## Тема №8. Канонічна декомпозиція лінійних динамічних систем.

У цій темі розглядаються лінійні стаціонарні динамічні системи і вивчаються структурні властивості їх представлень, які пов'язані з властивостями керованості та спостережності. Спочатку це розглядається у відношенні властивості керованості, потім – властивості спостережності, і наостанок – властивості сумісної керованості та спостережності.

### 8.1. Канонічна декомпозиція за керованістю.

**Означення 1.** Підпростір $L,\ L\subset X$ називається *інваріантним підпростором системи*

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t) \qquad (1)$$

відносно керування $u(\cdot)\in U(\cdot)$, якщо при довільних допустимих $u(\cdot)$ розв'язок $x(t)$ системи (1), який відповідає початковій умові $x(t_0)=x^0\in L$, при всіх $t\ge t_0$ належить підпростору $L$. (Тут $x\in R^n,\ A-$матриця розмірності $n\times n,\ B-$матриця розмірності $n\times m$).

Позначимо через $Q_l$ лінійний підпростір простору $X$, який натягується на лінійно-незалежні стовпці матриці

$$N=\left(B\middle\|AB\middle\|A^2B\middle\|...\middle\|A^{n-1}B\right),$$

тобто $l=rangN,\ l<n$.

**Твердження.1.** Підпростір $Q_l$ являється інваріантним підпростором

(без доведення).

У просторі станів $X$ уведемо новий базис із векторів

$$p^1,p^2,...,p^l,p^{l+1},...,p^n.$$

В якості перших $l$ векторів цього базису візьмемо які-небудь $l$ лінійно-незалежних векторів із підпростору $G_l$. Тоді, позначаючи коефіцієнти розкладу вектора $x$ по цьому базису через $\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ ...\ ,\hat{x}_n$, маємо:

$$x=\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i p^i=\sum_{i=1}^{n}p^i\hat{x}_i=R\hat{x},$$

де $R-(n\times n)$ матриця, стовпцями якої є вектори $p^1, p^2, ..., p^l, p^{l+1}, ..., p^n$, а вектор $\hat{x}=\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ ...\\ \hat{x}_n\end{pmatrix}$.

Оскільки матриця $R$ є неособливою, то існує обернена матриця $R^{-1}$ і в новому базисі рівняння системи (1) приймуть вигляд:

$$\frac{dR\hat{x}(t)}{dt}=AR\hat{x}(t)+Bu(t).$$

Винесемо матрицю-константу $R$ за знак похідної зліва та помножимо зліва обидві частини отриманої рівності на матрицю $R^{-1}$:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt}=R^{-1}AR\hat{x}(t)+R^{-1}Bu(t). \qquad (2)$$

Уведемо такі нові матриці $\hat{A}$ та $\hat{B}$:

$$\hat{A}=R^{-1}AR,\quad \hat{B}=R^{-1}B.$$

Тоді рівняння (2) прийме вигляд:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt}=\hat{A}\hat{x}(t)+\hat{B}u(t). \qquad (3)$$

**Твердження 2.** Матриці $\hat{A}$ та $\hat{B}$ мають вигляд:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\hat{A}_1 & \hat{A}_2\\ 0 & \hat{A}_3\end{pmatrix},\quad \hat{B}=\begin{pmatrix}\hat{B}_1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

де $\hat{A}_1$ – матриця розмірності $(l\times l)$, $\hat{A}_3$ – матриця розмірності $(n-l\times n-l)$ та $\hat{B}_1$ – матриця розмірності $(l\times m)$. При цьому ранг матриці

$$\left(\hat{B}_1 \middle\| \hat{A}_1\hat{B}_1 \middle\| \ ... \middle\| \hat{A}_1^{l-1}\hat{B}_1\right)$$

дорівнює $l$ (тобто пара підматриць $\hat{A}_1,\ \hat{B}_1$ – повністю керована).

Із твердження 2 випливає, що якщо початкова система (1) не являється повністю керованою, то вона допускає декомпозицію такого типу, що частина координат її вектора стану не залежать від вхідного керуючого сигналу $u(\cdot)$, а решту координат відповідають повністю керованій підсистемі, бо формула (3), з врахуванням (4), набуде в координатній формі вигляду:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{a}_{11}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{12}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \dots \ + \hat{a}_{1l}^{(1)}\hat{x}_l + \hat{a}_{11}^{(2)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{12}^{(2)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{1,n-l}^{(2)}\hat{x}_n + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{1i}^{(1)}u_i, \\
\dfrac{d\hat{x}_2}{dt} = \hat{a}_{21}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{22}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \dots \ + \hat{a}_{2l}^{(1)}\hat{x}_l + \hat{a}_{21}^{(2)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{22}^{(2)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{2,n-l}^{(2)}\hat{x}_n + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{2i}^{(1)}u_i, \\
\cdot \ \cdot \ \cdot \\
\dfrac{d\hat{x}_l}{dt} = \hat{a}_{l1}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{l2}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \dots \ + \hat{a}_{ll}^{(1)}\hat{x}_l + \hat{a}_{l1}^{(2)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{l2}^{(2)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{l,n-l}^{(2)}\hat{x}_n + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{li}^{(1)}u_i, \\
\dfrac{d\hat{x}_{l+1}}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{11}^{(3)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{12}^{(3)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{1,n-l}^{(3)}\hat{x}_n + \ 0, \\
\dfrac{d\hat{x}_{l+2}}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{21}^{(3)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{22}^{(3)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{2,n-l}^{(3)}\hat{x}_n + \ 0, \\
\cdot \ \cdot \ \cdot \\
\dfrac{d\hat{x}_n}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{n-l,1}^{(3)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{n-l,2}^{(3)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{n-l,n-l}^{(3)}\hat{x}_n + \ 0.
\end{cases}
$$

### 8.2. Канонічна декомпозиція за спостережністю.

Тепер розглянемо питання про декомпозицію лінійної динамічної системи заданої матрицями $A$ розмірності $(n \times n)$ та $C$ розмірності $(k \times n)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \tag{5}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{6}$$

(оскільки другий доданок у формулі (1) не впливає на властивість спостережності).

**Означення 2.** *Підпростором неспостережності системи* (5), (6) називається множина таких векторів стану $x \in X$, що відповідний їм вихід $y(\cdot)$ тотожно рівний нулю.

Цей підпростір будемо позначати через $Q_r^{\bar{\eta}}$, де $r-$ його розмірність а $\bar{\eta}-$означає, що це простір неспостережності. Якщо $x^0 \in Q_r^{\bar{\eta}}$, то відповідний вихід у момент $t \in T$ є таким

$$y(t) = Ce^{tA}x^0,$$

а із умови $0 \equiv Ce^{tA}x^0$ випливають такі співвідношення:

$$
\begin{cases}
Cx^0 = 0, \\
CAx^0 = 0, \\
\cdot \ \cdot \ \cdot \\
CA^{n-1}x^0 = 0,
\end{cases}
$$

тобто $Q_r^{\overline{\eta}}$ представляє собою множину таких векторів стану $x^0$, які ортогональні рядкам матриці спостережності системи (5), (6).

**Твердження 3.** Підпростір $Q_r^{\overline{\eta}}$ інваріантний відносно перетворення $A$.

Виберемо базис у просторі станів $X$ наступним чином. В якості перших $r$ векторів $p^1, p^2,..., p^r$ нового базису візьмемо лінійно-незалежні вектори із простору неспостережності $Q_r^{\overline{\eta}}$, а решту $p^{r+1}, p^{r+2},..., p^n$ доповнимо до базису.

Зробивши заміну змінних:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i p^i = \sum_{i=1}^{n} p^i \hat{x}_i = R\hat{x},$$

де $R-(n\times n)$матриця, стовпцями якої є вектори $p^1, p^2,..., p^l, p^{l+1},..., p^n$, а вектор

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ ... \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$$

перейдемо до системи:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= R^{-1}AR\hat{x}(t) \\ y(t) &= CRx(t) \end{aligned} . \qquad (7)$$

Уведемо такі нові матриці $\hat{A}$ та $\hat{C}$:

$$\hat{A} = R^{-1}AR, \;\; \hat{C} = CR,$$

і отримаємо таке представлення:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \hat{A}\hat{x}(t), \;\; \hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t). \qquad (8)$$

Матриці $\hat{A}, \; \hat{C}$ мають вигляд:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ 0 & \hat{A}_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0, & \hat{C}_2 \end{pmatrix},$$

де $\hat{A}_1$ – матриця розмірності $(r\times r)$, $\hat{A}_3$ – матриця розмірності $(n-r\times n-r)$ та $\hat{C}_2$ – матриця розмірності $(k\times n-r)$. Для підматриць $\hat{A}_3,\ \hat{C}_2$ виконується:

$$rang\begin{pmatrix}\hat{C}_2\\ \hat{C}_2\hat{A}_3\\ \ldots\\ \hat{C}_2\hat{A}_3^{\,n-r-1}\end{pmatrix}=n-r,$$

тобто робимо висновок, що підсистема утворена підматрицями $\hat{A}_3,\ \hat{C}_2$ є повністю спостережною.

Тепер можемо стверджувати, що у нових змінних підпростір неспостережності описується такими співвідношеннями:

$$\begin{cases}\hat{x}_{r+1}=0,\\ \hat{x}_{r+2}=0,\\ \ldots\\ \hat{x}_n=0,\end{cases}$$

оскільки у нових змінних система має такий вигляд:

$$\begin{cases}\dfrac{d\hat{x}_1}{dt}=\hat{a}_{11}^{(1)}\hat{x}_1+\hat{a}_{12}^{(1)}\hat{x}_2+\ \ldots\ +\hat{a}_{1r}^{(1)}\hat{x}_r+\hat{a}_{11}^{(2)}\hat{x}_{r+1}+\hat{a}_{12}^{(2)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{a}_{1,n-r}^{(2)}\hat{x}_n,\\ \dfrac{d\hat{x}_2}{dt}=\hat{a}_{21}^{(1)}\hat{x}_1+\hat{a}_{22}^{(1)}\hat{x}_2+\ \ldots\ +\hat{a}_{2r}^{(1)}\hat{x}_r+\hat{a}_{21}^{(2)}\hat{x}_{r+1}+\hat{a}_{22}^{(2)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{a}_{2,n-r}^{(2)}\hat{x}_n,\\ .\ .\ .\\ \dfrac{d\hat{x}_r}{dt}=\hat{a}_{r1}^{(1)}\hat{x}_1+\hat{a}_{r2}^{(1)}\hat{x}_2+\ \ldots\ +\hat{a}_{rr}^{(1)}\hat{x}_r+\hat{a}_{r1}^{(2)}\hat{x}_{r+1}+\hat{a}_{r2}^{(2)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{a}_{r,n-r}^{(2)}\hat{x}_n,\\ \dfrac{d\hat{x}_{r+1}}{dt}=\qquad 0\qquad +\hat{a}_{11}^{(3)}\hat{x}_{r+1}+\hat{a}_{12}^{(3)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{a}_{1,n-r}^{(3)}\hat{x}_n,\\ \dfrac{d\hat{x}_{r+2}}{dt}=\qquad 0\qquad +\hat{a}_{21}^{(3)}\hat{x}_{r+1}+\hat{a}_{22}^{(3)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{a}_{2,n-r}^{(3)}\hat{x}_n,\\ .\ .\ .\\ \dfrac{d\hat{x}_n}{dt}=\qquad 0\qquad +\hat{a}_{n-r,1}^{(3)}\hat{x}_{r+1}+\hat{a}_{n-r,2}^{(3)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{a}_{n-r,n-r}^{(3)}\hat{x}_n,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{y}_1=\quad 0\quad +\quad \hat{c}_{11}^{(2)}\hat{x}_{r+1}+\hat{c}_{12}^{(2)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{c}_{1,n-r}^{(2)}\hat{x}_n,\\ \hat{y}_2=\quad 0\quad +\quad \hat{c}_{21}^{(2)}\hat{x}_{r+1}+\hat{c}_{22}^{(2)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{c}_{2,n-r}^{(2)}\hat{x}_n,\\ .\ .\ .\\ \hat{y}_k=\quad 0\quad +\quad \hat{c}_{k1}^{(2)}\hat{x}_{r+1}+\hat{c}_{k2}^{(2)}\hat{x}_{r+2}+\ldots+\hat{c}_{k,n-r}^{(2)}\hat{x}_n.\end{cases}$$

### 8.3. Канонічна декомпозиція сумісно за керованістю та спостережністю.

Зараз зробимо декомпозицію представлення лінійної динамічної системи з матрицями $A, B, C$ відповідних розмірностей, що основується одночасно на врахуванні властивостей керованості та спостережності. Для цього виберемо у просторі станів $X$ базис наступним чином. Нехай перетин підпросторів $Q_l$ та $Q_r^{\overline{\eta}}$ має розмірність $l-n^0$ (параметр $l$ уведений у пункті 8.1 а параметр $r$ – у пункті 8.2). Тоді в якості перших $l-n^0$ векторів нового базису виберемо вектори із перетину підпросторів $Q_l \cap Q_r^{\overline{\eta}}$. Наступні $n^0$ векторів нового базису виберемо із різниці підпросторів $Q_l \setminus Q_r^{\overline{\eta}}$. Потім наступні $r+n^0-l$ векторів нового базису візьмемо із різниці підпросторів $Q_r^{\overline{\eta}} \setminus Q_l$ і на завершення $n-r-n^0$ векторів доповнимо до нового базису в просторі станів $X$. Згідно з результатами пункту 8.2 декомпозиція за спостережністю приведе до нових матриць $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \hat{B}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}=\begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & C_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – квадратні матриці, відповідно, таких розмірностей: $l-n^0,\ n^0,\ r+n^0-l,\ n-r-n^0$ ; $B_1, B_2, B_3, B_4$ – прямокутні матриці, відповідно, таких розмірностей: $(l-n^0\times m)$, $(n^0\times m)$, $(r+n^0-l\times m)$, $(n-r-n^0\times m)$; $C_1, C_2$ – прямокутні матриці відповідно, таких розмірностей: $(k\times n^0)$, $(k\times n-r-n^0)$.

В результаті декомпозиції за керованістю згідно пункту 8.1 прийдемо до представлення системи з трійкою матриць $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ такої структури:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \hat{B}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{C}=\begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Ранг матриці $\left(B_2 \| A_{22}B_2 \| \ldots \| A_{22}^{l-1}B_2\right)$ дорівнює числу її рядків $n^0$. Ранг матриці $\left(B_2 \| A_{22}B_2 \| \ldots \| A_{22}^{n^0-1}B_2\right)$ також дорівнює числу $n^0$. Ранг матриці

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1A_{22} \\ \cdots \\ C_1A_{22}^{n^0-1} \end{pmatrix}$$

Також дорівнює числу $n^0$.

Тому підсистема:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = A_2 z(t) + B_2 u(t), \\ y(t) = C_1 z(t) \end{cases} \tag{11}$$

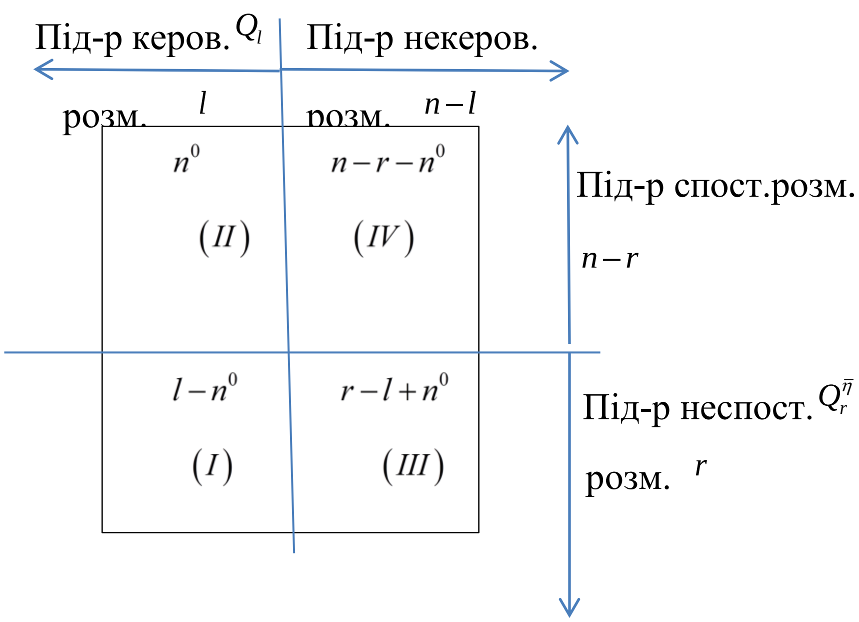
являється повністю керованою та повністю спостережною.

Представлення системи, у якому матриці $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ мають вигляд (10) , де пара підматриць $A_{22},\ B_2$ являється повністю керованою, а пара $A_{22}, C_1$ – повністю спостережною , називається *представленням у формі канонічної декомпозиції.*

Якщо розбити компоненти вектора стану $\hat{x}$ на чотири групи:

$$\hat{x} = col\left(\hat{x}^I, \hat{x}^{II}, \hat{x}^{III}, \hat{x}^{IV}\right),$$

розмірність яких, відповідно, дорівнює: $l-n^0,\ n^0,\ r+n^0-l,\ n-r-n^0$ , то поведінка $x^I$ описується повністю керованою, але не спостережною підсистемою; поведінка $x^{II}$ – повністю керованою і повністю спостережною підсистемою; поведінка $x^{III}$ – не керованою і не спостережною підсистемою; поведінка $x^I$ описується повністю керованою, але не спостережною підсистемою; поведінка $x^{IV}$ – не керованою, але повністю спостережною підсистемою. У цьому розумінні можна говорити про *декомпозицію початкової системи на підсистеми з вказаними властивостями.* Нижче зображено схему канонічної декомпозиції сумісно за керованістю та спостережністю:



**Твердження 4 (Р. Калман).** Передавальна матриця представлення лінійної динамічної системи з матрицями $A, B, C$ співпадає з передавальною матрицею представлення з матрицями $A_{22},\ B_2,\ C_1$.