

9.2.5. Диференціальне рівняння екстремалей функціонала, у який входять похідні вищих порядків

У задачах варіаційного числення зустрічаються функціонали, для яких підінтегральний вираз містить похідні від шуканої функції не лише першого, але й вищих порядків. Для простоти викладу обмежимося випадком для однієї невідомої функції.

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) dx, \qquad (9.10)$$

$$y^{(i)}(x_1) = y_1^{(i)}, \quad y^{(i)}(x_2) = y_2^{(i)}, \quad i = \overline{0, n-1}.$$
 (9.11)



Однопараметрична сім'я функцій $I[y + \alpha \delta y] = \Phi(\alpha)$, яка

досягає екстремуму при $\alpha=0$. $\left.\frac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\right|_{\alpha=0}=0$.

Ця похідна є варіацією функціоналу:

$$\delta I =$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\alpha} F(x, y + \alpha \delta y, y' + \alpha \delta y', y'' + \alpha \delta y'', ..., y^{(n)} + \alpha \delta y^{(n)}) dx \bigg|_{\alpha=0}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'' + \dots + F_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} \right) dx.$$



- IF 1 # 2013-B

Інтегруємо частинами другий доданок в останньому інтегралі:

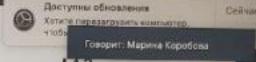
$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y'} \delta y' dx = F'_{y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx.$$

Третій доданок інтегруємо частинами двічі:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y''} \delta y'' dx = F_{y''} \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx} F_{y''} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \delta y dx,$$

і т.д. Останній доданок інтегруємо n разів:

The state of the s



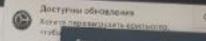
$$\int_{x_1}^{x_2} F'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = F'_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)} \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx} F'_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)} \Big|_{x_1}^{x_2} + \dots +$$

$$+(-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^n}{dx^n} F'_{y^{(n)}} \delta y dx.$$

Беручи до уваги граничні умови, внаслідок яких $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$ при $x = x_1$ та при $x = x_2$:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y' - \frac{d}{dx} F_{y'}' + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}' + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}' \right) \delta y dx.$$

大学 の 日本日本日



На кривій, яка реалізує екстремум, маємо $\delta I = 0$ довільному виборі функції δy . Згідно з основною лемою це можливе за умови

$$F'_{y} - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^{2}}{dx^{2}}F'_{y''} + \dots + (-1)^{n}\frac{d^{n}}{dx^{n}}F'_{y^{(n)}} = 0.$$

необхідної умови екстремуму випливає, що екстремалі є розв'язками диференціального рівняння

$$F_y' + \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} F_{y(i)}' = 0$$
 (9.12)

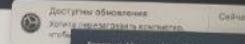
за крайових умов (9.11).

Розв'язки останнього диференціального рівняння також називаються *екстремалями*, а рівняння (9.12) має назву *рівняння Ейлера-Пуассона*. Це рівняння має порядок 2n, а його загальний розв'язок містить 2n довільних сталих, значення яких визначаються з крайових умов (9.11).

Приклад 9.8. Знайти допустимі екстремалі функціонала, які задовольняють указані крайові умови

a)
$$I[y] = \int_0^1 (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2) dx$$
,
 $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -\sinh 1$;

* 2 * 2400



Рівняння Ейлера-Пуассона $F_y' - \frac{d}{dx} F_{y'}' + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}' = 0$ набуває вигляду:

$$y^{IV} - 2y^{\prime\prime} + y = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$
 – екстремалі,

$$C_1=rac{1}{2}$$
 , $C_2=-rac{1}{2}$, $C_3=-rac{1}{2}$, $C_4=rac{1}{2}$ — отримані з крайових

умов. Допустима екстремаль

$$y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} = (1-x)\operatorname{sh}x.$$

b) Знайдемо похідні, що входять у рівняння Ейлера-Пуассона.

$$F(x, y, y', y'') = (y'')^2 - y^2; \quad F'_y = -2y; \quad F'_{y'} = 0; \quad F'_{y''} = 2y'';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 0; \quad \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 2y^{IV}.$$

Рівняння Ейлера-Пуассона (9.12) набуває вигляду

$$y^{IV} - y = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x -$$
екстремалі.

Із крайових умов отримали $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = 1$.

Допустима екстремаль $y = \cos x$.

· 少 · (24) 章

9.2.6. Система диференціальних рівнянь екстремалей функціонала, що залежить від кількох функцій

Задача знаходження мінімуму (максимуму) функціонала

$$I[y_1,y_2,\ldots,y_n] =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') dx$$
 (9.13)

за крайових умов

$$y_i(x_1) = y_{i1}, \ y_i(x_2) = y_{i2}, \ i = \overline{1,n}.$$
 (9.14)

.

Для отримання необхідних умов екстремуму функціоналу (9.13) при заданих граничних умовах (9.14), будемо варіювати лише одну з функцій

$$y_j(x), j = 1, 2, ..., n,$$

залишаючи решту функцій незмінними. Функціонал $I[y_1,y_2,...,y_n]$ перетворюється у функціонал, який залежить лише від однієї функції, що варіюється, наприклад від $y_i(x)$:

$$I[y_1,y_2,\ldots,y_n]=\tilde{I}[y_i].$$

* 10 * 12 0 5

Функція, яка реалізує екстремум, має задовольняти рівняння Ейлера: $F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = 0.$

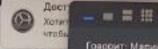
Такі міркування можна застосувати до довільної функції y_i (i=1,2,...,n). Отримаємо систему диференціальних рівнянь другого порядку

Система (9.15) в загальному випадку визначає 2n-параметричну сім'ю інтегральних кривих у просторі $x, y_1, y_2, ..., y_n$ — сім'ю екстремалей даної варіаційної задачі. Систему (9.15) ще називають системою рівнянь Ейлера-Лагранжа.

Приклад **9.9.** Знайти екстремалі функціонала, задовольняють вказані крайові умови (допустимі екстремалі):

$$I[y,z] = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2) dx, \qquad y(0) = 0,$$

$$z(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{16}.$$



Розв'язання. Знайдемо похідні, що входять у систему рівнинь Ейлера-Лагранжа:

$$F(x, y, z, y', z') = 2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2; \quad F'_y = -8y;$$

$$F'_{y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''; \quad F'_{z} = 2; \quad F'_{z'} = -2z'; \quad \frac{d}{dx}F'_{z'} = -2z''.$$

Тоді система рівнянь Ейлера-Лагранжа набуває вигляду:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ z'' + 1 = 0. \end{cases}$$

її загальні розв'язки:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$
, $z = -\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$.

Говорит: Марина Коробова

Конкретні значення довільних сталих C_1 , C_2 , C_3 , C_4 знайдемо із крайових умов:

$$C_1 = 0$$
, $C_2 = 1$, $C_3 = -\frac{\pi}{8}$, $C_4 = 0$.

Отже, допустимі екстремалі:

$$\begin{cases} y = \sin 2x, \\ z = -\frac{x^2}{2} - \frac{\pi x}{8}. \end{cases}$$

9.3. Умови екстремуму другого порядку

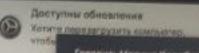
9.3.1. Друга варіація функціонала

Додаткові умови екстремуму функціоналів можна отримати, дослідивши другу варіацію функціонала.

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення – задачу із закріпленими кінцями (9.6), (9.7).

неперервно Підінтегральна функція F(x,y,y') два рази диференційована за своїми аргументами.

Нехай $\hat{y}(x)$ — екстремаль, тобто функція, яка є розв'язком рівняння Ейлера.



College

Говорит: Марина Коробова

Позначимо через h(x) допустиму варіацію аргументу функціонала I[y] і покладемо h(a) = h(b) = 0.

Функція h(x) належить класу $C^1_{[a,b]}$ неперервно диференційованих функцій на [a,b] з нульовими граничними умовами.

Визначимо функцію $\Phi(\lambda) = I[\hat{y}(x) + \lambda h(x)]$ дійсної змінної λ . Другу варіацію функціонала I[y] можна обчислити за формулою $\Phi''(0) = \delta^2 I[\hat{y}(x), h(x)].$

Якщо функція F(x,y,y') неперервна й має неперервні другі похідні: $F_{yy}(x,y,y')$, $F_{yy'}(x,y,y')$, $F_{y'y'}(x,y,y')$, то

$$\delta^{2}I[\hat{y}(x), h(x)] = \int_{a}^{b} W_{1}(x, h(x), h'(x)) dx , \quad (9.16)$$

$$W_{1}(x, h(x), h'(x)) = F_{yy}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) h^{2}(x) +$$

$$+2F_{yy'}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) h(x) h'(x) +$$

$$+F_{y'y'}(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) h'^{2}(x). \quad (9.17)$$

■ Britise trace Reserving: Six, 30. Memory Reservate security and properties.

$$2 \int_{a}^{b} F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h(x)h'(x)dx =$$

$$= \int_{a}^{b} F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))dh^{2}(x) =$$

$$= F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^{2}(x)\Big|_{a}^{b} -$$

$$- \int_{a}^{b} \frac{d}{dx} F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^{2}(x)dx =$$

$$= - \int_{a}^{b} \frac{d}{dx} F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^{2}(x)dx ,$$

SHIP TO

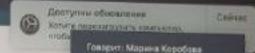
$$2 \int_{a}^{b} F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h(x)h'(x)dx =$$

$$= \int_{a}^{b} F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))dh^{2}(x) =$$

$$= F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^{2}(x)\Big|_{a}^{b} -$$

$$- \int_{a}^{b} \frac{d}{dx} F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^{2}(x)dx =$$

$$= - \int_{a}^{b} \frac{d}{dx} F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^{2}(x)dx ,$$



Функціонал (9.16)

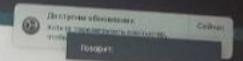
$$\delta^2 I[\hat{y}, h] = \int_a^b W(x, h(x), h'(x)) dx.$$

Підінтегральний вираз для зручності запишемо:

$$W(x, h(x), h'(x)) = Q(x)(h(x))^{2} + P(x)(h'(x))^{2},$$

$$Q(x) = \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y \partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y \partial y'} \right), \quad P(x) = \left(\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y' \partial y'} \right).$$

(2) Section System Proceedings - Nov. 201 - Manager School State State Section 5.11 (1991) 100 (1991)



Функціонал (9.16)

$$\delta^2 I[\hat{y}, h] = \int_a^b W(x, h(x), h'(x)) dx.$$

Підінтегральний вираз для зручності запишемо:

$$W(x, h(x), h'(x)) = Q(x)(h(x))^{2} + P(x)(h'(x))^{2},$$

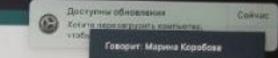
$$Q(x) = \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y \partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y \partial y'} \right), \quad P(x) = \left(\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y' \partial y'} \right).$$

Зауваження 9.2. Формула (9.18) дозволяє встановити умови невід'ємності другої варіації.

Квадратичний функціонал

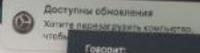
$$\delta^2 I[h] = \int_a^b (Q(x)(h(x))^2 + P(x)(h'(x))^2) dx \quad (9.19)$$

розглядається для функцій h(x), які задовольняють умову h(a)=0. Тоді, якщо похідна функції h(x) на відрізку [a,b] мала, то мала й сама функція h(x).



Звідси: у квадратичному функціоналі (9.19) доданок $P(x)(h'(x))^2$ відіграє основну роль, оскільки може бути набагато більшим за доданок $Q(x)(h(x))^2$, але не може бути набагато менше його (при $P(x) \neq 0$).

Від коефіцієнта P(x) у першу чергу залежить, буде функціонал (9.19) набувати значення тільки одного знака або різних.



Теорема 9.3. Для того, щоб квадратичний функціонал

$$G[h] = \int_{a}^{b} (Q(x)(h(x))^{2} + P(x)(h'(x))^{2})dx,$$

визначений на просторі функцій $h(x) \in C^1_{[a,b]}$ таких, що h(a) = h(b) = 0, був невід'ємним, необхідно, щоб виконувались умови: функція P(x) неперервна та $P(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Це дозволяє сформулювати умову.

Якщо $\hat{y}(x)$ — функція, яка дає слабкий локальний мінімум функціоналу I[y] задачі (9.6), (9.7), то виконується умова Лежандра:

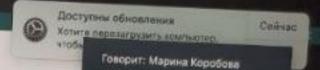
$$F_{y'y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)) \ge 0, \quad \forall x \in [a,b].$$
 (9.20)

9.3.2. Дослідження квадратичного функціонала. Умова Якобі

Знайдемо умови, за яких квадратичний функціонал

$$\int_{a}^{b} (P(x)(h'(x))^{2} + Q(x)(h(x))^{2}) dx \qquad (9.21)$$

буде додатно визначений для всіх допустимих h(x), крім $h(x)\equiv 0$. Це еквівалентно тому, що $h(x)\equiv 0\; \epsilon$ точкою мінімуму функціонала (9.21).



Рівняння Ейлера для такого функціонала:

$$-\frac{d}{dx}(P(x)h'(x)) + Q(x)h(x) = 0.$$
 (9.22)

Це лінійне рівняння другого порядку. Рівняння (9.22) і граничні умови h(a) = h(b) = 0 задовольняє функція $h(x) \equiv 0$.

Означення 9.12. Точка x^* називається спряженою з точкою x=a, якщо рівняння (9.22) має розв'язок, нетотожно рівний нулю й такий, що перетворюється на нуль при x=a та при $x=x^*$.

Рівняння Ейлера для такого функціонала:

$$-\frac{d}{dx}(P(x)h'(x)) + Q(x)h(x) = 0. (9.22)$$

Це лінійне рівняння другого порядку. Рівняння (9.22) і граничні умови h(a) = h(b) = 0 задовольняє функція $h(x) \equiv 0$.

Означення 9.12. Точка x^* називається спряженою з точкою x=a, якщо рівняння (9.22) має розв'язок, нетотожно рівний нулю й такий, що перетворюється на нуль при x=a та при $x=x^*$.



Зауваження 9.3. Якщо h(x) — деякий ненульовий розв'язок рівняння (9.22), який задовольняє умови h(a) = h(b) = 0, то $c \cdot h(x)$, де $c = const \neq 0$, буде також розв'язком. Тому для визначеності можна накласти на h(x) деяку умову нормування, наприклад, h'(a) = 1 (якщо $h(x) \neq 0$ і h(a) = 0, то обов'язково $h'(a) \neq 0$).

Можна показати, що відсутність на відрізку [a,b] спряжених точок є не тільки достатньою, а й необхідною умовою для додатної визначеності функціонала (9.21).



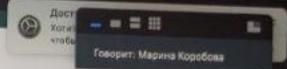












Для того, щоб квадратичний функціонал (9.21) при виконанні умови P(x)>0, $\forall x\in [a,b]$ був додатно визначений для всіх h(x) таких, що h(a)=h(b)=0, необхідно й достатньо, щоб відрізок [a,b] не містив точок, спряжених із точкою a.

Застосуємо отримані результати до задачі із закріпленими кінцями (9.6), (9.7).

Якщо розглянути деяку екстремаль $\hat{y}(x)$ — функцію, яка надає мінімум функціоналу I[y] задачі (9.6), (9.7), обчислити другу варіацію функціонала в околі цієї екстремалі, то