Лекція II. Формули обернення для характеристичних функцій

Кожній випадковій величині ξ відповідає функція розподілу $F_\xi(x)$ і характеристична функція $f_\xi(t)$

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x).$$

Функція розподілу за характеристичною функцією відновлюється наступним чином

$$F_\xi(y) - F_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f_\xi(t)dt,$$

де x, y – будь-які точки неперервності $F_\xi(\cdot)$.

Наслідок 1. Якщо $f_\xi(t)$ - абсолютно інтегровна, тобто $\int_{-\infty}^{\infty} | f_\xi(t) | dt < \infty$, то випадкова величина ξ має щільність $p_\xi(x)$ і $p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_\xi(t)dt$. (1)

****

Доведення. Якщо функція $f_\xi(t)$ абсолютно інтегровна на всій прямій, то ту ж властивість має і функція $\frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f_\xi(t)$ і тому формула обернення може бути записана у вигляді

$$F_\xi(y) - F_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f_\xi(t)dt.$$

Нехай тепер h таке, що $x = x' - h$ і $y = x' + h$ - точки неперервності функції $F_\xi(x)$. Тоді

$$e^{-it(x'-h)} - e^{-it(x'+h)} = (e^{ith} - e^{-ith})e^{-itx'} =$$
$$= (\cos th + i\sin th - \cos th + i\sin th)e^{-itx'} = 2i\sin th e^{-itx'}$$

і

$$F_\xi(x'+h) - F_\xi(x'-h) = 2h \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin th}{th} e^{-itx'} f_\xi(t)dt. \quad (2)$$

Так як $\left|\frac{\sin th}{th}\right| \le 1$, то

$$F_\xi(x'+h) - F_\xi(x'-h) \le 2h \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f_\xi(t) \right| dt.$$

Остання нерівність, очевидно, доводить, що $F_\xi(x)$ абсолютно неперервна..

Перепишемо тепер (2) у вигляді

$$\frac{F_\xi(x'+h)-F_\xi(x'-h)}{2h}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin th}{th}e^{-itx'}f_\xi(t)dt. \qquad (3)$$

Так як при $h\to 0$ підінтегральна функція збігається до $e^{-itx'}f_\xi(t)$, то з теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтегралу отримаємо

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin th}{th}e^{-itx}f_\xi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}f_\xi(t)dt.$$

Оскільки границя в правій частині рівності (4.22) існує, існує і границя в її лівій частині. Таким чином при кожному x'

$$p_\xi(x')=\lim_{h\to 0}\frac{F_\xi(x'+h)-F_\xi(x'-h)}{2h}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx'}f_\xi(t)dt.$$

Формулу (1) доведено.

****

Нехай $\xi'=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ – випадковий вектор. Багатовимірною характеристичною функцією випадкового вектору $\xi'=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ будемо називати

$$f_\xi(t)=f_{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n}(t_1,...,t_n)=Me^{i(\xi,t)},$$

де $(\xi,t)=\sum_{k=1}^{n}t_k\xi_k$, $t'=(t_1,...,t_n)\in R^n$.

Розглянемо такий приклад. Випадковий вектор $\xi'=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ має нормальний (або гауссівський) розподіл, якщо його характеристична функція має вид $f_\xi(t)=e^{i(t,a)-\frac{1}{2}(Bt,t)}$, де $a'=(a_1,a_2,...,a_n)$ - довільний вектор, а $B=\|b_{ij}\|_1^n$ - симетрична квадратна матриця розміром $n\times n$ невід'ємно визначеної квадратичної форми $(Bt,t)=\sum_{i.j=1}^{n}b_{ij}t_it_j$.

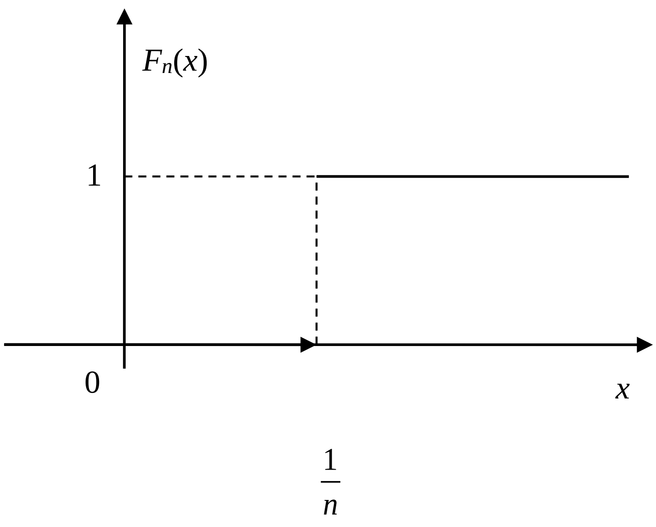
Неперервна відповідність між функціями розподілу і характеристичними функціями

Будемо говорити, що послідовність функцій розподілу $F_n(x)$ слабко збігається до $F(x)$ і писати

$$F_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{сл}{\Rightarrow}}F(x),$$

якщо $F_n(x)\to F(x)$ у кожній точці неперервності граничної функції.

$\xi_n=1/n$, $F_n(x)=F_{\xi_n}(x)=P\{\xi_n\le x\}$



Тоді $\xi_n \to \xi_0 = 0$ з ймовірністю 1, але $F_{\xi_n}(0) = F_n(0) = 0$, в той час, як $F_{\xi_0}(0) = 1$

Послідовність випадкових величин $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{сл}{\Rightarrow}} \xi$, якщо слабко збігається відповідна послідовність функцій розподілу.

Лема 1. (Друга теорема Хеллі). Якщо $g(x)$ – неперервна, обмежена функція на прямій і $F_n(x) \overset{сл}{\Rightarrow} F(x)$, $F(\infty) - F(-\infty)$=1, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x). \tag{4}$$

Доведення. Нехай $a < b$ - точки неперервності $F(x)$. Доведемо спочатку, що

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g(x)dF_n(x) = \int_a^b g(x)dF(x). \tag{5}$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Розділимо $[a,b]$ точками неперервності

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$$

функції $F(x)$ на такі відрізки $[x_{k-1}, x_k]$, що $|g(x) - g(x_k)| < \varepsilon$ для $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Це можна зробити, так як $g(x)$ - рівномірно неперервна на $[a,b]$, а точки неперервності $F(x)$ розташовані всюди щільно.

Визначимо східчасту функцію

$$g_\varepsilon(x) = g(x_k), \quad x \in (x_{k-1}, x_k],$$

для якої $|g_\varepsilon(x) - g(x)| \le \varepsilon$ при $x \in [a,b]$. Тоді

$$\left|\int_a^b g(x)dF_n(x) - \int_a^b g(x)dF(x)\right| \le \int_a^b |g(x) - g_\varepsilon(x)| dF_n(x) +$$

$$+\left|\int_a^b g_\varepsilon(x)dF_n(x) - \int_a^b g_\varepsilon(x)dF(x)\right| + \int_a^b |g(x) - g_\varepsilon(x)| dF(x) \le$$

$$\le 2\varepsilon + H\sum_{k=1}^{N}\left|\left(F_n(x_k) - F_n(x_{k-1})\right) - \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right)\right|,$$

де $H = \sup_x |g(x)|$. Так як

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\left|\left(F_n(x_k) - F_n(x_{k-1})\right) - \left(F(x_k) - F(x_{k-1})\right)\right| = 0,$$

а $\varepsilon > 0$ – довільне, то співвідношення (4) доведено.

Для повного доведення леми оберемо A так, щоб воно було точкою неперервності $F(x)$ і $F(-A) < \varepsilon/4$ і $1 - F(A) < \varepsilon/4$. Тоді можна обрати n_0 так, щоб при $n \ge n_0$ $F_n(-A) < \varepsilon/2$ і $1 - F_n(A) < \varepsilon/2$.

Тепер для нескінченного інтервалу інтегрування маємо

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) \right| \le$$

$$\le \left| \int_{-A}^{A} g(x) dF(x) - \int_{-A}^{A} g(x) dF_n(x) \right| + \left| \int_{|x|>A} g(x) dF_n(x) \right| + \left| \int_{|x|>A} g(x) dF(x) \right| \le$$

$$\le \left| \int_{-A}^{A} g(x) dF(x) - \int_{-A}^{A} g(x) dF_n(x) \right| + H\varepsilon + H\varepsilon/2.$$

Враховуючи (5), остання оцінка завершує доведення леми.

****

Зауваження. Справедливо і обернене твердження: якщо (4) виконується для будь-якої неперервної обмеженої функції, то $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{сл}{\Rightarrow}} F(x)$. **Таким чином співвідношення (4) можна було б узяти за визначення слабкої збіжності.**

Наслідок 2. Якщо $F_n(x) \overset{сл}{\Rightarrow} F(x)$, то $f_n(t) \to f(t)$ у кожній точці t.

Лема 2 (Перша теорема Хеллі). З кожної послідовності функцій розподілу $\{F_n(\cdot)\}$ можна вибрати слабко збіжну підпослідовність.

Доведення. а) Спочатку доведемо, що якщо $F_n(x) \to F(x)$ на скрізь щільній на прямій множині D, то $F_n(x) \overset{сл}{\Rightarrow} F(x)$.

Нехай x - точка неперервності $F(x)$ і нехай $x', x'' \in D$ такі, що $x' < x < x''$. Маємо $F_n(x') \le F_n(x) \le F_n(x'')$ і

$$F(x') = \lim_{n\to\infty} F_n(x') \le \underline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \le \overline{\lim}_{n\to\infty} F_n(x) \le \lim_{n\to\infty} F_n(x'') = F(x'').$$

Так як $F(x') \le F(x) \le F(x'')$ і різниця $F(x'') - F(x')$ може бути зроблена як завгодно малою, то $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

б) Нехай $D = \{x_k\}$ – скрізь щільна на прямій злічення множина. З обмеженої послідовності $0 \le F_n(x_1) \le 1$ оберемо збіжну підпослідовність $F_{1n}(x_1)$, границю якої позначимо $F(x_1)$. З обмеженої послідовності $0 \le F_{1n}(x_2) \le 1$ обираємо збіжну підпослідовність $F_{2n}(x_2) \to F(x_2)$ і т.д. Далі обираємо діагональну підпослідовність $F_{nn}(x)$, для якої $F_{nn}(x_k) \to F(x_k)$ для довільної точки $x_k \in D$.

Функція $F(x)$ визначена для $x \in D$. Якщо $x \notin D$, то $F(x)$ визначається як границя справа. Доведений пункт а) і діагональний процес Кантора означає, що

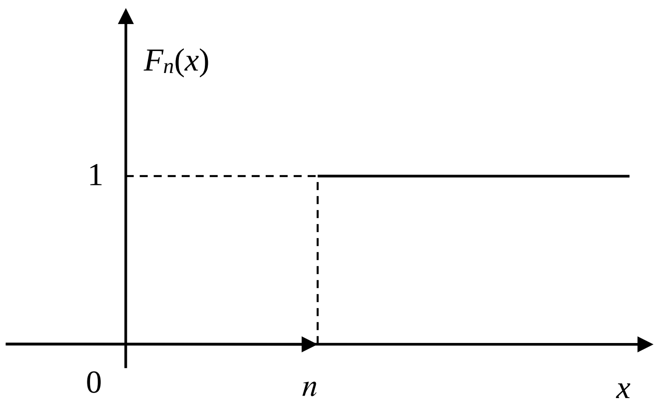
$$F_{nn}(x) \underset{n\to\infty}{\overset{сл}{\Rightarrow}} F(x).$$

Лему доведено.

****

Розглянемо такий приклад. Гранична функція $F(x)$ може не бути функцією розподілу. Розглянемо послідовність функцій розподілу випадкових величин $\xi_n = n$. Відповідна послідовність функцій розподілу має вигляд:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < n, \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$$



Очевидно, що $F(x) \equiv 0$.

Наслідок 3 Якщо $f_n(t)$ збігається в кожній точці t до деякої функції $f(t)$, неперервної в точці нуль, то $f(t)$ - характеристична функція деякого розподілу $F(x)$ і $F_n(x) \overset{сл}{\Rightarrow} F(x)$.

Лема 3. Нехай $F_n(x)$ – послідовність функцій розподілу, а $f_n(t)$ відповідна послідовність характеристичних функцій. Якщо $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{сл}{\Rightarrow}} F(x)$ і функція $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$ неперервна в точці $t = 0$, то $F(x)$ – функція розподілу.

Доведення леми випливає з нерівності

$$P\left\{|\eta| \leq \frac{2}{\tau}\right\} \geq 2\left|\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} g(t)\,dt\right| - 1,$$

де $\tau > 0,\quad g(t)$ – характеристична функція випадкової величини η.

***Доведення наслідку* 3.** Згідно леми 1 (перша теорема Хеллі) з послідовності $F_n(x)$ можна вибрати підпослідовність $F_{nn}(x) \overset{сл}{\Rightarrow} F^*(x)$. Використовуючи лему 3, маємо, що $F^*(x)$ - функція розподілу.

Доведемо тепер, що $F_n \overset{сл}{\Rightarrow} F^*$. Припустимо протилежне, тобто, що

$$F_n \overset{сл}{\not\Rightarrow} F^*.$$

Тоді існує інша функція розподілу $F^{**} \neq F^*$ і інша підпослідовність $F_{n'n'}(x)$ така, що

$$F_{n'n'}(x) \underset{n'\to\infty}{\overset{сл}{\Rightarrow}} F^{**}.$$

Так як $F^* \neq F^{**}$, то і $f^*(t) \neq f^{**}(t)$. В силу слабкої збіжності функцій розподілу маємо

$$\lim_{n\to\infty} f_{nn}(t) = f^*(t) \neq \lim_{n'\to\infty} f_{n'n'}(t) = f^{**}(t).$$

Ми прийшли до протиріччя, оскільки $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$. Теорему доведено.