpha_{i+3,j+3} \end{vmatrix}.$$

Тоді

- елемент $\alpha^{(2)}_{i+1,j+1} = \begin{vmatrix} \alpha_{i+1,j+1} & \alpha_{i+1,j+2} \\ \alpha_{i+2,j+1} & \alpha_{i+2,j+2} \end{vmatrix} = \det M^{1,4}_{1,4}$. Тобто $\alpha^{(2)}_{i+1,j+1}$ дорівнює визначнику внутрішності сполученого мінора матриці A порядку 4, що стартує з (i,j), $i,j = 1,\ldots,n-3$;
- елемент $b^{(2)}_{i,j} = \begin{vmatrix} \alpha_{i,j} & \alpha_{i,j+1} & \alpha_{i,j+2} \\ \alpha_{i+1,j} & \alpha_{i+1,j+1} & \alpha_{i+1,j+2} \\ \alpha_{i+2,j} & \alpha_{i+2,j+1} & \alpha_{i+2,j+2} \end{vmatrix} = \det M^4_4$. Аналогічно, маємо рівності $b^{(2)}_{i+1,j+1} = \det M^1_1$, $b^{(2)}_{i,j+1} = \det M^1_4$, $b^{(2)}_{i+1,j} = \det M^4_1$.

Отже, за формулою Якобі-Деснано,

$$\det M = \frac{\det M^1_1 \, \det M^4_4 - \det M^4_1 \, \det M^1_4}{\det M^{1,4}_{1,4}} = \frac{\begin{vmatrix} b^{(2)}_{i,j} & b^{(2)}_{i,j+1} \\ b^{(2)}_{i+1,j} & b^{(2)}_{i+1,j+1} \end{vmatrix}}{\alpha^{(2)}_{i+1,j+1}}.$$

2. Виконуємо ті ж самі кроки, що й в випадку $k = 1$.

Крок 1. Утворимо матрицю $C^{(2)} = [c^{(2)}_{i,j}]_{1\le i,j\le n-3}$ за правилом

$$c^{(2)}_{i,j} = \begin{vmatrix} b^{(2)}_{i,j} & b^{(2)}_{i,j+1} \\ b^{(2)}_{i+1,j} & b^{(2)}_{i+1,j+1} \end{vmatrix}, \quad i,j = 1,\ldots,n-3.$$

Крок 2. Побудуємо $D^{(2)} = [d^{(2)}_{i,j}]_{1\le i,j\le n-3}$,

$$d^{(2)}_{i,j} = \frac{c^{(2)}_{i,j}}{a^{(2)}_{i+1,j+1}}, \quad i,j = 1,\dots,n-3.$$

Згідно зауваження 2.2.51, елементи матриці $D^{(2)}$ є сполученими мінорами матриці A порядку 4.

Крок 3. Якщо $n = 4$, єдиний елемент матриці $D^{(2)}$ є сполученим мінором матриці A порядку 4, тобто $\det A = \det D^{(2)}$. Інакше, покладемо $k = 3$, $A^{(3)} = B^{(2)}$, $B^{(3)} = D^{(2)}$.

3. Нехай k-ій ітерації, $k < n-2$, маємо матриці

$$A^{(k)} = [a^{(k)}_{i,j}]_{1\le i,j\le n-(k-1)} \quad \text{та} \quad B^{(k)} = [b^{(k)}_{i,j}]_{1\le i,j\le n-k}.$$

Тоді $A^{(k)}$ складається зі сполучених мінорів матриці A порядку k, а $B^{(k)}$ зі сполучених мінорів матриці A порядку $k+1$.

Крок 1 Утворимо матрицю $C^{(k)} = [c^{(k)}_{i,j}]_{1\le i,j\le n-(k+1)}$,

$$c^{(k)}_{i,j} = \begin{vmatrix} b^{(k)}_{i,j} & b^{(k)}_{i,j+1} \\ b^{(k)}_{i+1,j} & b^{(k)}_{i+1,j+1} \end{vmatrix}, \quad i,j = 1,\dots,n-k-1.$$

Крок 2. Побудуємо матрицю $D^{(k)} = [d^{(k)}_{i,j}]_{1\le i,j\le n-(k+1)}$,

$$d^{(k)}_{i,j} = \frac{c^{(k)}_{i,j}}{a^{(k)}_{i+1,j+1}}, \quad i,j = 1,\dots,n-k-1.$$

Елементами $D^{(k)}$ є сполучені мінори матриці A порядку $k+2$. Це випливає з міркувань, аналогічних наведеним в зауваженні 2.2.51.

Крок 3. Покладаємо $A^{(k+1)} := B^{(k)}$, $B^{(k+1)} := D^{(k)}$, $k := k+1$ та повертаємось до Кроку 1.

Алгоритм зупиняється після $(n-2)$-ї ітерації. А саме, матриця $D^{(n-2)}$ має розмір 1×1 та єдиним її елементом є сполучений мінор матриці A порядку n, тобто $\det A = \det D^{(n-2)}$.

Зауваження 2.2.52. Якщо покласти $B^{(n-1)} = D^{(n-2)}$, реалізацію алгоритму методу конденсації можна зображувати у вигляді скінченної послідовності матриць

$$A^{(1)} \Rightarrow B^{(1)} \Rightarrow B^{(2)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow B^{(n-1)}. \tag{2.54}$$

Зауваження 2.2.53. Зверніть увагу, що на кожному кроці алгоритму методу конденсації порядок визначників, що підлягають обчисленню, дорівнює двом.

Зауваження 2.2.54. Алгоритм корректний, якщо всі внутрішні сполучені мінори (всіх порядків до $n-2$) початкової матриці не дорівнюють нулю. Це еквівалентно тому, що елементи внутрішності кожної з матриць $A^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n-2$ не дорівнюють нулю.

Приклад 2.2.55. Знайти

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -2 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Маємо: $A^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -2 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$

$$B^{(1)} = A^{(2)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 9 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -6 & 9 \\ -7 & -14 & 17 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C^{(1)} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 21 & -6 \\ -7 & -14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ -14 & 17 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -7 & -14 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -14 & 17 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -336 & 24 \\ 70 & -30 \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = B^{(2)} = \begin{pmatrix} -42 & 12 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}, \quad C^{(2)} = (-252)\,, \quad D^{(2)} = (18)\,.$$

Відповідь: 18.

У цьому прикладі ланцюжок (2.54) має вигляд

$$\begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -2 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 21 & -6 & 9 \\ -7 & -14 & 17 \\ 3 & -4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -42 & 12 \\ -14 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow (18)$$

Зауважимо також, що, наприклад, число 10 в третій матриці ланцюжка це сполучений мінор

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 7 \\ -5 & -2 & -2 \\ -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

початкової матриці.

Звернемо увагу на те, що обчислення визначника в попередньому прикладі звичайним методом зведення до трикутного вигляду вимагав би роботи з дробами. При обчисленні ж його методом кондесації всі дії (включно з діленням на четвертому кроці алгоритму) були цілочисельними. Це є загальною рисою цього способу: при знаходження цілочисельних визначників, всі проміжні арифметичні дії також є цілочисельними (не виводять за межі $\mathbb{Z}$). Наступний приклад показує, що робити, коли на деякому кроці у внутрішності матриці з'явились нулі.

Приклад 2.2.56. Знайти

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 4 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Легко бачити, що сполучений мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$, тому безпосередньо метод конденсації застосувати не можна. Зробимо допоміжне перетворення: переставимо (наприклад) перший і другий рядок та перший і другий стовпчик та застосуємо метод конденсації:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 & 7 \\ 9 & -3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & -2 \\ -8 & 7 & -4 & -5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 36 & 3 & 15 \\ 42 & -24 & -30 \\ 46 & -44 & -28 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 330 & 90 \\ -186 & -162 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1530 \end{vmatrix}.$$

Відповідь: 1530.

2.2.8 Метод розкладу в добуток

Цей метод базується на теоремі 1.2.13 про добуток визначників. Нагадаємо, що в цій теоремі стверджується, що для довільних квадратних матриць $A = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ та $B = [b_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ визначник матриці $C := AB$, див. означення 4.5.8, дорівнює добутку визначників матриць A та B:

$$\det C = \det A \det B.$$

Нехай задана деяка матриця $M \in M_n(\mathbb{F})$. Метод розкладу в добуток знаходження $\det M$ полягає в представлення матриці M у вигляді добутку $M = PQ$, обчисленні визначників матриць P та Q з подальшим застосуванням теореми про добуток визначників. Згідно правила знаходження елементів добутку матриць

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k} q_{k,j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.55}$$

де $m_{i,j}$, $p_{i,j}$, $q_{i,j}$ – елементи матриць M, P, Q відповідно. При цьому числа $m_{i,j}$ відомі, а $p_{i,j}$ та $q_{i,j}$ підлягають визначенню. Зрозуміло, що існує безліч можливих варіантів вибору $p_{i,j}$ та $q_{i,j}$. Наприклад, можна покласти $p_{i,j} := m_{i,j}$ та $q_{i,j} = \mathbb{1}(i = j)$, що відповідає тривіальному представленню $M = ME$, проте, очевидно, що це не полегшує початкову задачу. Основна мета – знайти таке представлення у вигляді добутку, що визначники матриць P, Q обчислити простіше, ніж визначник M (наприклад, знайти представлення в якому матриці P, Q трикутні). Проілюструємо цей метод кількома прикладами.

Приклад 2.2.57. Обчислити

$$\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}.$$

Позначимо матрицю під знаком визначника через $M = [m_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$, де $m_{i,j} = \frac{1-(a_i b_j)^n}{1-a_i b_j}$. Спробуємо подати $m_{i,j}$ у вигляді (2.55). Для цього згадаємо формулу для суми скінченної кількості членів геометричної прогресії:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

Підставляючи у цю формулу $x = a_i b_j$, запишемо

$$m_{i,j} = \frac{1 - (a_i b_j)^n}{1 - a_i b_j} = 1 + a_i b_j + (a_i b_j)^2 + \ldots + (a_i b_j)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_i^{k-1} b_j^{k-1}$$

та покладемо $p_{i,k} := a_i^{k-1}$ та $q_{k,j} := b_j^{k-1}$. Отже, матриці P та Q такі, що

$M = PQ$, знайдено. Випишемо ці матриці явно:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \dots & b_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Матриця P називається матрицею Вандермонда, її визначник може бути досить легко обчислений (див. підрозділ 2.3.1, формула (2.57)).

$$\det P = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

Матриця Q – транспонована матриця Вандермонда, тому

$$\det Q = \det Q^t = \prod_{1 \le j < i \le n} (b_i - b_j).$$

Залишається перемножити вирази для $\det P$ та $\det Q$.
Відповідь: $\det M = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$.

Приклад 2.2.58. Нехай $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ функція, така що $d(m, n)$ дорівнює кількості спільних дільників чисел m, n. Обчислити $\det M$, де

$$M = [d(i, j)]_{1 \le i,j \le n}.$$

Зрозуміло, що для довільних $1 \le i, j \le n$ має місце рівність

$$d(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(k \text{ ділить } i \text{ та } j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(k \text{ ділить } i)\mathbb{1}(k \text{ ділить } j).$$

Покладемо $p_{i,k} := \mathbb{1}(k \text{ ділить } i)$, $q_{k,j} := \mathbb{1}(k \text{ ділить } j)$ для $1 \le i, j, k \le n$. Вивчимо структуру матриці P. Зрозуміло, що

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad i < j, \\ 1, & \text{якщо} \quad i = j. \end{cases}$$

Отже, матриця P трикутна з одиницями на діагоналі та

$$\det P = 1.$$

Аналогічним чином доводиться, що $\det Q = 1$, звідки

$$\det M = \det P \, \det Q = 1.$$

Відповідь: $\det M = 1$.

Зауваження 2.2.59. Враховуючи рівності

$$\det(PQ) = \det(PQ^t) = \det(P^tQ) = \det(P^tQ^t),$$

представлення (2.55) елементів матриці M можна замінити на будь-яке з таких:

- $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}q_{j,k}, \quad i,j = 1,\dots,n;$
- $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}q_{k,j}, \quad i,j = 1,\dots,n;$
- $m_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}q_{j,k}, \quad i,j = 1,\dots,n.$

Наприклад, друга формула відповідає представленню $M = P^tQ$.

Вправи

Обчислити визначники:

Задача 2.2.60. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2^3 & \cdots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$

Задача 2.2.61. $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}.$

Задача 2.2.62. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$, де $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$.

Задача 2.2.63. Нехай $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$. Обчислити $\det A$, підрахувавши AA^t.

2.3 Деякі спеціальні визначники

В цьому підрозділі, використовуючи наведені вище методи, ми обчислимо деякі класичні визначники.

2.3.1 Визначник Вандермонда та його застосування

Означення 2.3.1. Визначником Вандермонда від n дійсних (або комплексних) аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається визначник порядку n наступного вигляду:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \det[x_i^{j-1}]_{1 \le i,j \le n} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{2.56}$$

Матриця, яка стоїть під знаком визначника, називається матрицею Вандермонда. Нижче ми доведемо, що

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j), \tag{2.57}$$

Існує багато методів доведення цього результату. Ми наведемо три з них.

Спосіб 1. Елементарні перетворення рядків та стовпчиків. Виконаємо такі елементарні перетворення.

1) Віднімемо перший рядок від решти:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2) Розкриємо визначник за першим стовпчиком та в отриманому визначнику порядку $n-1$ від кожного стовпчика, починаючи з останнього, віднімемо попередній, помножений на x_1:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1x_3 & \cdots & x_3^{n-1} - x_1x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \cdots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

3) Винесемо з i-го рядка, $i = 1, \ldots, n-1$, спільний множник $x_{i+1} - x_1$:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) V(x_2, x_3, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Застосовуючи такі ж дії для обчислення $V(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, одержимо

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) V(x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &= \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \prod_{k=3}^{n}(x_k - x_2) V(x_3, x_4, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес, з врахуванням рівності $V(x_{n-1}, x_n) = x_n - x_{n-1}$, дістанемо (2.57).

Спосіб 2. Метод виділення лінійних множників. Розглянемо

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

як функцію аргументу x_n. Очевидно, що V є поліномом степеня $n-1$ від x_n. В цьому можна переконатись, розклавши V за останнім рядком. З цього розкладу також випливає, що

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n^{n-1} V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + \alpha_{n-2} x_n^{n-2} + \dots + \alpha_1 X_n + \alpha_0,$$

де α_k, $k = 0, \dots, n-2$, не залежать від x_n. Коренями V є числа $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Дійсно, при підстановці в (2.56) значення $x_n = x_i$ одержимо визначник, в якому i-й та n-й рядки співпадають. Отже,

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

Користуючись отриманою рекурсією, в підсумку одержимо потрібний результат:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Спосіб 3. Метод LU-факторизації. Третій спосіб ґрунтується на відомому LU-представленні матриці Вандермонда (див. [18]):

$$[x_i^{j-1}]_{1 \le i,j \le n} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)(x_n - x_2) & \cdots & (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & e_1(x_1) & e_2(x_1) & \cdots & e_{n-1}(x_1) \\ 0 & 1 & e_1(x_1, x_2) & \cdots & e_{n-2}(x_1, x_2) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & e_{n-3}(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

де $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le m} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ це так званий k-ий повний симетричний поліном від аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_m$. З цього представлення та теореми про добуток визначників, одразу отримуємо формулу (2.57).

Перевіремо, що формула (2.58) дійсно вірна. Зауважимо, що

$$e_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{j_1 + j_2 + \ldots + j_m = k} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_m^{j_m},$$

де всі індекси $j_s \in \{0, 1, 2, \ldots, k\}$, $s = 1, \ldots, m$. Покладемо

$$e_0(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1.$$

Очевидно, що справедливість рівності (2.58) еквівалентна наступному твердженню.

Твердження 2.3.2. *Для $i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ мають місце наступні тотожності*

$$\sum_{r=0}^{k} \prod_{j=1}^{r} (x_i - x_j)\, e_{k-r}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) = x_i^k, \quad i > k, \tag{2.59}$$

$$\sum_{r=0}^{i-1} \prod_{j=1}^{r} (x_i - x_j)\, e_{k-r}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) = x_i^k, \quad k \ge i. \tag{2.60}$$

Зауважимо, що формули справедливі також для $k = 0$.

Доведення. Для перевірки формул (2.59), (2.60) використаємо наступний результат, який буде доведено нижче.

Лема 2.3.3. *Для довільних $m, k \in \mathbb{N}$ та $x \in \mathbb{R}$ має місце тотожність*

$$\begin{aligned} e_m(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) + (x - x_k)\, e_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x) \\ = e_m(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ та $i \in \mathbb{N}$. Доведемо, що для довільного $0 \leq s \leq k$ має місце рівність

$$\sum_{r=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{r} (x_i - x_j)\, e_{k-r}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) + \prod_{j=1}^{s} (x_i - x_j)\, e_{k-s}(x_1, x_2, \ldots, x_s, x_i) = x_i^k. \tag{2.62}$$

Зауважимо, що формула (2.59) випливає з (2.62) при $i > k$, $s = k$, а формула (2.60) при $i \leq k$ та $s = i - 1$.

Проведемо доведення індукцією за s. Для $s = 0$ ця формула зводиться до тривіальної рівності $e_k(x_i) = x_i^k$ (нагадаємо, що сума за порожньою множиною індексів дорівнює нулю, а добуток – одиниці).

Припустимо, що (2.62) виконується для $s = t < k$. Покажемо, що ця формула вірна для $s = t + 1$. Отже,

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{t} \prod_{j=1}^{r} (x_i - x_j)\, e_{k-r}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) \\
&\quad + \prod_{j=1}^{t+1} (x_i - x_j)\, e_{k-(t+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_t, x_{t+1}, x_i) \\
&\quad = \sum_{r=0}^{t-1} \prod_{j=1}^{r} (x_i - x_j)\, e_{k-r}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) + \prod_{j=1}^{t} (x_i - x_j) \times \\
&\quad \times \big(e_{k-t}(x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}) + (x_i - x_{t+1})\, e_{k-(t+1)}(x_1, \ldots, x_t, x_{t+1}, x_i) \big) \\
&\quad = \sum_{r=0}^{t-1} \prod_{j=1}^{r} (x_i - x_j)\, e_{k-r}(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}) \\
&\quad + \prod_{j=1}^{t} (x_i - x_j)\, e_{k-t}(x_1, x_2, \ldots, x_t, x_i) = x_i^k,
\end{aligned}$$

де ми використали (2.61) з $m = k - t$ та $x = x_i$ для отримання передостанньої рівності та припущення індукції для останньої. $\square$

Доведення Леми 2.3.3. Застосуємо індукцію за m. Для $m = 1$ будемо мати

$$\begin{aligned}
e_1(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) + (x - x_k)e_0(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x) = \\
= x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k + (x - x_k) \cdot 1 = \\
= x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x = e_1(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x).
\end{aligned}$$

Припустимо, що формула (2.61) справедлива для $m = n - 1$ та доведемо, що вона має місце для $m = n$. Дійсно,

$$\begin{aligned}
e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) &= e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) \\
&\quad + x_k e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k), \\
e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x) &= e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x) \\
&\quad + x_k e_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x),
\end{aligned}$$

звідки одержимо

$$\begin{aligned}
&e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) + (x - x_k)e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x) = \\
&\quad = e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) + x_k e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) \\
&\qquad + (x - x_k)e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x) \\
&\qquad + x_k(x - x_k)e_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x) \\
&\quad = e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) + (x - x_k)e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x) \\
&\qquad + x_k\big(e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) + (x - x_k)e_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x)\big) \\
&\quad = e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) + (x - x_k)e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x) \\
&\qquad + x_k e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x),
\end{aligned}$$

де останній доданок отриманий завдяки припущенню індукції. Остаточно

$$\begin{aligned}
&e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) + (x - x_k)e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x) \\
&\quad = e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) + (x - x_k)e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x) \\
&\qquad + x_k e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x) \\
&\quad = e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}) + x e_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x) = e_n(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x).
\end{aligned}$$

$\square$

Використовуючи метод виділення лінійних множників, можна довести наступний факт.

Твердження 2.3.4. *Нехай* $p_j(x) = a_j x^{j-1} +$ *"члени меншого степеня", тоді*

$$\begin{vmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_n(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_n(x_n) \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Доведення. Доведення проводиться за тією ж процедурою, що була викладена у другому способі виводу формули (2.57), ми залишаємо його читачу. $\square$

Наведемо деякі класичні задачі, що розв'язуються за допомогою визначника Вандермонда.

Задача інтерполяції та формула Лагранжа

Задача інтерполяції формулюється таким чином: для заданого масиву попарно різних чисел $\{z_i \in \mathbb{C} : i = 0, 1, \ldots, n\}$ та довільного масиву чисел $\{f_i \in \mathbb{C} : i = 0, 1, \ldots, n\}$ знайти поліном p найменшого степеня, такий, що $p(z_i) = f_i$ для всіх $i = 0, 1, \ldots, n$.

Має місце наступне твердження:

Лема 2.3.5. *Довільна задача інтерполяції має єдиний розв'язок, при цьому шуканий поліном p має степінь не вище ніж n і задається* ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЮ ФОРМУЛОЮ ЛАГРАНЖА*:*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{(z - z_0) \cdots (z - z_{k-1})(z - z_{k+1}) \cdots (z - z_n)}{(z_k - z_0) \cdots (z_k - z_{k-1})(z_k - z_{k+1}) \cdots (z_k - z_n)}. \tag{2.63}$$

Доведення. Шукатимемо поліном p у вигляді

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \tag{2.64}$$

де $\{a_j : j = 0, 1, \dots, n\}$ – невідомі коефіцієнти. Підставляючи в (2.64) значення $z = z_i$ для $i = 0, 1, \dots, n$, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_0 & + & a_1 z_0^1 & + & a_2 z_0^2 & + & \cdots & + & a_n z_0^n & = & f_0, \\ a_0 & + & a_1 z_1^1 & + & a_2 z_1^2 & + & \cdots & + & a_n z_1^n & = & f_1, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_0 & + & a_1 z_n^1 & + & a_2 z_n^2 & + & \cdots & + & a_n z_n^n & = & f_n \end{cases}$$

відносно невідомих $\{a_j : j = 0, 1, \dots, n\}$. Оскільки числа z_i, $i = 0, \dots, n$, попарно різні, головний визначник цієї системи

$$\Delta := V(z_0, z_1, \dots, z_n) = \prod_{0 \le i < j \le n} (z_j - z_i) \ne 0.$$

Отже, за теоремою Крамера, система має єдиний розв'язок. А саме,

$$a_j = \Delta_j / \Delta, \quad j = 0, \dots, n,$$

де

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1 & z_0 & \cdots & z_0^{j-1} & f_0 & z_0^{j+1} & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{j-1} & f_1 & z_1^{j+1} & \cdots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{j-1} & f_n & z_n^{j+1} & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}. \tag{2.65}$$

Розкладемо цей визначник за елементами $(j+1)$-го стовпчика:

$$\Delta_j := \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+j} f_k V_{jk}(z_0, z_1, \dots, z_n), \tag{2.66}$$

де $V_{jk}(z_0, z_1, \dots, z_n)$ – визначник, отриманий викресленням $(j+1)$-го стовпчика та $(k+1)$-го рядка з визначника $V(z_0, z_1, \dots, z_n)$. Підставляючи значення Δ_j у (2.64), отримаємо:

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Delta_j}{\Delta} z^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{\Delta} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+j} f_k V_{jk}(z_0, z_1, \dots, z_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{1}{\Delta} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k+j} V_{jk}(z_0, z_1, \dots, z_n) z^j \end{aligned} \tag{2.67}$$

де остання рівність отримана зміною порядку сумування. Розклавши визначник $V(z_0,\dots,z_{k-1},z,z_{k+1},\dots,z_n)$ за елементами $(k+1)$-го рядка, одержимо

$$V(z_0,\dots,z_{k-1},z,z_{k+1},\dots,z_n)=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{k+j}V_{jk}(z_0,z_1,\dots,z_n)z^j,$$

отже, внутрішня сума у (2.67) рівна $V(z_0,\dots,z_{k-1},z,z_{k+1},\dots,z_n)$ та

$$p(z)=\sum_{k=0}^{n}f_k\frac{V(z_0,\dots,z_{k-1},z,z_{k+1},\dots,z_n)}{V(z_0,\dots,z_{k-1},z_k,z_{k+1},\dots,z_n)}.$$

Формула (2.63), випливає з рівності

$$\frac{V(z_0,\dots,z_{k-1},z,z_{k+1},\dots,z_n)}{V(z_0,\dots,z_{k-1},z_k,z_{k+1},\dots,z_n)}
=\frac{(z-z_0)\cdots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\cdots(z-z_n)}{(z_k-z_0)\cdots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots(z_k-z_n)},$$

яка є очевидним наслідком формули (2.57). □

Дискримінант многочлена

Розглянемо многочлен

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n.$$

Розв'яжемо таку задачу: знайти функцію від коефіцієнтів многочлена, що приймає ненульове значення, коли $f(x)$ не має кратних коренів та обертається в нуль в протилежному разі.

З основної теореми про симетричні функції (див. [3, с. 129]) випливає, що така функція має бути симетричною від коренів $x_1,x_2,\dots,x_n$ многочлена $f(x)$. Зрозуміло, що "мінімальною" функцією, що розділяє корені $f(x)$ є

$$V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

Втім $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не є симетричною функцією: вона зберігаться лише при парних перестановках аргументів та міняє знак при непарних. Очевидно, що квадрат цієї функції буде мати потрібні нам властивості.

Означення 2.3.6. Дискримінантом многочлена $f(x)$ називається функція

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)^2 = V^2(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

З'ясуємо, як виразити $\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через коефіцієнти многочлена $f(x)$. Розглянемо степеневі суми

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Запишемо $\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ як добуток транспонованого визначника Вандермонда на визначник Вандермонда:

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_n) = V^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot V(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Дістанемо

$$\mathcal{D}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2(n-1)} \end{vmatrix} \tag{2.68}$$

Приклад 2.3.7. Нехай $f(x) = x^2 + px + q$. Тоді за теоремаю Вієта

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$$

та

$$s_0 = 2, \quad s_1 = -p, \quad s_2 = p^2 - 2q,$$

отже,

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -p \\ -p & p^2 - 2q \end{vmatrix} = 2p^2 - 4q - p^2 = p^2 - 4q.$$

Приклад 2.3.8. Розглянемо зведений кубічний многочлен

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

Тоді

$$s_0 = 3, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -2p, \quad s_3 = -ps_1 - 3q = -3q.$$

$$s_4 = -ps_2 - qs_1 = 2p^2.$$

Отже,

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = 3(-4p^3 - 9q^2) + 8p^3 = -4p^3 - 27q^2.$$

Зауваження 2.3.9. В загальній ситуації щоб виразити степеневі суми s_k, $k \geq 0$, через коефіцієнти a_i, $i = 1, \ldots, n$, многочлена $f(x)$, можна використовувати рекурентні формули Ньютона. Спочатку нагадаємо, що за формулами Вієта

$$a_k = (-1)^k \sigma_k, \text{ де } \sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Мають місце наступні тотожності (див. формули (8) та (9) та с. 225 книги [8]):

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k\, \sigma_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$
$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^k s_{k-n} \sigma_n = 0, \quad k > n.$$

Як бачимо, за допомогою цих формул можна виразити кожне s_k, $k \geq 1$, через s_l, $l < k$ та σ_r, $r = 1, \ldots, n$.

Вправи

Обчислити визначники:

Задача 2.3.10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2^3 & \cdots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & \cdots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$

Задача 2.3.11. $\begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cdots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos\phi_2 & \cdots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\phi_n & \cdots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}.$

Задача 2.3.12. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$

2.3.2 Подвійний альтернант Коші

Означення 2.3.13. Подвійний альтернант Коші від $2n$ дійсних (або комплексних) змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2 \ldots, y_n$ це визначник

$$A := A(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{vmatrix}. \tag{2.69}$$

Нижче ми отримаємо замкнену формулу для подвійного альтернанта Коші, використовуючи метод виділення лінійних множників (див. підрозділ 2.2.3). Щоб застосувати цей метод, зробимо таке допоміжне перетворення: з кожного рядка винесемо спільний знаменник його елементів.

Отримаємо

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\prod\limits_{1\le i,j\le n}(x_i+y_j)} \\
&\times \begin{vmatrix}
\prod\limits_{1\le j\le n, j\ne 1}(x_1+y_j) & \prod\limits_{1\le j\le n, j\ne 2}(x_1+y_j) & \cdots & \prod\limits_{1\le j\le n, j\ne n}(x_1+y_j) \\
\prod\limits_{1\le j\le n, j\ne 1}(x_2+y_j) & \prod\limits_{1\le j\le n, j\ne 2}(x_2+y_j) & \cdots & \prod\limits_{1\le j\le n, j\ne n}(x_2+y_j) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\prod\limits_{1\le j\le n, j\ne 1}(x_n+y_j) & \prod\limits_{1\le j\le n, j\ne 2}(x_n+y_j) & \cdots & \prod\limits_{1\le j\le n, j\ne n}(x_n+y_j)
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Визначник у правій частині останньої рівності, як функція змінної x_i, для фіксованого $i = 1, \ldots, n$, є поліномом степеня не вище $n-1$ з коренями x_j, $j = 1, \ldots, n$, $j \ne i$. Тобто, для кожної пари $i \ne j$ вираз $(x_i - x_j)$ є дільником цього визначника кратності 1. Отже, визначник у правій частині ділиться на добуток $\prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$ і частка не залежить від $x_1, x_2, \ldots, x_n$, . З іншого боку, якщо в початковому визначнику винести спільний знаменник з кожного *стовпчика*, одержимо

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\prod\limits_{1\le i,j\le n}(x_i+y_j)} \\
&\times \begin{vmatrix}
\prod\limits_{1\le i\le n, i\ne 1}(x_i+y_1) & \prod\limits_{1\le i\le n, i\ne 1}(x_i+y_2) & \cdots & \prod\limits_{1\le i\le n, i\ne 1}(x_i+y_n) \\
\prod\limits_{1\le i\le n, i\ne 2}(x_i+y_1) & \prod\limits_{1\le i\le n, i\ne 2}(x_i+y_2) & \cdots & \prod\limits_{1\le i\le n, i\ne 2}(x_i+y_n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\prod\limits_{1\le i\le n, i\ne n}(x_i+y_1) & \prod\limits_{1\le i\le n, i\ne n}(x_i+y_2) & \cdots & \prod\limits_{1\le i\le n, i\ne n}(x_i+y_n)
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Згідно попередніх міркувань, визначник у правій частині цієї рівності ділиться на $\prod_{1\le j<i\le n}(y_i - y_j)$, і частка не залежить від $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Поєднавши отримані вище результати, отримаємо:

$$
A = \alpha \frac{\prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod\limits_{1\le i,j\le n}(x_i+y_j)}, \tag{2.70}
$$

де α – деяка константа. Для знаходження α, розглянемо допоміжну функцію

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) &= \Big(\prod_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\Big)A(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{x_1+y_1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{x_1+y_1}{x_1+y_n} \\ \frac{x_2+y_2}{x_2+y_1} & 1 & \cdots & \frac{x_2+y_2}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_n+y_n}{x_n+y_1} & \frac{x_n+y_n}{x_n+y_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

де остання рівність отримана внесенням i-го множника добутку в i-ий рядок визначника для $i=1,\ldots,n$. Очевидно, $f(x_1,\ldots,x_n,-x_1,\ldots,-x_n)=1$. З іншого боку, використавши формулу (2.70), отримаємо

$$f(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\alpha\frac{\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)(y_i-y_j)}{\prod\limits_{1\le i,j\le n, i\ne j}(x_i+y_j)},$$

звідки $f(x_1,\ldots,x_n,-x_1,\ldots,-x_n)=\alpha$, а тому $\alpha=1$. Отже,

$$A(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)=\frac{\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)(y_i-y_j)}{\prod\limits_{1\le i,j\le n}(x_i+y_j)}, \tag{2.71}$$

що є шуканою замкненою формулою для подвійного альтернанта Коші.

Окремий випадок подвійного альтернанта Коші отримаємо, поклавши $x_i=i$ та $y_j=j-1$ для всіх $i,j=1,\ldots,n$:

$$H(n):=A(1,2,\ldots,n,0,1,\ldots,n-1)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}. \tag{2.72}$$

Матриця, що стоїть під знаком визначника, називається матрицею Гільберта. З формули (2.71) випливає, що

$$H(n)=\frac{(1!2!\cdots(n-1)!)^3}{n!(n+1)!\cdots(2n-1)!}. \tag{2.73}$$

2.3.3 Циркулянт

Означення 2.3.14. Циркулянтом від n дійсних (або комплексних) аргументів $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ називається визначник порядку n, визначений формулою

$$C = C(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_0 \end{vmatrix}. \tag{2.74}$$

У цьому визначнику кожний наступний рядок, починаючи з другого, отримано шляхом зсуву попереднього на одну позицію вправо. При цьому елементи рядка, що виходять за межі визначника додаються на початок рядка.

Цей визначник обчислюється модифікованим методом розкладу в добуток. Замість представлення матриці, визначник якої обчислюється, у вигляді добутку двох матриць, ми домножимо початкову матрицю на іншу (визначник якої має простий вигляд), так щоб визначник отриманої матриці обчислювався легко.

Введемо таке позначення:

$$w_j^{(n)} = e^{2\pi \mathrm{i} j/n} = \cos(2\pi j/n) + \mathrm{i}\sin(2\pi j/n),\ j = 0, \ldots, n-1,$$

де $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Очевидно $w_0^{(n)} = 1$. В подальшому верхній індекс (n) писати не будемо. Розглянемо многочлен

$$f(z) = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_{n-1} z^{n-1}.$$

Зауважимо, що для довільного $j = 0, \ldots, n-1$ та довільного $k = 1, \ldots, n-1$ має місце рівність

$$\sum_{s=0}^{k-1} x_{n-k+s} w_j^s + \sum_{r=0}^{n-(k+1)} x_r w_j^{k+r} = w_j^k f(w_j) \tag{2.75}$$

яка є наслідком рівності $w_j^n = 1$. Дійсно

$$\sum_{s=0}^{k-1} x_{n-k+s} w_j^s + \sum_{r=0}^{n-(k+1)} x_r w_j^{k+r} = \sum_{s=0}^{k-1} x_{n-k+s} w_j^{n+s} + \sum_{r=0}^{n-(k+1)} x_r w_j^{k+r}$$
$$= w_j^k \Big(\sum_{s=0}^{k-1} x_{n-k+s} w_j^{n+s-k} + \sum_{r=0}^{n-(k+1)} x_r w_j^r \Big) = w_j^k \sum_{t=0}^{n-1} x_t w_j^t = w_j^k f(w_j)$$

Помножимо циркулянт на транспонований визначник Вандермонда від аргументів $(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$:

$$C(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) V(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})^t$$
$$= \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ x_{n-2} & x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ w_0 & w_1 & \cdots & w_{n-1} \\ w_0^2 & w_1^2 & \cdots & w_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_0^{n-1} & w_1^{n-1} & \cdots & w_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

За допомогою формули (2.75) дістанемо

$$C(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) V(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})^t$$
$$= \begin{vmatrix} f(w_0) & f(w_1) & \cdots & f(w_{n-1}) \\ w_0 f(w_0) & w_1 f(w_1) & \cdots & w_{n-1} f(w_{n-1}) \\ w_0^2 f(w_0) & w_1^2 f(w_1) & \cdots & w_{n-1}^2 f(w_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_0^{n-1} f(w_0) & w_1^{n-1} f(w_1) & \cdots & w_{n-1}^{n-1} f(w_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Винесемо з j-го стовпчика спільний множник $f(w_{j-1})$, $j = 1, \ldots, n$. Одержимо

$$C(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) V(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})^t = V(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})^t \prod_{j=1}^{n} f(w_{j-1}).$$

Поділивши обидві частини останньої рівності на $V(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})^t$, дістанемо

$$C(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} f(w_i). \tag{2.76}$$

Остання рівність є канонічною формою запису замкненої форми для циркулянта.

В наших міркуваннях ми використоали те, що $V(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}) \neq 0$ для попарно різних аргументів $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$.

Розділ 3

Застосування

3.1 Об'єм паралелепіпеда в $\mathbb{R}^n$.

В цьому підрозділі ми будемо активно використовувати базові поняття теорії лінійних та евклідових арифметичних просторів, такі як: лінійна незалежність, ранг системи векторів, ортогональна проекція, матриця Грама. Читачеві, не знайомому з цими поняттями, варто спочатку звернутись до Додатків 4.3, 4.5, 4.7.

Нагадаємо, що кожній точці площини чи тривимірного простору можна співставити її радіус-вектор та при цьому координати точки співпадають з координатами цього вектора. Керуючись цим досвідом, можна визначити поняття точки простору $\mathbb{R}^n$. А саме, точкою M будемо називати довільний набір

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ми також будемо ототожнювати точку з її радіус-вектором

$$r_M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n.$$

Таким чином, нижче ми будемо казати, що точка задається вектором, якщо координати точки збігаються з координатами цього вектора.

Означення 3.1.1. Паралелепіпедом П, побудованим на лінійно незалежних векторах $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{R}^n$, називаєтсья множина точок

$$\Pi(f_1, \ldots, f_m) = \{M \in \mathbb{R}^n : r_M = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \;\; 0 \leq \lambda_i \leq 1, \;\; i = 1, \ldots, m\}.$$

Розмірністю паралелепіпеду $\Pi(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ називається число m.

Означення 3.1.2. Об'єм m-вимірного паралелепіпеда $\Pi(f_1, \ldots, f_m)$ визначається індуктивно як добуток об'єму паралелепіпеда $\Pi(f_1, \ldots, f_{m-1})$ на довжину ортогональної складової вектора f_m відносно $(m-1)$-вимірного підпростору, породженого векторами $f_1, \ldots, f_{m-1}$. Об'єм одновимірного паралелепіпеда покладаєтсья рівним довжині вектора, що його породжує.

Зауважимо, що це означення є природним узагальненням відомих з курсу елементарної математики формул "площа паралелограма дорівнює добутку довжини основи на висоту" та "об'єм паралелепіпеду дорівнює добутку площі основи на висоту". А саме, аналогом площі основи є об'єм грані $\Pi(f_1, \ldots, f_{m-1})$, а довжині висоти – довжина ортогональної складової f_m відносно $< f_1, f_2, \ldots, f_{m-1} >$.

Позначимо через h_k ортогональну складову вектора f_k відносно підпростору $< f_1, \ldots, f_{k-1} >$ для $k > 1$ та покладемо $h_1 := f_1$. Згідно твердження 4.7.12 Додатку 4.7,

$$||h_k||^2 := \frac{\det(G(f_1, \ldots, f_k))}{\det(G(f_1, \ldots, f_{k-1}))}, \;\; k > 1,$$

де G – матриця Грама відповідної системи векторів.

Покладемо

$$V\big(\Pi(f_1)\big) = ||f_1|| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} = \sqrt{G(f_1)}.$$

Індукцією за m легко отримати наступний результат (зробіть це самостійно).

Теорема 3.1.3. *Об'єм V паралелепіпеда $\Pi(f_1, \ldots, f_m)$ розмірності m в просторі $\mathbb{R}^n$ обчислюється за формулою*

$$V = \sqrt{\det(G(f_1, \ldots, f_m))}. \tag{3.1}$$

Окремо розглянемо випадок $m = n$. Згідно формули (4.18) маємо рівність

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n} \end{pmatrix} \right|, \qquad (3.2)$$

де $f_i = (f_{1,i}, f_{2,i}, \ldots, f_{n,i})^t$ для $i = 1, \ldots, n$. Іншими словами, об'єм n-вимірного паралелепіпеда в $\mathbb{R}^n$ дорівнює абсолютному значенню визначника, стовпчиками якого є вектори, що породжують цей паралелепіпед. Тоді значення цього визначника природно називати *орієнтованим об'ємом* відповідного паралелепіпеда. Порівняйте цей результат з формулами (1.3) та (1.6), (1.7).

У наведеному нижче твердженні зібрано деякі цікаві властивості об'єму паралелепіпеда.

Твердження 3.1.4. *Нехай* $\Pi(f_1, \ldots, f_m)$ – *паралелепіпед в* $\mathbb{R}^n$ *та* $V(f_1, \ldots, f_m)$ – *його об'єм. Тоді*

1. $V(cf_1, f_2, \ldots, f_m) = |c| V(f_1, f_2, \ldots, f_m), \;\; c \neq 0$;
2. $V(f_1, \ldots, f_l, f_{l+1}, \ldots, f_m) \leq V(f_1, \ldots, f_l) V(f_{l+1}, \ldots, f_m), \;\; 1 \leq l < m$;
3. $V(f_1, \ldots, f_m) \leq ||f_1|| \cdots ||f_m||$.

Доведення. Властивість 1 напряму випливає з формули (3.1) та властивостей визначника. Властивість 3 випливає з того, що довжина ортогональної складової вектора f_i відносно $< f_1, f_2, \ldots, f_{i-1} >$ не перевищує $||f_i||$, $i = 2, \ldots, m$.

Доведемо другу властивість. Нехай $L_i =< f_1, \ldots, f_i >$, h_i – ортогональна складова f_i відносно L_{i-1}, $i > 1$. Тоді

$$V(f_1, \ldots, f_l, f_{l+1}, \ldots, f_m) = V(f_1, \ldots, f_l) ||h_{l+1}|| \cdots ||h_m||. \qquad (3.3)$$

Для кожного $i > l$ розглянемо підпростір $M_i =< f_{l+1}, \dots, f_i > \subset L_i$. Позначимо через h'_i ортогональну складову вектора f_i відносно M_{i-1}, $i > l+1$. Також покладемо $h'_{l+1} = f_{l+1}$. Тоді з твердження вправи 4.7.13 випливає $||h'_i|| \geq ||h_i||$, $i > l+1$, та $||h'_{l+1}|| = ||f_{l+1}|| \geq ||h_{l+1}||$. Отже,

$$V(f_{l+1}, \dots, f_m) = ||h'_{l+1}|| \cdots ||h'_m|| \geq ||h_{l+1}|| \cdots ||h_m||. \tag{3.4}$$

Поєднуючи (3.3) та (3.4) одержимо властивість 2. $\square$

3.1.1 Зміна об'єму при лінійному перетворенні

Нехай $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – взаємно однозначне (невироджене) лінійне відображення, яке задається матрицею $A := [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$:

$$\mathcal{A}(x) = A \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Розглянемо n-вимірний паралелепіпед $\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n)$ та переконаємось, що його образ

$$\mathcal{A}(\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n)) = \{\mathcal{A}(x) \mid x \in \Pi(f_1, f_2, \dots, f_n))\}$$

також є паралелепіпедом розмірності n.

Спочатку зауважимо, що для лінійно незалежної системи векторів $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{F}^n$ з невиродженості відображення $\mathcal{A}$ випливає лінійна незалежність системи векторів $\mathcal{A}(f_1), \mathcal{A}(f_2), \dots, \mathcal{A}(f_n)$. Дійсно, з рівності

$$\lambda_1 \mathcal{A}(f_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(f_2) + \cdots + \lambda_n \mathcal{A}(f_n) = \mathbf{0}$$

та лінійності відображення $\mathcal{A}$ випливає рівність

$$\mathcal{A}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n) = \mathbf{0}.$$

Тоді з ін'єктивності відображення $\mathcal{A}$ одержимо (нагадаємо, що $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$)

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = \mathbf{0}.$$

З незалежності векторів $f_1, f_2, \dots, f_n$ дістанемо

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Отже, система $\mathcal{A}(f_1), \mathcal{A}(f_2), \dots, \mathcal{A}(f_n)$ лінійно незалежна.

Таким чином, для незалежної системи векторів $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}^n$ та невиродженого лінійного відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ можна розглядати n-вимірний паралелепіпед $\Pi(\mathcal{A}(f_1), \mathcal{A}(f_2), \dots, \mathcal{A}(f_n))$.

Твердження 3.1.5. *Нехай $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – невироджене лінійне відображення, що задане матрицею $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тоді для довільного n-вимірного паралелепіпеду $\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n)$*

$$\mathcal{A}\big(\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n)\big) = \Pi\big(\mathcal{A}(f_1), \mathcal{A}(f_2), \dots, \mathcal{A}(f_n)\big)$$

та

$$V\Big(\mathcal{A}\big(\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n)\big)\Big) = |\det A| \cdot V\Big(\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n)\Big) \tag{3.5}$$

Доведення. Розглянемо $x \in \Pi(f_1, f_2, \dots, f_n)$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i, \ \ 0 \le \lambda_i \le 1, \ \ i = 1, \dots, n.$$

Для $y = \mathcal{A}x \in \mathcal{A}(\Pi(f_1, \dots, f_n))$ будемо мати

$$y = \mathcal{A}\big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{A}(f_i), \ \ 0 \le \lambda_i \le 1, \ \ i = 1, \dots, n.$$

Отже, $\mathcal{A}\big(\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n)\big) \subset \Pi\big(\mathcal{A}(f_1), \mathcal{A}(f_2), \dots, \mathcal{A}(f_n)\big)$. Обернене включення доводиться аналогічно.

Знайдемо об'єм паралелепіпеда $\mathcal{A}(\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n))$.

$$\begin{aligned} V(\mathcal{A}(\Pi(f_1, f_2, \dots, f_n))) &= V\big(\Pi\big(\mathcal{A}(f_1), \mathcal{A}(f_2), \dots, \mathcal{A}(f_n)\big)\big) \\ &= \sqrt{\det G(\mathcal{A}(f_1), \dots, \mathcal{A}(f_n))}. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що

$$G\big(\mathcal{A}(f_1),\dots,\mathcal{A}(f_n)\big)\\ = \Big(\mathcal{A}(f_1)|\mathcal{A}(f_2)|\cdots|\mathcal{A}(f_n)\Big)^t\cdot\Big(\mathcal{A}(f_1)|\mathcal{A}(f_2)|\cdots|\mathcal{A}(f_n)\Big)$$

та, за означенням добутку матриць,

$$\Big(\mathcal{A}(f_1)|\mathcal{A}(f_2)|\cdots|\mathcal{A}(f_n)\Big)\\ = \Big(A\cdot f_1|A\cdot f_2|\cdots|A\cdot f_n\Big) = A\cdot\Big(f_1|f_2|\cdots|f_n\Big).$$

Нехай

$$F = \Big(f_1|f_2|\cdots|f_n\Big).$$

Тоді

$$\Big(\mathcal{A}(f_1)|\mathcal{A}(f_2)|\cdots|\mathcal{A}(f_n)\Big)^t\cdot\Big(\mathcal{A}(f_1)|\mathcal{A}(f_2)|\cdots|\mathcal{A}(f_n)\Big)\\ = \big(AF\big)^t\cdot\big(AF\big) = F^t\,A^t\,A\,F.$$

Остаточно,

$$\det G(\mathcal{A}(f_1),\dots,\mathcal{A}(f_n))\\ = \det\big(F^t\,A^t\,A\,F\big) = \det F^t\cdot\det A^t\cdot\det A\cdot\det F\\ = |\det A|^2\det(F^t\,F) = |\det A|^2\det G(f_1,f_2,\dots,f_n)$$

звідки випливає рівність (3.5).

□

Отже, при невиродженому лінійному перетворенні з матрицею A об'єм паралелепіпеду змінюється у $|\det A|$ разів. Аналогічне твердження вірне для будь-якого тіла в $\mathbb{R}^n$, поняття об'єму якого може бути визначене шляхом апроксимації вписаними та описаними паралелепіпедами. Проте ці питання виходять за межі нашої книги і ми не будемо на них зупинятись.

3.2 Теорія чисел: ланцюгові дроби та континуанти

Означення 3.2.1. Для заданих послідовностей $(a_n)_{n\geq 1}$ та $(b_n)_{n\geq 0}$ дійсних чисел визначимо нову послідовність $(f_n)_{n\geq 0}$ так:

$$f_0 = b_0, \quad f_1 = b_0 + \frac{a_1}{b_1}, \quad f_2 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}}, \quad f_3 = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3}}}, \quad \ldots . \tag{3.6}$$

Елементи послідовності $(f_n)_{n\geq 0}$ називаються узагальненими *ланцюговими дробами.*

В подальшому для елементів послідовності (3.6) будемо вживати позначення

$$f_n = [b_0; b_1, \ldots, b_n; a_1, \ldots, a_n].$$

Зауважимо, що в таких позначеннях має місце рівність

$$f_n = [b_0; b_1, \ldots, b_n; a_1, \ldots, a_n] = [b_0; b_1, \ldots, b_{n-1} + \frac{a_n}{b_n}; a_1, \ldots, a_{n-1}]. \tag{3.7}$$

Означення 3.2.2. Якщо $a_i = 1$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, числа b_i натуральні для $i \in \mathbb{N}$, а b_0 ціле, то елементи послідовності (3.6) називаються звичайними (регулярними) ланцюговими дробами.

Для послідовності (3.6) регулярних ланцюгових введемо позначення $f_n = [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_n]$ і казатимемо, що f_n має довжину n.

Будь-яке раціональне число можна представити у вигляді скінченного регулярного ланцюгового дробу, застосовуючи ітеративну процедуру, виділення цілої частини. Наприклад:

$$\frac{317}{95} = 3 + \frac{32}{95} = 3 + \frac{1}{\frac{95}{32}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{31}{32}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{32}{31}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{31}}}.$$

Отже, $\frac{317}{95} = [3; 2, 1, 31]$. Застосування аналогічної процедури для ірраціональних чисел приводить до нескінченних ланцюгових дробів. Спробуємо застосувати процедуру виділення цілої частини для ірраціонального числа $\sqrt{2}$. Маємо

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}.$$

Ітеруючи, отримаємо

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}}} = \dots$$

Якщо покласти $f_0 := [1]$, $f_1 := [1;2]$, $f_2 = [1;2,2]$ і т. д, то природно очікувати, що границя $\lim_{n\to\infty} f_n$ існує і рівна $\sqrt{2}$ та писати $\sqrt{2} = [1;2,2,2,\dots]$. Можна показати (ми цього робити не будемо), що для довільного вибору $b_i \in \mathbb{N}$ та $b_0 \in \mathbb{Z}$ границя

$$[b_0; b_1, b_2, \dots] := \lim_{n\to\infty} [b_0; b_1, b_2, \dots, b_n]$$

існує і є представленням деякого ірраціонального числа *нескінченним ланцюговим дробом.*

Твердження 3.2.3. *Кожне дійсне число a представляється ланцюговим дробом. Число a раціональне тоді й тільки тоді коли відповідний ланцюговий дріб скінченний. Представлення дійсного числа регулярним ланцюговим дробом єдине, за умови, що таке представлення для раціональних чисел вибирається мінімальної довжини*[1].

Встановимо тепер зв'язок між ланцюговими дробами та визначниками.

[1]Це твердження пояснює, чому ланцюгові дроби є цікавими: в певному сенсі, представлення дійсних чисел ланцюговими дробами відображає структуру дійсних чисел без прив'язки до конкретної системи числення. Наприклад, раціональне число 1/3 має нескінченне представлення в десятковій (чи двійковій) системі числення, а в трійковій таке представлення вже буде скінченним. Іншою перевагою ланцюгових дробів є те, що вони в підхожому розумінні дають найкращі апроксимації ірраціональних чисел раціональними. Зацікавленим у цих питанннях читачам ми рекомендуємо чудовий нарис А. Я. Хінчина "Ланцюгові дроби" [12].

Теорема 3.2.4. *Нехай* $(f_n)_{n\geq 0}$ – *послідовність узагальнених ланцюгових дробів, побудованих за послідовностями* $(a_n)_{n\geq 1}$ *та* $(b_n)_{n\geq 0}$*. Тоді для довільного натурального* n *має місце представлення*

$$f_n = \frac{H_{n+1}}{H_{1,1}^{(n+1)}}, \tag{3.8}$$

де $H_{1,1}^{(n+1)}$ – *мінор елемента* b_0 *у визначнику*

$$H_{n+1} := \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix}.$$

Тридіагональний визначник такого вигляду називається континуантою і задовольняє рекурентне співвідношення

$$H_1 = b_0, \quad H_2 = a_1 + b_0 b_1, \quad H_{n+1} = b_n H_n + a_n H_{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{3.9}$$

Доведення. Рекуренте співвідношення (3.9) перевіряється розкриттям визначника H_{n+1} за останнім стопчиком. Доведемо рівність (3.8) методом математичної індукції.

Для $n = 1$ твердження очевидне. Нехай воно виконується для $n = m-1$, тобто

$$f_{m-1} = [b_0; b_1, \dots, b_{m-1}; a_1, \dots, a_{m-1}] = \frac{H_m}{H_{1,1}^{(m)}}.$$

Тоді

$$f_m = [b_0; b_1, \dots, b_{m-1} + \frac{a_m}{b_m}; a_1, \dots, a_{m-1}] = \frac{Q_m}{Q_{1,1}^{(m)}},$$

де $Q_{1,1}^{(m)}$ – мінор елемента b_0 в першому рядку та першому стовпчику визначника

$$Q_m := \begin{vmatrix} b_0 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-2} & a_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_{m-1} + \frac{a_m}{b_m} \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник в суму двох за останнім стовпчиком, отримаємо, що $Q_m = H_m + \frac{a_m}{b_m} H_{m-1}$; аналогічно, $Q_{1,1}^{(m)} = H_{1,1}^{(m)} + \frac{a_m}{b_m} H_{1,1}^{(m-1)}$. Звідки, в силу співвідношення (3.9),

$$f_m = \frac{b_m H_m + a_m H_{m-1}}{b_m H_{1,1}^{(m)} + a_m H_{1,1}^{(m-1)}} = \frac{H_{m+1}}{H_{1,1}^{(m+1)}}.$$

Доведення завершено. $\square$

Якщо $a_i = 1$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, континуанта називається регулярною. Позначимо регулярну континуанту з елементами $b_0, b_1, \dots, b_n$ на діагоналі через $H_{n+1}(b_0, b_1, \dots, b_n)$,

$$H_{n+1}(b_0, b_1, \dots, b_n) := \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & b_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & b_n \end{vmatrix}.$$

Для зручності покладемо $H_0() := 1$. Таким чином, регулярний ланцюговий дріб $[b_0; b_1, b_2, \dots, b_n]$ є відношенням двох континуант:

$$[b_0; b_1, \dots, b_n] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_n}}}} = \frac{H_{n+1}(b_0, b_1, \dots, b_n)}{H_n(b_1, b_2, \dots, b_n)}.$$

Подивимось на перші чотири регулярні континуанти:

$$\begin{aligned} H_1(b_0) &= b_0, \\ H_2(b_0, b_1) &= 1 + b_0 b_1, \\ H_3(b_0, b_1, b_2) &= b_0 + b_2 + b_0 b_1 b_2, \\ H_4(b_0, b_1, b_2, b_3) &= b_0 b_1 b_2 b_3 + b_2 b_3 + b_0 b_3 + b_0 b_1 + 1. \end{aligned}$$

Як вперше помітив Ейлер, многочлен $H_{n+1}(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ можна отримати, почавши з одночлена $b_0 b_1 \cdots b_n$ та додаючи мономи, отримані з нього викресленням всіх можливих добутків $b_i b_{i+1}$.

Серед багатьох важливих співвідношень, яким задовольняють регулярні континуанти відзначимо наступне, що може бути легко доведене з використанням теорії визначників.

Твердження 3.2.5. *Для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ має місце рівність:*

$$\begin{aligned} H_{m+n}(b_0, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_{m+n-1}) &= H_m(b_0, \ldots, b_{m-1}) H_n(b_m, \ldots, b_{m+n-1}) \\ &\quad + H_{m-1}(b_0, \ldots, b_{m-2}) H_{n-1}(b_{m+1}, \ldots, b_{m+n-1}). \end{aligned}$$

Доведення. Розкривши визначник $H_{n+m}(b_0, \ldots, b_{n+m})$ за $(m+1)$-м стовпчиком, та використавши теорему про визначник блочно-трикутної матриці (твердження 2.2.29), отримаємо

$$\begin{aligned} H_{n+m}(b_0, \ldots, b_{n+m}) &= b_m H_m(b_0, \ldots, b_{m-1}) H_{n-1}(b_{m+1}, \ldots, b_{n+m-1}) \\ &\quad + H_{m-1}(b_0, \ldots, b_{m-2}) H_{n-1}(b_{m+1}, \ldots, b_{n+m-1}) \\ &\quad + H_m(b_0, \ldots, b_{m-1}) H_{n-2}(b_{m+2}, \ldots, b_{n+m-1}) \\ &\quad = \Big(b_m H_{n-1}(b_{m+1}, \ldots, b_{n+m-1}) + H_{n-2}(b_{m+2}, \ldots, b_{n+m-1}) \Big) \times \\ &\quad \times H_m(b_0, \ldots, b_{m-1}) + H_{m-1}(b_0, \ldots, b_{m-2}) H_{n-1}(b_{m+1}, \ldots, b_{n+m-1}). \end{aligned}$$

Помітивши, що вираз, який стоїть в дужках у першому доданку, рівний $H_n(b_m, \ldots, b_{n+m-1})$, отримуємо формулу (3.10). □

На завершення нашого знайомства з ланцюговими дробами наведемо ще одне чудове застосування континуант. Для цього нам знадобиться поняття медіанти та дерева Штерна-Броко.

Означення 3.2.6. Медіантою двох додатних раціональних чисел $\frac{m_1}{n_1}$ та $\frac{m_2}{n_2}$ називається число $\frac{m_1+m_2}{n_1+n_2}$.

Дерево Штерна-Броко дає можливість записати всі додатні раціональні числа (нескоротні дроби) у вигляді двійкового дерева наступним чином: на першому кроці побудови записуємо два дроби $0/1$ та $1/0$ (вважаємо цей запис синонімом $+\infty$), на кожному наступному кроці додаємо між сусідніми дробами їх медіанту.

Виконуючи цю побудову у вигляді бінарного дерева, коренем якого є дріб $1/1$, отримаємо дерево Штерна-Броко (див. Рис. 3.1). Воно має такі властивості[2]

- всі додатні раціональні числа представлені в дереві;
- всі дроби в дереві нескоротні;
- жодний нескоротний дріб не зустрічається двічі;
- кожному додатньому раціональному числу r можна поставити у взаємно однозначну відповідність скінченний рядок, що складається з символів R та L і який відповідає єдиному шляху від кореня до вершини дерева, що відповідає r (система числення Штерна-Броко). Наприклад $5/8 \leftrightarrow LRLR$, $7/3 \leftrightarrow RRLL$, дробу $1/1$ відповідає порожній рядок.

Наступне твердження (див. розділ 6.7 в [6]) вказує зв'язок між континуантами та системою числення Штерна-Броко.

[2]Детальне дослідження цього дерева та доведення наведених нижче тверджень можна знайти у розділі 4.5 книги [6].

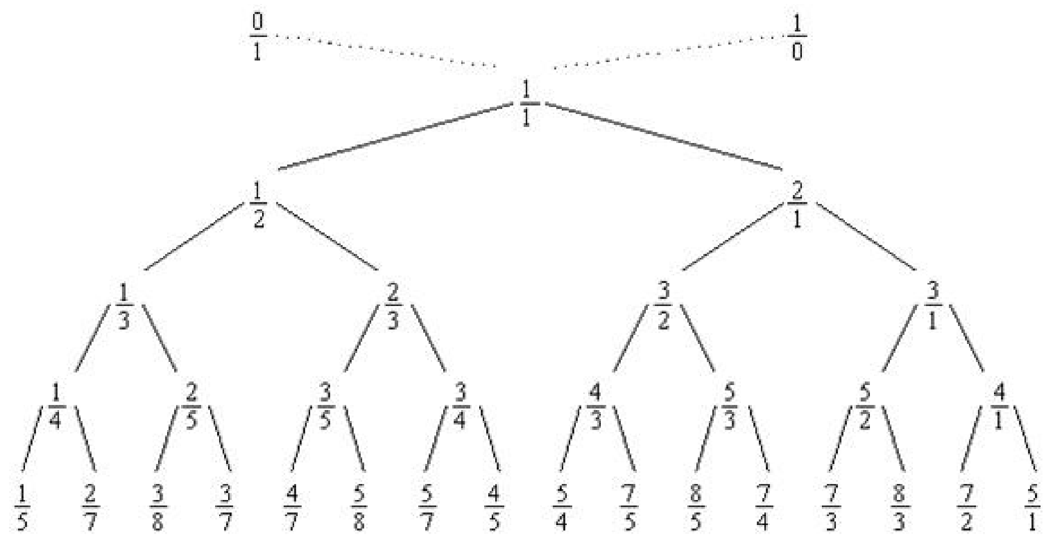

Рис. 3.1: Дерево Штерна-Броко.

Твердження 3.2.7. *Нехай додатне раціональне число r представлено в системі числення Штерна-Броко рядком $R^{a_0}L^{a_1}R^{a_2}L^{a_3}\cdots L^{a_{n-1}}$, де*

$$a_0 \geq 0,\ \ a_1 \geq 1,\ \ a_2 \geq 1, \ldots, a_{n-2} \geq 1,\ \ a_{n-1} \geq 0.$$

Тоді

$$r = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, 1] = \frac{H_{n+1}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)}{H_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)}. \tag{3.10}$$

Вправи

Задача 3.2.8. Нехай раціональне число n/m $(n > m)$ представлено регулярним ланцюговим дробом $n/m = [b_0; b_1, \ldots, b_k]$, де $b_k \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Скільки ділень потрібно виконати в алгоритмі Евкліда для знаходження НСД(n, m)?

Задача 3.2.9. Нехай $(F_n)_{n\geq 0}$ – послідовність чисел Фібоначчі. Тобто $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ та $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ для $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Показати, що

- $F_n = H_n(1, 1, \ldots, 1)$, $n \geq 0$,

- $F_{m+n+1} = F_{m+1}F_{n+1} + F_nF_m$, $n, m \geq 0$.

Задача 3.2.10. Нехай u_n (відповідно, v_n) максимальний знаменник (відповідно, чисельник) тих дробів, що містяться на n-му рівні дерева Штерна-Броко, якщо вважати, що $1/1$ лежить на нульовому рівні. Довести, що $u_n = v_n = F_{n+2}$. Який запис в системі числення Штерна-Броко мають відповідні дроби? Знайдіть

$$\max\left\{H_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) : n \leq N, \sum_{i=1}^{n} a_i = N, a_i \geq 1\right\}.$$

3.3 Комбінаторика

Визначники природним чином виникають у багатьох розділах перелічувальної комбінаторики (англ. enumerative combinatorics) – частини комбінаторики, яка займається задачами підрахунку кількості об'єктів заданого типу. У вигляді визначників формулюються відповіді на великий клас задач перелічення, за допомогою визначників записуються в "явному вигляді" важливі класи спеціальних чисел (числа Ейлера, числа Бернуллі тощо), що повсякчас виникають у проблемах комбінаторики. Зупинимось детальніше на деяких з цих задач.

3.3.1 Задача про кількість шляхів, що не перетинаються

Нехай G – ациклічний орієнтований граф на якому задано два набори вершин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ та $E_1, E_2, \ldots, E_n$ такі, що для всіх $i < j$ та $k < l$ довільний (орієнтований) шлях, що сполучає A_i та E_l перетинає[3] довільний шлях, що сполучає A_j та E_k. Нас цікавить кількість D_n сімей шляхів $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ таких, що P_i сполучає A_i та E_i та P_i не перетинає P_j для

[3] Два шляхи на графі перетинаються, якщо існує вершина, що належить обом шляхам

$i \neq j$. На рис. 3.2 зображено приклад сім'ї шляхів, що не перетинаються, у цьому прикладі графом (нескінченним) є гратка $\mathbb{Z}^2$, а переходи можливі лише на схід або північ.

Має місце такий результат

Теорема 3.3.1 (Карлін-МакГрегор, Ліндстрьом, Гессель-В'єно)**.** *Для числа D_n сімей шляхів маємо формулу*

$$D_n = \det[p_{j,i}]_{1\le i,j\le n}, \tag{3.11}$$

де $p_{j,i}$ – кількість шляхів, що сполучають вершину A_j з вершиною E_i.

Суто комбінаторне доведення, яке ми наводимо нижче було запропоновано в роботах [16, 21].

Доведення. Запишемо визначник в правій частині рівності (3.11) за формулою Коші:

$$\det[p_{j,i}]_{1\le i,j\le n} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma \prod_{i=1}^{n} p_{\sigma(i),i}.$$

Для фіксованої перестановки σ, добуток, що стоїть в середині суми дорівнює кількості сімейств шляхів, що сполучають $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ з

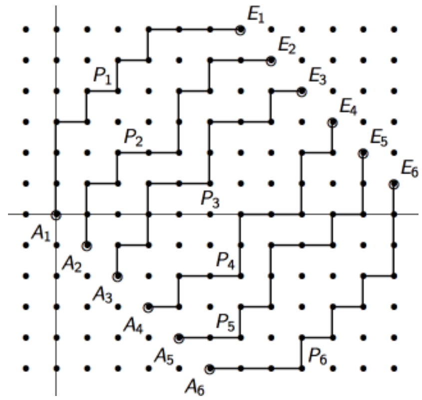

Рис. 3.2: Шляхи на графі

$E_1, E_2, \ldots, E_n$, відповідно, тому

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma \prod_{i=1}^{n} p_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma \sum_{(P_1,P_2,\ldots,P_n)} \mathbb{1}(P_i \text{ сполучає } A_{\sigma(i)} \text{ з } E_i,\ i=1,\ldots,n) \\
&= \sum_{(P_1,P_2,\ldots,P_n)} \mathbb{1}(P_i \text{ сполучає } A_i \text{ з } E_i,\ P_i \text{ не перетинає } P_j \text{ для } i\neq j) \\
&+ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n/\{e\}} \mathbf{sign}\,\sigma \sum_{(P_1,P_2,\ldots,P_n)} \mathbb{1}(P_i \text{ сполучає } A_{\sigma(i)} \text{ з } E_i, \\
&\qquad\qquad P_i \text{ не перетинає } P_j \text{ для всіх } i\neq j) \\
&+ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathbf{sign}\,\sigma \sum_{(P_1,P_2,\ldots,P_n)} \mathbb{1}(P_i \text{ сполучає } A_{\sigma(i)} \text{ з } E_i, \\
&\qquad\qquad P_i \text{ перетинає } P_j \text{ для деяких } i\neq j),
\end{aligned}$$

де e позначає тотожню перестановку. Очевидно, теорема буде доведена, якщо ми покажемо, що друга й третя суми рівні нулю.

Нагадаємо, що за умовою, кожні два шляхи, один з яких сполучає A_i та E_l, а другий A_j та E_k, де $i < j$ та $k < l$, перетинаються. Розглянемо довільну перестановку $\sigma \neq e$. Очевидно, знайдеться пара елементів пере-

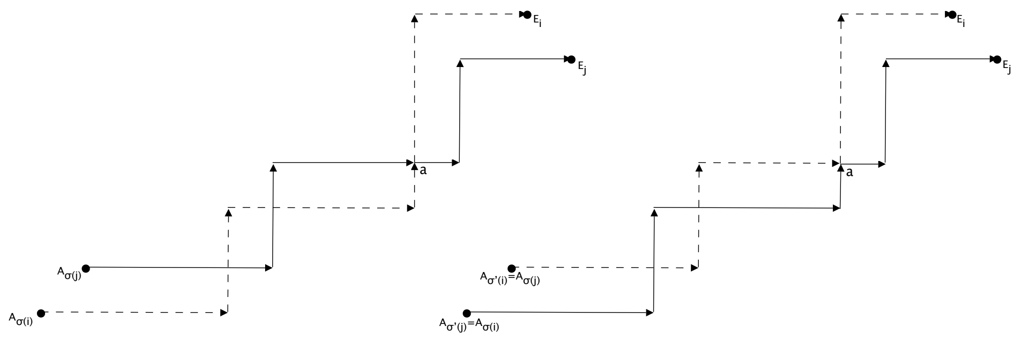

Рис. 3.3: Побудова бієкції між множинами M та N в доведенні теореми 3.3.1

становки σ, які утворюють інверсію: $\sigma(i) > \sigma(j)$, $i < j$. Тоді шлях P_i, який сполучає $A_{\sigma(i)}$ та E_i, перетинає шлях P_j, який сполучає $A_{\sigma(j)}$ та E_j. Отже, для довільної нетотожньої перестановки σ всі індикатори в сумі

$$\sum_{(P_1,P_2,\dots,P_n)} \mathbb{1}(P_i \text{ сполучає } A_{\sigma(i)} \text{ з } E_i,\ P_i \text{ не перетинає } P_j \text{ для всіх } i \neq j)$$

рівні нулю.

Покажемо, що третя сума дорівнює нулю. Для цього достатньо перевірити, що

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n, \sigma \text{ парна}} \sum_{(P_1,P_2,\dots,P_n)} \mathbb{1}(P_i \text{ сполучає } A_{\sigma(i)} \text{ з } E_i,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad P_i \text{ перетинає } P_j \text{ для деяких } i \neq j)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n, \sigma \text{ непарна}} \sum_{(P_1,P_2,\dots,P_n)} \mathbb{1}(P_i \text{ сполучає } A_{\sigma(i)} \text{ з } E_i,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad P_i \text{ перетинає } P_j \text{ для деяких } i \neq j).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що перша (відповідно, друга) з цих сумм дорівнює потужності множини M (відповідно, N) сімейств шляхів, які сполучають $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(n)}$ з $E_1, E_2, \dots, E_n$ таких, що існує пара шляхів, що перетинаються, а σ пробігає множину парних (відповідно, непарних) перестановок. Побудуємо бієкцію між M та N, що й завершить доведення. Візьмемо довільне сімейство шляхів $(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in M$. Розглянемо найменшу в лексикографічному сенсі пару (i, j), $i < j$, для якої шляхи P_i та P_j перетинаються. При цьому кожен шлях P_k сполучає $A_{\sigma(k)}$ з E_k, де σ – парна переставновка. Нехай a – остання, починаючи з $A_{\sigma(i)}$, вершина шляху P_i, яка належить також шляху P_j. Поміняємо тепер траєкторії шляхів P_i та P_j до вершини a місцями (дивись рис. 3.3), а решту шляхів залишимо без зміни. Позначимо утворене сімейство $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_n)$, тоді P'_i перетинається з P'_j, а P'_k сполучає $A_{\sigma'(k)}$ та E_k, де перестановка σ' утворена з σ транспозицією елементів з номерами i та j, а, отже, є непарною, тому $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_n) \in N$. Таким чином, ми побудували відображення з M в N, яке, очевидно, є бієкцією (для нього існує обернене, їм буде те саме перетворення, лиш з тією відмінністю, що області відправлення та прибуття потрібно поміняти місцями). Доведення завершено. $\square$

3.3.2 Кількість остовів у графі

Розглянемо неорієнтований граф G, який може містити кратні ребра. Остовом графа G називається ациклічний підграф, що містить всі вершини G, та є зв'язним на кожній зв'язній компоненті G. Нехай

- $A(G) = [a_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ – матриця суміжності G , тобто $a_{i,j}$ дорівнює кількості ребер, що сполучають вершини i та j;
- $D(G) = [d_{i,j}]_{1 \le i,j \le n}$ – степенева матриця G, тобто
$$d_{i,j} = deg(v_i) \cdot \mathbb{1}(i = j);$$
- $L(G) = D(G) - A(G)$ – матриця Кірхгофа .

Для довільної підмножини S вершин графа G позначимо через $L(G)[S]$ підматрицю $L(G)$, отриману видаленням рядків та стовпчиків, що відповідають вершинам з S. Має місце наступний результат.

Теорема 3.3.2 (теорема Кірхгофа)**.** *Число остовів графа G з більш ніж однією вершиною дорівнює* $\det L(G)[u]$ *для довільної вершини u.*

Доведення. Нехай $\tau(G)$ – кількість остовів графа G. Зафіксуємо деяке ребро e та розглянемо граф $G - \{e\}$, отриманий видаленням ребра e з множини ребер G; та граф $G/\{e\}$, отриманий "стягуванням" кінців ребра e в одну вершину. Розіб'ємо множину остовів G на два класи: перший клас складається з остовів, які містять e, а другий – з остовів, які не містять e. Між першим класом та множиною остовів графа $G/\{e\}$ можна встановити бієкцію. А саме, кожному остову G' графа G, який містить e, відповідає остов $G'/\{e\}$ графа $G/\{e\}$. Очевидно, другий клас знаходиться у взаємно однозначній відповідності з множиною остовів графа $G - \{e\}$. Таким чином,

$$\tau(G) = \tau(G/\{e\}) + \tau(G - \{e\}). \tag{3.12}$$

Нехай ребро e сполучає вершини u та v. Позначимо через E_{vv} квадратну матрицю, що містить 1 на позиції (v, v) та нулі на інших місцях. Тоді

$$L(G)[u] = L(G - \{e\})[u] + E_{vv}.$$

Дійсно, степінь вершини v в графі $G - \{e\}$ на 1 менша, ніж степінь v в графі G, та для кожної пари різних вершин $w_1, w_2 \neq u$ кількості ребер, що сполучають w_1 та w_2 в графах G та $G - \{e\}$ співпадають.

Таким чином, стовпчик, що відповідає вершині v, матриці $L(G)[u]$ є сумою v-го стовпчика матриці $L(G - \{e\})[u]$ та вектора, в якому координата з номером v дорівнює нулю, а решта координат нульові. Оскільки всі інші стовпчики матриць $L(G)[u]$ та $L(G-\{e\})[u]$ співпадають, можемо розкласти $\det L(G)[u]$ в суму за v-м стовпчиком. Одержимо

$$\begin{aligned} \det L(G)[u] &= \det L(G - \{e\})[u] + \det L(G - \{e\})[u, v] \\ &= \det L(G - \{e\})[u] + \det L(G)[u, v], \end{aligned}$$

де ми використали очевидну рівність

$$L(G - \{e\})[u, v] = L(G)[u, v].$$

Розглянемо матрицю $L(G/\{e\})[v]$. Вона утворена з матриці $L(G/\{e\})$ викресленням рядка і стовпчика, який відповідає вершині v. В свою чергу, $L(G/\{e\})$ є матрицею Кірхгофа графа, отриманого стягуванням вершини u на вершину v, тому $L(G/\{e\})[v] = L(G)[u, v]$. Остаточно, отримуємо рекурентне співвідношення

$$\det L(G)[u] = \det L(G - \{e\})[u] + \det L(G/\{e\})[v]. \tag{3.13}$$

Маючи співвідношення (3.12) та (3.13), легко довести теорему індукцією за кількістю ребер. Для графа з одним ребром твердження теореми очевидне. Нехай граф G має n ребер, тоді кожен з графів $G/\{e\}$ та $G-\{e\}$ має $(n-1)$-е ребро. Отже, за припущенням індукції,

$$\tau(G/\{e\}) = \det L(G/\{e\})[u], \text{ та } \tau(G - \{e\}) = \det L(G - \{e\})[v],$$

звідки $\tau(G) = \det L(G)[u]$. □

Зауваження 3.3.3. Це доведення є класичним і взято з книги [17, теорема 13.2.1]. Існують й інші доведення, зокрема, одне з них (див. [23]) використовує чудову комбінаторну аргументацію на зразок тієї, що була використана нами у доведенні теореми Ліндстрьома-Гесселя-В'єно (теорема 3.3.1).

Наслідок 3.3.4 (теорема Келі). Кількість остовів повного графу K_n дорівнює n^{n-2}.

Доведення. Доведення зводиться до перевірки рівності

$$\det L(K_n)[1] = \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = n^{n-2}. \tag{3.14}$$

Зауважимо, що розмір матриці під знаком визначника дорівнює $n-1$. □

Задача 3.3.5. Нехай сума елементів довільного рядка та довільного стовпчика матриці $A \in M_n(\mathbb{F})$ дорівнює нулю. Доведіть, що алгебраїчні доповнення всіх елементів A рівні між собою. Звідси, зокрема, випливає, що кількість остовів графа G дорівнює алгебраїчному доповненню будь-якого елемента матриці $L(G)$.

3.4 Лінійні рекурентні співвідношення

3.4.1 Лінійні рекурентні співвідношення нескінченної глибини

У розділі 2.2.2 ми познайомились з лінійними рекурентними співвідношеннями скінченної глибини. У багатьох задачах зустрічаються так звані рекурсії нескінченної глибини. В таких рекурсіях кожен новий член послідовності залжить не від фіксованої кількості попередніх членів (наприклад, для чисел Фібоначчі – від двох попередніх), а від всієї історії послідовності.

Означення 3.4.1. Нехай задано послідовність $(b_k)_{k\geq 0}$ та трикутний масив чисел $(p_{n,k})_{n\geq 1, 0\leq k<n}$. Послідовність $(a_k)_{k\geq 0}$, яка задана правилом:

$$a_0 = b_0, \quad a_n = b_n + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k} a_k, \quad n \geq 1, \tag{3.15}$$

називається *лінійною рекурентною послідовністю нескінченної глибини.*

Виявляється, що розв'язок лінійного рекурентного співвідношення нескінченної глибини можна знайти в термінах визначників.

Теорема 3.4.2. *Для кожного $n \geq 1$ розв'язок рекурсії* (3.15) *має насту-*

пний вигляд

$$a_n = \Delta_{n+1} := \begin{vmatrix} b_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & p_{1,0} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & p_{2,0} & p_{2,1} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & p_{n-1,0} & p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \dots & p_{n-1,n-2} & -1 \\ b_n & p_{n,0} & p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,n-2} & p_{n,n-1} \end{vmatrix}. \tag{3.16}$$

Доведення. Позначимо матрицю під знаком визначника через D_{n+1}. Нижче буде зручно позначити через D_0 матрицю нульового розміру. Доведемо теорему індукцією за n.

Для $n = 1$ маємо $a_1 = b_1 + p_{1,0}\, b_0 = \begin{vmatrix} b_0 & -1 \\ b_1 & p_{1,0} \end{vmatrix}$, тому теорема вірна для $n = 1$. Нехай вона вірна для всіх $k \le n-1$, тобто $a_k = \Delta_{k+1}$ для вказаних k, доведемо її для $k = n$. Розкладемо $\Delta_{n+1} = \det D_{n+1}$ за останнім рядком:

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= b_n(-1)^{n+2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{1,0} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{2,0} & p_{2,1} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n-1,0} & p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \dots & p_{n-1,n-2} & -1 \end{vmatrix} \\ &+ p_{n,0}(-1)^{n+3} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & p_{2,1} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \dots & p_{n-1,n-2} & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$+p_{n,1}(-1)^{n+4}\begin{vmatrix} b_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & p_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & p_{2,0} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & p_{n-1,0} & p_{n-1,2} & \dots & p_{n-1,n-2} & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\dots+p_{n,n-1}(-1)^{2n+2}\begin{vmatrix} b_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & p_{1,0} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & p_{2,0} & p_{2,1} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & p_{n-1,0} & p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & \dots & p_{n-1,n-2} \end{vmatrix}.$$

Легко помітити, що визначник в k-му доданку, $k = 1, \dots, n+1$, цієї суми має вигляд

$$\begin{vmatrix} D_{k-1} & \mathbf{0} \\ \star & B_k \end{vmatrix} = (-1)^{n+1-k}\Delta_{k-1},$$

де B_k нижня трикутна матриця розміру $n+1-k$ з діагональними елементами рівними -1 та $\Delta_0 := 1$, $\Delta_1 := b_0$. Отже,

$$\Delta_{n+1} = b_n + \sum_{k=2}^{n+1} p_{n,k-2}\Delta_{k-1} = b_n + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k}\Delta_{k+1} = b_n + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k}a_k = a_n,$$

де передостання рівність випливає з припущення індукції, а остання зі співвідношення (3.15). $\square$

Наведемо декілька прикладів застосування цієї теореми.

3.4.1.1 Розклад у ряд Тейлора частки від ділення

Припустимо, що для деякої аналітичої функції $f(z)$ відомий її розклад Тейлора в околі нуля: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, і $f(0) = b_0 \neq 0$. Як знайти розклад Тейлора функції $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ в околі нуля? Виявляється, що коефіцієнти цього розкладу задовольняють деяке лінійне рекурентне співвідношення нескінченної глибини. Покажемо це. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $f(0) = b_0 = 1$. Нехай $\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Тоді

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\Big) z^k \equiv 1,$$

а тому $\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \mathbb{1}(k=0)$. Звідки $a_0 = 1$ та

$$a_k = \sum_{j=0}^{k-1} (-b_{k-j}) a_j, \quad k \geq 1. \tag{3.17}$$

З теореми 3.16 випливає такий результат про розклад $z \mapsto \frac{1}{f(z)}$ в ряд Тейлора.

Твердження 3.4.3. *Нехай* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $f(0) = 1$, *тоді*

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k,$$

де послідовність (a_k) *задана рекурентним співвідношенням* (3.17) *та*

$$a_n = (-1)^n \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{3.18}$$

Наслідок 3.4.4. Якщо функція f парна, тобто $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k}$ та $f(0) = 1$, то

$$\frac{1}{f(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{2k},$$

де a_n задається тією ж формулою (3.18).

Наслідок 3.4.5. Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $f(0) = 1$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Тоді

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

де

$$a_n = (-1)^n \begin{vmatrix} c_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ c_2 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & b_n & b_{n-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \tag{3.19}$$

Якщо $f(0) = 1$, а функції f, g парні,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{2k}, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{2k},$$

то

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{2k},$$

де (a_k) визначаються тією ж формулою (3.19).

У якості застосування цих тверджень отримаємо представлення деяких класів комбінаторних чисел у вигляді визначників.

Числа Ейлера. З наслідку 3.4.4 та відомої з курсу аналізу формули

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

отримуємо представлення

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^{2k},$$

де

$$e_n = (-1)^n \begin{vmatrix} -\frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & -\frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & -\frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(-1)^n}{(2n)!} & \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} & \frac{(-1)^{n-2}}{(2n-4)!} & \dots & -\frac{1}{2!} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix},$$

для $n \geq 1$. Для перевірки останньої рівності домножте на -1 спочатку всі *непарні* рядки, а потім всі *парні* стовпчики визначника зліва[4].

Числа $(2n)!e_n$ називаються (абсолютними) *числами Ейлера*.

Тангенціальні чила. Має місце таке представлення:

$$\operatorname{tg} x = x + \sum_{k=1}^{\infty} t_k x^{2k+1},$$

де

$$t_n = \begin{vmatrix} \frac{2}{3!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{4}{5!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{6}{7!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2n}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1.$$

[4]Це спостереження можна інтерпретувати так: якщо на шаховій дошці поміняти на протилежний колір всіх клітинок у непарних стовпчиках, а потім у парних рядках, то всі клітинки стануть одного кольору.

Щоб його отримати, застосуйте друге твердження у наслідку 3.4.5 до парних функцій

$$g(z) := \frac{\sin z}{z} - \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(2k)z^{2k}}{(2k+1)!}, \quad f(z) := \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}.$$

Числа $(2k+1)!t_k$ називаються *тангенціальними числами.*

Числа Бернуллі. З твердження 3.4.3 та формули $\frac{e^x-1}{x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$ випливає представлення

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k x^k,$$

де

$$b_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Числа $k!b_k$ називаються *числами Бернуллі.* З тотожності $\frac{x}{e^x-1} + \frac{x}{e^{-x}-1} = -x$ випливає, що $b_{2k+1} = 0$, $k \geq 1$.

Числа Белла. Нехай B_n – це кількість різних розбиттів (відношень еквівалентності) n-елементної множини. Можна легко отримати рекурсивну формулу для B_n. Дійсно, нехай блок розбиття, що містить n-ий елемент має розмір $1 \leq k \leq n$. Тоді існує C_{n-1}^{k-1} варіантів вибору інших елементів цього блоку. Решта $n-k$ елементів початкової множини можуть бути розбиті на блоки B_{n-k} способами. Отже,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} B_{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} B_k, \quad n \geq 1.$$

Покладемо $B_0 = 1$. Тоді за теоремою 3.4.2 маємо

$$B_n = \begin{vmatrix} C_0^0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & -1 & \dots & 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n-1}^0 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}, \ \ n \geq 1.$$

Числа B_n називаються числами Белла.

Інформацію про комбінаторний зміст чисел Ейлера, тангенціальних чисел та чисел Бернуллі можна знайти, наприклад у розділі 6 книги [6].

3.4.1.2 Задача про суму степенів

Нехай $S_n(k) := \sum_{j=0}^{k} j^n$, де n – ціле невід'ємне число[5]. Виявляється, що для $S_n(k)$ існує представлення у вигляді визначника порядку $n+1$, а самі вирази $S_n(k)$ є поліномами степеня $n+1$ від змінної k. Нехай $n \geq 1$. Додамо рівності

$$(j+1)^{n+1} - j^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i j^i, \ \ j \geq 0.$$

Отримаємо

$$(k+1)^{n+1} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i j^i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} C_{n+1}^i j^i = \sum_{i=0}^{n} C_{n+1}^i S_i(k),$$

або

$$S_n(k) = \frac{(k+1)^{n+1}}{n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{n+1}^i}{n+1} S_i(k), \ \ n \geq 1.$$

[5]Зауважте, що $S_0(k) = k + 1$, оскільки $0^0 := 1$

З теореми 3.16 після елементарних перетворень, отримаємо

$$S_n(k) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \begin{vmatrix} k+1 & C_1^0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (k+1)^2 & C_2^0 & C_2^1 & \dots & 0 & 0 \\ (k+1)^3 & C_3^0 & C_3^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (k+1)^n & C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} \\ (k+1)^{n+1} & C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \dots & C_{n+1}^{n-2} & C_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{3.20}$$

Зокрема, для $n = 1, 2$ маємо добре відомі формули

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Вправи

Задача 3.4.6. Знайдіть кількість сімейств шляхів, що не перетинаються:

- у випадку, зображеному на рис. 3.2;
- для того самого графу та вершин $A_i = (i, -i)$, $B_i = (n+i, n-i)$, $i = 1, \dots, n$.

Задача 3.4.7. Перевірте рівність (3.14).

3.5 Системи лінійних діофантових рівнянь

В цій частині ми обговоримо базові факти теорії систем лінійних діофантових рівнянь. Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 & + & \alpha_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}x_n & = & \beta_1, \\ \alpha_{2,1}x_1 & + & \alpha_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}x_n & = & \beta_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 & + & \alpha_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m,n}x_n & = & \beta_m \end{cases}$$

називається діофантовою, якщо всі елементи $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\beta_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Розв'язком діофантової системи називається цілочисельний вектор

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n,$$

координати якого задовольняють рівняння системи.

3.5.1 Випадок одного рівняння

Спочатку розберемось з випадком, коли система складається з одного рівняння:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta, \tag{3.21}$$

$\alpha_i, \beta \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 3.5.1. *Рівняння (3.21) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли найбільший спільний дільник d коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ є дільником числа β.*

Доведення. Якщо d_1 спільний дільник чисел α_i, $i = 1, \ldots, n$, та існують цілі $x_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$, то число β ділиться на d_1. Звідси випливає необхідність умови теореми.

Доведемо достатність. Згідно основної теореми про найбільший спільний дільник, див. [3], число d співпадає з **НСД**$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, якщо воно є найменшим за модулем цілим числом, яке можна подати в вигляді

$$d = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n, \quad \text{де} \quad y_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.22}$$

Таким чином, в випадку коли d є дільником числа β, $\beta = d \cdot k$, отримаємо

$$\beta = \alpha_1 k y_1 + \alpha_2 k y_2 + \cdots + \alpha_n k y_n,$$

де $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$ задовольняють (3.22). Отже, рівняння (3.21) має цілочисельний розв'язок $(ky_1, ky_2, \ldots, ky_n)$. $\square$

Перш ніж перейти до випадку систем, що складаються з кількох рівнянь, з'ясуємо яким чином можна знаходити всі цілочисельні розв'язки рівняння (3.21).

Нехай рівняння (3.21) має цілі розв'язкии. З попередньої теореми випливає, що можна вважати **НСД**$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ рівним 1. В протилежному разі розділимо рівняння на найбільший спільний дільник коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Припустимо, що α_1 – найменший за модулем ненульовий коефіцієнт та α_2 не ділиться на α_1. Зрозуміло, що ці припущення не впливають на загальність наших міркувань, оскільки загальна ситуація зводиться до нашої перенумерацією змінних рівняння. Нехай r_2 є залишком від ділення α_2 на α_1:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot p_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < |\alpha_1|, \quad p_2, r_2 \in \mathbb{Z}.$$

Зробимо в рівнянні заміну змінних

$$x_1 = y_1 - p_2 y_2,\ x_2 = y_2, \cdots,\ x_n = y_n.$$

Після підстановки рівняння (3.21) набуде вигляду

$$\alpha_1 y_1 + (\alpha_2 - \alpha_1 \cdot p_2) y_2 + \alpha_3 y_3 + \cdots + \alpha_n y_n = \beta,$$

тобто,

$$\alpha_1 y_1 + r_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \cdots + \alpha_n y_n = \beta. \tag{3.23}$$

Ми одержали рівняння в якому найменший за модулем коефіцієнт менший за $|\alpha_1|$. Зауважимо також, що $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ тоді й тільки тоді, коли $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{Z}^n$. Отже, описана вище заміна змінних переводить діофантову задачу в діофантову задачу, причому **НСД**$(\alpha_1, r_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) = 1$. Якщо хоча б один з коефіцієнтів α_i має модуль більший за r_2, за допомогою нової заміни отримаємо рівняння в якому найменший за модулем коефіцієнт менше ніж r_2.

Повторивши описану вище процедуру скінченну кількість разів, одержимо, з точністю до перестановки невідомих, рівняння

$$z_1 + 0z_2 + \cdots + 0z_n = \beta$$

множина розв'язків якого має вигляд $\{(\beta, z_2, z_3, \ldots, z_n) \mid z_2, z_3, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}\}$. Залишається тільки повернутись до початкових змінних.

Звернемось до матричного запису рівняння (3.21):

$$\big(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \mid \beta\big) \tag{3.24}$$

Заміні змінних $x_j = y_j + ky_i$, $x_s = y_s$, $s \neq j$, відповідає перетворення основної матриці рівняння

$$(\mathbf{i})_{\mathbf{ст}} + k \cdot (\mathbf{j})_{\mathbf{ст}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зрозуміло також, що перенумерації змінних відповідають перестановки стовпчиків основної матриці та заміні змінних вигляду

$$x_s = y_s,\ s \neq j, \quad x_j = -y_j,$$

відповідає перетворення

$$-1 \cdot (\mathbf{j})_{\mathbf{ст}}.$$

Такі перетворення стовпчиків основної матриці діофантового рівняння будемо називати *унімодулярними*, або допустимими. З наведених нами міркувань очевидним чином випливає наступне твердження.

Твердження 3.5.2. *За допомогою унімодулярних перетворень, застосованих до стовпчиків основної матриці, розширену матрицю (3.24) діофантового рівняння (3.21) можна звести до вигляду*

$$\big(d, 0, 0, \ldots, 0 \mid \beta\big), \tag{3.25}$$

де через d позначено **НСД**$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

3.5.2 Загальний випадок

Розглянемо тепер систему діофантових рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 & + & \alpha_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}x_n & = & \beta_1, \\ \alpha_{2,1}x_1 & + & \alpha_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}x_n & = & \beta_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 & + & \alpha_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m,n}x_n & = & \beta_m; \end{cases} \tag{3.26}$$

Побудуємо розширену матрицю цієї системи

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} & \beta_m \end{array}\right). \tag{3.27}$$

Очевидно, що унімодулярні перетворення стовпчиків основної матриці також відповідатимуть допустимим замінам змінних.

Теорема 3.5.3. *За допомогою унімодулярних перетворень, застосованих до стовпчиків основної матриці, та перестановок рядків розширена матриця (3.24) системи лінійних діофантових рівнянь (3.26) може бути зведена до вигляду*

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} d_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{k,1} & d_{k,2} & d_{k,3} & \cdots & d_{k,k} & 0 & \cdots & 0 & \beta_k \\ d_{k+1,1} & d_{k+1,2} & d_{k+13} & \cdots & d_{k+1,k} & 0 & \cdots & 0 & \beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{m,1} & d_{m,2} & d_{m,3} & \cdots & d_{m,k} & 0 & \cdots & 0 & \beta_m \end{array}\right). \tag{3.28}$$

Доведення. Знайдемо рядок основної матриці, що є ненульовим, та переставимо відповідний рядок розширеної матриці на перше місце. За допомогою унімодулярних перетворень стовпчиків основної матриці зведемо його до потрібного вигляду.

Якщо після першого кроку елементи всіх стовпчиків основної матриці, за виключенням першого, дорівнюють нулю, матриця має потрібний нам вигляд. В іншому разі знайдеться рядок, що містить ненульовий елемент на місці, відмінному від першого. За допомогою перестановок рядків, помістимо цей рядок на друге місце, після чого зведемо його до потрібного нам вигляду унімодулярними перетвореннями системи ствопчиків з 2-го по n-й.

Очевидно, що алгоритм зупиниться після k-го кроку тоді й тільки тоді, коли в модифікованій основній матриці системи всі стовпчики, починаючи з $k+1$-го, дорівнюють нулю. □

Зауважимо зайвий раз, що процедура зведення матриці діофантової системи (3.27) до вигляду (3.28) відповідає перестановці рівнянь системи (перестановка рядків матриці) та допустимим замінам змінних (унімодулярні перетворення стовпчиків основної матриці). Таким чином, ми можемо вважати, що за допомогою замін змінних систему лінійних діофантових рівнянь можна подати в вигляді

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
d_{1,1}y_1 & & & & & & & & & = & \beta_1, \\
d_{2,1}y_1 & + & d_{2,2}y_2 & & & & & & & = & \beta_2, \\
\vdots & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
d_{k,1}y_1 & + & d_{k,2}y_2 & + & d_{k,3}y_3 & + & \cdots & + & d_{k,k}y_k & = & \beta_k, \\
d_{k+1,1}y_1 & + & d_{k+1,2}y_2 & + & d_{k+1,3}y_3 & + & \cdots & + & d_{k+1,k}y_k & = & \beta_{k+1}, \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
d_{m,1}y_1 & + & d_{m,2}y_2 & + & d_{m,3}y_3 & + & \cdots & + & d_{m,k}y_k & = & \beta_m.
\end{array}\right. \tag{3.29}$$

Очевидно, що з перших k рівнянь ми або знайдемо значення змінних $y_1, y_2, \ldots, y_k$, або ж якесь з перших k рівнянь виявиться несумісним (не буде мати цілчисельних розв'язків). Зрозуміло, що в останній ситуації система теж буде несумісною. Отже, припустимо, що ми знайшли єдиний набір цілих чисел $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*$, які задовльняють перші k рівнянь системи

(3.29). Якщо ці значення задовольняють також решту рівнянь, система (3.29) є сумісною, причому множина її розв'язків має вигляд

$$\{(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_k^*, y_{k+1}, \ldots, y_n) \mid y_{k+1}, \ldots, y_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Нижче нам буде потрібно знати, до якого вигляду можна звести матрицю системи (3.27), якщо використовувати також унімодулярні перетворення рядків. Нижче називатимемо дві матриці $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ еквівалентними, якщо одну з них можна одержати з іншої унімодулярними перетвореннями рядків та стовпчиків.

Теорема 3.5.4. *Кожна цілочисельна матриця $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ еквівалентна матриці вигляду*

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

де число p_1 є дільником чисел $p_2, p_3, \ldots, p_k$; число p_2 є дільником чисел $p_3, \ldots, p_k$; і так далі, p_{k-1} є дільником p_k.

Доведення. Нехай A_1– матриця, еквівалентна до A, що містить елемент p_1, найменший за модулем серед елементів всіх матриць, еквівалентних A. Покажемо, що p_1 є дільником всіх ненульових елементів матриці A_1.

Дійсно, нехай $A_1 = [\gamma_{ij}]_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$. З точністю до перестановок рядків та стовпчиків, можемо вважати, що $\gamma_{1,1} = p_1$. Зрозуміло також, що можна вважати $p_1 > 0$, інакше домножимо перший рядок на -1.

Доведемо спочатку, що всі ненульові елементи 1-го рядка та 1-го стовпчика діляться на p_1. Інакше, якщо, наприклад, елемент $\gamma_{1,k}$ при діленні на $\gamma_{1,1} = p_1$ має залишок $0 < \delta_{1,k} < p_1$

$$\gamma_{1,k} - \gamma_{1,1} q_{1,k} = \delta_{1,k},$$

матриця A_2, одержана з A_1 перетворенням

$$(\mathbf{k})_{\mathbf{ст}} - q_{1,k}(\mathbf{1})_{\mathbf{ст}},$$

буде мати елемент $0 < \delta_{1,k} < p_1$ на перетині 1-го рядка та k-го стовпчика. Оскільки A_2 еквівалентна A_1, одержимо протиріччя. Отже,

$$\gamma_{1l} = q_{1l} p_1, \quad l = 1, \ldots, n, \quad \gamma_{k1} = q_{k1} p_1, \quad k = 1, \ldots, m$$

для деяких $q_{1l}, q_{k1} \in \mathbb{Z}$.

Послідовними перетвореннями вигляду

$$(\mathbf{k})_{\mathbf{р}} - q_{k1}(\mathbf{1})_{\mathbf{р}}, \quad (\mathbf{l})_{\mathbf{ст}} - q_{1l}(\mathbf{1})_{\mathbf{ст}}, \quad k = 2, \ldots, m, \; l = 2, \ldots, n,$$

зведемо матрицю A_1 до вигляду

$$A_2 = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} & \cdots & \delta_{2,n} \\ 0 & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} & \cdots & \delta_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \delta_{m,2} & \delta_{m,3} & \cdots & \delta_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Зауважимо, що числа γ_{ij}, діляться на p_1 тоді і тільки тоді, коли δ_{ij} діляться на p_1.

Очевидно, що A_2 еквівалентна A_1, а значить еквівалентна до A. Доведемо тепер, що всі елементи $\delta_{r,s}$, $r = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, n$ діляться на p_1. Припустимо, що залишок від ділення елемента δ_{kl} на p_1 не дорівнює нулю

$$\delta_{k,l} - q_{k,l} p_1 = r_{k,l}, \quad 0 < r_{k,l} < p_1.$$

Застосуємо до A_2 перетворення

$$(\mathbf{1})_{\mathbf{р}} + (\mathbf{k})_{\mathbf{р}}.$$

Одержимо матрицю A_3 еквівалентну до A_1,

$$A_3 = \begin{pmatrix} p_1 & \delta_{k,2} & \delta_{k,3} & \cdots & \delta_{k,l} & \cdots & \delta_{k,n} \\ 0 & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} & \cdots & \delta_{2,l} & \cdots & \delta_{2,n} \\ 0 & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} & \cdots & \delta_{3,l} & \cdots & \delta_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \delta_{m,2} & \delta_{m,3} & \cdots & \delta_{m,l} & \cdots & \delta_{m,n} \end{pmatrix}. \qquad (3.32)$$

За допомогою перетворення

$$(\mathbf{l})_{\mathbf{ст}} - q_{kl}(\mathbf{1})_{\mathbf{ст}}$$

одержимо матрицю

$$A_4 = \begin{pmatrix} p_1 & \delta_{k,2} & \delta_{k,3} & \cdots & r_{k,l} & \cdots & \delta_{k,n} \\ 0 & \delta_{2,2} & \delta_{2,3} & \cdots & \delta_{2,l} & \cdots & \delta_{2,n} \\ 0 & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} & \cdots & \delta_{3,l} & \cdots & \delta_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \delta_{m,2} & \delta_{m,3} & \cdots & \delta_{m,l} & \cdots & \delta_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad (3.33)$$

де $0 < r_{k,l} < p_1$. Оскільки A_4 еквівалентна A, одержуємо протиріччя. Таким чином, p_1 є дільником всіх ненульових елементів $\delta_{r,s}$, матриці A_2.

Доведення завершується очевидною індукцією за розміром матриці A.

□

Нижче нам буде потрібна наступна властивість найбільшого спільного дільника набору цілих чисел.

Лема 3.5.5. *Нехай* $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$*, тоді для всіх* $m \in \mathbb{Z}$ *та* $i = 2, \ldots, k$

$$\mathbf{НСД}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \mathbf{НСД}(n_1 + mn_i, n_2, \ldots, n_k)$$

Доведення. Очевидно, що будь-який спільний дільник чисел першої системи є також спільним дільником чисел другої. Водночас, перша система отримується з другої перетворенням того ж типу, що й друга з першої. Звідси випливає, що кожен спільний дільник чисел другої системи є спільним дільником чисел першої. □

Твердження 3.5.6. *Унімодулярні перетворення рядків та стовпчиків не змінюють найбільший спільний дільник мінорів фіксованого розміру матриці* $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{M}_k$ множину всіх мінорів розміру k матриці A. Нехай $d_k = \textbf{НСД}(m,\ m \in \mathcal{M}_k)$. Розглянемо випадок елементарних перетворень стовпчиків (ситуація з рядками абсолютно аналогічна).

Знайдемо, як змінюється множина мінорів k-го порядку при унімодулярних перетвореннях.

Розглянемо перетворення $(\mathbf{i})_{\mathbf{CT}} \leftrightarrow (\mathbf{j})_{\mathbf{CT}}$, $i < j$. При цьому мінори, що не містять елементів i-го та j-го стовпчиків залишаються незмінними. Мінори, що містять елменти обох стовпчиків міняють знак на протилежний. Кожний мінор, що містить елементи i-го стовпчика, але не містить елементи j-го, перейде з точністю до знаку в мінор k-го порядку, що містить елементи j-го, але не містить елементи i-го. Наприклад, мінор

$$m_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,s_1} & \alpha_{r_1,s_2} & \cdots & \alpha_{r_1,s_{t-1}} & \alpha_{r_1,i} & \alpha_{r_1,s_{t+1}} & \cdots & \alpha_{r_1 s_k} \\ \alpha_{r_2,s_1} & \alpha_{r_2,s_2} & \cdots & \alpha_{r_2,s_{t-1}} & \alpha_{r_2,i} & \alpha_{r_2,s_{t+1}} & \cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r_k,s_1} & \alpha_{r_k,s_2} & \cdots & \alpha_{r_k,s_{t-1}} & \alpha_{r_k,i} & \alpha_{r_k,s_{t+1}} & \cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix}$$

після перетворення набуде вигляд

$$m_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,s_1} & \alpha_{r_1,s_2} & \cdots & \alpha_{r_1,s_{t-1}} & \alpha_{r_1,j} & \alpha_{r_1,s_{t+1}} & \cdots & \alpha_{r_1,s_k} \\ \alpha_{r_2,s_1} & \alpha_{r_2,s_2} & \cdots & \alpha_{r_2,s_{t-1}} & \alpha_{r_2,j} & \alpha_{r_2,s_{t+1}} & \cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r_k,s_1} & \alpha_{r_k,s_2} & \cdots & \alpha_{r_k,s_{t-1}} & \alpha_{r_k,j} & \alpha_{r_k s_{t+1}} & \cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix}$$

Припустимо, що $s_l < j < s_{l+1}$, тоді m_2, з точністю до знаку, співпадає з мінором матриці A наступного вигляду

$$m_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,s_1} & \alpha_{r_1,s_2} & \cdots & \alpha_{r_1,s_l} & \alpha_{r_1,j} & \alpha_{r_1,s_{l+1}} & \cdots & \alpha_{r_1,s_k} \\ \alpha_{r_2,s_1} & \alpha_{r_2,s_2} & \cdots & \alpha_{r_2,s_l} & \alpha_{r_2,j} & \alpha_{r_2,s_{l+1}} & \cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r_k,s_1} & \alpha_{r_k,s_2} & \cdots & \alpha_{r_k,s_l} & \alpha_{r_k,j} & \alpha_{r_k,s_{l+1}} & \cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix}$$

Таким чином, після перестановки ствопчиків матриці A, множина мінорів $\mathcal{M}'_k$ порядку k модифікованої матриці співпадає з множиною $\mathcal{M}_k$ мінорів порядку k матриці A, з точністю до знаків її елементів. Зрозуміло, що тоді

$$\textbf{НСД}(m',\ m' \in \mathcal{M}'_k) = \textbf{НСД}(m,\ m \in \mathcal{M}_k)$$

Подивимось, як змінюється множина мінорів при перетвореннях вигляду

$$(\mathbf{i})_{\mathbf{CT}} + q(\mathbf{j})_{\mathbf{CT}}, \quad i \neq j.$$

Очевидно, що мінори, які не містять елементи i-го стовпчика при такому перетворенні залишаються незмінними. Не зміняться також мінори, що містять елементи i-го та j-го стовпчиків (оскільки визначник не змінюється, якщо до одного стовпчика додати довільне кратне іншого стовпчика). Залишилось розглянути випадок, коли мінор містить елементи i-го стовпчика та не містить елементи j-го. Припустимо, що $i = 1$. Мінор

$$m_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,1} & \alpha_{r_1,s_2} & \cdots & \alpha_{r_1,s_k} \\ \alpha_{r_2,1} & \alpha_{r_2,s_2} & \cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r_k,1} & \alpha_{r_k,s_2} & \cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix}$$

після перетворення $(\mathbf{1})_{\mathbf{CT}} + q(\mathbf{j})_{\mathbf{CT}}$, де $j \notin \{1, s_2, s_3, \ldots, s_k\}$ набуде вигляду

$$m_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,1} + q\alpha_{r_1,j} & \alpha_{r_1,s_2} & \cdots & \alpha_{r_1,s_k} \\ \alpha_{r_2,1} + q\alpha_{r_2,j} & \alpha_{r_2,s_2} & \cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r_k,1} + q\alpha_{r_k,j} & \alpha_{r_k,s_2} & \cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix}.$$

За властивостями визначників

$$m_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,1} & \alpha_{r_1,s_2} & \cdots & \alpha_{r_1,s_k} \\ \alpha_{r_2,1} & \alpha_{r_2,s_2} & \cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r_k,1} & \alpha_{r_k,s_2} & \cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix} + q \begin{vmatrix} \alpha_{r_1,j} & \alpha_{r_1,s_2} & \cdots & \alpha_{r_1,s_k} \\ \alpha_{r_2,j} & \alpha_{r_2,s_2} & \cdots & \alpha_{r_2,s_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r_k,j} & \alpha_{r_k,s_2} & \cdots & \alpha_{r_k,s_k} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що другий доданок, з точністю до перестановки стовпчиків, співпадає з деяким мінором m_3 порядку k матриці A, тобто

$$m_2 = m_1 \pm q m_3, \quad \text{де} \quad m_3 \in \mathcal{M}_k, \quad m_3 \neq m_1.$$

Тоді

$$\mathbf{НСД}(m_1, m,\ m \neq m_1,\ m \in \mathcal{M}_k) = \mathbf{НСД}(m_2, m,\ m \neq m_1,\ m \in \mathcal{M}_k). \tag{3.34}$$

Позначимо через $\mathcal{M}'_k$ множину мінорів порядку k модифікованої матриці. З наведених вище міркувань випливає, що множина $\mathcal{M}'_k$ одержується з множини $\mathcal{M}_k$ скінченним числом замін вигляду

$$m \to m \pm q\widetilde{m}, \quad \widetilde{m} \in \mathcal{M}_k,\ m \neq \widetilde{m}.$$

З рівності (3.34) випливає, що

$$\mathbf{НСД}(m',\ m' \in \mathcal{M}'_k) = \mathbf{НСД}(m,\ m \in \mathcal{M}_k).$$

Залишається розглянути перетворення $-1 \cdot (\mathbf{i})_{\mathbf{ст}}$. Очевидно, що в цьому випадку мінори модифікованої матриці співпадають з відповідним мінорами A з точністю до знаку. □

Теорема 3.5.7 (теорема Штейніца)**.** *Система лінійних діофантових рівнянь з розширеною матрицею $\big(A|b\big)$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$, $b \in \mathbb{Z}^m$ має розв'язок тоді й тільки тоді коли*

1. $\mathbf{rank}(A) = \mathbf{rank}(A|b) = r$, *для деякого* $1 \leq r \leq \min(m, n)$.
2. *Найбільший спільний дільник всіх мінорів розміру r основної матриці дорівнює найбільшому спільному дільнику мінорів розміру r розширеної матриці.*

Доведення. Перша умова твердження теореми є умовою сумісності звичайної системи лінійних рівнянь (теорема Кронекера-Капеллі, див. Додаток 4.4).

Покажемо, що за виконання умови 1), умова 2) є необхідною та достатньою для сумісності діофантової системи. Застосуємо до основної матриці унімодулярні перетворення стовпчиків, а також застосуємо унімодулярні перетворення рядків розширеної матриці. Згідно попереднього твердження, найбільші спільні дільники мінорів порядку r основної та розширеної матриць після цього залишаться незмінними. За теоремою 3.5.4, зведемо розширену матрицю системи до наступного вигляду

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta'_1 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta'_2 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_r & 0 & \cdots & 0 & \beta'_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta'_m \end{array}\right), \tag{3.35}$$

де

$$p_i \in \mathbb{N},\ i = 1, \ldots, r,\ b'_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, m;$$

причому з умови 1) випливає, що $\beta'_{r+1} = \cdots = \beta'_m = 0$. Нагадаємо також, що кожне p_i є дільником чисел $p_{i+1}, \ldots, p_r$. Проте, зараз ця властивість не гратиме жодної ролі.

Зауважимо, що єдиний ненульовий мінор порядку r основної матриці модифікованої системи дорівнює

$$\Delta = p_1 p_2 \cdots p_r.$$

Ненульові мінори розширеної матриці з точністю до знаку мають вигляд

$$\Delta, \quad \Delta_i = p_1 p_2 \cdots p_{i-1} \beta'_i p_{i+1} \cdots p_r = \frac{\beta'_i \prod_{j=1}^r p_j}{p_i}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Зрозуміло, що діофантова система з матрицею (3.35) має розв’язок тоді й тільки тоді, коли система з матрицею

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1' \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & \beta_2' \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & \beta_3' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_r & \beta_r' \end{array}\right) \tag{3.36}$$

має розв'язок. Позначимо змінні в системі (3.36) через $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Застосуємо теорему Крамера, одержимо рівності

$$y_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Таким чином, діофантова система (3.36), а, отже, й система (3.35), має розв'язки тоді й тільки тоді, коли Δ є дільником всіх мінорів Δ_i, $i = 1, \ldots, r$. Оскільки Δ єдиний ненульовий мінор порядку r основної матриці системи (3.35), можна сказати, що **НСД** всіх ненульових мінорів основної матриці системи (3.35) має бути дільником всіх мінорів порядку r розширеної матриці. А оскільки, мінори порядку r основної матриці утворюють підмножину множини мінорів порядку r розширеної можна зробити висновок, що **НСД** мінорів порядку r основної матриці, дорівнює **НСД** мінорів порядку r розширеної матриці системи (3.35).

Для доведення залишилось згадати, що розширена матриця системи (3.35) отримана з розширеної матриці (3.27) унімодулярними перетвореннми рядків та унімодулрними перетвореннями стовпчиків основної матриці. При таких перетвореннях **НСД** порядку r основної та розширеної матриць не змінюються згідно твердження 3.5.6. □

Розділ 4

Додаток

4.1 Поняття базису арифметичного векторного простору

Для довільного поля $\mathbb{F}$ арифметичним векторним простором стовпчиків будемо називати множину

$$\mathbb{F}^n = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{F},\ i = 1, \ldots, n\},$$

де $n \in \mathbb{N}$ фіксоване. Елементи цієї множини будемо називати *векторами-стовпчиками.* Введемо природні операції додавання векторів-стовпчиків та множення вектора на число:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{F}.$$

Систему векторів

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

будемо називати стандартним базисом $\mathbb{F}^n$. Очевидно, що для довільного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ має місце розклад

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n.$$

Нижче через $\mathbf{0}$ ми позначатимемо вектор-стовпчик, всі елементи якого дорівнюють нулю.

Зауваження 4.1.1. Очевидно, що аналогічним чином можна дати означення арифметичного векторного простору рядків, який також позначатиметься через $\mathbb{F}^n$.

Нагадаємо, що система векторів $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \mathbb{F}^n$ називається *лінійно незалежною*, якщо жоден з векторів цієї системи не виражається через інші. Зауважимо, що умова незалежності векторів може бути сформульована в еквівалентному вигляді, див. означення 1.2.4. А саме, вектори $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \mathbb{F}^n$ називаються лінійно незалежними, коли з рівності

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_k g_k = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Якщо рівність (4.1) виконується та хоча б один з коефіцієнтів λ_i, $i = 1, \ldots, k$, є ненульовим, вектори $g_1, g_2, \ldots, g_k$ називаються лінійно залежними.

Означення 4.1.2. Базисом простору $\mathbb{F}^n$ будемо називати довільну лінійно незалежну систему векторів $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbb{F}^n$, таку, що будь-який вектор $f \in \mathbb{F}$ допускає розклад

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_k f_k. \tag{4.2}$$

Задача 4.1.3.

1. Доведіть, що розклад $f \in \mathbb{F}^n$ в лінійну комбінацію базисних векторів є однозначним, тобто коефіцієнти $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ в рівності (4.2) визначені єдиним чином. Тоді вектор-стовпчик $[f] = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)^t$ буде називатись координатами вектора f відносно базиса $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

2. Доведіть, що коли вектори $f, g \in \mathbb{F}^n$ задані координатами

$$[f] = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)^t, \quad [g] = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)^t$$

відносно базису $f_1, f_2, \dots, f_k$, координати вектора $\lambda f + \mu g$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$, відносно цього ж базису мають вигляд

$$[\lambda f + \mu g] = (\lambda\alpha_1 + \mu\beta_1, \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2, \dots, \lambda\alpha_k + \mu\beta_k)^t.$$

Лінійно незалежну систему векторів $g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathbb{F}^n$ будемо називати *максимальною незалежною системою*, якщо для довільного $g \in \mathbb{F}^n$ система $g_1, g_2, \dots, g_m, g$ є лінійно залежною.

Твердження 4.1.4. *Система векторів $g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathbb{F}^n$ утворює базис простору $\mathbb{F}^n$ тоді й тільки тоді, коли вона є максимальною лінійно незалежною в $\mathbb{F}^n$.*

Доведення. Якщо $g_1, g_2, \dots, g_m$ утворює базис $\mathbb{F}^n$, для довільного $f \in \mathbb{F}^n$ має місце розклад

$$f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_k g_k, \quad \text{для деяких } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}.$$

Отже, для довільного $f \in \mathbb{F}$ вектори $g_1, g_2, \dots, g_k, f$ лінійно залежні та $g_1, g_2, \dots, g_k$ утворюють максимальну лінійно незалежну систему.

Навпаки, нехай система векторів $g_1, g_2, \dots, g_k$ є максимальною лінійно незалежною в $\mathbb{F}^n$. Розглянемо довільний $f \in \mathbb{F}^n$. Оскільки вектори $g_1, g_2, \dots, g_k, f$ лінійно залежні,

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_k g_k + \lambda f = \mathbf{0}$$

причому хоча б одне з чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \lambda$ не дорівнює нулю. Якщо $\lambda = 0$, то

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_k g_k = \mathbf{0}$$

і хоча б один з коефіцієнтів $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ ненульовий, що суперчить незалежності системи $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Таким чином, $\lambda \neq 0$ та

$$f = -\frac{\alpha_1}{\lambda} g_1 - \frac{\alpha_2}{\lambda} g_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\lambda} g_k.$$

Отже, будь-який $f \in \mathbb{F}^n$ розкладається в лінійну комбінацію векторів $g_1, \ldots, g_k$, тобто ці вектори утворюють базис $\mathbb{F}^n$. $\square$

Наступне твердження, що має назву *лема про заміну*, є одним з фундаментальних фактів теорії скінченновимірних векторних просторів.

Лема 4.1.5. *Нехай вектори $g_1, g_2, \ldots, g_k$ утворюють базис простору $\mathbb{F}^n$, а вектори $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{F}^n$ лінійно незалежні. Тоді $m \leq k$ та, з точністю до перестановки векторів $g_1, g_2, \ldots, g_k$, система*

$$f_1, f_2, \ldots, f_m, g_{m+1}, \ldots, g_k$$

утворює базис $\mathbb{F}^n$.

Доведення. Виразимо вектор f_1 через базис $g_1, g_2, \ldots, g_k$:

$$f_1 = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_k g_k.$$

Оскільки $f_1 \neq \mathbf{0}$ (перевірте, що незалежна система не може містити нульовий вектор), один з коефіцієнтів $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ не дорівнює нулю. З точністю до перестановки векторів $g_1, \ldots, g_k$, можна вважати, що $\alpha_1 \neq 0$. Тоді

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1} f_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} g_k.$$

Доведемо, що вектори $f_1, g_2, \ldots, g_k$ утворюють базис $\mathbb{F}^n$. Дійсно, оскільки $g_1, g_2, \ldots, g_k$ породжують $\mathbb{F}^n$ та g_1 виражається через $f_1, g_2, \ldots, g_k$, остання система векторів теж породжує простір $\mathbb{F}^n$. Залишилось довести, що вектори $f_1, g_2, \ldots, g_k$ лінійно незалежні. Нехай

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 g_2 + \cdots + \beta_k g_k = 0.$$

Тоді

$$\beta_1\big(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots \alpha_k g_k\big) + \beta_2 g_2 + \cdots + \beta_k g_k = 0,$$

тобто

$$\beta_1\alpha_1 g_1 + (\beta_1\alpha_2 + \beta_2)g_2 + \cdots (\beta_1\alpha_k + \beta_k)g_k = 0.$$

З незалежності векторів $g_1, g_2, \ldots, g_k$ випливає, що

$$\beta_1\alpha_1 = 0, \quad \beta_1\alpha_2 + \beta_2 = 0, \ldots, \beta_1\alpha_k + \beta_k = 0.$$

Остаточно, завдяки умові $\alpha_1 \neq 0$, одержимо

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \ldots, \beta_k = 0.$$

Отже, вектори $f_1, g_2, \ldots, g_k$ лінійно незалежні та породжують простір $\mathbb{F}^n$, тобто утворюють базис. Розкладемо вектор f_2:

$$f_2 = \gamma_1 f_1 + \gamma_2 g_2 + \gamma_3 g_3 + \ldots + \gamma_k g_k,$$

де хоча б один з коефіцієнтів $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k$ не дорівнює нулю. Дійсно, в протилежному випадку мала б місце рівність

$$f_2 = \gamma_1 f_1,$$

з якої випливає залежність системи $f_1, f_2, \ldots, f_m$. З точністю до перестановки векторів $g_2, g_3, \ldots, g_k$, можемо вважати, що $\gamma_2 \neq 0$ та

$$g_2 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} f_1 + \frac{1}{\gamma_2} f_2 - \frac{\gamma_3}{\gamma_2} g_3 - \cdots - \frac{\gamma_k}{\gamma_2} g_k.$$

Тоді, за допомогою міркувань аналогічних наведеним в попередньому пункті, можна показати, що вектори

$$f_1, f_2, g_3, \ldots, g_k$$

утворюють базис $\mathbb{F}^n$.

Далі будемо міркувати індуктивно. Нехай на i-му кроці маємо базис $f_1, f_2, \ldots, f_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_k$ та лінійно незалежну систему $f_i, f_{i+1}, \ldots, f_m$. Розкладаємо вектор f_i:

$$f_i = \delta_1 f_1 + \cdots + \delta_{i-1} f_{i-1} + \delta_i g_i + \delta_{i+1} g_{i+1} + \cdots + \delta_k g_k.$$

З незалежності системи $f_1, f_2, \ldots, f_m$ випливає, що хоча б один з коефіцієнтів $\delta_i, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_k$ не дорівнює нулю. З точністю до перестановки векторів $g_i, g_{i+1}, \ldots, g_k$, можемо вважати, що $\delta_i \neq 0$. Тоді

$$g_i = -\frac{\delta_1}{\delta_i} f_1 - \cdots - \frac{\delta_{i-1}}{\delta_i} f_{i-1} + \frac{1}{\delta_i} f_i - \frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} g_{i+1} - \cdots - \frac{\delta_k}{\delta_i} g_k$$

та міркуваннями, аналогічними наведеним в п 1) переконуємось, що вектори

$$f_1, \ldots f_{i-1}, f_i, g_{i+1}, \ldots, g_k$$

утворюють базис $\mathbb{F}^n$.

Якщо $m \leq k$, наприкінці m-го кроку одержуємо базис

$$f_1, f_2, \ldots, f_m, g_{m+1}, \ldots, g_k.$$

Якщо ж $m > k$, після k-го кроку матимемо базис

$$f_1, f_2, \ldots, f_k.$$

Тоді вектор f_{k+1} виражається через $f_1, f_2, \ldots, f_k$, що суперечить незалежності системи $f_1, f_2, \ldots, f_m$. □

Наслідок 4.1.6. Будь-який базис простору $\mathbb{F}^n$ складається з n векторів.

Доведення. Дійсно, розглянемо стандартний базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору $\mathbb{F}^n$ та будь-який інший базис $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Оскільки кожен базис є лінійно незалежною системою, за лемою про заміну $k \leq n$ та $n \leq k$. □

Зауваження 4.1.7. За допомогою Леми про заміну легко пересвідчитись, що довільна лінійно незалежна система векторів простору $\mathbb{F}^n$, яка складається з n векторів, є базисом.

Задача 4.1.8. Доведіть, що довільна система з n векторів $g_1, g_2, \ldots, g_n$, які породжують $\mathbb{F}^n$, утворюють базис цього простору.

4.2 Поняття підпростору арифметичного векторного простору

Означення 4.2.1. Підмножина $L \subset \mathbb{F}^n$ називається підпростором, якщо для будь-яких двох векторів $f, g \in L$ та будь-яких чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ має місце властивість

$$\lambda f + \mu g \in L.$$

Іншими словами, підпростір, це підмножина, яка замкнена відносно операцій додавання векторів та множення вектора на число.

Важливим, насправді універсальним, прикладом підпросторів в $\mathbb{F}^n$ є *лінійні оболонки* систем векторів.

Означення 4.2.2. Зафіксуємо вектори $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \mathbb{F}^n$. Множина

$$< g_1, g_2, \ldots, g_k > = \{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_k g_k \mid \alpha_i \in \mathbb{F},\ i = 1, \ldots, k\}$$

називається лінійною оболонкою системи $g_1, g_2, \ldots, g_k$.

Задача 4.2.3. Доведіть, що для будь-яких векторів $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \mathbb{F}^n$ їх лінійна оболонка є підпростором в $\mathbb{F}^n$. Більше того, $< g_1, g_2, \ldots, g_k >$ є найменшим підпростором, що містить вектори g_i, $i = 1, \ldots, k$.

Нижче ми покажемо, що будь-який підпростір $L \subset \mathbb{F}^n$ є лінійною оболонкою деякої сім'ї векторів. А саме, ми доведемо, що будь-який підпростір в $\mathbb{F}^n$ має базис.

Означення 4.2.4. Базисом підпростору $L \subset \mathbb{F}^n$ будемо називати довільну лінійно незалежну систему векторів $g_1, g_2, \ldots, g_k \in L$ таку, що будь-який $g \in L$ допускає (однозначний) розклад в лінійну комбінацію

$$g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_k g_k.$$

Зрозуміло також, що будь-яка максимальна лінійно незалежна система векторів L буде утворювати базис L.

З Леми про заміну миттєво випливають наступні важливі факти.

Твердження 4.2.5. *Нехай $L \subset \mathbb{F}^n$, $L \neq \mathbb{F}^n$ є підпростором. Тоді*

1. *Існують вектори $g_1, g_2, \ldots, g_k$, $k < n$, які утворюють базис L.*

2. *Будь-які два базиси L складаються з однакової кількості векторів.*

Доведення. Якщо $L \neq \{0\}$, існує $g_1 \in L$, $g_1 \neq \mathbf{0}$, та система, що складається з вектора g_1, є лінійно незалежною. Таким чином, в L існують незалежні системи векторів. Покажемо, що в L існує скінченна максимальна лінійно незалежна система векторів $g_1, g_2, \ldots, g_k$, де $k \leq n$. Дійсно, в протилежному випадку існували б лінійно незалежні вектори

$$g_1, g_2, \ldots, g_{n+1} \in L \subset \mathbb{F}^n.$$

Проте, згідно леми про заміну, будь-яка незалежна система векторів простору $\mathbb{F}^n$ містить не більше n векторів.

Залишилось зауважити, що в випадку, коли базис L складається з n векторів $g_1, g_2, \ldots, g_n$, з Леми про заміну випливатиме, що ці вектори утворюють також базис $\mathbb{F}^n$. Тоді для довільного $f \in \mathbb{F}^n$ матимемо

$$f = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \cdots + \beta_n g_n, \quad \text{для деяких} \quad \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{F}.$$

Звідки випливає, що $f \in L$ та $L = \mathbb{F}^n$.

Доведення другої властивості повністю співпадає з доведенням того, що будь-які два базиси простору $\mathbb{F}^n$ складаються з однакової кількості векторів. $\square$

Означення 4.2.6. Розмірністю $\dim L$ підпростору $L \subset \mathbb{F}^n$ називається число елементів в базисі L.

За попереднім твердженням, розмірність підпростору не залежить від того, який саме базис обрано для її обчислення. Таким чином, це поняття є визначеним коректно.

4.3 Ранг системи векторів та ранг матриці

Означення 4.3.1. Рангом системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{F}^n$ називається кількість елементів в максимальній лінійно незалежній підсистемі цієї системи векторів.

Зауваження 4.3.2. Нехай $f_1, f_2, \ldots, f_m \in \mathbb{F}^n$. Тоді

$$\mathbf{rank}(f_1, f_2, \ldots, f_m) = \dim < f_1, f_2, \ldots f_m >,$$

звідки випливає, що ранг системи векторів визначений коректно.

Розглянемо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{F}^n$. Нагадаємо, що система $b_1, b_2, \ldots, b_m$ одержана з першої шляхом *елементарного перетворення*, якщо або

1. Для деяких фіксованих i, j та $\lambda \in \mathbb{F}$ маємо $b_i = a_i + \lambda a_j$, $b_k = a_k$, $k \neq i$.

2. Для деяких фіксованих i та j маємо $b_i = a_j$, $b_j = a_i$ та $b_k = a_k$, $k \neq i, j$.

3. Для фіксованих i та $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$, маємо $b_i = \lambda a_i$, $b_k = a_k$, $k \neq i$.

Нижче нам буде потрібним поняття елементарного перетворення координат системи векторів.

Означення 4.3.3. Якщо в усіх векторах системи одночасно до фіксованої координати додати кратну іншої, або поміняти місцями фіксовану пару координат чи домножити фіксовану координату на ненульове число, будемо казати про застосування до системи векторів елементарного перетворення координат.

Зрозуміємо геометричний зміст елементарних перетворень координат векторів. Для цього зафіксуємо стандартний базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ простору $\mathbb{F}^n$. Розглянемо нові системи векторів $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, де або

1. $e_i' = e_i - \lambda e_j$, $e_k' = e_k$, $k \neq i$;
2. $e_j' = e_i$, $e_i' = e_j$, $e_k' = e_k$, $k \neq i, j$;
3. $e_i' = \lambda^{-1} e_i$, $e_k' = e_k$, $k \neq i$.

Доведіть, що всі перераховані вище системи векторів також утворюють базис простору $\mathbb{F}^n$. Розглянемо вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{F}^n$. Тоді

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Знайдемо координати вектора x відносно модифікованих базисів.

В першому випадку

$$\begin{aligned} x =& x_1 e_1 + \cdots + x_i(e_i - \lambda e_j + \lambda e_j) + \cdots + x_j e_j + \cdots + x_n e_n = \\ =& x_1 e_1' + \cdots + x_i e_i' + \cdots + (x_j + \lambda x_i) e_j' + \cdots + x_n e_n'. \end{aligned}$$

Таким чином, елементарне перетворення координат вектора першого типу відповідає застосуванню елементарного перетворення першого типу до базису, відносно якого обчислюються координати.

В другому випадку

$$\begin{aligned} x =& x_1 e_1 + \cdots + x_i e_i + \cdots + x_j e_j + \cdots + x_n e_n = \\ =& x_1 e_1' + \cdots + x_i e_j' + \cdots + x_j e_i' + \cdots + x_n e_n' = \\ =& x_1 e_1' + \cdots + x_j e_i' + \cdots + x_i e_j' + \cdots + x_n e_n' \end{aligned}$$

Отже, елементарне перетворення координат другого типу відповідає елементарному перетворенню базису другого типу.

Аналогічно, в третьому випадку:

$$\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + \cdots + x_i e_i + \cdots + x_n e_n = \\ &= x_1 e_1 + \cdots + \lambda x_i (\lambda^{-1} e_i) + \cdots + x_n e_n = \\ &= x_1 e_1' + \cdots + \lambda x_i e_i' + \cdots + x_n e_n'. \end{aligned}$$

Таким чином, елементарне перетворення координат третього типу відповідає елементарному перетворенню базису третого типу.

Зауваження 4.3.4. З наведених вище міркувань випливає важливий наслідок: елементарні перетворення координат системи векторів не впливають на лінійну незалежність (залежність) векторів системи. Дійсно, ці властивості не залежать від того, в якому базисі обчислено координати векторів системи.

Твердження 4.3.5. *Ранг системи векторів не змінюєтьcя при елементарних перетвореннях системи та при елементарних перетвореннях координат векторів системи.*

Доведення. Незмінність рангу системи векторів при елементарних перетвореннях координат векторів системи випливає з зауваження 4.3.4.

Перейдемо до елементарних перетворень векторів системи. Розглянемо систему векторів $f_1, f_2, \ldots, f_m$ рангу r. Тоді, згідно зауваження 4.3.2,

$$r = \dim < f_1, f_2, \ldots, f_m > .$$

Припустимо,що система $f_1', f_2', \ldots, f_m'$ отримана з $f_1, f_2, \ldots, f_m$ шляхом елементарного перетворення. Оскільки кожен з f_k' виражається через вектори f_s, $s = 1, \ldots, m$, має місце включення

$$< f_1', f_2', \ldots, f_m' > \subset < f_1, f_2, \ldots, f_m > .$$

З іншого боку, система $f_1, f_2, \ldots, f_m$ також одержується з $f_1', f_2', \ldots, f_m'$ шляхом елементарного перетворення (перевірте це!). Отже,

$$< f_1, f_2, \ldots, f_m > \subset < f_1', f_2', \ldots, f_m' > .$$

Звідки, очевидно

$$\mathbf{rank}(f_1', \ldots, f_m') = \dim < f_1', \ldots, f_m' >= \dim < f_1, \ldots, f_m >= r.$$

$\square$

Нагадаємо, що з довільною матрицею $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ можна пов'язати систему її векторів-рядків та систему її векторів-стовпчиків. Звідси одержуємо означення рангу матриці за рядками та за стовпчиками.

Означення 4.3.6. Рангом матриці $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ за рядками (стовпчиками) називається ранг системи векторів-рядків (стовпчиків) цієї матриці.

Твердження 4.3.7. *Ранг матриці $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ за рядками (стовпчиками) не змінюється при елементарних перетвореннях рядків та стовпчиків A.*

Доведення. Справедливість твердження миттєво випливає з незмінності рангу системи векторів при елементарних перетвореннях векторів та координат векторів цієї системи. □

Попереднє твердження має дуже важливий наслідок.

Теорема 4.3.8. *Ранг матриці за рядками дорівнює рангу матриці за стовпчиками.*

Доведення. За допомогою елементарних перетворень рядків та стовпчиків будь-яку прямокутну матрицю $A \in M_{n,m}(\mathbf{F})$ можна звести до вигляду

$$A' = \begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

де E_r позначає одиничну матрицю розміру r та через $\mathbf{0}$ позначено нульові матриці відповідних розмірів. Очевидно, що ранг матриці A' за рядками дорівнює рангу за стовпчиками та дорівнює r. Оскільки ранги за стовпчиками та рядками не змінюються при елементарних перетвореннях рядків та стовпчиків, матимемо рівність рангів A за рядками та стовпчиками.

□

З попередньої теореми випливає можливість дати означення рангу матриці.

Означення 4.3.9. Рангом матриці $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ називається її ранг за рядками (стовпчиками).

Твердження 4.3.10. *Ранг матриці $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ дорівнює розміру її найбільшого ненульового мінора (такий мінор називається базисним).*

Доведення. Припустимо, що $\mathbf{rank}(A) = r$ та доведемо існування ненульового мінора матриці A, що має розмір $r \times r$. Дійсно, з означення рангу випливає, що існує лінійно незалежна система стовпчиків матриці, яка містить r векторів. Нехай

$$A = \big(a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid \ a_r \mid a_{r+1} \mid \cdots \mid a_m\big)$$

Припустимо, що лінійно незалежними є перші r стовпчиків $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Позначимо через A_r матрицю

$$A_r = \big(a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid \ a_r\big).$$

За допомогою елементарних перетворень стовпчиків матрицю A_r можна звести до вигляду

$$A'_r = \begin{pmatrix} B_1 \\ E_r \\ B_2 \end{pmatrix},$$

де

- E_r одинична матриця розміру r;
- B_1 матриця розміру $k \times r$;
- B_2 матриця розміру $(n - k - r) \times r$.

Очевидно, мінор матриці A'_r, утворений рядками від $k + 1$-го до $k + r$-го, дорівнює одиниці. Але він отриманий з відповідного мінору матриці A_r, позначимо його через M_r, за допомогою елементарних перетворень стовпчиків. Отже, $M_r \neq 0$. Залишається тільки зазначити, що M_r є водночас мінором матриці A, утвореним рядками з $(k + 1)$-го по $(k + 1 + r)$-й та стовпчиками з 1-го по r-й.

Припустимо тепер, що матриця A має ненульовий мінор розміру r. Покажемо, що в цьому разі матриця має r лінійно незалежних стовпчиків (рядків), а тому її ранг не менший за r. Для цього нагадаємо спочатку, що стовпчики та рядки визначника, який не дорівнює нулю, є лінійно незалежними. Використаємо наступний факт (перевірте самостійно його справедливість): припустимо, що вектори $b_1, b_2, \ldots, b_r$ простору $\mathbb{F}^n$ мають вигляд

$$b_i = \begin{pmatrix} b_i^{(1)} \\ b_i^{(2)} \end{pmatrix}, \quad b_i^{(1)} \in \mathbb{F}^k,\ b_i^{(2)} \in \mathbb{F}^{n-k} \quad i = 1, \ldots, r,$$

де вектори $b_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, r$, є незалежними. Тоді вектори $b_1, \ldots, b_r$ теж є лінійно незалежними.

Тепер міркування є очевидним. Припустимо, що ненульовим є мінор матриці, утворений перетином перших r рядків та перших r стовпчиків (загальна ситуація зводиться до цієї перестановкою стовпчиків та рядків). Тоді стовпчики $a_1, \ldots, a_r$ матриці A мають вигляд

$$a_i = \begin{pmatrix} a_i^{(1)} \\ a_i^{(2)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, r,$$

де вектори $a_i^{(1)} \in \mathbb{F}^r$, $i = 1, \ldots, r$, є лінійно незалежними (оскільки утворюють ненульовий мінор). Отже, вектори $a_1, \ldots, a_r$ є лінійно незалежними та ранг матриці A не менший за r. $\square$

Зауважимо, що базисний мінор матриці не є єдиним.

4.4 Теорема Кронекера-Капеллі

В цій частині ми доведемо критерій сумісності (існування розв'язків) системи лінійних рівнянь. Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 & + & \alpha_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}x_n & = & \beta_1, \\ \alpha_{2,1}x_1 & + & \alpha_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}x_n & = & \beta_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 & + & \alpha_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m,n}x_n & = & \beta_m. \end{cases} \tag{4.3}$$

Побудуємо основну матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

та розширену матрицю системи

$$\big(A \mid b\big) = \left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} & \beta_m \end{array}\right)$$

Теорема 4.4.1 (теорема Кронекера-Капеллі)**.** *Система лінійних рівнянь (4.3) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли*

$$\mathbf{rank}\big(A\big) = \mathbf{rank}\big(A \mid b\big).$$

Доведення. Розглянемо вектори-стовпчики

$$a_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{m,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}.$$

В векторному вигляді (4.3) набуде вигляду

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b.$$

Таким чином, система (4.3) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли вектор b лінійно виражається через вектори $a_1, a_2, \ldots, a_n$, тобто коли

$$\mathbf{rank}\big(A\big) = \mathbf{rank}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathbf{rank}(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) = \mathbf{rank}\big(A \mid b\big).$$

$\square$

Задача 4.4.2. Доведіть, що система (4.3) *визначена*, тобто має єдиний розв'язок, тоді й тільки тоді, коли

$$\mathbf{rank}\big(A\big) = \mathbf{rank}\big(A \mid b\big) = n.$$

4.5 Матриці та лінійні відображення

В цій частині ми нагадаємо зв'язок матриць та лінійних відображень між арифметичними векторними просторами. За допомогою цього зв'язку будуть визначені операція добутку матриць та поняття оберненої матриці.

Означення 4.5.1. Відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ називається лінійним, якщо

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda\mathcal{A}(x) + \mu\mathcal{A}(y), \quad \text{для довільних} \quad x, y \in \mathbb{F}^m.$$

З'ясуємо наскільки багато свободи ми маємо при побудові лінійного відображення. Для цього розглянемо стандартний базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$ простору $\mathbb{F}^m$ та фіксоване лінійне відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$. Розкладемо довільний $x \in \mathbb{F}^m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^t$ за стандартним базисом:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_me_m.$$

Внаслідок лінійності отримаємо

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_me_m) = x_1\mathcal{A}(e_1) + x_2\mathcal{A}(e_2) + \cdots + x_m\mathcal{A}(e_m).$$

Нехай

$$\mathcal{A}(e_i) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{n,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тоді

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{n,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \alpha_{1,i}x_i \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{2,i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i}x_i \end{pmatrix}$$

Означення 4.5.2. Матрицею лінійного відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ називається матриця

$$A = [\mathcal{A}] = \big(\mathcal{A}(e_1) \mid \mathcal{A}(e_2) \mid \cdots \mid \mathcal{A}(e_m)\big) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Означення 4.5.3. Добутком матриці

$$A \in \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,m} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,m} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{F}) \quad \text{на вектор} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^m$$

називається вектор

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \alpha_{1,i}x_i \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{2,i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \alpha_{n,i}x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

З наведених вище міркувань випливає наступний результат.

Теорема 4.5.4. *Нехай лінійне відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ має в стандартному базисі $e_1, e_2, \ldots, e_m$ простору $\mathbb{F}^m$ матрицю A. Тоді для довільного $x \in \mathbb{F}^m$ має місце рівність*

$$\mathcal{A}(x) = A \cdot x$$

Задача 4.5.5. Перевірте, що навпаки, для довільної матриці $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$, визначене правилом

$$\mathcal{A}(x) = A \cdot x,$$

є лінійним.

Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між множиною всіх лінійних відображень $Lin(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$ та множиною $M_{n,m}(\mathbb{F})$ всіх матриць розміру $n \times m$.

4.5.1 Композиція відображень та добуток матриць

Припустимо, що маємо лінійні відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ та $\mathcal{B}\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^k$. В цьому випадку можна побудувати їх композицію

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^k, \quad (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x)), \quad x \in \mathbb{F}^n.$$

Твердження 4.5.6. *Композиція лінійних відображень є лінійним відображенням.*

Доведення. Дійсно, нехай $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ та $\mathcal{B}\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^k$ лінійні. Тоді для довільних $x, y \in \mathbb{F}^n$ та $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ одержимо

$$\begin{aligned}(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(\lambda x + \mu y) &= \mathcal{B}(\mathcal{A}(\lambda x + \mu y)) = \mathcal{B}(\lambda \mathcal{A}(x) + \mu \mathcal{A}(y)) = \\ &= \lambda \mathcal{B}(\mathcal{A}(x)) + \mu \mathcal{B}(\mathcal{A}(y)) = \lambda(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) + \mu(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(y).\end{aligned}$$

□

Означення 4.5.7. Нехай $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ та $B \in M_{k,m}(\mathbb{F})$ – матриці відображень $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ відповідно. Добутком матриць B та A називається матриця $C \in M_{k,n}(\mathbb{F})$ така, що $(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) = C \cdot x$ для кожного $x \in \mathbb{F}^n$

Добуток матриць B та A позначатиметься через $B \cdot A$ або ж просто BA. З'ясуємо, яким чином знаходити добуток матриць за їх елементами. З означення добутку випливає, що

$$\begin{aligned} BA =& \big(\mathcal{B}(\mathcal{A}(e_1)) \mid \mathcal{B}(\mathcal{A}(e_2)) \mid \cdots \mid \mathcal{B}(\mathcal{A}(e_n))\big) = \\ =& \big(B \cdot (A \cdot e_1) \mid B \cdot (A \cdot e_2) \mid \cdots \mid B \cdot (A \cdot e_n)\big) \end{aligned}$$

Нагадаємо, що

$$A \cdot e_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \alpha_{2,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тоді j-й ствопчик матриці BA, $j = 1, \ldots, n$, має вигляд

$$B \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1,j} \\ \alpha_{2,j} \\ \vdots \\ \alpha_{m,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{1,1}\alpha_{1,j} & + & \beta_{1,2}\alpha_{2,j} & + & \cdots & + & \beta_{1,m}\alpha_{m,j} \\ \beta_{2,1}\alpha_{1,j} & + & \beta_{2,2}\alpha_{2,j} & + & \cdots & + & \beta_{2,m}\alpha_{m,j} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \beta_{k,1}\alpha_{1,j} & + & \beta_{k,2}\alpha_{2,j} & + & \cdots & + & \beta_{k,m}\alpha_{m,j} \end{pmatrix}$$

Таким чином, ми можемо визначити добуток матриць BA, вказавши явний вигляд елементів цієї матриці.

Означення 4.5.8. Добутком BA матриць $B \in M_{k,m}(\mathbb{F})$ та $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ називається матриця розміру $k \times n$ елементи якої мають вигляд

$$(BA)_{ij} = \beta_{i,1}\alpha_{1,j} + \beta_{i,2}\alpha_{2,j} + \cdots + \beta_{i,m}\alpha_{m,j}, \quad i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Нагадаємо, що для матриці $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ за допомогою $A^t \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ позначається матриця рядками якої є стовпчики матриці A.

Задача 4.5.9. Доведіть, що для довільних $B \in M_{k,m}(\mathbb{F})$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ виконується рівність

$$(BA)^t = A^t B^t.$$

4.5.2 Елементарні перетворення та елементарні матриці

В цьому параграфі ми введемо поняття елементарної матриці та вивчимо зв'язок між елементарними матрицями та елементарними перетвореннями рядків та стовпчиків.

Означення 4.5.10. Квадратну матрицю $E_1 \in M_n(\mathbb{F})$ називають елементарною, якщо вона одержана з одиничної матриці E_n шляхом застосування одного елементарного перетворення рядків чи стовпчиків. При цьому будемо казати, що E_1 асоційована з відповідним елементарним перетворенням.

Приклад 4.5.11.

1. Елементарна матриця
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
асоційована одночасно з перетворенням $(\mathbf{1})_{\mathbf{р}} + \lambda(\mathbf{3})_{\mathbf{р}}$ та перетворенням $(\mathbf{3})_{\mathbf{ст}} + \lambda(\mathbf{1})_{\mathbf{ст}}$.

2. Елементарна матриця
$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
асоційована одночасно з перетворенням $(\mathbf{1})_{\mathbf{р}} \leftrightarrow (\mathbf{2})_{\mathbf{р}}$ та перетворенням $(\mathbf{1})_{\mathbf{ст}} \leftrightarrow (\mathbf{2})_{\mathbf{ст}}$.

3. Елементарна матриця
$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

асоційована одночасно з перетвореннями $\lambda(\mathbf{3})_{\mathbf{р}}$ та $\lambda(\mathbf{3})_{\mathbf{ст}}$.

Твердження 4.5.12. *Нехай $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, матриця A_1 отримана з A елементарним перетворенням рядків та матриця A_2 отримана з A елементарним перетворенням стовпчиків. Позначимо через $E_1 \in M_m(\mathbb{F})$ та $E_2 \in M_n(\mathbb{F})$ елементарні матриці, асоційовані з відповідними перетвореннями рядків та стовпчиків. Тоді*

$$A_1 = E_1 A, \quad A_2 = A E_2.$$

Іншими словами, елементарне перетворення рядків матриці рівносильне домноженню цієї матриці на асоційовану елементарну матрицю зліва; а елементарне перетворення стовпчиків матриці рівносильне домноженню на асоційовану елементарну матрицю справа.

Доведення. Ми проілюструємо доведення цього твердження на прикладі матриці $A \in M_{3,4}(\mathbb{F})$, залишивши читачеві розгляд загального випадку. Отже, нехай

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix}$$

Розглянемо перетворення $(\mathbf{2})_{\mathbf{р}} + \lambda(\mathbf{3})_{\mathbf{р}}$. Йому відповідає елементарна матриця

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} + \lambda\alpha_{3,1} & \alpha_{2,2} + \lambda\alpha_{3,2} & \alpha_{2,3} + \lambda\alpha_{3,3} & \alpha_{2,4} + \lambda\alpha_{3,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix}$$

Аналогічно, для перетворення $(\mathbf{1})_{\mathbf{ст}} + \lambda(\mathbf{4})_{\mathbf{ст}}$ будемо мати елементарну матрицю E_2

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та

$$AE_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \lambda\alpha_{1,4} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} + \lambda\alpha_{2,4} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} + \lambda\alpha_{3,4} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix}.$$

Для перетворення $(\mathbf{1})_{\mathbf{p}} \leftrightarrow (\mathbf{3})_{\mathbf{p}}$ одержимо

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix}.$$

Для перетворення $(\mathbf{2})_{\mathbf{ст}} \leftrightarrow (\mathbf{4})_{\mathbf{ст}}$ одержимо

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

та

$$AE_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,4} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,4} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,4} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,2} \end{pmatrix}.$$

Остаточно, для перетворення $\lambda(\mathbf{2})_{\mathbf{p}}$ маємо

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \lambda\alpha_{2,1} & \lambda\alpha_{2,2} & \lambda\alpha_{2,3} & \lambda\alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix}.$$

Для перетворення $\lambda(\mathbf{3})_{\mathbf{ст}}$ будемо мати

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та

$$AE_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \lambda\alpha_{1,3} & \alpha_{1,4} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \lambda\alpha_{2,3} & \alpha_{2,4} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \lambda\alpha_{3,3} & \alpha_{3,4} \end{pmatrix}.$$

□

4.5.3 Ядро та образ лінійного відображення

В цій частині ми дамо трактовку рангу матриці в термінах відповідного лінійного відображення.

Означення 4.5.13. Нехай $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ лінійне відображення. Образом $\mathcal{A}$ називається множина

$$\mathbf{range}\ \mathcal{A} = \{\mathcal{A}(x) \mid x \in \mathbb{F}^n\} \subset \mathbb{F}^m.$$

Означення 4.5.14. Ядром лінійного відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ називається множина

$$\mathbf{ker}\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{F}^n \mid \mathcal{A}(x) = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{F}^n.$$

Задача 4.5.15. Для будь-якого лінійного відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, підмножини **range** $\mathcal{A}$ та **ker**$\mathcal{A}$ є підпрострами просторів $\mathbb{F}^m$ та $\mathbb{F}^n$ відповідно. Доведіть це.

Твердження 4.5.16. *Нехай лінійне відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ задається матрицею $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Тоді*

$$\dim \mathbf{range}\ \mathcal{A} = \mathbf{rank}(A). \tag{4.4}$$

Доведення. Оскільки для довільного $x \in \mathbb{F}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ має місце рівність

$$\mathcal{A}(x) = x_1\mathcal{A}(e_1) + x_2\mathcal{A}(e_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(e_n),$$

дійдемо висновку, що

$$\mathbf{range}\ \mathcal{A} =< \mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \ldots, \mathcal{A}(e_n) > .$$

Отже,

$$\begin{aligned}\dim \mathbf{range}\ \mathcal{A} &= \dim < \mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \ldots, \mathcal{A}(e_n) > \\ &= \mathbf{rank}(\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \ldots, \mathcal{A}(e_n)) = \mathbf{rank}(A).\end{aligned}$$

□

Твердження 4.5.17. *Нехай $\mathcal{A} \colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ лінійне відображення. Тоді*

$$\dim \mathbf{ker}\mathcal{A} + \dim \mathbf{range}\ \mathcal{A} = n = \dim \mathbb{F}^n.$$

Доведення. За лемою про заміну доповнимо базис $g_1, g_2, \ldots, g_k$ підпростору $\mathbf{ker}\mathcal{A}$ до базису $g_1, g_2, \ldots, g_k, f_{k+1}, \ldots, f_n$ простору $\mathbb{F}^n$. Доведемо, що вектори

$$\mathcal{A}(f_{k+1}), \mathcal{A}(f_{k+2}), \ldots, \mathcal{A}(f_n)$$

утворюють базис підпростору $\mathbf{range}\ \mathcal{A}$.

Покажемо спочатку, що ці вектори породжують $\mathbf{range}\ \mathcal{A}$. Дійсно, для довільного $f \in \mathbb{F}^n$ будемо мати

$$f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \cdots + \alpha_k g_k + \alpha_{k+1} f_{k+1} + \cdots + \alpha_n f_n.$$

Внаслідок лінійності одержимо

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(f) &= \alpha_1\mathcal{A}(g_1) + \alpha_2\mathcal{A}(g_2) + \cdots + \alpha_k\mathcal{A}(g_k) + \alpha_{k+1}\mathcal{A}(f_{k+1}) + \cdots + \alpha_n\mathcal{A}(f_n) \\ &= \alpha_{k+1}\mathcal{A}(f_{k+1}) + \cdots + \alpha_n\mathcal{A}(f_n),\end{aligned}$$

де ми використали рівності $\mathcal{A}(g_i) = 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Доведемо, що вектори $\mathcal{A}(f_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(f_n)$ лінійно незалежні. З рівності

$$\alpha_{k+1}\mathcal{A}(f_{k+1}) + \cdots + \alpha_n\mathcal{A}(f_n) = \mathbf{0}$$

випливає

$$\mathcal{A}(\alpha_{k+1}f_{k+1} + \cdots + \alpha_n f_n) = \mathbf{0},$$

тобто $\alpha_{k+1}f_{k+1}+\cdots+\alpha_n f_n \in \mathbf{ker}\mathcal{A}$. Оскільки вектори $g_1, \ldots, g_k$ утворюють базис $\mathbf{ker}\mathcal{A}$, має місце розклад

$$\alpha_{k+1}f_{k+1} + \cdots + \alpha_n f_n = \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_k g_k.$$

Записавши цей розклад в вигляді

$$\beta_1 g_1 + \cdots + \beta_k g_k - \alpha_{k+1}f_{k+1} - \cdots - \alpha_n f_n = \mathbf{0}$$

одержимо лінійну комбінацію базисних векторів, що дорівнює нулю. Отже,

$$\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0, \quad \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Таким чином, вектори $\mathcal{A}(f_{k+1}), \ldots, \mathcal{A}(f_n)$ лінійно незалежні. □

Зауваження 4.5.18. Припустимо, що задане лінійне відображення

$$\mathcal{A}\colon L \to \mathbb{F}^m,$$

де $L \subset \mathbb{F}^n$ – деякий підпростір. Тоді теж матимемо рівність

$$\dim \mathbf{ker}\mathcal{A} + \dim \mathbf{range}\ \mathcal{A} = \dim L, \tag{4.5}$$

де

$$\mathbf{ker}\mathcal{A} = \{x \in L \mid \mathcal{A}(x) = \mathbf{0}\} \quad \text{та} \quad \mathbf{range}\ \mathcal{A} = \{\mathcal{A}(x) \mid x \in L\}.$$

В якості застосування рівностей (4.4), (4.5) доведемо відому нерівність Сильвестра.

Твердження 4.5.19. *Нехай A, B квадратні матриці розміру n та*

$$r_A = \mathbf{rank}(A), \quad r_B = \mathbf{rank}(B), \quad r_{AB} = \mathbf{rank}(AB).$$

Тоді

$$r_A + r_B - n \le r_{AB} \le \min(r_A, r_B). \tag{4.6}$$

Доведення. Розглянемо лінійні відображення $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ визначені за допомогою матриць A та B. Нагадаємо, що матриці AB відповідає композиція відображень $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Тоді $r_A = \dim \mathbf{range}\ \mathcal{A}$, $r_B = \dim \mathbf{range}\ \mathcal{B}$ та $r_{AB} = \dim \mathbf{range}\ \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$.

Доведемо ліву частину нерівності (4.6). Позначимо через $\widetilde{A}$ звуження відображення $\mathcal{A}$ на підпростір $\mathbf{range}\ \mathcal{B}$, тобто

$$\widetilde{\mathcal{A}} \colon \mathbf{range}\ \mathcal{B} \to \mathbb{F}^n, \quad \widetilde{\mathcal{A}}(\mathcal{B}(x)) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(x)), \quad x \in \mathbb{F}^n.$$

Очевидно, що $\mathbf{range}\ \widetilde{\mathcal{A}} = \mathbf{range}\ \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$. Тоді, згідно формули (4.5), одержимо

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{range}\ \mathcal{B} &= \dim \mathbf{range}\ \widetilde{\mathcal{A}} + \dim \mathbf{ker} \widetilde{\mathcal{A}} \\ &= \dim \mathbf{range}\ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} + \dim \mathbf{ker} \widetilde{\mathcal{A}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Очевидно, що

$$\mathbf{ker} \widetilde{\mathcal{A}} = \mathbf{ker} \mathcal{A} \cap \mathbf{range}\ \mathcal{B} \subset \mathbf{ker} \mathcal{A}.$$

Звідси

$$\dim \mathbf{ker} \widetilde{\mathcal{A}} \le \dim \mathbf{ker} \mathcal{A} = n - \dim \mathbf{range}\ \mathcal{A} = n - r_A. \tag{4.8}$$

Остаточно, з рівності (4.7) та нерівності (4.8) одержимо

$$r_B \le r_{AB} + n - r_A, \quad \text{або} \quad r_A + r_B - n \le r_{AB}.$$

Доведемо праву частину нерівності (4.6). З включення

$$\mathbf{range}\ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \subset \mathbf{range}\ \mathcal{A}$$

випливає

$$\dim \mathbf{range}\ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \leq \dim \mathbf{range}\ \mathcal{A},$$

тобто $r_{AB} \leq r_A$. Для доведення нерівності $r_{AB} \leq r_B$ скористаємось наступним міркуванням: з рівності рангів матриці за стовпчиками та рядками випливає, що $\mathbf{rank}(C^t) = \mathbf{rank}(C)$ для будь-якої матриці C. За допомогою рівності $(AB)^t = B^t A^t$, див. задачу 4.5.9, одержимо

$$r_{AB} = \mathbf{rank}(AB) = \mathbf{rank}(AB)^t = \mathbf{rank}(B^t A^t) \leq \mathbf{rank}(B^t) = r_B.$$

□

4.6 Обернене відображення та обернена матриця

Розглянемо лінійне відображення $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, яке є взаємно однозначним. Позначимо через $\mathcal{A}^{-1}$ обернене відображення.

Твердження 4.6.1. *Нехай $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ взаємно однозначне лінійне відображення, тоді обернене відображення $\mathcal{A}^{-1}$ теж є лінійним.*

Доведення. Розглянемо $x, y \in \mathbb{F}^n$. Нехай $\mathcal{A}^{-1}(x) = u$ та $\mathcal{A}^{-1}(y) = w$. Тоді $\mathcal{A}(u) = x$ та $\mathcal{A}(w) = y$. Для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$

$$\mathcal{A}(\lambda u + \mu w) = \lambda \mathcal{A}(u) + \mu \mathcal{A}(w) = \lambda x + \mu y.$$

Отже,

$$\mathcal{A}^{-1}(\lambda x + \mu y) = \lambda u + \mu w = \lambda \mathcal{A}^{-1}(x) + \mu \mathcal{A}^{-1}(y).$$

□

Позначимо через $\mathcal{E}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ тотожнє відображення

$$\mathcal{E}(x) = x, \quad \text{для довільного} \quad x \in \mathbb{F}^n.$$

Неважко пересвідчитись (зробіть це), що тотожньому відображенню відповідає матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай взаємно однозначному лінійному відображенню $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ відповідає матриця $A \in M_n(\mathbb{F})$. Позначимо матрицю, що відповідає лінійному відображенню $\mathcal{A}^{-1}$ через A^{-1}. З властивості

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A} = \mathcal{E}$$

випливає наступне означення.

Означення 4.6.2. Оберненою до квадратної матриці $A \in M_n(\mathbb{F})$ називається матриця $A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ така, що

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Задача 4.6.3. Нехай для $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ існують обернені $A^{-1}, B^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$. Тоді існує $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Зрозуміло, що обернена існує не для довільної матриці (оскільки не кожне лінійне відображення є взаємно однозначним).

Теорема 4.6.4. *Для матриці $A \in M_n(\mathbb{F})$ існує обернена тоді й тільки тоді, коли* $\mathbf{rank}(A) = n$.

Доведення. Покажемо, що умова, наведена в теоремі, є необхідною та достатньою для існування правої оберненої матриці A_r^{-1}, тобто такої, що

$$A \cdot A_r^{-1} = E.$$

Дійсно, будемо розглядати A_r^{-1} як розв'язок матричного рівняння

$$A \cdot X = E, \tag{4.9}$$

де $X \in M_n(\mathbb{F})$ – невідома матриця. Розіб'ємо матриці X та E на стовпчики:

$$X = \bigl(u_1 \mid u_2 \mid \cdots \mid u_n\bigr), \quad E = \bigl(e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n\bigr)$$

Тоді рівняння (4.9) набуде вигляду

$$\bigl(Au_1 \mid Au_2 \mid \cdots \mid Au_n\bigr) = \bigl(e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n\bigr). \tag{4.10}$$

Якщо прирівняти між собою відповідні стовпчики лівої та правої матриць рівняння (4.10), одержимо n рівностей

$$Au_i = e_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким чином, кожен невідомий стовпчик $u_i \in \mathbb{F}^n$, $i = 1, \ldots, d$, є розв'язком системи лінійних рівнянь з розширеною матрицею

$$\bigl(A \mid e_i\bigr).$$

За теоремою Кронекера-Капеллі кожна така система буде мати розв'язок тоді й тільки тоді, коли

$$\mathbf{rank}(A) = \mathbf{rank}\bigl(A \mid e_i\bigr), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.11}$$

Натомість рівності (4.11) еквівалентні наступній умові (переконайтесь в цьому)

$$\mathbf{rank}(A) = \mathbf{rank}\bigl(A \mid e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n\bigr) = \mathbf{rank}\bigl(A \mid E\bigr) = n.$$

Покажемо, що для квадратної матриці A існування оберненої випливає з існування правої оберненої A_r^{-1}. Дійсно, з існування A_r^{-1} випливає, що $\mathbf{rank}(A) = n$. Повторюючі попередні міркування, переконуємося в існуванні лівої обереневої матриці A_l^{-1}, тобто такої, що

$$A_l^{-1} \cdot A = E.$$

Рівність A_r^{-1} та A_l^{-1} випливає з наступного простого спостереження, в основі якого лежить асоціативність добутку матриць:

$$A_r^{-1} = EA_r^{-1} = \bigl(A_l^{-1}A\bigr)A_r^{-1} = A_l^{-1}\bigl(AA_r^{-1}\bigr) = A_l^{-1}E = A_l^{-1}$$

□

Зауваження 4.6.5. З доведення попередньої теореми очевидним чином випливає, що обернена до даної матриці, в разі її існування, є єдиною.

Задача 4.6.6.

1. Проаналізувавши доведення попередньої теореми, можна одержати простий спосіб знаходження оберненої матриці. Опишіть його!

2. Розглянемо прямокутну матрицю $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$. Назвемо матрицю A_r^{-1} правою оберненою до A, якщо

$$A \cdot A_r^{-1} = E_n,$$

   де через E_n позначено одиничну матрицю розміру n. Аналогічно визначається поняття лівої оберненої матриці. Сформулюйте та доведіть критерії (необхідні та достатні умови) існування правої та лівої обернених матриць. Чи є права (ліва) обернена матриця єдиною, якщо $n \neq m$? За якої умови матриця $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ буде мати одночасно праву та ліву обернену матриці?

4.7 Евклідова геометрія простору $\mathbb{R}^n$.

4.7.1 Стандартний скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

В цій частині основне поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, тобто є полем дійсних чисел. У векторному просторі $\mathbb{R}^n$ можна ввести поняття довжини вектора та кута між векторами, що узагальнюють звичайні поняття довжини та кута у $\mathbb{R}^2$ чи $\mathbb{R}^3$.

Нагадаємо, що для векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^t$ та $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^t$ скалярним добутком називається число

$$\langle a, b\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \tag{4.12}$$

Згадаємо також, що

$$\langle a, b\rangle = ||a|| \cdot ||b|| \cos\varphi,$$

де φ – кут між цими векторами та через $||a||$ позначено довжину вектора a. Зокрема, ненульові вектори a та b перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $\langle a, b\rangle = 0$.

Використовуючи формулу (4.12), можна узагальнити поняття скалярного добутку на випадок $\mathbb{R}^n$, $n > 3$.

Означення 4.7.1. Стандартним скалярним добутком векторів

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^t \text{ та } b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^t$$

називається число

$$\langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \tag{4.13}$$

Тепер ми можемо визначити поняття довжини вектора. А саме, покладемо

$$||a|| := \sqrt{\langle a, a\rangle} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\Big)^{1/2}.$$

Кут $\phi \in [0, \pi]$ між векторами $a \neq 0$ та $b \neq 0$ визначимо за допомогою наступної рівності

$$\cos\phi := \frac{\langle a, b\rangle}{||a|| \cdot ||b||}. \tag{4.14}$$

Визначена у такий спосіб довжина задовольняє низці вимог, які є узагальненнями добре відомих (у певному сенсі визначальних) властивостей довжини вектора площини чи тривимірного простору. А саме мають місце:

- нерівність трикутника: $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||, \;\; a, b \in \mathbb{R}^n$;
- однорідність: $||\lambda a|| = |\lambda| \cdot ||a||, \;\; \lambda \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$;
- невиродженість: $||a|| = 0$ тоді й тільки тоді, коли $a = (0, 0, \ldots, 0)$;
- нерівність Коші-Буняковського:

$$|\langle a, b\rangle| \leq ||a|| \cdot ||b||, \;\; a, b \in \mathbb{R}^n, \tag{4.15}$$

  з якої випливає, що формула (4.14) дійсно однозначно визначає деякий кут $\phi \in [0, \pi]$.

Задача 4.7.2. Доведіть нерівність Коші-Буняковського (4.15).

Зауважимо, що з визначення скалярного добутку випливає, що він є симетричною білінійною функцією:

$$\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle,\ \langle a+b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle,\ \langle \lambda a, b\rangle = \lambda\langle a, b\rangle, \tag{4.16}$$

для довільних $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ та $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.7.2 Ортогональні системи векторів в $\mathbb{R}^n$. Матриця Грама.

З формули (4.14) випливає, що для ненульових векторів $a, b \in \mathbb{R}^n$ скалярний добуток

$$\langle a, b\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \phi = \pi/2,$$

тому будемо казати, що вектори a та b ортогональні (перпендикулярні), якщо вони ненульові та $\langle a, b\rangle = 0$. В подальшому для ортогональних векторів будемо вживати позначення $a \perp b$. Також домовимось вважати нульовий вектор ортогональним будь-якому вектору.

Означення 4.7.3. Система ненульових векторів $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{R}^n$ називається ортогональною, якщо $\langle f_i, f_j\rangle = 0$ для $i \neq j$.

Наступне твердження є багатовимірним аналогом теореми Піфагора.

Теорема 4.7.4. *Нехай система векторів $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{R}^n$ є ортогональною. Тоді*

$$||f_1 + f_2 + \ldots + f_m||^2 = ||f_1||^2 + ||f_2||^2 + \ldots + ||f_m||^2.$$

Доведення. Твердження теореми випливає з ланцюжка рівностей:

$$||f_1 + f_2 + \ldots + f_m||^2 = \sum_{i,j=1}^{m}\langle f_i, f_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle f_i, f_i\rangle = ||f_1||^2 + \ldots + ||f_m||^2$$

в якому перша рівність є наслідком білінійності скалярного добутку, а друга – ортогональності системи $f_1, \dots, f_m$. □

Теорема 4.7.5. *Нехай вектори* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *утворюють ортогональну систему, тоді вони лінійно незалежні.*

Доведення. З ортогональності системи веторів $f_1, f_2, \ldots, f_m$ випливає ортогональність системи $\lambda_1 f_1, \lambda_2 f_2, \ldots, \lambda_m f_m$ для довільних $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Отже, за теоремою 4.7.4

$$||\lambda_1 f_1 + \ldots, +\lambda_m f_m||^2 = \lambda_1^2 ||f_1||^2 + \lambda_2^2 ||f_2||^2 + \ldots + \lambda_m^2 ||f_m||^2.$$

Звідси, $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m = 0$ тоді й тільки тоді, коли $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. □

Нехай $f_1, \ldots, f_m$ – набір векторів в $\mathbb{R}^n$. Матриця Грама системи $f_1, \ldots, f_m$ визначається наступним чином

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_m) := \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_1, f_m \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_2, f_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_m, f_1 \rangle & \langle f_m, f_2 \rangle & \cdots & \langle f_m, f_m \rangle \end{pmatrix}.$$

Твердження 4.7.6. *Система векторів* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *лійнійно залежна тоді й тільки тоді, коли* $\det G(f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0$.

Доведення. Доведемо необхідність. Якщо вектори $f_1, f_2, \ldots, f_m$ лінійно залежні, існує нетривіальна лінійна комбінація рівна нулю:

$$\lambda_1 f_1 + \ldots, +\lambda_m f_m = 0.$$

Звідси

$$\langle f_i, \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m \rangle = \lambda_1 \langle f_i, f_1 \rangle + \ldots + \lambda_m \langle f_i, f_m \rangle = 0$$

для всіх $i = 1, \ldots, m$. Тобто система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \langle f_1, f_1 \rangle x_1 & + & \langle f_1, f_2 \rangle x_2 & + & \cdots & + & \langle f_1, f_m \rangle x_m & = & 0, \\ \langle f_2, f_1 \rangle x_1 & + & \langle f_2, f_2 \rangle x_2 & + & \cdots & + & \langle f_2, f_m \rangle x_m & = & 0, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \langle f_m, f_1 \rangle x_1 & + & \langle f_m, f_2 \rangle x_2 & + & \cdots & + & \langle f_m, f_m \rangle x_m & = & 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

має нетривіальний розв'язок $x_1 = \lambda_1, \ldots, x_m = \lambda_m$. Отже, за теоремою Крамера, $\det G(f_1, \ldots, f_m) = 0$.

Доведемо достатність. Якщо $\det G(f_1, f_2, \ldots, f_m) = 0$, система (4.17) має ненульовий розв'язок $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Покладемо $a := \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_m f_m$, тоді

$$\begin{aligned}\langle a, a\rangle &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle a, f_i\rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle f_j, f_i\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle f_j, f_i\rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Звідки $a = 0$, тому $f_1, f_2, \ldots, f_m$ лінійно залежна. □

Наприкінці цієї частини знайдемо, як матриця Грама виражається через координати векторів $f_1, \ldots, f_m$. Нехай

$$f_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1,i} \\ \alpha_{2,i} \\ \vdots \\ \alpha_{n,i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

тоді

$$\langle f_i, f_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,i}\alpha_{k,j}.$$

Таким чином, якщо $X = \Big(f_1 | f_2 | \cdots | f_n\Big) = [\alpha_{i,j}]_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$ – матриця, стовпчиками якої є вектори $f_1, \ldots, f_m$, то

$$G(f_1, \ldots, f_m) = X^t X. \tag{4.18}$$

4.7.3 Ортогональна проекція та ортогональна складова вектора відносно підпростору.

Нехай L – деякий підпростір $\mathbb{R}^n$.

Означення 4.7.7. Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ називається ортогональним до підпростору L (позначається $y \perp L$), якщо $x \perp y$ для будь-якого $x \in L$.

Якщо $f_1, \dots, f_m$ – базис L, то $y \perp L$ тоді й тільки тоді, коли $y \perp f_i$ для всіх $i = 1, \dots, m$ (доведіть це!).

Має місце таке твердження:

Твердження 4.7.8. *Для довільного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ та довільного підпростору $L \subset \mathbb{R}^n$ існують єдині $y \in L$ та $z \perp L$ такі, що $x = y + z$.*

Вектор y називається *ортогональною проекцією* x на підпростір L , а вектор z – *ортогональною складовою* x відносно L .

Доведення. Нехай $f_1, \dots, f_m$ – базис L. Розглянемо систему рівнянь відносно змінних $\alpha_1, \dots, \alpha_m$:

$$\langle f_k, x \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle f_k, f_i \rangle, \quad k = 1, \dots, m. \tag{4.19}$$

З теореми Крамера та твердження 4.7.6, випливає, що ця система має єдиний розв'язок

$$\alpha_1 = \lambda_1,\ \alpha_2 = \lambda_2, \dots, \alpha_m = \lambda_m.$$

Покладемо

$$y := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, \quad z = x - y.$$

Очевидно, $y \in L$. Перевіримо, що $z \perp L$. Дійсно,

$$\langle z, f_k \rangle = \langle x, f_k \rangle - \langle y, f_k \rangle = \langle x, f_k \rangle - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle f_i, f_k \rangle = 0$$

для всіх $k = 1, \dots, m$.

Залишилось довести єдиність. Нехай

$$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2, \quad y_1, y_2 \in L, \quad z_1, z_2 \perp L,$$

де $y_1 \neq y_2$. Тоді

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \neq 0,$$

а тому

$$0 < \langle y_1 - y_2, z_2 - z_1 \rangle = \langle y_1, z_2 \rangle + \langle y_2, z_1 \rangle - \langle y_1, z_1 \rangle - \langle y_2, z_2 \rangle = 0.$$

Отримана суперечність доводить єдиність проекції та ортогональної складової. $\square$

Зауваження 4.7.9. З доведення випливає алгоритм пошуку ортогональної проекції y та ортогональної складової z вектора x: координати ортогональної проекції y в базисі $f_1, \ldots, f_m$ – це єдиний розв'язок системи (4.19), а $z = x - y$.

Зауваження 4.7.10. Очевидно, якщо вектор $x \notin L$, його ортогональна складова z відносно L не дорівнює нулю. Звідси, зокрема, випливає існування ортогонального базису будь-якого підпростору $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$. Дійсно, нехай $\dim \mathcal{K} = r$. Зафіксуємо довільний базис $g_1, g_2, \ldots, g_r$ підпростору $\mathcal{K}$ та розглянемо ланцюжок підпросторів

$$\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{K}_r,$$

де $\mathcal{K}_s =< g_1, \ldots, g_s >$, $s = 1, \ldots, r$. Очевидно, що $\mathcal{K}_r = \mathcal{K}$. Покладемо $h_1 = g_1$ та позначимо через h_{s+1} ортогональну складову g_{s+1} віднсоно $\mathcal{K}_s$, $s = 1, \ldots, r-1$. З лінійної незалежності векторів $g_1, \ldots, g_r$ випливає, що

$$g_{s+1} \notin \mathcal{K}_s, \quad \text{отже} \quad h_{s+1} \neq 0 \quad s = 1, \ldots, r-1.$$

Очевидно, за побудовою, вектори $h_1, h_2, \ldots, h_r$ попарно ортогональні та

$$< h_1, \ldots, h_s >= \mathcal{K}_s, \ s = 1, \ldots, r.$$

Зокрема, система $h_1, h_2, \ldots, h_r$ утворює ортогональний базис $\mathcal{K}_r = \mathcal{K}$.

Описана нами процедура лежить в основі так званого методу ортогоналізації Грама-Шмідта, див. [10].

Задача 4.7.11. Вище було показано, що кожен підпростір $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ має ортогональний базис. Доведіть, що будь-який ортогональний базис підпростору $\mathcal{K}$ можна доповнити до ортогонального базису $\mathbb{R}^n$.

Твердження 4.7.12. *Довжина ортогональної складової z вектора x на підпростір L з базисом $f_1, \dots, f_m$ обчислюється за формулою:*

$$||z||^2 = \frac{\det G(f_1, f_2, \dots, f_m, x)}{\det G(f_1, f_2, \dots, f_m)}.$$

Доведення. Розкладемо визначник $\det G(f_1, \dots, f_m, x)$ за останнім стовпчиком й поділимо обидві частини отриманої рівності на $G(f_1, \dots, f_m) \neq 0$:

$$\frac{\det G(f_1, \dots, f_m, x)}{\det G(f_1, \dots, f_m)} = \langle x, x\rangle + \sum_{i=1}^{m} (-1)^{m+1+i} \langle f_i, x\rangle \frac{\Delta_i}{\det G(f_1, \dots, f_m)}, \quad (4.20)$$

де

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \begin{vmatrix}
\langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \cdots & \langle f_1, f_m\rangle \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\langle f_{i-1}, f_1\rangle & \langle f_{i-1}, f_2\rangle & \cdots & \langle f_{i-1}, f_m\rangle \\
\langle f_{i+1}, f_1\rangle & \langle f_{i+1}, f_2\rangle & \cdots & \langle f_{i+1}, f_m\rangle \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\langle f_m, f_1\rangle & \langle f_m, f_2\rangle & \cdots & \langle f_m, f_m\rangle \\
\langle x, f_1\rangle & \langle x, f_2\rangle & \cdots & \langle x, f_m\rangle
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{m-i} \begin{vmatrix}
\langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \cdots & \langle f_1, f_m\rangle \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\langle f_{i-1}, f_1\rangle & \langle f_{i-1}, f_2\rangle & \cdots & \langle f_{i-1}, f_m\rangle \\
\langle x, f_1\rangle & \langle x, f_2\rangle & \cdots & \langle x, f_m\rangle \\
\langle f_{i+1}, f_1\rangle & \langle f_{i+1}, f_2\rangle & \cdots & \langle f_{i+1}, f_m\rangle \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\langle f_m, f_1\rangle & \langle f_m, f_2\rangle & \cdots & \langle f_m, f_m\rangle
\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – розв'язок системи (4.19). За теоремою Крамера

$$\lambda_i = \frac{(-1)^{m-i}\Delta_i}{\det G(f_1, \dots, f_m)}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Побудуємо ортогональну проекцію y вектора x на підпростір L:

$$y = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m.$$

Тоді в рівності (4.20) дістанемо

$$\begin{aligned}\frac{\det G(f_1, \ldots, f_m, x)}{\det G(f_1, \ldots, f_m)} &= \langle x, x\rangle - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle f_i, x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i, x\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \langle y, x\rangle = \langle z, x\rangle = \langle z, z\rangle = ||z||^2.\end{aligned}$$

$\square$

Задача 4.7.13. Нехай $L_1 \subset L_2 \subset \mathbb{R}^n$ – підпростори. Розглянемо ортогональні складові z_i вектора $x \in \mathbb{R}^n$ відносно L_i, $i = 1, 2$. Доведіть що, $||z_1|| \geq ||z_2||$.
Вказівка: оберіть ортогональний базис в L_1 та доповніть його до ортогонального базису L_2.

Бібліографія

[1] Ю. Н. Бибиков. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.

[2] Б. Л. Ван-дер-Варден. Алгебра – М.: Мир, 1976. – 648 с.

[3] Э. Б. Винберг. Курс алгебры – М.: Факториал Пресс, 2001. – 544 с.

[4] Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц – М.: Наука, 1966. – 576 с.

[5] И. М. Глазман, Ю. И. Любич. Конечномерный линейный анализ – М.: Наука, 1969. – 476 с.

[6] Д. Кнут, Р. Грэхем, О. Паташник. Конкретная математика. Основание информатики – М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 703 с.

[7] С. К. Ландо. Лекции о производящих функциях – М.: МЦНМО, 2007. – 144 с.

[8] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры – М.: Физматлит, 2004. – 272 с.

[9] М. А. Муратов, В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко. Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах (L) – К.: Центр Учебной Литературы, 2011. – 150 с.

[10] М. А. Муратов, В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко. Конечномерный линейный анализ. I. Линейные операторы в конечномерных гильбертовых (унитарных) пространствах (H) – К.: Центр Учебной Литературы, 2012. – 172 с.

[11] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1 – М.: Физматлит, 2001. – 616 с.

[12] А. Я. Хинчин. Цепные дроби – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 112 с.

[13] Р. Хорн, Ч. Джонс. Матричный анализ – М.: Мир, 1989. – 656 с.

[14] В.С. Чарін. Лінійна алгебра – К.: Техніка, 2004. – 416 с.

[15] Г. Е. Шилов. Математический анализ. Конечномерные линейные пространства – М.: Наука, 1969. – 432 с.

[16] I. Gessel, X. G. Viennot. Binomial determinants, paths and hook length formula – Adv. Math., 1985. – 58, p. 300–321.

[17] C. Godsil, G. Royle. Algebraic Graph theory. Graduate Texts in Mathematics 207 – Springer-Verlag, New York, 2001. – 425 p.

[18] I. Gohberg, I. Koltracht. Triangular factors of Cauchy and Vandermonde matrices – Integral Eq. Operator Theory, 1996. – 26, p. 46—59.

[19] C. Krattenthaler. Advanced Determinant Calculus – Séminaire Lotharingien Combin., 1999. – 42, № B42q, p. 67.

[20] C. Krattenthaler. Advanced Determinant Calculus: A complement – Linear Algebra Appl., 2005. – 411, p. 68–166.

[21] B. Lindström. On the vector representation of induced matroids – Bull. London Math. Soc., 1973. – 5, p. 85—90.

[22] J. R. Silvester. Determinant of block matrices – Math. Gazette, 2000. – 84, № 501, p. 460–467.

[23] D. Zeilberger. A combinatorial approach to matrix algebra – Discrete Math., 1985. – 56, p. 61–72.

Предметний покажчик

Навчальне видання

Олександр Віталійович Маринич

Данило Павлович Проскурін

Скінченновимірний лінійний аналіз.
Теорія визначників (Δ)

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів — Б.А. Сладкевич

Підписано до друку 00.00.0000. Формат 70x100/16. Друк офсетний. Гарнітура Computer Modern. Наклад 000.

Видавництво “Центр навчальної літератури”. вул. Електриків, 23, Київ, 04176
Тел./факс 425-01-34, тел. 451-65-95, 425-04-47, 425-20-63
800-50168-00 (безкоштовно в межах України)
e-mail: office@uabook.com
http://www.cul.com.ua
Свідоцтво ДК №2458 від 30.03.2006

Надруковано в типографії “Мастер книг”, Київ, вул. Виборзька 84,
тел. (044) 458-09-35, e-mail: info@masterknyg.com.ua.
Свідоцтво ДК №3861 від 18.08.2010