гіпранника розв'язків, що пов'язані зі збільшенням (зменшенням) значення цільової функції.

Модифікований симплекс-метод

СЗЛП: $cx \to \min$
$Ax = b$
$x \geq 0$

Х: на деякій іт-ї (s) отримаємо наступну канонічну форму:

$$\alpha^s \cdot x = \beta^s, \; x \geq 0, \; \beta^s \geq 0$$

Нехай на цьому кроці базисні змінні: $x_1, \dots, x_m$ => базисна матриця $B(s) = (A_1 | A_2 | \dots | A_m)$

Знаємо, що $\alpha^s = B^{-1}(s) \cdot A$, $\beta^s = B^{-1}(s) \cdot b$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_j^s = B^{-1}(s) \cdot A_j, \; j = \overline{1,n}$$

що головне в симплекс-методі?!
знаходимо ведучий ел-т α_{lk} і перераховуємо: $\alpha^s \to \alpha^{s+1}$, $\beta^s \to \beta^{s+1}$, $\Delta^s \to \Delta^{s+1}$

1) Знах. k: $\Delta_k^s = \min_{j: \Delta_j^s < 0} \Delta_j^s$, $\Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, $A_k \to$ в базис.

2) Знах. l: $\dfrac{\beta_l^s}{\alpha_{lk}^s} = \min\limits_{i:\,\alpha_{ik}^s>0} \dfrac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s} = \theta_k^s$

A_l – з базису.

3) Обчислення. → і знову в "1)".

Обч-ня $(m+1)\times(n+1)$ ел-в.

Фактично нам потрібно знати $B^{-1}(s)$, A, b, c.

1) Симплекс-різниці:

$$\Delta_j^s = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^s = c_j - c_{баз}\cdot\alpha_j^s$$

$$c_{баз} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$$

вводимо (вектор симплекс-множників) вектор: $u^s = (u_1^s, u_2^s, \dots, u_m^s) = c_{баз}\cdot B^{-1}(s)$

$$\Delta_j^s = c_j - c_{баз}\cdot B^{-1}(s)\cdot A_j = c_j - u^s A_j,\quad j=\overline{1,n}$$

$$\boxed{\alpha_j^s = B^{-1}(s)A_j}$$

2) Для знаходження l: $\beta^s = B^{-1}(s)\cdot b$,

$\alpha_k^s = B^{-1}(s)A_k$

3) „Перерахування" $B^{-1}(s)\to B^{-1}(s+1)$

$$\boxed{(B|E)\sim(E|B^{-1})}$$

ТАК НЕ ТРЕБА

Твердження:

Нехай $B(s) = (A_1|A_2|\ldots|A_{l-1}|A_l|A_{l+1}|\ldots \ldots A_m)$,

$$B(s+1) = (A_1|A_2|\ldots|A_{l-1}|A_k|A_{l+1}|\ldots A_m)$$

Позначимо: $B^{-1}(s) = \|b_{ij}^{s}\|$,

$$B^{-1}(s+1) = \|b_{ij}^{s+1}\|, \; i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,m}$$

Тоді:

$$(*) \quad b_{ij}^{s+1} = \begin{cases} \dfrac{b_{lj}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}}, & i = l \\ b_{ij}^{s} - \dfrac{b_{lj}^{s} \cdot \alpha_{ik}^{s}}{\alpha_{lk}^{s}}, & i \neq l \end{cases}$$

α_{lk}^{s} - ведучий ел-т

Алгоритм модифікованого симплекс-методу

① Зводимо початкову ЗЛП до КЗЛП (шт. базис, М-метод)

0-крок: Початк. б.р. $x(0)$, баз. матриця $B(0)$, обернена до неї $B^{-1}(0)$

② Н: на кроці s маємо б.р.

s-й крок: $x(s)$, б. матр. $B(s)$ і обернену до неї $B^{-1}(s)$

③ Обчисл. вектор симплекс-множників:

$$u^s = c_{баз} \cdot B^{-1}(s)$$

④ Обч. симплекс-різниці:

$$\boxed{\Delta_j^s = c_j - u^s A_j}, \quad j=\overline{1,n}$$

4.1 Якщо $\Delta_j^s \ge 0$, $j=\overline{1,n}$ ⇒

⇒ stop ⇒ $x(s) = x^*$ - опт. розв.

4.2 Якщо $\exists j: \Delta_j^s<0 : \alpha_{ij}^s \le 0$ ⇒

⇒ stop ⇒ $L(x)$ - необмеж.,

$\min L(x) = -\infty$, $x \in D$.

⑤ Якщо не 4.1 і не 4.2:

k, l - ? $\quad \Delta_k^s = \min\limits_{j:\Delta_j^s<0} \Delta_j^s$

Обчислюємо $\boxed{\alpha_k^s = B^{-1}(s)\cdot A_k}$,

$$\boxed{\beta^s = B^{-1}(s)\cdot b}$$

$$\frac{\beta_l^s}{\alpha_{lk}^s} = \min_{i:\alpha_{ik}^s>0} \frac{\beta_i^s}{\alpha_{ik}^s} = \theta_k^s$$

A_k → в базис, A_l - з базису.

⑥ Обчислюємо $B^{-1}(s+1)$ за формулами (*)] і переходимо до п.②

Зауваження:

① Оск. метод розв'язання ЗЛП

② + в задачах, в яких додаються нові вектор-стовпчики умов.

③ Елементарна матриця

$$E(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & -\frac{\alpha_{1k}^s}{\alpha_{lk}^s} & & 0 \\ & 1 & & -\frac{\alpha_{2k}^s}{\alpha_{lk}^s} & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & \frac{1}{\alpha_{lk}^s} & & \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \\ & & & -\frac{\alpha_{mk}^s}{\alpha_{lk}^s} & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{то } B^{-1}(s+1) = E(s) \cdot B^{-1}(s) = E(s)E(s-1)B^{-1}(s-1) = \dots E(s)E(s-1)\dots E(0)B^{-1}(0)$$

Мультиплікативне подання оберненої матриці.

Теорія двоїстості

Двоїста задача л.п.

(I) Розглянемо СЗЛП:

$$(1)\quad \left|\begin{array}{l} cx \to \min, \\ Ax = b,\ x \geq 0, \\ D \text{ - доп. об-ть} \end{array}\right.$$

Отримаємо оцінку знизу (cx) при накладанні певних умов.

Отже, $b - Ax = \bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall u = (u_1, u_2, \dots, u_m) : (u, (b - Ax)) = 0,$ тоді

$$cx = cx + (u, (b - Ax)) = ub + ((c - uA); x).$$

Припустимо, що $c - uA \geq 0$, $uA \leq c$

"Забираємо" $(c - uA)x$. Маємо $cx \geq ub$, крім того $\boxed{\min\limits_{x \in D} cx \geq \max\limits_{u : uA \leq c} ub \quad (2)}$

Означення:

задачу (2): $\boxed{\begin{array}{l} ub \to \max \\ uA \leq c \end{array}}$ будемо називати двоїстою до задачі (1).

На (u) ніяких обмежень немає

(II) Розширено ЗЛП

початкова $\begin{cases} cx \to \min \\ Ax \ge b \\ x \ge 0 \end{cases}$ зведемо її до СЗЛП.

$$\bar{c}\bar{x} \to \min, \ \bar{x} \ge 0$$

$$(A \mid -E)\cdot \bar{x} = b$$, де $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n, 0, 0 \dots 0)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}}_{\text{балансні змінні}})^T$

Отримали СЗЛП (1)

$\downarrow$ за означенням двоїстої

$$\begin{matrix} ub \to \max \\ u(A \mid E) \le \bar{c} \end{matrix} \ \left\{ \begin{matrix} ub \to \max \\ uA \le c \\ -u \le 0 \end{matrix} \right.$$ двоїста

Розширено ЗЗЛП в коорд. формі:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1, m_1}, \ m_1 \le m$

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{m_1+1, m}$

3) $x_j \ge 0, \ j = \overline{1, n_1}, \ n_1 \le n$

4) x_j – довільного знаку, $j = \overline{n_1+1, n}$

Двоїста до неї

$$\overline{L}(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min$$

① $y_i \geq 0$, $i = \overline{1, m_1}$, $\overline{m_1 \leq m}$

② y_i – довільного знаку, $i = \overline{m_1+1, m}$

③ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$, $j = \overline{1, n_1}$, $n_1 \leq n$ – для всіх x із ③ ~~неов.~~ нот. ЗЛП.

④ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$, $j = \overline{n_1+1, n}$

M-метод – метод штрафів.