9.2.5. Диференціальне рівняння екстремалей функціонала, у який входять похідні вищих порядків

У задачах варіаційного числення зустрічаються функціонали, для яких підінтегральний вираз містить похідні від шуканої функції не лише першого, але й вищих порядків. Для простоти викладу обмежимося випадком для однієї невідомої функції.

$$I[y] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) dx, \qquad (9.10)$$

$$y^{(i)}(x_1) = y_1^{(i)}, \quad y^{(i)}(x_2) = y_2^{(i)}, \quad i = \overline{0, n-1}. \qquad (9.11)$$

Однопараметрична сім'я функцій $I[y+\alpha\delta y]=\Phi(\alpha)$, яка досягає екстремуму при $\alpha=0$. $\frac{d}{d\alpha}I[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}=0.$

Ця похідна є варіацією функціоналу:

$$\delta I=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{d\alpha}F\left(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y',y''+\alpha\delta y'',\dots,y^{(n)}+\alpha\delta y^{(n)}\right)dx\Bigg|_{\alpha=0}=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y''+\dots+F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right)dx.$$

Інтегруємо частинами другий доданок в останньому інтегралі:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y'}\delta y'\,dx = F'_{y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} F_{y'}\delta y\,dx\,.$$

Третій доданок інтегруємо частинами двічі:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_{y''}\delta y''\,dx = F_{y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx} F_{y''}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} F_{y''}\delta y\,dx,$$

і т.д. Останній доданок інтегруємо n разів:

$$\int_{x_1}^{x_2} F'_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}dx = F'_{y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}\Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx}F'_{y^{(n)}}\delta y^{(n-2)}\Big|_{x_1}^{x_2} + \dots +$$

$$+(-1)^n\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}}\delta y dx.$$

Беручи до уваги граничні умови, внаслідок яких $\delta y = \delta y' = \delta y'' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$ при $x = x_1$ та при $x = x_2$:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} + \dots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}}\right)\delta y dx.$$

На кривій, яка реалізує екстремум, маємо $\delta I = 0$ при довільному виборі функції δy. Згідно з основною лемою це можливе за умови

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F'_{y^{(n)}} = 0.$$

Із необхідної умови екстремуму випливає, що допустимі екстремалі є розв'язками диференціального рівняння

$$F'_y + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \frac{d^i}{dx^i}F'_{y^{(i)}} = 0 \qquad (9.12)$$

за крайових умов (9.11).

Розв'язки останнього диференціального рівняння також називаються *екстремалями*, а рівняння (9.12) має назву *рівняння Ейлера-Пуассона*. Це рівняння має порядок $2n$, а його загальний розв'язок містить $2n$ довільних сталих, значення яких визначаються з крайових умов (9.11).

Приклад 9.8. Знайти допустимі екстремалі функціонала, які задовольняють указані крайові умови

а) $I[y] = \int_0^1 (y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2)dx$,

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad y(1) = 0, \qquad y'(1) = -\mathrm{sh}1;$$

Рівняння Ейлера-Пуассона $F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 0$ набуває вигляду:

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$$ – екстремалі,

$C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$, $C_3 = -\frac{1}{2}$, $C_4 = \frac{1}{2}$ – отримані з крайових умов. Допустима екстремаль

$$y = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} = (1-x)\text{sh}x.$$

b) Знайдемо похідні, що входять у рівняння Ейлера-Пуассона:

$$F(x,y,y',y'') = (y'')^2 - y^2; \quad F'_y = -2y; \quad F'_{y'} = 0; \quad F'_{y''} = 2y'';$$

$$\frac{d}{dx}F'_{y'} = 0; \quad \frac{d^2}{dx^2}F'_{y''} = 2y^{IV}.$$

Рівняння Ейлера-Пуассона (9.12) набуває вигляду

$$y^{IV} - y = 0.$$

Загальний розв’язок цього рівняння:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x -$$ екстремалі.

Із крайових умов отримали $C_1 = C_2 = C_4 = 0, \; C_3 = 1.$

Допустима екстремаль $y = \cos x$.

9.2.6. Система диференціальних рівнянь екстремалей функціонала, що залежить від кількох функцій

Задача знаходження мінімуму (максимуму) функціонала

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')dx \qquad (9.13)$$

за крайових умов

$$y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2}, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (9.14)$$

Для отримання необхідних умов екстремуму функціоналу (9.13) при заданих граничних умовах (9.14), будемо варіювати лише одну з функцій

$$y_j(x), \qquad j = 1, 2, \dots, n,$$

залишаючи решту функцій незмінними. Функціонал $I[y_1, y_2, \dots, y_n]$ перетворюється у функціонал, який залежить лише від однієї функції, що варіюється, наприклад від $y_i(x)$:

$$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \tilde{I}[y_i].$$

Функція, яка реалізує екстремум, має задовольняти рівняння Ейлера: $F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = 0.$

Такі міркування можна застосувати до довільної функції $y_i \ (i = 1, 2, \dots, n)$. Отримаємо систему диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} F'_{y_1} - \frac{d}{dx} F'_{y'_1} = 0, \\ F'_{y_2} - \frac{d}{dx} F'_{y'_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F'_{y_n} - \frac{d}{dx} F'_{y'_n} = 0. \end{cases} \qquad (9.15)$$

Система (9.15) в загальному випадку визначає $2n$-параметричну сім'ю інтегральних кривих у просторі $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ – сім'ю екстремалей даної варіаційної задачі. Систему (9.15) ще називають *системою рівнянь Ейлера-Лагранжа.*

Приклад 9.9. Знайти екстремалі функціонала, які задовольняють вказані крайові умови (допустимі екстремалі):

$$I[y,z] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2)dx, \qquad y(0) = 0,$$

$$z(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \qquad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi^2}{16}.$$

Розв'язання. Знайдемо похідні, що входять у систему рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$F(x,y,z,y',z') = 2z - 4y^2 + (y')^2 - (z')^2; \quad F'_y = -8y;$$

$$F'_{y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y''; \quad F'_z = 2; \quad F'_{z'} = -2z'; \quad \frac{d}{dx}F'_{z'} = -2z''.$$

Тоді система рівнянь Ейлера-Лагранжа набуває вигляду:

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ z'' + 1 = 0. \end{cases}$$

Її загальні розв'язки:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \qquad z = -\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4.$$

Конкретні значення довільних сталих C_1, C_2, C_3, C_4 знайдемо із крайових умов:

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = 1, \qquad C_3 = -\frac{\pi}{8}, \qquad C_4 = 0.$$

Отже, допустимі екстремалі:

$$\begin{cases} y = \sin 2x\,, \\ z = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{\pi x}{8}. \end{cases}$$

9.3. Умови екстремуму другого порядку

9.3.1. Друга варіація функціонала

Додаткові умови екстремуму функціоналів можна отримати, дослідивши другу варіацію функціонала.

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення – задачу із закріпленими кінцями (9.6), (9.7).

Підінтегральна функція $F(x, y, y')$ два рази неперервно диференційована за своїми аргументами.

Нехай $\hat{y}(x)$ – екстремаль, тобто функція, яка є розв'язком рівняння Ейлера.

Позначимо через $h(x)$ допустиму варіацію аргументу функціонала $I[y]$ і покладемо $h(a) = h(b) = 0.$

Функція $h(x)$ належить класу $C^1_{[a,b]}$ неперервно диференційованих функцій на $[a, b]$ з нульовими граничними умовами.

Визначимо функцію $\Phi(\lambda) = I[\hat{y}(x) + \lambda h(x)]$ дійсної змінної $\lambda.$

Другу варіацію функціонала $I[y]$ можна обчислити за формулою

$$\Phi''(0) = \delta^2 I[\hat{y}(x), h(x)].$$

Якщо функція $F(x,y,y')$ неперервна й має неперервні другі похідні: $F_{yy}(x,y,y')$, $F_{yy'}(x,y,y')$, $F_{y'y'}(x,y,y')$, то

$$\delta^2 I[\hat{y}(x),h(x)] = \int_a^b W_1(x,h(x),h'(x))dx\ , \qquad (9.16)$$

$$W_1\big(x,h(x),h'(x)\big) = F_{yy}\big(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\big)h^2(x) +$$
$$+2F_{yy'}\big(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\big)h(x)h'(x) +$$
$$+F_{y'y'}\big(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\big)h'^2(x). \qquad (9.17)$$

$$2\int_a^b F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h(x)h'(x)dx =$$

$$= \int_a^b F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))dh^2(x) =$$

$$= F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^2(x)\Big|_a^b -$$

$$-\int_a^b \frac{d}{dx}F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^2(x)dx =$$

$$= -\int_a^b \frac{d}{dx}F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^2(x)dx\ ,$$

$$
2\int_a^b F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h(x)h'(x)dx =
$$

$$
= \int_a^b F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))dh^2(x) =
$$

$$
= F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^2(x)\Big|_a^b -
$$

$$
-\int_a^b \frac{d}{dx}F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^2(x)dx =
$$

$$
= -\int_a^b \frac{d}{dx}F_{yy'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))h^2(x)dx\ ,
$$

Функціонал (9.16)

$$\delta^2 I[\hat{y}, h] = \int_a^b W(x, h(x), h'(x))dx\,.$$

Підінтегральний вираз для зручності запишемо:

$$W(x, h(x), h'(x)) = Q(x)(h(x))^2 + P(x)(h'(x))^2,$$

$$Q(x) = \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y \partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y \partial y'}\right), \quad P(x) = \left(\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y' \partial y'}\right).$$

Функціонал (9.16)

$$\delta^2 I[\hat{y}, h] = \int_a^b W(x, h(x), h'(x))dx\,.$$

Підінтегральний вираз для зручності запишемо:

$$W(x, h(x), h'(x)) = Q(x)(h(x))^2 + P(x)(h'(x))^2,$$

$$Q(x) = \frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y \partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y \partial y'}\right), \quad P(x) = \left(\frac{\partial^2 F(\cdot)}{\partial y' \partial y'}\right).$$

Зауваження 9.2. Формула (9.18) дозволяє встановити умови невід'ємності другої варіації.

Квадратичний функціонал

$$\delta^2 I[h] = \int_a^b \left(Q(x)(h(x))^2 + P(x)(h'(x))^2\right)dx \quad (9.19)$$

розглядається для функцій $h(x)$, які задовольняють умову $h(a) = 0$. Тоді, якщо похідна функції $h(x)$ на відрізку $[a, b]$ мала, то мала й сама функція $h(x)$.

Звідси: у квадратичному функціоналі (9.19) доданок $P(x)(h'(x))^2$ відіграє основну роль, оскільки може бути набагато більшим за доданок $Q(x)(h(x))^2$, але не може бути набагато менше його (при $P(x) \neq 0$).

Від коефіцієнта $P(x)$ у першу чергу залежить, буде функціонал (9.19) набувати значення тільки одного знака або різних.

Теорема 9.3. Для того, щоб квадратичний функціонал

$$G[h] = \int_a^b (Q(x)(h(x))^2 + P(x)(h'(x))^2)dx,$$

визначений на просторі функцій $h(x) \in C^1_{[a,b]}$ таких, що $h(a) = h(b) = 0$, був невід'ємним, необхідно, щоб виконувались умови: функція $P(x)$ неперервна та

$$P(x) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Це дозволяє сформулювати умову.

Якщо $\hat{y}(x)$ – функція, яка дає слабкий локальний мінімум функціоналу $I[y]$ задачі (9.6), (9.7), то виконується *умова Лежандра:*

$$F_{y'y'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b]. \qquad (9.20)$$

9.3.2. Дослідження квадратичного функціонала.

Умова Якобі

Знайдемо умови, за яких квадратичний функціонал

$$\int_a^b (P(x)(h'(x))^2 + Q(x)(h(x))^2)dx \qquad (9.21)$$

буде додатно визначений для всіх допустимих $h(x)$, крім $h(x) \equiv 0$. Це еквівалентно тому, що $h(x) \equiv 0$ є точкою мінімуму функціонала (9.21).

Рівняння Ейлера для такого функціонала:

$$-\frac{d}{dx}\big(P(x)h'(x)\big) + Q(x)h(x) = 0. \tag{9.22}$$

Це лінійне рівняння другого порядку. Рівняння (9.22) і граничні умови $h(a) = h(b) = 0$ задовольняє функція $h(x) \equiv 0$.

Означення 9.12. Точка x^* називається *спряженою* з точкою $x = a$, якщо рівняння (9.22) має розв'язок, нетотожно рівний нулю й такий, що перетворюється на нуль при $x = a$ та при $x = x^*$.

Рівняння Ейлера для такого функціонала:

$$-\frac{d}{dx}\big(P(x)h'(x)\big) + Q(x)h(x) = 0. \qquad (9.22)$$

Це лінійне рівняння другого порядку. Рівняння (9.22) і граничні умови $h(a) = h(b) = 0$ задовольняє функція $h(x) \equiv 0$.

Означення 9.12. Точка x^* називається *спряженою* з точкою $x = a$, якщо рівняння (9.22) має розв'язок, нетотожно рівний нулю й такий, що перетворюється на нуль при $x = a$ та при $x = x^*$.

Зауваження 9.3. Якщо $h(x)$ – деякий ненульовий розв'язок рівняння (9.22), який задовольняє умови $h(a) = h(b) = 0$, то $c \cdot h(x)$, де $c = const \neq 0$, буде також розв'язком. Тому для визначеності можна накласти на $h(x)$ деяку умову нормування, наприклад, $h'(a) = 1$ (якщо $h(x) \neq 0$ і $h(a) = 0$, то обов'язково $h'(a) \neq 0$).

Можна показати, що відсутність на відрізку $[a, b]$ спряжених точок є не тільки достатньою, а й необхідною умовою для додатної визначеності функціонала (9.21).

Для того, щоб квадратичний функціонал (9.21) при виконанні умови $P(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b]$ був додатно визначений для всіх $h(x)$ таких, що $h(a) = h(b) = 0$, необхідно й достатньо, щоб відрізок $[a, b]$ не містив точок, спряжених із точкою a.

Застосуємо отримані результати до задачі із закріпленими кінцями (9.6), (9.7).

Якщо розглянути деяку екстремаль $\hat{y}(x)$ – функцію, яка надає мінімум функціоналу $I[y]$ задачі (9.6), (9.7), обчислити другу варіацію функціонала в околі цієї екстремалі, то