Семінар 4

Злічена ймовірносна схема.

Розглянемо стохастичний експеримент, в результаті якого ми можемо спостерігати зліченне число елементарних подій

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}.$$

Як і в попередньому розділі подією будемо називати будь-яку підмножину з Ω. Візьмемо послідовність чисел $p_1, p_2, ..., p_n, ...,$ яка задовольняє наступним умовам

$$p_i \geq 0 \quad i = 1,2,..., \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

На множині усіх підмножин Ω визначимо функцію $P(\cdot)$ за формулою

$$P(A) \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{\infty} p_{i_j}, \quad \text{де } A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ...\} \subset \Omega, \quad P(\varnothing) = 0,$$

Приклад 1. Два гравці по черзі підкидають симетричну монету. Виграє той, в кого вперше зв'явиться герб. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.

а) $$\Omega = \{\omega_n = n; n = 1,2,\ldots\} = \left\{ \mathit{Г}, \mathit{ЦГ}, \underbrace{\mathit{Ц}\ldots\mathit{Ц}}_{n-1}\mathit{Г}, \ldots, n = 1,2,\ldots \right\},$$

$$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \; n = 1,2,\ldots \;, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

A - виграв перший :

$$A = \{\omega_{2n+1} = 2n+1, n = 0,1,\ldots\} = \left\{ \mathit{Г}, \mathit{ЦЦГ}, \ldots, \underbrace{\mathit{Ц}\ldots\mathit{Ц}}_{2n}, \mathit{Г}; n = 0,1,\ldots \right\}.$$

B - виграв другий :

$$B=\left\{\omega_{2n}=2n,n=1,\ldots\right\}=\left\{ЦГ,ЦЦЦГ,\ldots,\underbrace{Ц\ldots Ц}_{2n-1},Г;n=1,\ldots\right\}$$

$$P(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.$$

$$P(B)=1-\frac{2}{3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{3}.$$

** Долучимо третього гравця C і знайдемо $P(A)$, $P(B),P(C)$.

$$P(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}\frac{8}{7}=\frac{4}{7}<\frac{2}{3}$$

$$P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}=\frac{1}{4}\frac{8}{7}=\frac{2}{7}<\frac{1}{3}$$

$$P(C)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}=\frac{1}{1-\frac{1}{8}}-1=\frac{8}{7}-1=\frac{1}{7}.$$

*** Припустимо, що монету підкидають k осіб, тоді:

$$P(A)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{kn+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{kn}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}\underset{k\to\infty}{\to}\frac{1}{2}$$

$$P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{kn+2}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{kn}=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}\underset{k\to\infty}{\to}\frac{1}{4}.$$

Отже, завжди $P(A)=2P(B)$

Приглад 2. Симетрична монета підкидається до тих пір, доки вона не випаде два рази поспіль однією стороною. Знайти ймовірність того, що число підкидань буде парним.

Розв’язання. Елементарною подією ω , буде скінчена послідовність складена з літер „Г” і „Ц”, що задовольняє двом умовам:

1) послідовність закінчується точно на дві однакові літери (або на „ГГ”, або на „ЦЦ”);
2) якщо закреслити дві останні літери, то отримана підпослідовність не містить двох однакових літер, що стоять поруч.

Через Ω позначимо зліченну множину таких послідовностей і за визначенням $P(\{\omega\}) \overset{def}{=} (1/2)^{|\omega|}$ де $|\cdot|$ - довжина ω, отже, $p_i = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n = 2,3,\dots$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} p_i = 2\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

Нехай $\Omega_1=\{(ГЦ)^n\ ГГ,\ n=0,1,...\}$, $\Omega_2=\{(ГЦ)^n\ Ц,\ n=1,2,\dots\}$,

$\Omega_3=\{(ЦГ)^n\ Г,\ n=1,2,\dots\}$, $\Omega_4=\{(ЦГ)^n\ ЦЦ,\ n=0,1,...\}$.

Очевидно, що Ω_i , $i = 1,...,4$ не перетинаються між собою, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{4}\Omega_i$, і $A = \Omega_1 \cup \Omega_4$ представляє собою подію, ймовірність якої треба знайти за умовою задачі. Нескладні підрахунки приводять до відповіді

$$P(A) = P(\Omega_1) + P(\Omega_4) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 2\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Задачі для самостіного розгляду

1) Монета підкидається до появи другого герба. Знайти ймовірність того, що експеримент завершиться на парному кроці.
2) Монета пілкидається до появи двох гербів поспіль. Знайти ймовірність того, що це станеться на: а) n- му кроці; б) на парному кроці.