Київський університет імені Тараса Шевченка

Мащенко С.О.

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З ТЕОРІЇ ІГОР

Частина 2 «Кооперативні ігри»

для студентів третього курсу
спеціальності 124 – «Системний аналіз»

2020

Зміст

Лекція 18. Кооперативне поведінка гравців

У бескоаліційних іграх гравці діяли некооперативно, тобто явний обмін інформацією між ними був відсутній. Це, як правило, приводить до неефективності (домінованості) рівноважних ситуацій.

У випадку можливості обміну інформацією можна сподіватись на кооперацію у процесі прийняття рішень (вибору стратегій).

Умови кооперації визначаються гравцями у ході переговорів, у яких можуть взаємно з'ясовуватися:

- функції виграшу,
- різноманітні психологічні аспекти поведінки супротивників (колег),
- проводить торги тощо.

У результаті гравці приходять до кооперативної домовленості, яка може бути:

- обов'язковою (коли підписується контракт про використання певних стратегій й виконання цього контракту забезпечується деяким контролюючим органом, якому підкоряються всі гравці);
- або необов'язковим (коли такого органа не існує й тому домовленість нагадує міжнародні договори, які діють до тих пір, поки не вигідно їх порушувати).

Необов'язкові угоди.

Будемо розглядати необов'язкові домовленості з точки зору їх стабільності, яка розуміється як невигідність відхилення від неї гравцями.

Стабільність є не таким уже простим поняттям, як може здатись на перший погляд.

Дійсно, відхилення деяких гравців від домовленості (необов'язкової) може заставити інших гравців (котрі спочатку не збирались порушувати домовленість) змінити свої стратегії.

Ці зміни важко передбачити незалежно від того, чи ми передбачаємо чи ні, що порушення домовленості знищить дух кооперації й приведе до некооперативної поведінки гравців. Тому

будемо вважати, що необов'язкові домовленості будуть складатись:

- з домовленостей про ситуацію,
- а також із сценарію реагування кожного гравця i на відхилення будь-якої коаліції, що не містить гравця i. Цей сценарій об'являється наперед і є „сценарієм погроз". Зокрема, реакція на порушення домовленості може полягати у відсутності будь-якої реакції („сценарій ігнорування").

В принципі у якості домовленості може виступати будь-яка ситуація гри, але логічно використовувати „стабільні" ситуації, від яких невигідно відхилятись.

Сильна рівновага Неша.

Основним прикладом стабільної домовленості є домовленість, що базується на рівновазі Неша. Її стабільність забезпечується взаємним незнанням остаточних стратегічних виборів.

Таблиця 2.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	1,1	1,0
b_1	0,1	2,2

Приклад (Табл. 2). Маємо дві нешівські рівноваги – (a_1,a_2) й (b_1,b_2). Але, якщо від ситуації (a_1,a_2) невигідно відхилятись будь-якому (але одному! – стратегія другого є фіксованою), то від (b_1,b_2) невигідно відхилятись обом одночасно (якщо від ситуації (a_1,a_2) одночасно відхиляться обоє, то вони перейдуть у ситуацію (b_1,b_2), вигіднішу для обох).

Означення. Для гри $G=(X_i,u_i,i\in N)$ ситуація x^* є *сильною рівновагою* Неша, якщо не існує коаліції гравців, для яких було б вигідно відхилятись від даної ситуації у випадку, коли доповнювальна коаліція не реагує на відхилення, тобто для $\forall\ T\subset N$, $\forall\ x_T\in X_T$ є несумісною система нерівностей

$$u_i\left(x_T,x^*_{N\backslash T}\right)\ge u_i\left(x^*\right),\forall i\in T;\ \exists j\in T:\ u_j\left(x_T,x^*_{N\backslash T}\right)>u_j\left(x^*\right)\ . \qquad (1)$$

Множину сильних рівноваг у грі *G* позначатимемо через *SNE(G)*. Ця множина може бути порожньою.

Властивості:

1)Покладаючи у формулах (1) $T=\{i\}$, $i\in N$, маємо, що сильна рівновага Неша є просто рівновагою Неша, тобто $SNE(G)\subseteq NE(G)$.

2)Покладаючи *T=N*, отримуємо, що сильна рівновага є Парето–оптимальною (ефективною) ситуацією.

3)Стабільність.

4)Якщо $|SNE(G)|>1$, то виникає боротьба за лідерство.

При $n\ge 3$ потрібно аналізувати ефективні рівноваги Неша на предмет вигідності відхилення від них „проміжних” коаліцій T ($1<|T|<N$).

Таблиця 3.

a_3 $X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	1,1,3	1,2,1	2,2,2
b_1	2,1,4	2,1,1	1,3,2

b_3 $X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2	c_2
a_1	2,2,1	1,5,1	2,3,2
b_1	1,3,2	2,1,2	1,1,1

Приклад. В цьому прикладі єдина нешівська рівновага (a_1,c_2,a_3) (табл. 3) не є сильною рівновагою, оскільки не є ефективною (вона домінується (a_1,c_2,b_3)).

Приклад (табл. 4). В цьому прикладі дві нешівські рівноваги, які є ефективними ((a_1,a_2,a_3) й (b_1,b_2,b_3)), але лише одна є сильною рівновагою – (b_1,b_2,b_3). Від ситуації (a_1,a_2,a_3) вигідно відхилятись, наприклад, коаліції $T=\{2,3\}$ у точку (a_1,b_2,a_3).

Таблиця 4

a_3 X_2 / X_1	a_2	b_2		b_3 X_2 / X_1	a_2	b_2
a_1	2,2,2	1,2,3		a_1	1,1,1	1,2,1
b_1	1,2,3	1,3,1		b_1	1,2,1	1,3,2

Інтерпретація властивості стабільності *сильної рівноваги* Неша базується на двох-етапному процесі прийняття рішень.

1) На першому етапі гравці приходять до домовленості про деяку конкретну ситуацію x^*.
2) Далі обмін інформацією припиняється й кожен гравець самостійно приймає рішення про свою остаточну стратегію. Будь-який гравець $i \in N$ може відмовитись від використання стратегії x^*, але не може інформувати останніх про своє відхилення. Може бути також сформованою будь-яка коаліція *T*, яка відхиляється від x_T^* й вибирає x_T, але гравці поза даною коаліцією не можуть бути проінформовані про цю зміну, тому очікується, що вони будуть притримуватись стратегій з домовленості x_T^*.

На прикладі ігор двох осіб ми переконались, що непорушність будь-якої *NE*–ситуації руйнується, якщо виникає боротьба за лідерство. Аналогічна ситуація може виникнути й у грі *n* осіб.

Приклад. (Переговори). У цій грі *n* гравців повинні поділити 1 гривню. Гравці подають свої заявки арбітру, який задовольняє їх, якщо у сумі вони не перевищують 1 гривню. Інакше жоден гравець нічого не отримує.

Нормальна форма гри: $X_i=[0,1]$, $i \in N$, $u_i(x)=\begin{cases} x_i, & \sum\limits_{j\in N} x_j \le 1; \\ 0, & \sum\limits_{j\in N} x_j > 1. \end{cases}$

Розв'язок $x^0=(0,...,0)$ не є сильною рівновагою, оскільки він домінується, наприклад, точкою $\overline{x}=(1/n)_{j=\overline{1,n}}$.

Аналогічно, розв'язок $x'=(x'_j)_{j=\overline{1,n}}$, $\sum\limits_{j\in N} x'_j < 1$, також є домінованим (наприклад, точкою $\tilde{x}=\left(\tilde{x}_j\right)_{j=\overline{1,n}}$, $\tilde{x}_j = x'_j$, $j=\overline{1,n-1}$, $\tilde{x}_n = x'_n + \left(1-\sum_{j=1}^{n-1} x_j^1\right)$).

Відхилення будь-якої коаліції від точки $x^*=\left(x_j^*\right)_{j=\overline{1,n}}$, $\sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1$, може лише погіршити результат хоча б одному члену коаліції. Отже, $SNE(G)=\left\{x \in X_N \mid \sum_{i\in N} x_i = 1\right\}$.

Сценарій. Для того, щоб зробити таку домовленість стабільною, кожен гравець повинен вирішити не звертати уваги на заявки гравців, більші за $1/n$. Найкращим чином така політика „глухоти” може бути реалізованою шляхом обмежень в обміні інформацією між гравцями. Ці обмеження повинні бути або законом (як у системі таємного голосування) або фізичним обмеженням (супутники Одисея затикали вуха воском, щоб не бути звабленими сиренами). Отже, необов’язкові домовленості вимагають деяких обов’язкових обмежень в обміні інформацією.

Відмітимо, що коли коаліція T діє у ролі лідера й вибирає набір стратегій x_T^* так, що $\sum_{i\in T} x_i^* = 1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$, то коаліції $N\backslash T$ залишається вибрати $x_{N\backslash T}^*$ такий, що $\sum_{j\in N\backslash T} x_j^* = \varepsilon$. Отже, будь-який учасник або коаліція, привласнивши собі право лідера, може забрати собі майже всю гривню (наприклад, 99 коп.)!

Лекція 19. Рівновага у сумісних змішаних стратегіях

З кооперативної точки зору рівновага Неша у змішаних стратегіях є необов'язковою домовленістю, яка забезпечується тайною проведення лотерей, що організують гравці для випадкового вибору остаточного рішення.

Приклад (Ввічливі барани).

Розв'язання. На доповнення до трьох чистих *NE*– ситуацій з векторами виграшів $(1+\varepsilon,2)$, $(2,1+\varepsilon)$ (величині ε відповідає степінь "ввічливості" водія) ця гра має цілком змішану рівновагу

$$\left(\mu_1^*,\mu_2^*\right):\ \mu_1^*=\mu_2^*=\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}\delta_I+\frac{1}{2+\varepsilon}\delta_{II}$$

X_1 \ X_2	**З**	Р
З	1, 1	$1+\varepsilon$, 2
Р	2, $1+\varepsilon$	0, 0

Таблиця 1.

з вектором виграшів

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon},1+\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right).$$

Недоліки:

1)Ця змішана *NE*– ситуація *домінується* обома чистими *NE*– ситуаціями, тому її можна рекомендувати у якості переговорної лише у зв'язку з її „справедливістю" (їй відповідають однакові виграші гравців).

Однак у цій змішаній *NE*– ситуації кожен гравець отримує виграш $1+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$, *рівний гарантованому виграшу* у змішаних стратегіях.

2)Разом з тим стратегії μ_i^*, що утворюють *NE*– ситуацію, *не є обережними*, а тому не гарантують гравцю цього виграшу. Дійсно, ціна гри у змішаних стратегіях дорівнює $1+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}$ і єдина рівноважна ситуація є

$\left(\mu_1^0,\mu_2^*\right)$, де $\mu_1^0=\dfrac{2}{2+\varepsilon}\delta_I+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\delta_{II}$.

Більш того,

$u_1(\mu_1^*,\delta_{II})=\dfrac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon}<1+\dfrac{\varepsilon}{2+\varepsilon}==u_1(\mu_1^*,\mu_2^*)=u_1(\mu_1^0,\delta_{II})$, звідки ясно, що змішана *NE*– ситуація μ_1^* є більш ризикованою, ніж обережна стратегія μ_i^0.

Переваги: Єдиним аргументом на користь рівноваги у змішаних стратегіях є стабільність. Якщо гравці можуть таємно проводити лотереї, то необов'язкова домовленість про реалізацію цілком змішаної *NE*– ситуації є стабільною.

Отже, для кожного гравця дії інших цілком передбачувані. З цієї точки зору аргументація на користь обережних стратегій теж оманлива, оскільки застосування обережних стратегій приводить до послідовності найкращих відповідей, що робить результат непередбачуваним.

З одного боку, змішана *NE*– стратегія є розумною, якщо гравець вважає свого партнера таким само раціональним, як і він сам, хоча *NE* – ситуація є більш ризикованою, ніж обережна стратегія, якщо партнер може зіграти нерозумно. З іншого боку, обережна змішана стратегія вибирається із міркувань мінімуму ризику і, отже, максимально безпечна. Тим не менш, у раціонального гравця виникає бажання одностороннього відхилення від ситуації, що складається з пари змішаних обережних стратегій, оскільки це збільшує виграш.

Ідея. Побудуємо випадковий механізм, який не зводиться до незалежної рандомізації стратегій, тому дозволяє зробити рівноважну ситуацію Парето-оптимальною.

Приклад (Перехрестя із світлофором). Гравці встановлюють світлофор, який показує „зелене – червоне" й „червоне – зелене" з рівною ймовірністю. Домовленість полягає у тому, щоб на зелене світло проїжджати без зупинки, на червоне – зупинятись. Ця домовленість є стабільною, оскільки при кожній реалізації лотереї маємо рівновагу Неша.

Математичне сподівання виграшу дорівнює $3/2+\varepsilon/2$ для кожного гравця, чим забезпечується Парето – оптимальність й справедливість.

X_2 / X_1	З	Р
З	1, 1	$1+\varepsilon$, 2
Р	2, $1+\varepsilon$	0, 0

Таблиця 1.

Означення. Для гри $G=\left(X_i,u_i;i\in N\right)$ із скінченною множиною стратегій *спільною лотереєю* назвемо ймовірносний розподіл $L=\left(L(x)\right)_{x\in X_N}$ на X_N. Для всіх $i\in N$ і для всіх $x_i\in X_i$ позначимо через L_{X_i} умовну ймовірність реалізації $x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}$:

$$L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sum\limits_{y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} L\left(x_i,y_{N\setminus i}\right)}\cdot L\left(x_i,x_{N\setminus i}\right), & \sum\limits_{y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} L\left(x_i,y_{N\setminus i}\right)\neq 0,\\ 0, \text{ якщо } L\left(x_i,y_{N\setminus i}\right)=0 \text{ для всіх } y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}. & \end{cases}$$

Означення. Скажемо, що *L* є *рівновагою у спільних змішаних* стратегіях у грі *G*, якщо виконані наступні нерівності: $\forall\ i\in N$, $\forall\ x_i,y_i\in X_i$,

$$\sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i,x_{N\setminus i}\right)L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)\geq \sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i,x_{N\setminus i}\right)L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right). \qquad (1)$$

Позначимо через *CNE(G)* множину всіх рівноваг у спільних змішаних стратегіях у грі *G*.

Кооперативний сценарій, що слугує обґрунтуванням даного визначення, полягає у наступному:

1) Гравці спільно будують випадковий датчик, котрий може реалізувати вибір ситуацій $x\in X_N$ з ймовірністю *L(x)*. Якщо реалізувалась ситуація *x*, то

гравець *i* отримує інформацію лише про компоненту x_i.

2) Далі кожен гравець вибирає вільно й незалежно, а також таємно, свою справжню стратегію. Сигнал x_i сприймається гравцем *i* як необов’язкова пропозиція зіграти x_i. Умови (1) означають, що виконання домовленості про вибір x_i гравцем *i* забезпечуються автоматично при тій же обмеженій інформації, котра доступна кожному гравцю.

Дійсно, нехай гравцю *i* запропоновано використати стратегію x_i. Він робить висновок із загального розподілу *L*, що з ймовірністю $L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)$ набір $x_{N\setminus i}$ буде вибрано. Отже, $M\left(y_i, L_{x_i}\right) = \sum\limits_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right)L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)$ є математичним сподіванням його виграшу при використанні стратегії $y_i \in X_i$, якщо всі інші гравці згодні у виборі стратегій слідувати сигналу. Таким чином, умова (1) означає, що використання стратегії, що пропонується датчиком, є оптимальною відповіддю гравця *i* при заданому рівні інформації у припущенні, що всі інші гравці підкоряються сигналу.

Нехай стратегія x_i така, що $L\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) = 0$ для всіх $x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus\{i\}}$, тобто ймовірність того, що стратегія x_i буде запропонована датчиком, дорівнює нулю. Для такої стратегії x_i умова (1) виконується тривіально, отже, система (1) переписується у еквівалентному вигляді: $\forall\ i \in N$, $\forall\ x_i, y_i \in X_i$,

$$\sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right)L\left(x_{N\setminus i}\right) \geq \sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right)L\left(x_{N\setminus i}\right). \qquad (2)$$

Звідси випливає, що лотерея *L* є рівновагою у спільних змішаних стратегіях тоді й лише тоді, коли ці стратегії задовольняють системі лінійних нерівностей (2). Ця система завжди має розв’язок, як показує наступний результат.

Теорема Множина *CNE*(*G*) рівноваг у спільних змішаних стратегіях у грі *G* є непорожньою опуклою компактною підмножиною одиничного симплекса у $E^{|X_N|}$. Якщо $\mu = \left(\mu_i\right)_{i\in N}$ є ситуацією змішаного розширення гри $\bar{G}$, то лотерея *L*, що визначається по цій ситуації, є рівновагою у спільних змішаних стратегіях у *G* тоді й лише тоді, коли μ – ситуація рівноваги у $\bar{G}$.

Отже, *NE* – ситуація як у початковій грі, так і у її змішаному розширенні, ототожнюється з рівновагою *L* у спільних змішаних стратегіях, де ймовірносний розподіл *L* є набором незалежних випадкових індивідуальних стратегій.

Лекція 20. Розвиток концепції рівноваг у сумісних змішаних стратегіях

Почнемо з прикладу.

Приклад (Музичні стільці). Маємо двох гравців й три стільці (a,b,c). Стратегія гравця полягає у виборі стільця. Обидва гравці несуть втрати при виборі одного й того ж стільця. Якщо ж їх вибори різні, то гравець, чий стілець безпосередньо слідує за стільцем супротивника (вважаємо, що b безпосередньо слідує за a, c за a, a за c) виграє вдвічі більше. Отже, виникає біматрична гра (табл. 1). У ній a_i – вибір гравцем i стільця a.

X_1 \ X_2	a_2	b_2	c_2
a_1	0,0	1,2	2,1
b_1	2,1	0,0	1,2
c_1	1,2	2,1	0,0

Таблиця 1.

У початковій грі рівноваги Неша відсутні. Єдиною цілком змішаною рівновагою Неша є $\mu_1^* = \mu_2^* = \frac{1}{3}\delta_a + \frac{1}{3}\delta_b + \frac{1}{3}\delta_c$. Ця ситуація рівноваги приносить кожному гравцю виграш рівний 1 і є домінованою. Причина цього полягає у тому, що у змішаній ситуації $\left(\mu_1^*, \mu_2^*\right)$ "погані" для обох гравців діагональні ситуації реалізуються з ймовірністю $1/3$. Розглянемо наступну лотерею L на $X_1 \times X_2$: $L\left(x_1, x_2\right) = \begin{cases} 1/6, \text{ якщо } x_1 \neq x_2, \\ 0, \text{ якщо } x_1 = x_2. \end{cases}$. Дана лотерея L є рівновагою у змішаних стратегіях у даній грі. Нехай, наприклад, реалізується (з ймовірністю $1/6$) ситуація $\left(b_1, c_2\right)$. При даній L гравець 1 може вивести, що гравцю 2 запропоновано використовувати одну із стратегій a_2 або c_2 з однаковою ймовірністю $1/2$, тобто використовувати змішану стратегію $\mu_2 = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c$.

Найкращою відповіддю на цю стратегію і є стратегія b_2, оскільки $\bar{u}_1\left(\delta_b, \mu_2\right) = \frac{3}{2} > \bar{u}_1\left(\delta_a, \mu_2\right) = 1 > \bar{u}_1\left(\delta_c, \mu_2\right) = \frac{1}{2}$. Аналогічно гравець 2, якому поступає сигнал використати стратегію c_2, виводить, що гравцю 1 пропонується вибрати змішану стратегію $\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c$. У цьому випадку стратегія c_2 і є найкращою відповіддю гравця 2 (аналогічно вище приведеному).

В силу симетричності гри отримуємо властивість стабільності лотереї L при будь-яких допустимих реалізаціях. Відмітимо, що лотерея L приводить до оптимальних за Парето й справедливих виграшів $\left(3/2, 3/2\right)$, що спонукає гравців вступати у кооперацію на основі використання спільних змішаних стратегій.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	0,0	3,2
b_1	9,1	0,0

Таблиця 2.

Приклад (табл. 2). Рівновагою Неша (також і рівновагою у домінуючих стратегіях) є ситуація (a_1, a_2), у якій кожен отримує виграш 1. Ситуація (a_1, a_2) є Парето – оптимальною так, як і (a_1, b_2), і (b_1, a_2). Але ж в останніх ситуаціях один з гравців отримує виграш у 10 разів більший! Якщо гра повторюється неодноразово, то у гравців може виникнути ідея використовувати ситуації (a_1, b_2) та (a_2, b_1) по черзі. Але не виключена ситуація, коли одному з гравців буде вигідно порушити цю домовленість (наприклад, він хоче вийти з гри). Єдиним способом запобігти таким порушенням є застосування випадкового механізму – ситуації (a_1, b_2), (a_2, b_1) вибирати з ймовірністю $1/2$, тобто за лотереєю $L = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Зрозуміло, як реалізувати подібну „справедливу” (яка дає кожному з гравців середній виграш) лотерею у загальному випадку. Але подібна справедливість відносна.

$X_1 \backslash X_2$	a_2	b_2
a_1	1,1	10,0
b_1	0,10	0,0

Таблиця 3.

Приклад (табл.3). У ситуації (b_1, a_2) перший гравець отримує у 3 рази більший виграш, ніж у ситуації (a_1, b_2), у той час, як різниця у виграшах другого

гравця дорівнює 2. Тому перший гравець частіше хотів би отримувати першу ситуацію, інший – другу. На практиці гравці можуть домовитись про „середню” частоту – у даному прикладі перший гравець хотів би використовувати ситуацію (b_1, a_2) з частотою $3/4$, другий – $1/3$, тому „середня” частота використання стратегії (b_1, a_2) дорівнює: $3/4 + 1/3 = 7/12$ ((a_1, b_2) – $5/12$). Математичне сподівання виграшів $M_1 = 9 \cdot \frac{7}{12} + 3 \cdot \frac{5}{12} = 6.5$, $M_2 = 1 \cdot \frac{7}{12} + 2 \cdot \frac{5}{12} = 1\frac{5}{12} \approx 1.4$. Відмітимо, що про рівновагу у спільних змішаних стратегіях тут не йдеться.

В наступному прикладі перехід до змішаного розширення гри не дає нічого нового, крім єдиної рівноваги Неша (детермінованої). Але буде приведено механізм кооперації, який є більш обов’язковою формою стабільної домовленості, що базується на спільних змішаних стратегіях і який дозволить покращити за Парето *NE*– ситуацію.

Приклад („Конкуренція зі спеціалізацією”). Два дуополісти постачають на ринок один товар, але різної якості – низької (*Н*), середньої (*С*) й високої (*В*) (виграші у табл. 1.9). Для гравців, що притримуються некооперативної поведінки, ця гра, розв'язна за домінуванням і ситуація (*C,C*) є єдиною рівновагою як самої гри, так і її змішаного розширення.

Ця гра має також єдину рівновагу у спільних змішаних стратегіях, яка реалізується на лотереї, що вибирає (*C,C*) з ймовірністю 1. Тим не менш, оптимальний за Парето виграш (2,2) може бути оптимальним у результаті наступної домовленості.

Побудуємо лотерею з ймовірносним розподілом $L = \frac{1}{2}\delta_{(B,H)} + \frac{1}{2}\delta_{(H,B)}$. Кожен гравець незалежно й таємно вибирає й посилає нейтральному арбітру, що обирається обома гравцями, обов'язковий сигнал s_i, який приймає одне з чотирьох значень для кожного гравця: три чистих стратегії й сигнал А (згідно лотереї). Отримавши пару повідомлень (s_1, s_2), арбітр визначає випадкову ситуацію (x_1, x_2) у відповідності з лотереєю *L*. Фінальна ситуація гри визначається за наступним правилом (за цим слідкує арбітр):

$$\begin{cases} (x_1, x_2), \text{ якщо } s_1 = s_2 = A, \\ (x_1, s_2), \text{ якщо } s_1 = A,\ s_2 = H, C, B, \\ (s_1, x_2), \text{ якщо } s_1 = H, C, B,\ s_2 = A, \\ (s_1, s_2), \text{ якщо } s_i = H, C, B,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Тоді для $\forall\ y_1, y_2 \in \{H, C, B\}$:

$$\bar{u}_1(A,A) = \frac{1}{2}u_1(B,H) + \frac{1}{2}u_1(H,B) = 2 > \bar{u}_1(y_1,A) = \frac{1}{2}u_1(y_1,H) + \frac{1}{2}u_1(y_1,B)$$

$$\bar{u}_2(A,A) = \frac{1}{2}u_2(H,y_2) + \frac{1}{2}u_2(B,H) > \frac{1}{2}\bar{u}_2(A,y_2) = \frac{1}{2}u_2(B,y_2) + \frac{1}{2}u_2(H,y_2).$$

Отже, з ймовірністю $1/2$ будуть реалізуватись ситуації (*H,B*) й (*B,H*) й математичне сподівання виграшу кожного гравця дорівнює 2.

Зауважимо, що на відміну від рівноваги у змішаних стратегіях рівновага про домовленість з лотереєю не може бути відміненою після реалізації конкретної ситуації. Це рішення повинно бути прийнятим раз й назавжди до випадкової реалізації.

Означення. Для всіх $i \in N$ позначимо через $L_{N\backslash i}$ звуження розподілу *L* на $X_{N\backslash\{i\}}$: $L_{N\backslash i}(x_{N\backslash i}) = \sum_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{N\backslash i})$ для $\forall\ x_{N\backslash i}$. Назвемо лотерею *L* слабкою рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі *G*, якщо виконані нерівності:

$$\forall i \in N,\ \forall y_i \in X_i,\ \sum_{x \in X_N} u_i(x)L(x) \geq \sum_{x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash\{i\}}} u_i(y_i, x_{N\backslash i})L_{N\backslash i}(x_{N\backslash i}).$$

Позначимо множину слабких рівноваг через *WCNE(G)*.

Теорема. Множина *WCNE(G)* є непорожньою опуклою компактною підмножиною одиничного симплекса у $E^{|X_N|}$, причому *WCNE(G)*$\supseteq$*CNE(G)*. Якщо μ – ситуація розширеної гри $\bar{G}$, то відповідна лотерея *L* є слабкою рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі G тоді й лише тоді, коли ситуація μ є рівновагою Неша у грі $\overline{G}$.

Доведення. За (1.2) лотерея L належить *WCNE(G)* тоді й лише тоді, коли
$$\forall i \in N, \forall y_i \in X_i, \ \sum_{x \in X_N} u_i(x) L(x) \geq \sum_{x \in X_N} u_i(y_i, x_{N \setminus i}) L(x). \tag{1.4}$$

Лотерея L є рівновагою у спільних змішаних стратегіях тоді й лише тоді, коли вона задовольняє системі нерівностей для $\forall x_i y_i \in X_i$,
$$\forall i \in N: \sum_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus \{i\}}} u_i(x_i, x_{N \setminus i}) L(x_i, x_{N \setminus i}) \geq \sum_{x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus \{i\}}} u_i(y_i, x_{N \setminus i}) L(x_i, x_{N \setminus i}) \tag{1.5}$$

Взявши у нерівностях (1.5) суми по $x_i \in X_i$ при фіксованих i та y_i, отримаємо (1.4). Отже, $CNE(G) \subseteq WCNE(G)$. Інші твердження леми очевидні. Отже, $NE(G) \subseteq NE(\overline{G}) \subseteq CNE(G) \subseteq WCNE(G)$.♦

Проходячи по цьому ланцюжку зліва направо, ми повинні накладати все більше інформаційних обмежень для того, щоб рівноважна ситуація стала стабільною домовленістю.

Для *NE* – ситуації і змішаної *NE* – ситуації вимагається лише дотримуватись секретності у виборі індивідуальних стратегій.

Для *CNE*– ситуації у доповненні до цього потрібно вимагати, щоб окремі гравці могли спостерігати лише свої власні реалізації спільної лотереї.

Для *WCNE(G)*– ситуації необхідно мати нейтрального арбітра, який реалізує випадкову ситуацію лотереї, нічого не повідомляючи окремим гравцям. Далі цей арбітр опитує незалежно й таємно кожного гравця, чи згоден той „всліпу" використовувати ту стратегію, яка зреалізувалась при проведенні лотереї. Потім він повинен повідомити тим гравцям, які добровільно погодились з проведенням лотереї, ситуацію, що випала, й примусити цих гравців дійсно використовувати ці стратегії.

Загальною рисою цих сценаріїв є неможливість з досягненням домовленості про вибір деякої спільної стратегії вести прямий обмін інформації між гравцями. У випадку багаторазового проведення лотереї кооперація стає неявною і важко розпізнати сам факт її існування.

Лекція 21. Механізм погроз та його властивості

Стабільність на основі погроз. Погроза може слугувати сильним механізмом кооперації. Для досягнення стабільності домовленості (наприклад, вибору рівноваги Неша) гравці об'являють деяку схему реагування на можливі відхилення інших. Оскільки гравцю, що відхилиться, може стати погано, якщо об'явлена погроза здійсниться, то він остережеться відхилятись, й необов'язкова домовленість виявиться стабільною. Таким чином, попередження є „розумним використанням потенціальної сили". Успішною є та погроза, яка ніколи не реалізується.

Стабільні домовленості, що розглядались у попередньому розділі, вимагали повної секретності у прийнятті рішень. У протилежність цьому погроза є ефективною тільки тоді, коли відхилення неможливо приховати. Отже, для досягнення стабільності на основі застережень потрібно, щоб усі індивідуальні вибори стратегій відбувались відкрито.

Приклад (Дилема в'язня). Нешівською рівновагою є агресивна поведінка кожного. Для забезпечення доброзичливості (стабілізації ситуації (M,M)) кожен гравець об'являє принцип своєї поведінки (що є погрозою по відношенню до партнера):

1. Якщо ти будеш поводитись мирно, то і я буду доброзичливим.
2. Якщо ти будеш агресивним, то і я буду поводитись агресивно.

Узявши до уваги таку погрозу від опонента, кожен гравець змушений бути миролюбним, щоб не втратити у виграші.

Для зняття цієї складності можна вважати, що гра повторюється і короткостроковий виграш від некооперативного відхилення перекривається довгостроковими втратами.

Означення. Сценарієм погроз (попередження) у грі в нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ називається набір $\left(x_i, \xi_{N\setminus i}; i \in N\right)$, де відображення $\xi_{N\setminus i} : X_i \to X_{N\setminus i}$ таке, що $\xi_{N\setminus i}(x_i) = x_{N\setminus i}$, а для $\forall y_i \in X_i \setminus \{x_i\}$ $u_i\left(y_i, \xi_{N\setminus i}\left(y_i\right)\right) \le u_i\left(x\right)$. Відображення $\xi_{N\setminus i}(x_i)$ називається погрозою гравцю $i \in N$.

Проілюструємо сценарій погроз, розглядаючи гру на нескінченному інтервалі часу. У кожен конкретний момент часу кожен гравець вибирає деяку стратегію, причому він може поміняти свою стратегію у будь-який час. Гра відбувається у відкриту, тобто стратегії усіх гравців усім відомі. Це є головним інформаційним припущенням, котре робить неможливим таємне порушення договору.

Гравець, який виконує домовленість, спочатку вибирає узгоджену з іншими стратегію x_i і потім спостерігає за стратегіями $y_{N\setminus i}$ інших гравців. Поки $y_{N\setminus i} = x_{N\setminus i}$, гравець i зберігає стратегію x_i. Як тільки якийсь гравець, скажімо *j*, переключається на стратегію $y_j \neq x_j$, гравець *i* переключається раз і назавжди на *i* - ту компоненту $\xi_{N\setminus j}\left(y_j\right)$.

Умова стабільності означає, що якщо гравці виконують договір, що базується на сценарії погроз, то у жодного гравця не виникає приводу для одностороннього порушення домовленості. Справді, виграш на нескінченному інтервалі часу завжди перевищує виграш на будь-якому інтервалі скінченої довжини.

Теорема. Нехай $\left(x_i, \xi_{N\setminus i}; i \in N\right)$ – сценарій погроз. Тоді ситуація x є індивідуально раціональною: $\alpha_i = \max\limits_{x_i \in X_i} \min\limits_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) \leq u_i(\hat{x}) \;\; \forall i \in N$.

Доведення. Очевидно маємо $\min\limits_{y_{N\setminus i}} u_i\left(y_i, y_{N\setminus i}\right) \leq u_i\left(y_i, \xi_{N\setminus i}\left(y_i\right)\right) \leq u_i\left(x\right)$ для $\forall \; y_i \in X_i$, зокрема для y_i, на якому досягається максимум.

Теорема. Нехай X_i – компакт, u_i – неперервна, $i \in N$. Тоді у грі $G = \left(X_i, u_i; i \in N\right)$ існує хоча б одна індивідуально-раціональна ситуація. Для кожної такої ситуації x при всіх $i \in N$ існує набір погроз $\xi_{N\setminus i}$ такий, що $\left(x_i, \xi_{N\setminus i}, i \in N\right)$ є сценарієм погроз.

Доведення. З припущень леми очевидним образом випливає існування у кожного гравця хоча б однієї обережної стратегії x_i і те, що $x = \left(x_i\right)_{i\in N}$ є індивідуально-раціональною ситуацією. Для кожного $i \in N$ і для $\forall y_i \in X_i$, $y_i \neq x_i$, виберемо елемент $y_{N\setminus i} = \xi_{N\setminus i}\left(y_i\right) \in X_{N\setminus i}$, що $u_i\left(y_i, y_{N\setminus i}\right) = \min\limits_{z_{N\setminus i}} u_i\left(y_i, z_{N\setminus i}\right) \leq \max\limits_{z_i} \min\limits_{z_{N\setminus i}} u_i\left(z_i, z_{N\setminus i}\right) \leq u_i\left(x\right)$.

Означення. Для гри у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ ситуація $\hat{x}$ називається оптимальною за Парето (ефективною), якщо не існує такої ситуації x, що $\forall i \in N \;\; u_i(x) \geq u_i(\hat{x})$, $\exists j \in N \;\; u_j(x) > u_j(\hat{x})$.

Позначимо PO множину оптимальних за Парето ситуацій.

Теорема. Нехай у грі в нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ множини стратегій гравців X_i, $i = 1,2$, опуклі, а функції виграшу u_i, $i = 1,2$, опуклі вгору. Тоді для оптимальності за Парето (ефективності) ситуації $\hat{x}$ необхідно й достатньо, щоб існував вектор $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n) > 0$, для якого $\sum\limits_{i\in N} \mu_i u_i(\hat{x}) = \max\limits_{x\in X} \sum\limits_{i\in N} \mu_i u_i(x)$.

Означення. Поділом у грі в нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ називається оптимальна за Парето індивідуально-раціональна ситуація.

Позначимо I множину поділів.

Теорема. Нехай для $\forall\, i \in N$ множина X_i компактна, функція u_i неперервна. Тоді у грі G є хоча б один поділ.

Доведення. Позначимо через *IR* непорожню компактну підмножину індивідуально-раціональних ситуацій у грі G. Виберемо елемент x із *IR*, який максимізує $\sum_{i \in N} u_i$ на *IR*. Тоді x є оптимальною за Парето ситуацією.

Поділ є необов'язковою домовленістю, стабільною відносно індивідуальних відхилень, а також відносно відхилень множини N всіх гравців (оптимальність за Парето). З іншого боку, двома мінімальними вимогами для кооперативних домовленостей як раз і є індивідуальна раціональність і оптимальність за Парето. Отже, множина I є максимальною областю переговорів про кооперацію.

Якщо множина I є одноелементною, то кооперативний результат гри не викликає сумнівів. Але у більшості ігор множина I містить не один елемент й вибір серед них є гострою конфліктною ситуацією.

Приклад (Торг). Гравець І продає неподільний товар гравцю ІІ. Гравець І повинен вирішити, яку призначити ціну: високу (*ВЦ*) чи низьку (*НЦ*). Гравець ІІ (покупець) може або придбати товар (*ПТ*) або відмовитись від нього (*ВТ*). Виграші приведені у таблиці. Ситуація (*ВЦ*, *ПТ*) є рівновагою у домінуючих стратегіях і оптимальною за Парето. Якщо гравці не обмінюються інформацією, то це беззаперечний результат гри. Але звернемо увагу, що поділів у грі 2 – (*ВЦ*, *ПТ*), (*НЦ*, *ПТ*). Тому при можливості обміну інформацією, другий гравець може виграти, погрожуючи першому: „Я буду купувати лише за низькою ціною та відмовлятись від товару при призначенні високої ціни". Аналогічно, перший гравець може об'явити, що буде продавати товар лише за високою ціною. Результатом здійснення погроз може стати домінована ситуація з виграшем (0,0), тобто програють обоє.

I \ *II*	*ПТ*	ВТ
ВЦ	2,1	0,0
НЦ	1,2	0,0

Таблиця 1.

Ще раз повторимо, що „успішною є та погроза, яка ніколи не реалізується". З іншого боку, успішне застосування погроз у якості механізму попередження вимагає, щоб погрожуючий гравець був зобов'язаний приводити погрозу у дію або принаймні щоб усі в це вірили (погроза „Страшного суду").

Лекція 22. Метагра Ховарда

Навіть найбільш переконливі та успішні погрози є ризикованими, якщо об'явлена реакція на відхилення не співпадає з найкращою відповіддю гравця, що погрожує. У цьому сенсі доцільно розділити погрози на „агресивні" та „попереджувальні".

Розглянемо гру двох осіб $\left(X_1, X_2, u_1, u_2\right)$, де множини X_i компактні, а функції u_i неперервні, i=1,2. Найкращим поділом для гравця i є ситуація x^i така, що $u_i\left(x^i\right) = \max\limits_{x\in I} u_i(x) = \max\limits_{x}\left\{u_i\left(x\right) \middle|\ u_i\left(x\right) \geq \max\limits_{y_i}\min\limits_{y_j} u_i\left(y_i, y_j\right)\right\}$.

Теорема. Нехай x^i – найкращий поділ гравця i, ξ_i – погроза (агресивна) гравця i така, що

Таблиця 1.

$X_1 \backslash X_2$	x_2^1	x_2^2
x_1^1	1,4	4,1
x_1^2	2,3	3,2

Таблиця 2.

$\tilde{X}_1$	$X_1^{X_2} \backslash X_2$	x_2^1	x_2^2
$\tilde{x}_1^1$	$\left(x_2^1, x_1^1\right)$	1,4	4,1
$\tilde{x}_1^2$	$\left(x_2^1, x_1^2\right)$	2,3	3,2
$\tilde{x}_1^3$	$\left(x_2^2, x_1^1\right)$	4,1	1,4
$\tilde{x}_1^4$	$\left(x_2^2, x_1^2\right)$	3,2	2,3

$$\begin{cases} \xi_i\left(x_j^i\right) = x_i^i, \\ \forall y_j \in X_j \setminus \left\{x_j^i\right\},\ u_j\left(y_i, \xi_i\left(y_j\right)\right) = \min\limits_{y_i} u_j\left(y_j, y_i\right); \end{cases}$$

ξ_j – попередження гравця j:

$$\begin{cases} \xi_j\left(x_i^i\right) = x_j^i, \\ \forall y_j \in X_i \setminus \left\{x_i^i\right\},\ u_j\left(\xi_j\left(y_j\right), y_i\right) = \max\limits_{y_j} u_j\left(y_j, y_j\right). \end{cases}$$

Тоді $\left(x^i, \xi_i, \xi_j\right)$ – сценарій попереджень.

Для даної гри двох осіб $\left(X_1, X_2, u_1, u_2\right)$ із скінченою множиною стратегій позначимо через *S(1,G)* її розширення, у якому гравець 1 діє у якості підлеглого (сприймає стратегії другого як екзогенно задані): $S\left(1;G\right) = \left(X_1^{X_2}, X_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2\right)$. Нехай гра *G* задається табл. 1. Тоді гра *S(1,G)* задається таблицею 2. Розглянемо гру *H=S(r,S(1,G))* („метагру" Ховарда), у якій гравець 2 є підлеглим.

Теорема. Пара $\left(a_1, a_2\right)$ є вектором виграшів для деякої *NE* – ситуації гри *H* тоді й лише тоді, коли виконуються наступні властивості:

а) $\left(a_1, a_2\right)$ – допустимий вектор виграшів у грі G, тобто для деякого x^* має місце $\left(a_1, a_2\right)=\left(u_1\left(x^*\right), u_2\left(x^*\right)\right)$;

б) виконується: $\min\limits_{x_2}\max\limits_{x_1} u_1\left(x_1, x_2\right) \le u_1\left(x^*\right)$, $\max\limits_{x_2}\min\limits_{x_1} u_2\left(x_1, x_2\right) \le u_2\left(x^*\right)$.

Знайдемо найкращий поділ у грі G для першого гравця – це буде $\left(x_1^2, x_2^1\right)$. Відмітимо, що він співпадає з 1– виграшем по Штакельбергу у грі *S(1,G)*. Виявляється, що цей збіг не випадковий.

Теорема. У грі $S(i,G)$ i – виграш Штакельберга співпадає з найкращим поділом *i* - го гравця у грі *G*.

Приклад. Розглянемо ситуацію, в якій дві великі фірми, основна продукція яких конкурує на ринку, продають свої товари за однаковою ціною. Кожна фірма має намір знизити ціни з метою захоплення більшої частки ринку і збільшення свого прибутку. Ситуація описується табл. Ясно, що вона точно відповідає «ділемі в'язня».

	Збереження незмінних цін	Зниження цін
Збереження незмінних цін	(3,3) Стан не міняється	(1,4) Доля ринку і прибутки фірмы *B* зростають
Зниження цін	(4,1) Доля ринку і прибутки фірмы *A* зростають	(2,2) Дві фірми зберігають долі ринку, але втрачають частину прибутку

Можна привести багато практичних прикладів виникнення аналогічних проблем в самих різних областях. Візьмемо сільське господарство. Кожен фермер може максимізувати свій особистий дохід, збільшуючи врожаї вирощуваних культур. Однак якщо такої стратегії дотримуватимуться всі фермери, то пропозиція превисить попит і ціни впадуть. Таким чином колективно фермери можуть підвищити свій дохід, скоротивши виробництво. На практиці федеральний уряд США змушений був ввести складну систему регулювання (обмежень і заохочень), щоб забезпечити стабільність цін за рахунок підтримки досить низького загального обсягу сільськогосподарської продукції, що надходить на ринок.

Прагнучи розвинути теорію ігор таким чином, щоб з її допомогою можна було точніше визначати ситуації, в яких противники прагнуть до стабілізації в іграх з ненульовою сумою, Н. Ховард міркує таким чином.

Припустимо, що гравець В знає стратегію гравця А чи переконаний, що може її точно передбачити. При цьому умови В міг би виробити 4 різні стратегії наведені в табл. Зауважимо, що в цій розширеній матриці залишається всього одна точка рівноваги (2, 2), що не відрізняється від точки рівноваги у вихідній матриці.

Стратегії гравця В, який знає стратегії А

	Вибір хода 1, незалежно від вибору гравця А	Вибір хода 2, незалежно від вибору гравця А	Вибір ходів, що співпадають з ходами гравця А	Вибір ходів, що протилежні ходам гравця А
1 2	(1) = (3,3) (1) = (4,1)	(2) = (1,4) (2) = (2,2) *	(I) = (3,3) (2) = (2,2)	(2) = (1,4) (1) = (4,1)

Припустимо далі, що А знає, які з цих чотирьох страте¬гій вибере В, або переконаний, що може це точно передбачити. Тоді А міг би виробити для себе 16 можливих стратегій, приведених в табл. Перша стратегія полягає у виборі 1 незалежно від того, яку стратегію вибере В. Друга стратегія полягає у виборі 1 лише тоді, коли її не вибирає В. В останньому випадку А вибирає 2 і т.д.

Можливі стратегії В

Можливі стратегії А					Вибір хода 1, незалежно від вибору гравця А	Вибір хода 2, незалежно від вибору гравця А	Вибір ходів, що співпадають з ходами гравця А	Вибір ходів, що протилежні ходам гравця А
1.	1,	1,	1,	1	3,3	1,4	3,3	1,4
2.	1,	1,	1,	2	3,3	1,4	3,3	4,1
3.	1,	1,	2,	1	3,3	1,4	2,2	1,4
4.	1,	2,	1,	1	3,3	2,2	3,3	1,4
5.	2,	1,	1,	1	4,1	1,4	3,3	1,4
б.	1,	1,	2,	2	3,3	1,4	2,2	4,1
7.	1,	2,	1,	2	3,3	2,2	3,3 *	4,1
8.	2,	1,	1,	2	4,1	1,4	3,3	4,1
9.	1,	2.	2,	1	3,3	2,2	2,2	1,4
10.	2,	1,	2,	1	4,1	1,4	2,2	1,4
11.	2,	z,	1,	1	4,1	2.2	3,3	1,4
12.	1,	2,	2,	2	3,3	2,2	2,2	4,1
15.	2,	1,	2,	2	4,1	1,4	2,2	4,1
14.	2,	2,	1,	2	4,1	2,2	3,3 *	4'1
15.	2,	2,	2,	1	4,1	2,2	2,2	1,4
16.	2,	2,	2,	2	4,1	2,2 *	2,2	4,1

Відзначимо, що в цій матриці три точки рівноваги, що включають (1, 1), яка явно домінує над (2, 2). Зауважимо також, що 14-я стратегія А (2, 2, 1, 2) є раціональною, бо вона максимізує виграш А по всіх стратегій В.

Природно виникає питання, що станеться, якщо В, знаючи 16 стратегій А, розширить матрицю далі, розробляючи відповідні стратегії. Однак Ховард показав, що подальше розширення матриці понад n рівнів (де n - число учасників гри) не дозволило виявити додаткові точки рівноваги.

Істотно відзначити, що якщо А вибирає стратегію 14, а В завжди робить ті ж ходи, то він не може бути впевнений, яку стратегію дійсно вибрав А: 14 або 5. Якщо В вважає, що А вибрав стратегію 5, то у нього виникає спокуса перейти до стратегії «2 незалежно від А», щоб збільшити свій виграш до 4. Це в свою чергу призведе до того, що А обов'язково перейде до стратегії 16 і виграші обох складуть (2, 2). Очевидно значення обміну інформацією з метою усунення подібних невірних оцінок. Експеріменти по реалізації ігор з ненульовою сумою як з обміном інформацією між учасниками гри, так і без обміну показали, що в першому випадку ймовірність досягнення рівноваги вище і воно настає швидше.

Лекція 23. α - ядро гри

Означення. Для гри в нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ α - ядром називається множина C_α таких ситуацій $\hat{x}$, що для будь-якої коаліції $T \subseteq N$ і будь-якої коаліційної стратегії $x_T \in X_T$, знайдеться така стратегія $x_{N\backslash T} \in X_{N\backslash T}$ (погроза $\xi_{N\backslash T}(x_T) = x_{N\backslash T}$) доповнючої коаліції $N \setminus T$, що не може бути сумісною наступна система нерівностей:

$$\forall i \in T\ u_i(x_T, x_{N\backslash T}) \geq u_i(\hat{x}),\ \exists j \in T\ u_j(x_T, x_{N\backslash T}) > u_j(\hat{x}).$$

Таким чином, $(\hat{x}_T, \xi_{N\backslash T};\ T \subseteq N)$ – коаліційний сценарій погроз.

Згідно визначення, ситуація x^* належить α – ядру, якщо будь-якому відхиленню x_T коаліції T може бути протиставлений хід $x_{N\backslash T}$ доповнювальної коаліції *N\T*, який застерігає хоча б одного члена коаліції *T* від прийняття стратегії x_T, оскільки у цьому випадку цей гравець програє: $u_i\left(x_T, x_{N\backslash T}\right) < u_i\left(x^*\right)$ (або ж усі гравці коаліції отримують такий саме виграш, як раніше $u_i\left(x_T, x_{N\backslash T}\right) = u_i\left(x^*\right), \forall\ i \in T$).

Застосовуючи цю властивість до коаліцій *T*=*N* й $T = \{i\}$, $i \in N$, маємо, зокрема, що будь-яка ситуація у α – ядрі є також поділом: $C_\alpha \subset I$. Відмітимо також, що оптимальна за Парето *NE* – ситуація також є поділом (разом з пасивною погрозою, що полягає у відсутності реакції, він утворює сценарій попередження). Сильна рівновага також міститься у α – ядрі: $NE \bigcap PO \subset I$, $SE \subset C_\alpha$. Можна довести, що поділ *x* з α – ядра не обов'язково є сильною рівновагою. Тим не менш, з $SE = \varnothing$ випливає $C_\alpha = \varnothing$ і навпаки.

У грі з порожнім α – ядром кооперативна стабільність не може бути досягнутою лише за рахунок попереджувальних погроз, оскільки можливе існування коаліції, для якої відхилення є вигідним, не дивлячись на відповідні дії інших гравців. У цьому випадку для забезпечення стабільності можна ввести сценарій поведінки, у якому деякі гравці з коаліції „відступників" підкуповуються таким чином, щоб останні члени коаліції "відступників" понесли суттєві втрати.

Для ігор двох осіб умови, яким задовольняють α - ядро, приймає значно простіший вигляд.

Теорема. Для гри двох осіб в нормальній формі (X_1, X_2, u_1, u_2) α - ядро співпадає з множиною всіх поділів, тобто

$$C_\alpha = I = \{\hat{x} \in PO \mid\ \alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_j \in X_j} u_i(x_i, x_j) \leq u_i(\hat{x}),\ i = 1,2\}.$$

Приклад (Дилема в'язня з трьома гравцями). У кожного з гравців є агресивна стратегія (*A*) й кооперативна стратегія (*K*). Гра симетрична. Нижче перераховані 4 варіанта виграшів гравців : $(K, K, K) \to (2,2,2)$, $(A, K, K) \to (3,1,1)$, $(A, A, K) \to (2,2,0)$, $(A, A, A) \to (1,1,1)$ (інші 4 – симетричні).

Легко перевірити, що у цій грі рівновага у домінуючих стратегіях є домінованою за Парето і не існує сильної рівноваги, α – ядро містить чотири елементи і співпадає з множиною поділів.

Приклад (Голосування за одного з трьох кандидатів). Кожен гравець пропонує одного з трьох кандидатів, зокрема, самого себе. Отже, $X_i = \{1, 2, 3\}$. Сім з 27 можливих (3^3) векторів виграшів приводяться нижче (останні відновлюються за симетрією): $(1,2,3) \to (0,0,0)$, $(1,2,1) \to (0,0,-1)$, $(1,3,1) \to (0,0,0)$, $(1,1,1) \to (3,1,1)$, $(1,3,2) \to (0,2,2)$, $(2,3,1) \to (2,2,2)$, $(2,3,2) \to (-1,3,3)$.

Легко перевірити, що у цій грі немає рівноваги Неша, існує 5 поділів, α – ядро складається з двох ситуацій (типу (2,3,1)).

Приклад. Знайти α - ядро гри двох осіб: $X_1 = [0,\ 2]$, $X_2 = [0,\ 1]$, $u_1(x) = x_1 - x_1x_2 - 2x_1^2$, $u_2(x) = 2x_2 - x_1x_2 - x_2^2$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо оптимальні за Парето ситуації гри. Оскільки гра задовольняє умовам теореми (множини стратегій гравців X_i опуклі, а функції виграшу u_i, $i = 1,2$, опуклі вгору), то розглянемо лінійну згортку $u(x) = \lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_2(x) = \lambda x_1 + 2(1-\lambda)x_2 - x_1x_2 - 2\lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2$, $\lambda \in (0,1)$. Побудуємо множину оптимальних розв'язків задачі

$$\max_{x \in X} u(x) = \max_{x \in X}[\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_2(x)],\ \lambda \in (0,1), \qquad (1)$$

яка за теоремою буде множиною PO (оптимальних за Парето ситуацій гри). Оскільки $u(x)$ є диференційованою і опуклою вгору, то запишемо необхідні умови її екстремуму, які будуть також достатніми умовами її максимуму, а саме:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = \lambda - x_2 - 4\lambda x_1 = 0,\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = 2(1-\lambda) - x_1 - 2(1-\lambda)x_2 = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо:

$$\hat{x}_1 = \frac{2(\lambda-1)^2}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)},\ \hat{x}_2 = \frac{8\lambda^2 - 7\lambda}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)}.$$

Оскільки при кожному значенні $\lambda \in (7/8, 1)$ значення $\hat{x}_1 \in X_1 = [0,\ 2]$, $\hat{x}_2 \in X_2 = [0,\ 1]$, то ситуація $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ є розв'язком (3.15), а тому і оптимальною за Парето ситуацією гри. Таким чином,

$$PO = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \mid\ \hat{x}_1 = \frac{2(\lambda-1)^2}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)},\ \hat{x}_2 = \frac{8\lambda^2 - 7\lambda}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)},\ \lambda \in (7/8, 1)\}.$$

Тепер побудуємо оптимальні за Парето значення функцій виграшу:

$$u_1(\hat{x}) = \hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1^2 = \frac{2(\lambda-1)^2(8\lambda^2 - 8\lambda + 1) - 2(\lambda-1)^2(8\lambda^2 - 7\lambda) - 8(\lambda-1)^4}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} =$$

$$= 2(\lambda-1)^2 \frac{-4\lambda^2 + 7\lambda - 3}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} = 2(\lambda-1)^3 \frac{-4\lambda + 3}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2}$$ та $u_2(\hat{x}) = 2\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2 - \hat{x}_2^2 =$

$$= (\lambda - 1)^2 (8\lambda - 1)\frac{(6\lambda - 1)}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} \text{ для } \lambda \in (7/8, 1).$$

Для знаходження α - ядра гри, яке за теоремою 3.35 має вигляд

$$C_\alpha = I = \{\hat{x} \in PO \,\big|\; \alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) \le u_i(\hat{x}),\ i = 1,2\},$$

знайдемо максимальні гарантовані виграші гравців: $\alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_j \in X_j} u_i(x_i, x_j)$; $i, j = 1,2$; $i \ne j$.

Розглянемо функцію виграшу першого гравця $u_1(x) = x_1 - x_1 x_2 - 2x_1^2$. Оскільки вона лінійна за x_2, то $f_1(x_1) = \min_{x_2 \in [0,1]} (x_1 - x_1 x_2 - 2x_1^2) = -2x_1^2$. Звідси очевидно $\alpha_1 = \max_{x_1 \in [0,2]} f_1(x_1) = \max_{x_1 \in [0,2]} (-2x_1^2) = 0$.

Аналогічно для функції виграшу другого гравця $u_2(x) = 2x_2 - x_1 x_2 - x_2^2$. Одержимо $f_2(x_2) = \min_{x_1 \in [0,2]} (2x_2 - x_1 x_2 - x_2^2) = -x_2^2$ (в силу лінійності за x_1). Звідси очевидно $\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0,1]} f_2(x_2) = \max_{x_2 \in [0,1]} (-x_1^2) = 0$.

Цілком зрозуміло, що α - ядру будуть належати ситуації гри, які відповідатимуть оптимальним за Парето значенням функцій виграшу гравців, що не менші за їхні максимальні гарантовані виграші, тобто повинні виконуватися нерівності:

$$u_1(\hat{x}) = 2(\lambda - 1)^3 \frac{-4\lambda + 3}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} \ge \alpha_1 = 0, \qquad (2)$$

$$u_2(\hat{x}) = (\lambda - 1)^2 (8\lambda - 1)\frac{(6\lambda - 1)}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} \ge \alpha_2 = 0. \qquad (3)$$

Звідси $\lambda \in [3/4, 1]$ та $\lambda \in [0, 1/8] \cup [1/6, 1]$. Оскільки, окрім цього, $\lambda \in (7/8, 1) \cup \{0\}$, остаточно одержимо

$$C_\alpha = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \,\big|\; \hat{x}_1 = \frac{2(\lambda - 1)^2}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)},\ \hat{x}_2 = \frac{8\lambda^2 - 7\lambda}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)},\ \lambda \in (7/8, 1)\}.$$

Лекція 24. β – ядро гри

Означення. Для гри в нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ β - ядром гри називається множина C_β ситуацій $\hat{x}$, які задовольняють наступній властивості. Для будь-якої коаліції $T \subset N$ існує спільна стратегія $x_{N\setminus T} \in X_{N\setminus T}$ доповнючої коаліції $N \setminus T$, така, що для $\forall x_T \in X_T$ не може бути сумісною наступна система нерівностей:

$$\forall i \in T \;\; u_i(x_T, x_{N\setminus T}) \geq u_i(\hat{x}),\; \exists j \in T \;\; u_j(x_T, x_{N\setminus T}) > u_j(\hat{x}).$$

Стабільність ситуацій з β – ядра є більш сильною, ніж стабільність ситуацій з α – ядра. Коаліція *N**T* може попередити відхилення коаліції *T*, навіть якщо члени коаліції *T* вибирають свою спільну стратегію таємно.

Порівнюючи означення, маємо $SE \subseteq C_\beta \subseteq C_\alpha$.

Для того, щоб дати інтерпретацію означенню, уявимо, що гра $G(\infty)$ повторюється у часі. У момент *t*, *t=1,2,…*, кожен гравець *i*, знаючи попередні ходи $x^1,\ldots,x^{t-1}$, вибирає стратегію x_i^t. Виграш кожного гравця після зробленого ходу x^t:

$$u_i(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} u_i(x^s) \quad \text{(„середнє Чезаро”).} \tag{1}$$

Можна показати, що всі ситуації із змішаного β – ядра гри *G* можуть бути отриманими як сильні рівноваги у грі $G(\infty)$. Навпаки, виграші, що відповідають сильним рівновагам у грі $G(\infty)$, покривають опуклу оболонку виграшів, що відповідають змішаному β – ядру гри *G*.

Таким чином, з допомогою гри, що повторюється, формалізується поняття кооперації із застосуванням погроз. Відхилення, тактично вигідні, стають невигідними стратегічно, якщо об’явлена погроза приводиться у виконання. Для цього необхідно, щоб довготривалі виграші завжди перевищували короткострокові (середнє Чезаро забезпечує виконання цієї умови).

Розглянемо більш простий варіант гри, що повторюється, у якій загальний виграш є „дисконтованою” сумою поточних виграшів.

Нехай у момент t = 1 розігрується гра *G* і реалізується ситуація x^1. Деякий випадковий механізм диктує або закінчити гру з ймовірністю $(1-\delta)$, $0<\delta<1$, або продовжити гру з ймовірністю δ і тоді гра *G* наново розігрується у момент t = 2. Нехай гра *G* розігрується нескінченну кількість разів, тоді загальний виграш гравця $i \in N$ дорівнює:

$$u_i(\infty) = (1-\delta)\left(u_i(x^1) + \delta u_i(x^2) + \ldots + \delta^{t-1} u_i(x^t) + \ldots\right). \tag{2}$$

Відомо, що при $\delta \to 1$ сума ряда (1.8) прямує до *середнього Чезаро* (1), якщо границя в (1) існує.

Покладемо $\beta_i = \min_{x_{N\setminus i}} \max_{x_i} u_i(x)$ – максимальний виграш гравця *i*, який він може собі забезпечити при умові, що на момент вибору своєї стратегії він знає стратегії всіх інших гравців. Виберемо поділ x^* так, щоб виконувалась умова $\beta_i < u_i(x^*)$ для $\forall\ i \in N$.

Знайдемо *NE*– ситуацію σ^* у грі $G(\infty)$, яка дає кожному гравцю виграш $u_i(x^*)$. Для цього для кожного $j \in N$ виберемо стратегію $\tilde{x}_{N\setminus j}$ гравців $N \setminus \{j\}$ таку, що $\sup_{x_j} u_j(x_j, \tilde{x}_{N\setminus j}) = \beta_j$. Тоді для кожного $i \in N$ стратегія σ_i^* гравця *i* у грі $G(\infty)$ визначається наступним чином: $x_i^1 = x_i^*$; якщо $x^1 = x^2 = ... = x^{t-1} = x^*$, то $x_i^t = x_i^*$; якщо $x^1 = x^2 = ... = x^{t-2} \neq x^{t-1}$, вибрати *j*, для якого $x_j^{t-1} \neq x_j^*$, й далі вибирати $\tilde{x}_i = x_i^t = x_i^{t+1} = ...$ для всіх $i \in N \setminus \{j\}$.

Нехай $u_i^*(x_{N\setminus i}^*) = \max_{x_i} u_i(x_i, x_{N\setminus i}^*)$, тоді „короткостроковий” дохід гравця *i* у момент *t* за рахунок відхилення від стратегії x_i^* дорівнює $\Delta_i = u_i^*(x_{N\setminus i}^*) - u_i(x^*)$. Порівнюючи його з „довгостроковими” втратами $\varepsilon_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t (u_i(x^*) - \beta_i)$, отримуємо „умову стабільності”: $\Delta_i \le \varepsilon_i$, яка еквівалентна умовам:

$$1 - \delta \le \left(u_i(x^*) - \beta_i\right) \Big/ \left(u_i(x_{N\setminus i}^*) - \beta_i\right). \qquad (3)$$

Таким чином, якщо δ є досить близьким до 1, умови (1.9) виконуються, і, отже, σ^* є *NE* – ситуацією гри $G(\infty)$.

Теорема. Якщо виконуються умови (3), то гра $G(\infty)$ з виграшем (2) має рівновагу Неша, якій відповідає послідовність $x^* = x^1 = x^2 = ... = x^t = ...$

Таким чином, *NE* – виграш гравця *i* дорівнює $u_i(x^*)$. Розглянемо випадок, у якому кожен гравець бере до уваги тільки останній хід партнерів.

Приклад (Нескінченна гра „Дилема в’язня”). У момент $t \ge 2$ гравець *i* поводить себе мирно, якщо партнер у момент *t*-1 поводив себе мирно, й поводить себе агресивно, якщо партнер поводив себе агресивно.

Оскільки у момент *t*=1 можливі 4 ситуації ((M_1, M_2), (A_1, A_2), (M_1, A_2), (A_1, M_2)), то у будь-який момент $t \ge 2$ маємо біматричну гру 8×8 (див. табл.) з множиною стратегій першого гравця: $a_1 = (M_1; M_1, M_2)$, $a_2 = (A_1; A_1, A_2)$, $a_3 = (M_1; M_1, A_2)$, $a_4 = (A_1; M_1, A_2)$, $a_5 = (M_1; A_1, M_2)$, $a_6 = (A_1; A_1, M_2)$, $a_7 = (M_1; A_1, A_2)$, $a_8 = (A_1; M_1, M_2)$. (аналогічно описуються стратегії b_i, $i = \overline{1,8}$, другого гравця, виграш є середнім арифметичним за два ходи). Дві стратегії кожного гравця у цій грі можна відкинути (так $(M_1; A_1, A_2) \sim (A_1; A_1, A_2)$, $(A_1; M_1, M_2) \sim (M_1; M_1, M_2)$). Залишається гра 6×6, у котрій мається дві *NE*– ситуації – (a_8, b_8) (некооперативна рівновага) й нова *NE* – рівновага (a_3, b_3), у якій обидва гравці застосовують стратегію „як ти, так і я”. Відмітимо, що у цій грі „мирні” стратегії a_1, b_1 не домінуються „агресивними” стратегіями a_8, b_8. Однак після послідовного відкидання домінованих стратегій мирні стратегії будуть відкинуті і складною рівновагою виявиться ситуація (a_3, b_3) (яка до того ж буде і Парето-оптимальною).

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	3,3	0,4	3,3	3,3	0,4	0,4	0,4	3,3
a_2	4,0	1,1	1,1	1,1	4,0	4,0	1,1	4,0
a_3	3,3	1,1	3,3	2,2	2,2	2,2	1,1	3,3
a_4	3,3	1,1	2,2	1,1	2,2	2,2	1,1	3,3
a_5	4,0	0,4	2,2	2,2	2,2	0,4	0,4	4,0
a_6	4,0	0,4	2,2	2,2	4,0	2,2	0,4	4,0
a_7	4,0	1,1	1,1	1,1	4,0	4,0	1,1	4,0
a_8	3,3	0,4	3,3	3,3	0,4	0,4	0,4	3,3

Таблиця 1.

Відмітимо, що β – ядро, зокрема, може бути порожнім.

Приклад. Два гравці вибирають натуральне число з множини $A = \{1, 2, ..., 10\}$. Нехай вибрано x_1, x_2 й $x_1 + x_2 = 10$, тоді $u_i(x_i) = x_i$. В інших випадках виграш дорівнює (4,0), якщо $x_1 + x_2$ парне, й (0,4), якщо $x_1 + x_2$ непарне.

Гарантований виграш i -го гравця $\alpha_i = \sup\limits_{x_i} \inf\limits_{x_j} u_i = 0$, тому поділами є всі Парето-оптимальні ситуації у грі. Очевидно, що такими будуть ситуації, для яких $x_1 + x_2 = 10$. Оскільки $\inf\limits_{x_j} \sup\limits_{x_i} u_i = 4$, $i = 1, 2$, то з леми 1.9 випливає, що β – ядро складається з трьох ситуацій (4,6), (5,5), (6,4).

Для того щоб стабілізувати з допомогою попереджувальних погроз, наприклад, поділ (3,7), необхідно, щоб обидва гравці погодились на вибір стратегій у відкриту. У протилежність до цього, реалізація поділу з β – ядра потребує більш слабкого інформаційного обмеження: потрібен лише сигнал, що інформує гравця про відхилення його партнера. З іншого боку, у багатьох іграх двох осіб α і β ядра співпадають. Зокрема, це справедливо для змішаного розширення, оскільки обидві гри з нульовою сумою $(M_1, M_2, \bar{u}_1)$ й $(M_1, M_2, -\bar{u}_2)$ мають ціну.

Для ігор двох осіб умови, яким задовольняють β- ядро, приймає значно простіший вигляд.

Теорема. Для гри двох осіб в нормальній формі (X_1, X_2, u_1, u_2) β - ядро задається умовами

$$C_\beta = \{\hat{x} \in PO \big| \ \beta_i = \min_{x_j \in X_j} \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_j) \le u_i(\hat{x}), \ i = 1, 2\}.$$

Приклад. Знайти β - ядро гри двох осіб: $X_1 = [0, 2]$, $X_2 = [0, 1]$, $u_1(x) = x_1 - x_1 x_2 - 2x_1^2$, $u_2(x) = 2x_2 - x_1 x_2 - x_2^2$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо оптимальні за Парето ситуації гри. Оскільки гра задовольняє умовам теореми 3.32 (множини стратегій гравців X_i опуклі, а функції виграшу u_i, $i = 1,2$, опуклі вгору), то розглянемо лінійну згортку

$$u(x) = \lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_2(x) = \lambda x_1 + 2(1-\lambda)x_2 - x_1x_2 - 2\lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2,$$

$\lambda \in (0,1)$. Побудуємо множину оптимальних розв'язків задачі

$$\max_{x\in X} u(x) = \max_{x\in X}[\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_2(x)],\ \lambda \in (0,1), \qquad (4)$$

яка за теоремою 3.32 буде множиною PO (оптимальних за Парето ситуацій гри). Оскільки $u(x)$ є диференційованою і опуклою вгору, то запишемо необхідні умови її екстремуму, які будуть також достатніми умовами її максимуму, а саме:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = \lambda - x_2 - 4\lambda x_1 = 0,\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = 2(1-\lambda) - x_1 - 2(1-\lambda)x_2 = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, одержимо:

$$\hat{x}_1 = \frac{2(\lambda-1)^2}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)},\ \hat{x}_2 = \frac{8\lambda^2 - 7\lambda}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)}.$$

Оскільки при кожному значенні $\lambda \in (7/8,1)$ значення $\hat{x}_1 \in X_1 = [0,\ 2]$, $\hat{x}_2 \in X_2 = [0,\ 1]$, то ситуація $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ є розв'язком (3.15), а тому і оптимальною за Парето ситуацією гри. Таким чином,

$$PO = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \mid\ \hat{x}_1 = \frac{2(\lambda-1)^2}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)},\ \hat{x}_2 = \frac{8\lambda^2 - 7\lambda}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)},\ \lambda \in (7/8,1)\}.$$

Тепер побудуємо оптимальні за Парето значення функцій виграшу:

$$u_1(\hat{x}) = \hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_2 - 2\hat{x}_1^2 = \frac{2(\lambda-1)^2(8\lambda^2 - 8\lambda + 1) - 2(\lambda-1)^2(8\lambda^2 - 7\lambda) - 8(\lambda-1)^4}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} =$$

$$= 2(\lambda-1)^2 \frac{-4\lambda^2 + 7\lambda - 3}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2} = 2(\lambda-1)^3 \frac{-4\lambda + 3}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2}$$ та $u_2(\hat{x}) = 2\hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2 - \hat{x}_2^2 =$

$$= (\lambda-1)^2(8\lambda-1)\frac{(6\lambda-1)}{(8\lambda^2 - 8\lambda + 1)^2}$$ для $\lambda \in (7/8,1)$.

Побудуємо β - ядро гри. Воно за теоремою має вигляд

$$C_\beta = \{\hat{x} \in PO \mid\ \beta_i = \min_{x_j\in X_j}\max_{x_i\in X_i} u_i(x_i, x_j) \le u_i(\hat{x}),\ i = 1,2\}.$$

Для цього знайдемо $\beta_i = \min\limits_{x_j\in X_j}\max\limits_{x_i\in X_i} u_i(x_i, x_j)$; $i, j = 1,2$; $i \ne j$.

Розглянемо функцію виграшу першого гравця $u_1(x) = x_1 - x_1x_2 - 2x_1^2$.

Оскільки вона не є монотонною за x_1, то $\max\limits_{x_1\in[0,2]}(x_1 - x_1x_2 - 2x_1^2)$ слід шукати як на границях, так і в точці локального максимуму. Спочатку знайдемо локальний максимум. У силу того, що $u_1(x_1, x_2)$ диференційована і опукла вгору за x_1, запишемо необхідні умови її екстремуму, які будуть також достатніми умовами її максимуму за x_1, а саме:

$\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} = 1 - x_2 - 4x_1 = 0$. Звідси $\hat{x}_1 = (1 - x_2)/4$. Оскільки ця величина приймає значення у проміжку $X_1 = [0,\ 2]$ при $\forall x_2 \in X_2 = [0,\ 1]$, то $\hat{x}_1 \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_1 \in [0,2]} (x_1 - x_1 x_2 - 2x_1^2)$. Таким чином,

$$g_2(x_2) = \max_{x_1 \in [0,2]} (x_1 - x_1 x_2 - 2x_1^2) = \frac{2(1 - x_2) - 2(1 - x_2)x_2 - (1 - x_2)^2}{8} = \frac{(1 - x_2)^2}{8}.$$

Звідси очевидно $\beta_1 = \min\limits_{x_2 \in [0,1]} g_2(x_2) = \min\limits_{x_2 \in [0,1]} \dfrac{(1 - x_2)^2}{8} = 0$.

Аналогічно для другого гравця $\max\limits_{x_2 \in [0,1]} (2x_2 - x_1 x_2 - x_2^2)$ може бути як в точці локального максимуму, так і на границях. У силу диференційованості і опуклості вгору за x_2 функції $u_1(x_1, x_2)$ необхідні умови її екстремуму, а саме: $\dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} = 2 - x_1 - 2x_2 = 0$, будуть також достатніми умовами максимуму за x_2. Звідси $\hat{x}_2 = (2 - x_1)/2$. Оскільки ця величина приймає значення у проміжку $X_2 = [0,\ 1]$ при $\forall x_2 \in X_1 = [0,\ 2]$, то $\hat{x}_2 \in \operatorname{Arg}\max\limits_{x_2 \in [0,1]} (2x_2 - x_1 x_2 - x_2^2)$. Таким чином,

$$g_1(x_1) = \max_{x_2 \in [0,1]} (2x_2 - x_1 x_2 - x_2^2) = \frac{4(2 - x_1) - 2x_1(2 - x_1) - (2 - x_1)^2}{4} = \frac{(2 - x_1)^2}{4}.$$

Звідси очевидно $\beta_2 = \min\limits_{x_1 \in [0,2]} g_1(x_1) = \min\limits_{x_1 \in [0,2]} \dfrac{(2 - x_1)^2}{4} = 0$.

Оскільки $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то очевидно, що β - ядру будуть належати ситуації гри, які відповідатимуть невід’ємним оптимальним за Парето значенням функцій виграшу гравців.

Лекція 25. γ – ядро гри

Розглянемо підмножину таких поділів, котрі можуть бути стабілізованими парою попереджень, тобто парою погроз, що співпадають з найкращими відповідями гравців.

Означення. Для гри двох осіб в нормальній формі (X_1, X_2, u_1, u_2) γ - ядром називається множина C_γ, яка складається з таких поділів $\hat{x}$, для яких існує сценарій $(\hat{x}_1, \xi_2; \hat{x}_2, \xi_1)$, у якому погрози ξ_i, $i = 1,2$, є попередженнями. Тобто $\forall x_j \neq \hat{x}_j$ мають місце нерівності: $u_j(x_j, \xi_i(x_j)) \le u_j(\hat{x})$; $u_i(x_j, \xi_i(x_j)) = \max\limits_{x_i \in X_i} u_i(x_j, x_i)$; $i, j = 1,2$; $i \neq j$.

Теорема 3.34. Нехай функції виграшу u_i, i=1,2, взаємно однозначні, $\gamma_i = \max\limits_{x_i \in X_i} u_i(x_i, r_j(x_i))$ – i- виграш за Штакельбергом, де $r_j(x_i) = \arg\max\limits_{y_j \in X_j} u_j(x_i, y_j)$ – найкраща відповідь гравця $j \neq i$ на фіксовану стратегію $x_i \in X_i$ гравця $i, j = 1,2$. Тоді γ - ядро задається умовами:

$$C_\gamma = \{\hat{x} \in PO \mid \gamma_i \le u_i(\hat{x}),\ i = 1,2\}. \qquad (1)$$

Доведення. Нехай x^* – оптимум Парето, що задовольняє (1). Для будь-якого $x_i \neq x_i^*$ позначимо через $x_j = \xi_j(x_i)$ найкращу відповідь гравця *j*. За визначенням : $u_i\left(x_i, \xi_j(x_i)\right) \le \gamma_i \le u_i\left(x^*\right)$, i=1,2, $x_i \neq x_i^*$. Отже, $\left(x^*, \xi_1, \xi_2\right)$ є сценарієм попередження, а тому ситуація x^* індивідуально раціональна. Таким чином, x^* є поділом.

Навпаки, нехай $x^* \in C_\gamma$. Тоді існує сценарій попередження $\left(x^*, \xi_1, \xi_2\right)$, де $\xi_i\left(x_j\right)$ – єдина (за припущенням) стратегія найкращої відповіді гравця *і* на x_j. Покажемо, що x^* задовольняє (1). Виберемо $x_i \neq x_i^*$. За властивістю ξ_j маємо: $u_i\left(x_i, \xi_j(x_i)\right) \le u_i\left(x^*\right)$.

Від супротивного доведемо, що $x_j = \xi_j\left(x_i^*\right) \Rightarrow u_i\left(x_i^*, x_j\right) \le u_i\left(x^*\right)$. Нехай $u_i\left(x^*\right) < u_i\left(x_i^*, x_j\right)$. З оптимальності за Парето x^* отримуємо:

$$\max_{y_j} u_j\left(x_i^*, y_{jj}\right) = u_i\left(x_i^*, x_j\right) < u_{ji}\left(x^*\right),$$

що суперечить припущенню.

Відмітимо, що припущення про взаємну однозначність у формулюванні леми може бути опущеним, якщо γ_i замінити на величину $\gamma_i = \max\limits_{x_i} \min\limits_{x_j \in O_j(x_i)} u_i\left(x_i, x_j\right) = 0$, що характеризує максимальний гарантований виграш лідера (гравця *і*) без припущення про доброзичливість підлеглого.

Лема встановлює зв'язок між здійсненням стабільності з допомогою попереджень й боротьбою за лідерство. Вона стверджує, що у грі G виникає боротьба за лідерство тоді й лише тоді, коли її γ – ядро порожнє. Таким чином, у грі з порожнім γ – ядром стабільності будь-якого поділу загрожує можливість захоплення лідерства одним з гравців. Разом з тим, другий гравець у цьому випадку може використовувати погрозу типу „Машина страшного суду". Правдоподібність успіху однієї та другої тактики з точки зору стороннього спостерігача конфлікту однакова.

Приклад. Дві фірми поставляють на ринок товар в об'ємі x_i, i=1,2. Ціна на товар визначається формулою $p = p_0 - (x_1 + x_2)$ (для $(x_1 + x_2) \le p_0$). Витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва однакові у обох фірм і є постійними. Розглядається наступна гра з парамерами p_0, c, $0 < \frac{1}{2} p_0 < c < p_0$:

$$\left\langle X_1 = X_2 = \left[0, \frac{1}{2} p_0\right], u_i(x_1, x_2) = \left[p_0 - (x_1 + x_2)\right] \cdot x_i - c x_i;\ i = 1,2 \right\rangle.$$

Оскільки $u = u_1 + u_2 = -x^2 + (p_0 - c) \cdot x$, де $x = x_1 + x_2$, то максимальний загальний доход $u^0 = \frac{1}{4}(p_0 - c)^2$ при $x^0 = \frac{1}{2}(p_0 - c)$, що є Парето-оптимальним. Гарантований виграш $\alpha_i = \max\limits_{x_i} \min\limits_{x_j} u_i = \max\limits_{x_i} u_i\left(x_i, \frac{1}{2} p_0\right) = 0$. Таким чином, поділи утворюють довільний розподіл максимального сумарного доходу. Найкраща відповідь першого гравця : $O_1(x_2) = \frac{1}{2}(p_0 - c) - \frac{1}{2} x_2$, тоді

$$\gamma_2 = \max_{0 \le x_2 \le \frac{1}{2} p_0} u_2(O_2(x_2), x_2) = \max_{0 \le x_2 \le \frac{1}{2} p_0} \frac{1}{2}\left[(p_0 - c) x_2 - x_2^2\right] = \frac{1}{8}(p_0 - c)^2.$$

Симетрично $\gamma_1 = \gamma_2$. Отже виграш (S_1, S_2) відповідає деякому поділу й за лемою 1.10, γ – ядро складається з єдиного поділу $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{4}(p_0 - c), \frac{1}{4}(p_0 - c)\right)$, що порівну розподіляє максимальний сумарний доход. У цій грі γ – ядро є справедливою кооперативною ситуацією, що реалізується за допомогою природних погроз O_1, O_2. Реалізація будь-якого несправедливого (нерівного) розподілу максимального загального доходу вимагає тактики залякування.

Приклад. Знайти γ - ядро гри двох осіб: $X_1 = [0,\ 1/2]$, $X_2 = [0,\ 1/2]$, $u_1(x) = x_1 - x_1 x_2 - x_1^2$, $u_2(x) = x_2 - x_1 x_2 - x_2^2$.

Розв'язання. Знайдемо оптимальні за Парето ситуації гри. В силу того, що множини стратегій гравців X_i опуклі, а функції виграшу u_i, $i = 1,2$, опуклі вгору, за теоремою 3.32 множина PO (оптимальних за Парето ситуацій гри) буде множиною оптимальних розв'язків задачі

$$\max_{x\in X} u(x) = \max_{x\in X}[\lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_2(x)],\ \lambda \in (0,1),$$

де $u(x) = \lambda u_1(x) + (1-\lambda)u_2(x) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_1x_2 - \lambda x_1^2 - (1-\lambda)x_2^2$. Оскільки $u(x)$ диференційована і опукла вгору, то запишемо необхідні умови її екстремуму, які будуть також достатніми умовами її максимуму, а саме:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = \lambda - x_2 - 2\lambda x_1 = 0,\ \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = (1-\lambda) - x_1 - 2(1-\lambda)x_2 = 0.$$

Одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\lambda x_1 + x_2 = (p-c)\lambda, \\ x_1 + 2(1-\lambda)x_2 = (p-c)(1-\lambda), \end{cases}$$

для якої знайдемо визначники головної та розширеної матриць:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} = 4\lambda - 4\lambda^2 - 1 = -(1-2\lambda)^2,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ (1-\lambda) & 2(1-\lambda) \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1-2\lambda),$$

$$\begin{vmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda(1-2\lambda).$$

Очевидно, що для кожного $\lambda \in (0,1)$, $\lambda \neq 1/2$ одержимо недопустимі стратегії або $x_1 = \dfrac{(1-\lambda)(1-2\lambda)}{(1-2\lambda)^2} < 0$, або $x_2 = \dfrac{\lambda(1-2\lambda)}{-(1-2\lambda)^2} < 0$. Лише у випадку $\lambda = 1/2$ будемо мати загальний розв'язок $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 1/2$, $\hat{x}_1 \in X_1 = [0,\ 1/2]$, $\hat{x}_2 \in X_2 = [0,\ 1/2]$. Таким чином,

$$PO = \{\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \mid\ \hat{x}_1 + \hat{x}_2 = 1/2,\ \hat{x}_1 \in [0,\ 1/2],\ \hat{x}_2 \in [0,\ 1/2]\}.$$

Зазначимо, що сумарний виграш гравців в оптимальних за Парето ситуаціях гри

$$u_1(\hat{x}) + u_2(\hat{x}) = \hat{x}_1 - \hat{x}_1\hat{x}_2 - \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2 - \hat{x}_1\hat{x}_2 - \hat{x}_2^2 = (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2) = 1/4. \quad (2)$$

Для побудови за теоремою γ - ядра $C_\gamma = \{\hat{x} \in PO \mid\ \gamma_i \le u_i(\hat{x}),\ i = 1,2\}$ треба знайти $\gamma_i = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, r_j(x_i))$ – i - виграш за Штакельбергом, де $r_j(x_i) = \arg\max_{y_j \in X_j} u_j(x_i, y_j)$ – найкраща відповідь гравця $j \neq i$ на фіксовану стратегію $x_i \in X_i$ гравця $i, j = 1,2$. Для побудови $r_1(x_2)$ розв'яжемо задачу $\max_{x_1 \in [0,1/2]} (x_1 - x_1x_2 - x_1^2)$. Спочатку знайдемо локальний максимум. У силу того, що $u_1(x_1, x_2)$ є диференційованою і опуклою вгору за x_1, то необхідна умова її екстремуму $\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} = 1 - x_2 - 2x_1 = 0$ буде також достатньою умовою її максимуму за x_1. Звідси $\hat{x}_1 = (1 - x_2)/2$. Оскільки ця величина приймає значення у проміжку $X_1 = [0,\ 1/2]$ при $\forall x_2 \in X_2 = [0,\ 1/2]$, то $r_1(x_2) = \hat{x}_1 = (1 - x_2)/2$.

Тепер побудуємо $\gamma_2 = \max\limits_{x_2 \in [0,1/2]} u_1(r_1(x_2), x_2) = \max\limits_{x_2 \in [0,1/2]} (x_2 - \dfrac{(1 - x_2)}{2} x_2 - x_2^2) =$ $= \max\limits_{x_2 \in [0,1/2]} x_2(1 - x_2)/2$. З необхідної умови екстремуму $u_1{}'(r_1(x_2), x_2) =$ $= (1 - 2x_2)/2 = 0$, яка буде також і достатньою умовою максимуму, одержимо $\hat{x}_2 = 1/2$. Оскільки $\hat{x}_2 \in X_2 = [0,1/2]$, то $\gamma_2 = \max\limits_{x_2 \in [0,1/2]} x_2(1 - x_2)/2 = 1/8$.

Аналогічно в силу симетрії гри одержимо $\gamma_1 = 1/8$.

Враховуючи (2), одержимо, що γ - ядро гри є її оптимальною за Парето ситуацією, в якій виграш кожного гравця дорівнює $1/8$. Очевидно, що $C_\gamma = \{(1/4, 1/4)\}$.

Лекція 26. Класифікація ігор двох осіб

Для ігор двох осіб умови, яким задовольняють α- та β- ядра, приймають значно простіший вигляд.

Теорема. Для гри двох осіб в нормальній формі (X_1, X_2, u_1, u_2) α- ядро співпадає з множиною всіх поділів, тобто

$$C_\alpha = I = \{\hat{x} \in PO \mid \ \alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_j \in X_j} u_i(x_i, x_j) \le u_i(\hat{x}),\ i = 1,2\},$$

а β - ядро задається умовами

$$C_\beta = \{\hat{x} \in PO \mid \ \beta_i = \min_{x_j \in X_j} \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_j) \le u_i(\hat{x}),\ i = 1,2\}.$$

З теореми 3.34. випливає, що γ- ядро є порожнім тоді й лише тоді, коли у грі виникає боротьба за право першого ходу. На підставі теореми 3.35 можна сказати, що порожність β- ядра породжує боротьбу за право другого ходу. Але, як показує наступна теорема, боротьба за право першого та другого ходу не може виникати одночасно.

Теорема. У грі двох осіб γ й β ядра не можуть бути порожніми одночасно. Якщо γ й β ядра не порожні, то вони перетинаються.

На основі теореми 3.36 можна зробити класифікацію ігор двох осіб.

Наслідок. Ігри двох осіб розпадаються на три класи:

1. $C_\gamma = \varnothing$, $C_\beta \ne \varnothing$ (боротьба за право першого ходу (за лідерство)).
2. $C_\beta = \varnothing$, $C_\gamma \ne \varnothing$ (боротьба за право другого ходу (за підлеглість)).
3. $C_\beta \cap C_\gamma \ne \varnothing$ (у цьому випадку множина $C_\beta \cap C_\gamma$ є областю для кооперації з використанням погроз).

У свою чергу клас 3 розпадається на 4 підкласи:

3.1. $C_\beta \cap C_\gamma = C_\gamma$ (лідером бути краще, оскільки $\gamma \ge \beta$, але можливий компроміс, що усуває небезпеку захоплення лідерства підлеглим).

3.2. $C_\beta \cap C_\gamma = C_\beta$ (підлеглим бути краще ($\beta \ge \gamma$), але можливий компроміс, коли у лідера не має підстав відмовитись від лідерства).

3.3. $C_\beta \cap C_\gamma = \{x \mid \ u_1(x) \ge \gamma_1, u_2(x) \ge \beta_2\}$ (лідером є гравець 1).

3.4. $C_\beta \cap C_\gamma = \{x \mid \ u_1(x) \ge \beta_1, u_2(x) \ge \gamma_2\}$ (лідером є гравець 2).

Доведення. Нехай x^i, $i = 1,2$ – рівновага за Штакельбергом, в якій гравець i є лідером. Нехай D_i – множина ситуацій, які задовольняють умовам:

$$\gamma_i \le u_i(x),\ \beta_j \le u_j(x).$$

Оскільки x^i_j є найкращою відповіддю гравця j на x^i_j, то множина D_i містить x_i і тому не є порожньою.

Припустимо, що γ-ядро і β-ядро є порожніми. Виберемо оптимальну за Парето ситуацію x з D_1 (наприклад максимізуючи $u_1 + u_2$ на D_1). Тоді маємо:

$$C_\gamma = \phi \Rightarrow u_2(x) < \gamma_2,$$
$$C_\beta = \phi \Rightarrow u_1(x) < \beta_1.$$

Оскільки x^2 належить D_2, то приходимо до висновку, що ситуація x^2 домінує за Парето ситуацію x. Одержали супуречність.

Припустимо тепер, що γ-ядро і β-ядро не порожні і доведемо, що їхній перетин також не порожній. Покладемо $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

Якщо $\gamma \le \beta$, то $C_\beta \subset C_\gamma$ і все доведено. Аналогічно, якщо $\gamma \ge \beta$, то $C_\beta \bigcap C_\gamma = C_\beta$. Залишився випадок вигляду $\beta_1 < \gamma_1$, $\gamma_2 < \beta_2$. Тоді будь-який поділ з D_1, наприклад x^1, належить $C_\beta \bigcap C_\gamma$.

***g – ядро* гри.**

Означення. Нехай $\left(x^*, \xi_1, \xi_2\right)$ – сценарій попередження гри *G*. Погроза називається гарантованою, якщо не принесе втрат гравцю, що погрожує:

$$u_1\left(x_1, \xi_2\left(x_1\right)\right) \le u_1\left(x^*\right) \le u_1\left(\xi_1\left(x_2\right), x_2\right),$$
$$u_2\left(\xi_1\left(x_2\right), x_2\right) \le u_2(x^*) \le u_2\left(x_1, \xi_2\left(x_1\right)\right), \forall x_1, x_2.$$

Тоді *g – ядром* гри *G* називається множина C_g таких ситуацій x^*, для яких існує хоча б один гарантований сценарій попередження $\left(x^*, \xi_1, \xi_2\right)$.

Теорема. $x \in C_g \Leftrightarrow x \in PO$ і $u_i\left(x\right) \le \beta_i$.

Доведення випливає з двох попередніх теорем, звідки $C_g \subseteq C_\gamma$, зокрема, C_g може бути порожнім.

Лекція 27. Ігри у характеристичній формі

Приклад. Три музиканти одержать максимальний дохід 100 у.о., якщо виступатимуть разом. Якщо співак виступає окремо, то він одержить 20 у.о., якщо піаніст, то – 30 у.о. Ударник окремо не може заробити нічого. Якщо виступатимуть окремо піаніст з ударником, то вони зароблять 65 у.о., якщо співак та ударник, то – 30+50 у.о. Нарешті, якщо піаніст і співак відмовляться від ударника, то вони одержать разом 80 у.о. Зрозуміло, що краще виступати втрьох. Виникає питання: «Як поділити прибуток?»

Характеристична функція гри в нормальній формі.

Означення. Характеристичною функцією гри n осіб називається відображення $v: 2^N \to R^1$ таке, що $v(\varnothing) = 0$, $v(S \bigcup T) \ge v(S) + v(T)$ для $\forall S, T \subset N$, $S \bigcap T = \varnothing$.

Між грою в нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ та грою в характеристичній формі (N, v) можна встановити такий зв'язок: $v(S) = \max\limits_{x_S \in X_S} \min\limits_{x_{N\setminus S} \in X_{N\setminus S}} \sum\limits_{i \in S} u_i(x_S, x_{N\setminus S})$, $S \subseteq N$. Тут і далі вважаємо за визначенням, що $v(\varnothing) = \sum\limits_{i \in \varnothing} x^i = 0$.

Означення. Функція *f*, яка ставить у відповідність кожній підмножині *Y* множини *X* число *f* (*Y*) називається супераддітівною, якщо для будь-яких множин *Y* і *Z* з *X*, що не перетинаються, виконується нерівність

$$f(Y \bigcup Z) \ge f(Y) + f(Z).$$

Теорема. Характеристична функція будь-якої гри в нормальній формі є суперадитивною.

Доведення. Потрібно довести, що для будь-яких коаліцій *I* і *K* виконуються нерівності $v(I \bigcup K) \ge v(I) + v(K)$. Для спрощення формул, будемо вважати, що *I* = {1, ..., *i*} і *K* = {*i* + 1, ..., *i* + *k*} (інші випадки виходять з даного перестановкою гравців). Позначимо *L* = *N* \ *I* \ *K* - множину гравців, що не входять ні в *I* ні в *K*.

Нехай x_I^0 - така стратегія коаліції *I*, що

$$v(I) = \max_{x_K \in X_K} \min_{x_L \in X_L} \sum_{j \in I} u_j(x_I^0, x_K, x_L)$$

і x_K^0 - така стратегія коаліції *K*, що

$$v(K) = \max_{x_I \in X_I} \min_{x_L \in X_L} \sum_{j \in K} u_j(x_I, x_K^0, x_L).$$

Тоді

$$v(I) \le \min_{x_L \in X_L} \sum_{j \in I} u_j(x_I^0, x_K, x_L)$$

і

$$v(K) \le \min_{x_L \in X_L} \sum_{j \in K} u_j(x_I, x_K^0, x_L).$$

Складаючи ці нерівності, отримаємо

$$v(I)+v(K) \le \min_{x_L \in X_L} \sum_{j\in I} u_j(x_I^0, x_K, x_L) + \min_{x_L \in X_L} \sum_{j\in K} u_j(x_I, x_K^0, x_L).$$

Але сума мінімумів менше мінімуму суми, тому

$$v(I)+v(K) \le \min_{x_L \in X_L} \sum_{j\in I\bigcup K} u_j(x_I^0, x_I^0, x_L),$$

и тим паче

$$v(I)+v(K) \le \max_{(x_I, x_K)\in I\bigcup K} \min_{x_L \in X_L} \sum_{j\in I\bigcup K} u_j(x_I^0, x_I^0, x_L) = v(I \bigcup K).$$

Теорему доведено.

Кооперативна гра в характеристичній формі

Означення. Кооперативною грою в характеристичній формі називається пара (N, v), де $N = \{1, 2, ..., n\}$ – скінченна множина з n гравців, а $v : 2^N \to R^1$ – характеристична функція. Будь-яка підмножина S множини гравців N називається коаліцією.

Теорема (про зв'язок форм). Для будь-якої гри в формі характеристичної функції <*N*, *v*> знайдеться така гра $G = (X_i, u_i; i \in N)$ в нормальній формі, що функція *v* буде характеристичної функцією гри G.

Доведення. Побудуємо відповідну гру G. Покладемо $X_i = 2^N$ для всіх *i*. Виграш *i*-го гравця в заданій ситуації x визначимо наступним чином. Назвемо коаліцію *K* замкненою, якщо $x_j = K$ для всіх гравців *j*∈*K*. Якщо гравець *i* входить в деяку замкнену коаліцію *K*, що містить *k* гравців, то покладемо його виграш $u_i(x) = \frac{1}{k} v(K)$. Якщо ж гравець *i* не входить в жодну замкнену коаліцію, то за означенням $u_i(x) = v(i)$. Зауважимо, що за означенням різні замкнені коаліції не перетинаються, тому дане означення є коректним.

Знайдемо характеристичну функцію побудованої гри в нормальній формі. Зафіксуємо довільну коаліцію *K* і позначимо число гравців, що входять до неї через *k*.

Якщо всі гравці з коаліції *K* виберуть стратегії $x_i^0 = K$, то не залежно від вибору стратегій інших гравців кожен з них отримає виграш $u_i(x) = \frac{1}{k} v(K)$ і, отже

$$\min_{x_{N\backslash K} \in X_{N\backslash K}} \sum_{i\in K} u_i(x_K^0, x_{N\backslash K}) = \sum_{i\in K} u_i(x_K^0, x_{N\backslash K}) = \sum_{i\in K} \frac{1}{k} v(K) = v(K).$$

Значить, $\max\limits_{x_K \in X_K} \min\limits_{x_{N\backslash K} \in X_{N\backslash K}} \sum\limits_{i\in K} u_i(x_K, x_{N\backslash K}) \ge v(K)$.

Нехай тепер всі гравці, що не входять в K вибрали стратегію $x_j^0 = N \setminus K$. Тоді коаліція K буде замкненою. У ситуації $(x_K, x_{N\setminus K}^0)$ можуть утворитися ще якісь замкнені коаліції $I_1,\ldots,I_p$,, що містяться в K, і гравці з множини $L = K \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{p} I_l \right)$ не увійдуть в жодну з замкнених коаліцій. Позначимо число гравців в коаліції Iq через m_q. Тоді

$$\sum_{i\in K} u_i(x_K, x_{N\setminus K}^0) = \sum_{q=1}^{p} \sum_{i\in I_q} u_i(x_K, x_{N\setminus K}^0) + \sum_{i\in L} u_i(x_K, x_{N\setminus K}^0) =$$

$$= \sum_{q=1}^{p} \sum_{i\in I_q} \frac{1}{m_q} v(I_q) + \sum_{i\in L} v(i) = \sum_{q=1}^{p} v(I_q) + \sum_{i\in L} v(i) \le v(K)$$

(нерівність виконується в силу супераддитивности функции v).
Тем паче

$$\min_{x_{N\setminus K}\in X_{N\setminus K}} \sum_{i\in K} u_i(x_K, x_{N\setminus K}) \le v(K).$$

А оскільки ця нерівність виконується для будь-якої стратегії u^K, отримаємо

$$\max_{x_K\in X_K} \min_{x_{N\setminus K}\in X_{N\setminus K}} \sum_{i\in K} u_i(x_K, x_{N\setminus K}) \le v(K).$$

Остаточно маємо

$$\max_{x_K\in X_K} \min_{x_{N\setminus K}\in X_{N\setminus K}} \sum_{i\in K} u_i(x_K, x_{N\setminus K}) = v(K),$$

що в силу довільності коаліції K означає, що функція v є характеристичною функцією гри.

Властивості ігор в характеристичній формі

Означення. Ігри $<N,v>$ і $<N',v>$ називаються аффінно еквівалентними, якщо знайдуться позитивне число k і довільні дійсні числа a_i такі, що для будь-якої коаліції i виконується рівність $v'(I) = kv(I) + \sum_{i\in I} a_i$.

Означення. Гравець $i\in N$ називається бовдуром у грі <N,v>, якщо для будь-якої коаліції I, яка не містить гравця i виконується рівність $v(I \bigcup \{i\}) = v(I) + v(i)$. Гравці, які не є бовдурами, називаються суттєвими.

Тут і далі для скорочення формул ми пишемо $v(i)$ замість $v(\{i\})$.

Означення. Множина, що містить усіх суттєвих гравців і може якихось бовдурів називається носієм гри $<N,v>$.

Означення. Гра називається несуттєвою, якщо всі гравці в ній є бовдурами. В іншому випадку гра називається суттєвою.

Теорема. Будь-яка суттєва гра еквівалентна грі $<N,v>$, в якій $v(I) = 0$ для будь-якої коаліції I.

Доведення. В силу несуттєвості розглянутої гри для будь-якої коаліції K виконується рівність $v(K)=\sum_{i\in K} v(i)$. Тому у визначенні афінної еквівалентності досить взяти $k = 1$ і $a_i = -v(i)$.

Означення. Гра <N, v> називається 0-1-редукованою, якщо для будь-якого гравця i рівність $v(i) = 0$ і $v(N) = 1$ є вірною.

Теорема. Будь-яка суттєва гра аффінно еквівалентна деякій 0-1-редукованій грі.

Доведення. Шукані числа k і $a_1,\ldots,a_n$ повинні задовольняти системі рівнянь

$$kv(i)+a_i=0,\ i=1,\ldots,n,$$

$$kv(N)+\sum_{i=1}^{n} a_i=1.$$

Підсумовуючи перші n рівнянь цієї системи, отримаємо $\sum_{i=1}^{n} a_i=-k\sum_{i=1}^{n} v(i)$. Підставляючи цю рівність в останнє рівняння системи, отримаємо $k\left(v(N)-\sum_{i=1}^{n} v(i)\right)=1$.

В силу суттєвості гри число $v(N)-\sum_{i=1}^{n} v(i)$ є додатним, тому є додатним і число $k=\dfrac{1}{v(N)-\sum_{i=1}^{n} v(i)}$. Тепер легко знаходимо $a_i=-\dfrac{v(i)}{v(N)-\sum_{i=1}^{n} v(i)}$.

Теорема. Характеристична функція 0-1-редукованої гри є невід’ємною.

Теорема. Если $<N,v>$ – 0-1-редуцированная игра, и две коалиции I и K удовлетворяют условию $I\subseteq K$, то $v(I)\le v(K)$.

Доведення двох останніх теорем слідують з властивості супераддитивності.

Определение. Гра $<N,v>$ називається простою, якщо множина значень функції v є $\{0,1\}$.

Лекція 28. С-ядро гри

Поділи.

Означення. Поділом у грі в характеристичній формі (N,v) називається вектор $x=(x_1,...,x_n)$ такий, що виконуються властивості :

1) $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$ (коллективная рациональность);

2) $x_i \ge v(\{i\})$ для $\forall i \in N$ (індивідуальна раціональність).

Далі для стислості будемо використовувати наступне позначення. Якщо x - поділ, а K - коаліція, то $x(K)=\sum_{i\in K} x^i$. Зокрема, $x(\{i\})=x^i$, $x(N)=v(N)$.

Теорема. Множина поділів не порожня.

Доведення. Визначимо вектор $x=(x^1,...x^n)$ з компонентами $x^1=v(1),\ldots,x^{n-1}=v(n-1)$. В силу властивості супераддитивності виконується нерівність $x^n \ge v(n)$, тому цей вектор є поділом.

Теорема. У несуттєвій грі поділ є єдиним.

Доведення. Якщо $x=(x^1,...x^n)$ - поділ, то для всіх $i\in N$ виконуються нерівності $x^i \ge v(i)$. Підсумовуючи їх, отримаємо

$$v(N)=\sum_{i=1}^{n} x^i \ge \sum_{i=1}^{n} v(i) = v(N)$$

(остання рівність виконується в силу несуттєвості гри). Звідси випливає, що всі складені нерівності насправді є рівностями, Таким чином, тобто єдиний поділ - це вектор $(v(1),\ ...,\ v(n))$.

Домінування.

Означення. Нехай x та y –два поділи у грі в характеристичній формі (N,v), а $S\subseteq N$ – деяка коаліція гравців. Будемо говорити, що x домінує y для коаліції гравців S і позначати $x \succ_S y$, якщо $x_i > y_i\ \forall i\in S$ та $\sum_{i\in S} x_i \le v(S)$.

Будемо вважати, що x домінує y і позначати $x \succ y$, якщо існує така коаліція S, що $x \succ_S y$.

Теорема. Відношення домінування за коаліцією K має властивості строгого порядку:

1) для будь-якого поділу x не вірно, що $x \succ_K y$ (антисиметричність);

2) для будь-яких поділів x, y, z з умов $x \succ_K y$ і $y \succ_K z$ випливає відношення $x \succ_K z$ (транзитивність).

Доведення. Доведення випливає з того, що зазначені властивості має відношення «більше».

Теорема. Відношення $x \succ_N y$ не виконується для жодного поділу x і y.

Доведення. Припустимо супротивне, що $x \succ_N y$. Тоді $x^i > y^i$ для будь-якого $i \in N$. Підсумовуючи ці рівності, отримаємо $v(N) = \sum_{i=1}^{n} x^i > \sum_{i=1}^{n} y^i = v(N)$ (рівності виконуються в силу означення поділу). Одержали суперечність.

Теорема. Відношення $x \succ_{\{i\}} y$ не виконується для жодного гравця i та для жодного поділу x і y.

Доведення. Припустимо супротивне, що $x \succ_{\{i\}} y$, тоді $v(i) \ge x^i > y^i \ge v(i)$ (перші дві нерівності виконуються в силу означення відношення домінування, а останні - оскільки y є поділом). Одержали суперечність.

Теорема. Якщо $x \succ_K y$, то $x \succ_K \lambda x + (1-\lambda) y$ для будь-якого $\lambda \in [0,1]$.

Означення. Поділ x домінує поділ y, якщо знайдеться така коаліція K, що $x \succ_K y$.

Якщо розподіл x домінує поділ y, то будемо писати $x \succ y$.

Приклад. Нехай в грі трьох осіб $v(K) = 1$, якщо коаліція K складається з двох або трьох гравців, та $v(K)=0$ в інших випадках. Тоді поділ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ домінує поділ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ за коаліцією $\{1,2\}$, а поділ $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ домінує поділ $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ за коаліцією $\{1,3\}$. Але поділ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ не домінує поділ $\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Отже, відношення домінування, взагалі кажучи, не є транзитивним.

Приклад. Нехай в грі п'яти осіб $v(K)=0$, якщо K містить менше двох гравців, $v(K) = \frac{1}{2}$, якщо K містить двох або трьох гравців і $v(N)=1$. Тоді поділ $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ домінує поділ $y = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ за коаліцією $\{1,2\}$, а поділ y домінує поділ x за коаліцією $\{3,4\}$. Значить, відношення домінування не є, взагалі кажучи, і антисиметричним.

***С*-ядро.**

Означення. *С* - ядром гри в характеристичній формі $\langle N, v \rangle$ називається множина усіх її недомінованих поділів. *С*-ядро игры $\langle N, v \rangle$ будем обозначать символом $C(v)$.

Теорема (про характеризацію ядра). С - ядро гри в характеристичній формі (N, v) є множиною таких поділів x, що $\sum_{i \in K} x_i \ge v(K)$ для $\forall K \subset N$.

Доведення. Нехай поділ *x* задовольняє умовам теореми, а поділ *y* домінує *x*. Тоді знайдеться коаліція така *K*, що *y* домінує *x* за коаліцією *K*, зокрема $y^i > x^i$ для всіх $i \in K$. Підсумовуючи нерівності, отримаємо

$$\sum_{i\in K} y^i > \sum_{i\in K} x^i \ge v(K).$$

Але це суперечить означенню домінування за коаліцією. Значить, такого поділу *y* не існує, і тому поділ *x* не домінується жлдним іншим, тобто належить С-ядру.

Навпаки, нехай *x* - такий поділ, що для деякої коаліції *K* виконується нерівність $\sum_{i\in K} x^i < v(K)$. Розглянемо розподіл *y*, виду

$$y^i = \begin{cases} x^i + \varepsilon / k, \text{ если } i \in K, \\ v(i) + \alpha / (n-k), \text{ если } i \notin K, \end{cases}$$

де $\varepsilon = v(K) - \sum_{i\in K} x^i$, $\alpha = v(N) - v(K) - \sum_{i \notin N \setminus K} v(i)$, а k – число гравців в коалиции *K*. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} y^i = \sum_{i\in K} y^i + \sum_{i\in N\setminus K} y^i = \sum_{i\in K}\left(x^i + \frac{\varepsilon}{k}\right) + \sum_{i\in N\setminus K}\left(v(i) + \frac{\alpha}{n-k}\right) = \varepsilon + \alpha + \sum_{i\in K} x^i + \sum_{i\in N\setminus K} v(i) =$$

$$= v(K) - \sum_{i\in K} x^i + v(N) - v(K) - \sum_{i\in N\setminus K} v(i) + \sum_{i\in K} x^i + \sum_{i\in N\setminus K} v(i) = v(N).$$

За припущенням $\varepsilon > 0$, звідси $y^i > x^i \ge v(i)$ для $i \in K$. В силу суперадитивності функции *v* виконується нерівність $\alpha > 0$, тому $y^i > x^i \ge v(i)$ для $i \in N \setminus K$. Значить, *y* – дійсно поділ.

Окрім того, $\sum_{i\in K} y^i = \sum_{i\in K}\left(x^i + \frac{\varepsilon}{k}\right) = \varepsilon + \sum_{i\in K} x^i = v(K)$ та $y^i > x^i$ для $i \in K$. Тому поділ *y* (який ми побудували) домінує поділ *x* за коаліцією *K* і, звідси, поділ *x* не належить *C*-ядру.

Лекція 29. Приклади побудови С-ядра гри

Приклад. Розглянемо типовий приклад такої проблеми з області планування капіталовкладень – побудова сусідніми трьома містечками спільної системи водопостачання. Опишемо витрати на будівництво. Місто A окремо – 120 одиниць витрат ($c(A)=120$), $c(B)=140$, $c(C)=120$. Якщо міста A й B об'єднають свої зусилля, то $c(A,B)=170$; $c(B,C)=190$; $c(A,C)=160$. Якщо проект буде реалізуватись спільно всіма, то $c(A,B,C)=255$. Відмітимо, що для зручності позначення $c(A,B,C)$ і т.п. означає $c(\{A,B,C\})$.

Нехай про співпрацю домовились A і B, тоді економія витрат $\Delta c(A,B)$ для них дорівнює $c(A)+c(B)-c(A,B)=90$. Якщо A й B домовились поділити $\Delta c(A,B)=90$ порівну (егалітарне рішення), то остаточні витрати будуть $c_A=120-45=75$, $c_B=140-45=95$.

Оскільки загальні витрати будуть рівними $290=170+120$ (C будує самостійно), то при раціональній поведінці всіх гравців їм потрібно кооперуватись (щоб мати витрати 255 одиниць).

Нехай усі три гравці співпрацюють, економія $\Delta c(A,B,C)=c(A)+c(B)+c(C)-c(A,B,C)=125$ ділиться порівну. Тоді

$$c_A=120-\frac{1}{3}(125)=78\frac{1}{3},\ c_B=140-\frac{1}{3}(125)=98\frac{1}{3},$$

$$c_C=120-\frac{1}{3}(125)=78\frac{1}{3}.$$

Хоча загальні витрати у даному випадку менші за попередній варіант, але "раціонально мислячі" A й B на нього не погодяться! Адже вони несуть витрати більші ($c_A+c_B=176\,{}^1\!/_3$), ніж у попередньому випадку, коли "відділяться" ($c(A,B)=170$). Отже, егалітарний поділ спільної економії у даному випадку нелогічний.

Знайдемо розподіл витрат з ядра гри (при такому розподілі, якщо він існує, будь-якій коаліції гравців не вигідно відділятись). Ядро визначається наступними співвідношеннями:

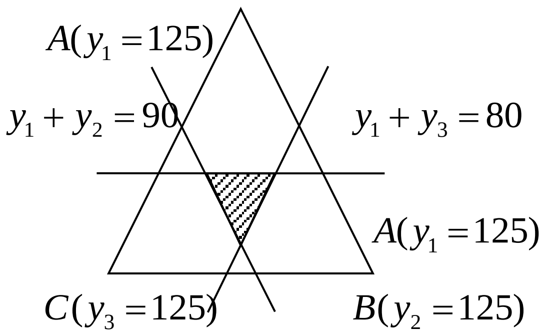
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=255,\ x_1\le 120,\ x_2\le 140,\ x_3\le 120, \\ x_1+x_2\le 170,\ x_2+x_3\le 190,\ x_1+x_3\le 160. \end{cases} \tag{1}$$

Для того, щоб представити розв'язок системи (1) більш наглядно, зробимо заміну змінних $y_i=c(i)-x_i$ (y_i – "економія" витрат гравця i). Отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3=255,\ \ y_i\ge 0,\ i=1,2,3, \\ y_1+y_2\ge 90,\ \ y_2+y_3\ge 70,\ \ y_1+y_3\ge 80. \end{cases} \tag{2}$$

Використаємо барицентричні координати – виділимо на площині три точки, яким відповідають розв'язки системи (2), одержимо

$(y_1, y_2, y_3) = (125,0,0)$, $(0,125,0)$, $(0,0,125)$ (вершини



Трикутника ABC. Тоді рівнянню $y_1 + y_2 = 80$ буде відповідати пряма, паралельна стороні AC, $y_1 + y_3 = 90$ -паралельна AB, $y_2 + y_3 = 70$ – паралельна BC. Ядром гри будуть точки заштрихованого трикутника.

Логічно вибрати за розв'язок центр цього трикутника (центр описаного кола) - егалітарний розв'язок $y^* = (51\frac{2}{3}, 41\frac{2}{3}, 31\frac{2}{3})$. Повертаючись до змінних x_i, матимемо $x^* = (68\frac{1}{3}, 98\frac{1}{3}, 88\frac{1}{3})$. Відмітимо, що ядро кооперативної гри може бути порожнім, тобто "повна кооперація" неможлива – існує хоча б одна коаліція, якій вигідно відділитись. Так, нехай витрати всіх власних коаліцій у нашому прикладі залишають без змін, витрати максимальної коаліції $c(A,B,C) > 260$. Тоді з $\{x_1 + x_2 \le 170,\ x_2 + x_3 \le 190,\ x_1 + x_3 \le 160\}$ випливає нерівність $2(x_1 + x_2 + x_3) \le 520$, що суперечить $x_1 + x_2 + x_3 > 260$.

Приклад. Три музиканти одержать максимальний дохід 100 у.о., якщо виступатимуть разом. Якщо співак виступає окремо, то він одержить 20 у.о., якщо піаніст, то – 30 у.о. Ударник окремо не може заробити нічого. Якщо виступатимуть окремо піаніст з ударником, то вони зароблять 65 у.о., якщо співак та ударник, то – 30+50 у.о. Нарешті, якщо піаніст і співак відмовляться від ударника, то вони одержать разом 80 у.о. Знайти C - ядро гри.

У цьому прикладі $N = \{1,2,3\}$, а характеристична функція приймає значення: $v(\{1\}) = 20,\ v(\{2\}) = 30,\ v(\{3\}) = 0,\ v(\{1,2\}) = 80$, $v(\{2,3\}) = 65$, $v(\{1,3\}) = 50,\ v(\{1,2,3\}) = 100$. Відповідно до теореми елементи C - ядра гри повинні задовольняти умовам:

$$x_1 \ge 20,\ x_2 \ge 30,\ x_3 \ge 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 100,\ x_1 + x_2 \ge 80,\ x_2 + x_3 \ge 65,\ x_1 + x_3 \ge 50.$$

Ця множина є опуклою оболонкою трьох поділів: $(35,45,29),\ (35,50,15),\ (30,50,20)$, тобто

$C = \{x = \lambda_1(35,45,29) + \lambda_2(35,50,15) + \lambda_3(30,50,20) \,|\, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1; \lambda_i \geq 0; i = 1,2,3\}$
. Типовим представником C - ядра є його центр – середнє арифметичне крайніх точок, а саме, $x^* = (100/3, 145/3, 55/3)$.

Властивості ядра.

З теореми про характеризацію ядра випливає очевидний наслідок.
Наслідок. Ядро є компактним опуклим багатокутником.

Теорема. В несуттєвій грі *C*-ядро складається з одного поділу.
Доведення. Так як в несуттєвій грі поділ єдиний, то він належить *C*-ядру.

Означення. Гра $<N,v>$ називається грою з постійною сумою, якщо для будь-якої коаліції *K* виконується рівність $v(N) = v(K) + v(N \setminus K)$.

Теорема. В суттєвій грі з постійною сумою *C*-ядро є порожнім.
Доведення. Припустимо супротивне. Нехай поділ *x* належить ядру. Тоді для будь-якого гравця *i* виконуються нерівності

$$v(N \setminus \{i\}) \leq \sum_{j \neq i} x^j ,$$

$$v(i) \leq x^i .$$

Складаючи ці нерівності, отримаємо

$$v(N \setminus \{i\}) + v(i) \leq \sum_{j \neq i} x^i + x^i = \sum_{i=1}^{n} x^i = v(N).$$

Але так як розглядається гра з постійною сумою $v(N \setminus K) + \sum_{i \in K} v(i) = v(N)$.
Значить, всі наведені вище нерівності обертаються в рівності, зокрема $x^i = v(i)$, що в силу довільності *i* суперечить умові суттєвості гри.

Теорема. У всякій грі двох осіб С-ядро збігається з множиною всіх поділів.
Доведення. Домінування за коаліціям {1}, {2}, {1,2} є неможливим, а інших коаліцій в грі двох осіб немає.

Теорема. Якщо поділ *x* належить нутрощі С-ядра, то він не може домінувати жоден інший поділ.
Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $x \succ_K y$. Тоді $x \succ_K \lambda x + (1-\lambda) y$ для будь-якого $\lambda \in [0,1]$. Але при досить близьких до 1 значеннях λ поділ $\lambda x + (1-\lambda) y$ належить ядру. Отримали суперечність.

Лекція 30. Збалансовані ігри

Означення. Коаліція K називається власною, якщо вона не співпадає з множиною всіх гравців N.

Означення. Збалансованим покриттям множини всіх гравців N називається відображення δ, що ставить у відповідність кожній власній коаліції K дійсне число δ_K з відрізка [0,1] так, що для всіх гравців $i \in N$ виконуються рівності $\sum_{K \ni i} \delta_K = 1$.

Означення. Гра $\langle N, v \rangle$ називається збалансованою, якщо для будь-якого збалансованого покриття δ виконується нерівність $\sum_{K \subset N} \delta_K v(K) \le v(N)$.

Теорема (Бондарева). Ядро гри $\langle N, v \rangle$ не є порожним тоді й лише тоді, коли гра є збалансованою.

Доведення. Доведемо достатність. Припустимо, що ядро гри є порожним. Тоді в силу теореми про характеризації ядра мінімум функції $\sum_{i \in N} x^i$ на множині, що задається системою нерівностей

$$\sum_{i \in K} x^i \ge v(K),\ K \subseteq N$$

строго больше за $v(N)$.

В силу теореми Куна–Такера, якщо x_0 - точка мінімуму, то знайдуться невід'ємні множники Лагранжа такі, що пара (x_0, δ) буде сідловою функції

$$\sum_{i=1}^{n} x^i + \sum_{K \subset N} \lambda_K \left[v(K) - \sum_{i \in K} x^i \right].$$

Перегрупуємо в цій формулі доданки, виділивши змінні x^i:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \sum_{K \ni i} \lambda_K \right) x^i + \sum_{K \subset N} \lambda_K v(K).$$

Оскільки (x_0, δ) є сідловою точкою, то функція

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \sum_{K \ni i} \delta_K \right) x^i + \sum_{K \subset N} \delta_K v(K)$$

досягає свого максимуму, а це можливо лише в тому випадку, коли вона є постійною, тобто для всіх гравців $i \in N$ виконуються рівності $\sum_{K \ni i} \delta_K = 1$. В цьому випадку шуканий мінімум дорівнює $\sum_{K \subset N} \delta_K v(K)$ і за зробленим припущенням він строго більше за $v(N)$. Отримали суперечність.

Необхідність. Нехай поділ x належить ядру і δ - збалансоване покриття. Тоді за теоремою про характеризацию ядра

$$\sum_{i \in K} x^i \ge v(K),\ K \subseteq N.$$

Помноживши ці нерівності на δ_K і підсумовуючи, отримаємо

$$\sum_{K\subset N}\delta_K v(K) \le \sum_{K\subset N}\delta_K \sum_{i\in K} x^i .$$

Поміняємо порядок доданків і одержимо

$$\sum_{K\subset N}\delta_K v(K) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{K\ni i}\delta_K x^i = \sum_{i=1}^{n} x^i \sum_{K\ni i}\delta_K .$$

З огляду на те, що δ - збалансоване покриття, остаточно отримаємо

$$\sum_{K\subset N}\delta_K v(K) \le \sum_{i=1}^{n} x^i = v(N).$$

Теорему доведено.

На практиці для перевірки непорожності ядра користуються тим, що множина збалансованих покриттів є компактним багатогранником, і в силу лінійності умови теореми досить перевірити тільки лише для вершин цього багатогранника.

Приклад. Розглянемо гру трьох осіб. Збалансоване покриття задається шістьма числами $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_{12},\delta_{13},\delta_{23}$. Умова збалансованості виділяє тривимірний підпростір в E^6, що задається рівностями

$$\delta_1+\delta_{12}+\delta_{13}=1,\ \delta_2+\delta_{12}+\delta_{23}=1,\ \delta_3+\delta_{13}+\delta_{23}=1 .$$

Умови невід'ємності чисел $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_{12},\delta_{13},\delta_{23}$ задає шуканий багатогранник. У вершині цього багатогранника, при наймні, три з цих нерівностей повинні обертатися в рівності.

Якщо нулю рівні числа $\delta_1,\delta_2,\delta_3$, отримуємо δ_{13}=1/2, δ_{23}=1/2, δ_{23}=1/2 і умова непустоту ядра $v(\{1,2\})+v(\{1,3\})+v(\{2,3\})\le 2v(\{1,2,3\})$.

Якщо нулю рівні числа $\delta_1,\delta_2,\delta_{12}$, то $\delta_3=-1$ і зазначена точка не належить багатограннику. Аналогічно розглядаються два випадки, коли нулю дорівнюють числа $\delta_1,\delta_3,\delta_{13}$ і коли нулю рівні числа $\delta_2,\delta_3,\delta_{23}$.

Якщо нулю рівні числа $\delta_1,\delta_2,\delta_{13}$, то δ_3=1, δ_{12}=1, и δ_{23}=0 і отримуємо умову $v(\{3\})+v(\{1,2\})\le v(\{1,2,3\})$, що збігається з умовою супераддитивності. Аналогічно розглядається ще п'ять випадків, які утворюються перестановкою гравців.

Якщо нулю рівні числа $\delta_1,\delta_{12},\delta_{13}$, то виходить суперечність. Це буде також ще у двох симетричних випадках.

Якщо нулю рівні числа $\delta_1,\delta_{12},\delta_{23}$, то δ_2=1, δ_3=0, δ_{13}=1 і отримуємо умову $v(\{2\})+v(\{1,3\})\le v(\{1,2,3\})$, що збігається з умовою супераддітівность. Аналогічно розглядається ще п'ять випадків, які утворюються перестановкою гравців.

Нарешті, якщо нулю рівні числа $\delta_{12},\delta_{13},\delta_{23}$, то δ_1=1, δ_2=1, δ_3=1 і отримуємо умову $v(\{1\})+v(\{2\})+v(\{3\})\le v(\{1,2,3\})$, що збігається з умовою супераддітівності.

Всі можливості розглянуті і ми переконалися, що необхідною і достатньою умовою непорожності ядра є виконання нерівності

$$v(\{1,2\})+v(\{2,3\})+v(\{1,3\})\le v(\{1,2,3\}).$$

Опуклі ігри.

Означення. Гра $\langle N,v\rangle$ називається опуклою, якщо для будь-яких двох коаліцій I і K виконується нерівність $v(I)+v(K)\le v(I\bigcup K)+v(I\bigcap K)$.

Теорема. Гра $\langle N,v\rangle$ є опуклою тоді й лише тоді, коли для будь-яких двох коаліцій I і K, що не містять гравця i, включення $I\subset K$ приводить до нерівності $v(I\bigcup\{i\})-v(I)\le v(K\bigcup\{i\})-v(K)$.

Доведення. Доведемо спочатку необхідність. Розглянемо дві коаліції I і K, що не містять гравця i, і таких, що задовольняють умовам умові $I\subset K$. В силу опуклості гри $v(I\bigcup\{i\})+v(K)\le v(I\bigcup K\bigcup\{i\})+v((I\bigcup\{i\})\bigcap K)$, звідки $v(I\bigcup\{i\})+v(K)\le v(K\bigcup\{i\})+v(I)$, що і треба було вовести.

Доведемо достатність. Розглянемо дві коаліції I і K, що задовольняють умові $I\subset K$ і довільну коаліцію $R\subseteq N\setminus K$. Нехай $R=\{i_1,\ldots,i_r\}$. Тоді для будь-якого $k=1,\ldots,r$ виконується нерівність

$$v(I\bigcup\{i_1,...,i_k\})-v(I\bigcup(i_1,...,i_{k-1})\le v(K\bigcup\{i_1,...,i_k\})-v(K\bigcup(i_1,...,i_{k-1}).$$

Підсумовуємо ці нерівності по k від 1 до r. Отримаємо нерівність

$$v(I\bigcup R)-v(I)\le v(K\bigcup R)-v(K),$$

яка є вірною для будь-яких коаліцій $I\subset K$ і будь-якої коаліції $R\subseteq N\setminus K$.

Візьмемо довільні коаліції S і T. В силу попереднього нерівності

$$v((S\bigcap T)\bigcup(S\setminus T))-v(S\bigcap T)\le v(T\bigcup(S\setminus T))-v(T),$$

або $v(S)-v(S\bigcap T)\le v(S\bigcup T)-v(T)$.

Теорему доведено.

Теорема. В опуклій грі С-ядро не є порожним.

Доведення. Визначимо поділ x наступним чином. Покладемо $x^1=v(1), x^i=v(\{1,\ldots,i\})-v(\{1,\ldots,i-1\})$. Доведемо, що він належить С-ядру.

Розглянемо довільну коаліцію $S=\{i_1,\ldots,i_s\}$ і визначимо дві коаліції $I_p=\{i_1,i_2,\ldots,i_{p-1}\}$ і $K_p=\{1,2,\ldots,i_p-1\}$ ($p=1,...,s$). Очевидно, $I_p\subseteq K_p$, тому в силу попередньої леми

$$v(\{i_1,\ldots,i_k\})-v(\{i_1,\ldots,i_{k-1}\})=v(\{1,\ldots,i_k\})-v(\{1,\ldots,i_k-1\})=x^{i_k}.$$

Підсумовуючи ці нерівності по k від 1 до s, отримаємо

$$v(\{i_1,...,i_s\})=v(S)\le\sum_{i\in S}x^i.$$

Оскільки коаліція S є довільною, то в силу теореми про характеризацию ядра поділ x належить С-ядру.

Приклад. (гра Джаз-оркестр). Позначимо: S - співак, P - піаніст, D (drummer) - ударник. Значення характеристичної функції: v(S,P,D) = 1000, v(S,P) = 800, v(D,P) = 300, v(D,S) = 500, v(P) = 300, v(S) = 200, v(D) = 0. Ядро є опукла оболонка точок (350,450,200), (350,500,150), (300,500,200).

Лекція 31. N-ядро гри

Лексимакс

Означення. Будемо говорити, що вектор $x = (x_1, ..., x_n) \in E^n$ не гірше вектора $y = (y_1, ..., y_n) \in E^n$ в сенсі лексикографічного порядку і писати $x \trianglerighteq y$, якщо або $\exists i \in \{1, ..., n\}$, для якого $x_i > y_i$ та $x_j = x_j$ для $\forall j \in \{1, ..., i-1\}$.

Теорема. Відношення $\trianglerighteq$ є відношенням лінійного порядку, тобто виконуються властивості:

1. для будь-яких векторів x і y або $x \trianglerighteq y$, або $y \trianglerighteq x$;
2. для будь-якого вектора x має місце відношення $x \trianglerighteq x$;
3. якщо $x \trianglerighteq y$ і $y \trianglerighteq x$, то $x=y$;
4. якшо $x \trianglerighteq y$ і $y \trianglerighteq z$, то $x \trianglerighteq z$.

Доведення. Доведемо властивість 1. Якщо $x = y$, то доводити немає чого. В іншому випадку множина індексів i, для яких $x^i \neq y^i$ не є порожньою. Нехай k - найменший з таких індексів. Тоді $x^i = y^i$ для всіх $i < k$ і має місце одна з двох нерівностей $x^k > y^k$ або $x^k < y^k$. У першому випадку $x \trianglerighteq y$, а в іншому $y \trianglerighteq x$.

Властивість 2 є очевидною.

Доведемо властивість 3. Припустимо супротивне. Тоді множина індексів i, для яких $x^i \neq y^i$ не є порожньою. Нехай k - найменший з таких індексів. Якщо $x^k > y^k$, то приходимо до суперечності з умовою $y \trianglerighteq x$, а якщо $x^k < y^k$, то виходить протиріччя з умовою $x \trianglerighteq y$.

Залишається довести властивість 4. Якщо $x = y$ або $y = z$ твердження є очевидним. В іншому випадку нехай i - найменший індекс, для якого $x^i > y^i$, а k - найменший індекс, для якого $y^k > z^k$. Якщо $i < k$, то для $j < i$ виконуються рівності $x^j = y^j = z^j$, і $x^i > y^i \geq z^i$ значить $x \trianglerighteq z$. Якщо ж $k < i$, то для $j < k$ виконуються рівності $x^j = y^j = z^j$, і $x^i \geq y^i > z^i$ і знову $x \trianglerighteq z$.

Теорема. Якщо множина X є компактною, а відображення $f : X \to E^n$ є неперервним, то множина таких $x \in X$, що $f(x) \trianglerighteq f(y)$ для будь-якого $y \in X$, не порожньою і компактною.

Доведення випливає з теореми Вєєрштрасса.

Нехай $x = (x_1, \dots, x_n)$ - вектор. Позначимо $x_{\uparrow} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ – вектор, компоненти якого $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ є компоненти вектора x, що впорядковані за зростанням.

Теорема. Відображення, яке ставить у відповідність вектору x вектор $x_{\uparrow}$ є неперервним.

Доведення. Нехай Σ_k - сімейство всіх підмножин множини N, що містять k елементів. Тоді $x_{(k)} = \min_{K \in \Sigma_k} \max_{i \in K} x_i$. З теорем, доведених раніше, випливає, що функція $x_{(k)}$ є неперервною. Так як всі компоненти даного нас відображення неперервні, то і воно саме є неперервним.

Означення. Будемо говорити, що вектор $x = (x_1,...,x_n) \in E^n$ не гірше за вектор $y = (y_1,...,y_n) \in E^n$ в сенсі лексімаксного порядку і писати $x \trianglerighteq_{\uparrow} y$, якщо $x_{\uparrow} \trianglerighteq y_{\uparrow}$.

Теорема. Відношення є відношенням предпорядку, тобто виконуються умови:

1. для будь-яких векторів x і y або $x \trianglerighteq_{\uparrow} y$, або $y \trianglerighteq_{\uparrow} x$;
2. для будь-якого вектора x має місце відношення $x \trianglerighteq_{\uparrow} x$;
3. якшо $x \trianglerighteq_{\uparrow} y$ і $y \trianglerighteq_{\uparrow} z$, то $x \trianglerighteq_{\uparrow} z$;
3. якщо $x \trianglerighteq_{\uparrow} y$ і $y \trianglerighteq_{\uparrow} x$, то $x_{\uparrow} = y_{\uparrow}$.

Доведення очевидно випливає з першої теореми лекції.

Позначимо $\mathrm{Lex}\max_{z \in X} f(x)$ множину усіх таких $x \in X$, що $f(x) \trianglerighteq_{\uparrow} f(y)$ для будь-якого $y \in X$.

Теорема. Якщо множина X є компактною, а відображення $f : X \to E^n$ є неперервним, то множина $\mathrm{Lex}\max_{z \in X} f(z)$ є компактною і не порожньою.

Доведення. Отображение $x \to (f^{(1)}(x),\ldots, f^{(n)}(x))$ є непрерывним як суперпозиція неперервних відображень. Тоді існує x, для якого відношення $(f^{(1)}(x),\ldots, f^{(n)}(x)) \trianglerighteq (f^{(1)}(y),\ldots, f^{(n)}(y))$ виконується для усіх y. Очевидно, $x \in \mathrm{Lex}\max_{z \in X} f(z)$. Множина $\mathrm{Lex}\max_{z \in X} f(z)$ є замкненою как прообраз точки при неперервному відображенні $x \to (f^{(1)}(x),\ldots, f^{(n)}(x))$, а, відповідно, є компактним.

Теорема. Якщо x і y належать множині $\mathrm{Lex}\max_{z \in X} f(z)$, то $\left(f(x)\right)_{\uparrow} = \left(f(y)\right)_{\uparrow}$.

Теорема. Нехай задана задача багатокритеріальної оптимізації:

$$f_i(x) \to \max_{x \in X},\ i \in \{1,...,m\},$$

з вектором критеріїв $f(x) = (f_1(x),..., f_m(x))$. Тоді, якщо $x \in \mathrm{Lex}\max_{z \in X} f(x)$, то x є эффективною альтернативою цієї задачі.

Доведення. Достатньо помітити, що якщо x домінє за Парето y, то $f(x) \trianglerighteq_{\uparrow} f(y)$.

Теорема. Якщо множина $X \subseteq E^n$ є опуклою, то множина $\operatorname{Lex}\max_{x \in X} x$ містит не більше одного елемента. (Якщо множина $Y = \{ f(x) : x \in X \} \subset R^m$ є опуклою, то множина $\operatorname{Lex}\max_{x \in X} f(x)$ містить не болше одного елемента.)

Доведення. Припустимо супротивне, що множина $\operatorname{Lex}\max_{x \in X} x$ містить два різних вектори x і y. Щоб одержати суперечність, достатно довести, що відношення $x \trianglerighteq z$ не виконується для $z = \dfrac{x+y}{2}$.

За означеннням $x_i \geq x_{(1)}$ і $y_i \geq y_{(1)}$ для всех i. Склавши ці нерівності і розділивши на 2, одержимо $z_i \geq x_{(1)}$, оскільки $x_{(1)} = y_{(1)}$. Тому, $z_{(1)} \geq x_{(1)}$. Якщо остання нерівність є строгою, то доведення є завершеним.

Залишилось розглянути випадок $z_{(1)} = x_{(1)}$. Нехай номер i задовольняє умові $z_i = z_{(1)}$. Тоді $x_i = x_{(1)}$ і $y_i = y_{(1)}$. Тогда для всех $j \neq i$ виконуються нерівності $x_j \geq x_{(2)}$ і $y_j \geq y_{(2)}$. Звідси аналогічно одержимо, що $x_j = x_{(2)}$ і $y_j = y_{(2)}$ для деякого j.

Повторюючи ці міркування далі, прийдемо до висновку, що $x = y$. Получили суперечність.

Розглянемо гру в формі характеристичної функції $\langle N, v \rangle$.

Ексцесс гри

Означення. Ексцесом вектора $x = (x^1, ..., x^n) \in E^n$ щодо коаліції К в грі $\langle N, v \rangle$ називається число $e(x, K, v) = \sum_{i \in K} x^i - v(K)$.

Нехай X^* - множина векторів $x = (x^1, ..., x^n) \in E^n$, що задовольняють рівності $\sum_{i=1}^{n} x^i = v(N)$. Для кожного вектора $x = (x^1, ..., x^n) \in E^n$ визначено $2^n - 2$ чисел, де K пробігає множину власних коаліцій. Упорядкувавши множину власних коаліцій якимось чином, ми можемо розглядати набір $e(x, v)$ чисел $e(x, K, v)$, як елемент $2^n - 2$-мірного векторного простору.

Означення. Будь-який елемент множини $\operatorname{Lex}\max_{x \in X^*} e(x, v)$ называется N-ядром игры $\langle N, v \rangle$.

Лекція 32. Властивості N-ядра

Теорема. В будь-якій грі існує єдине N-ядро.

Доведення. Нехай x_0 - довільний вектор з множини X^*, а $E = \min_{K \subset N} e(x_0, K, v)$. Розглянемо множину $A = \{x \in B : e(x, K, v) \geq E,\ K \subset N\}$. Ця множина є компактною, опуклою і не порожньою, так як їй належить, наприклад, вектор x_0. Отже, множина $\mathrm{Lex}\max_{x \in A} e(x)$ складається рівно з одного вектора x_0.

Очевидно, що цей вектор не гірше за будь-який вектор $y \in B \setminus A$ в сенсі лексимаксного порядку, що завершує доведення.

Теорема. У будь-якій грі N-ядро є поділом.

Доведення. Нехай x - N-ядро даної гри. Колективна раціональність вектора x очевидно випливає з означення. Доведемо індивідуальну раціональність.

Припустимо супротивне, що $x^i < v(i)$. Позначимо

$$\Xi = \left\{ K \subset N : e(x, K) = \min_{I \subset N} e(x, I, v) \right\}.$$

Тоді $i \in K$ для будь-якої коаліції $K \in \Xi$. Тоді

$$e(x, K \bigcup \{i\}, v) = x^i + \sum_{j \in K} x^j - v(K \bigcup \{i\}) \leq x^i + \sum_{j \in K} x^j - v(K) - v(i) =$$

$$= x^i - v(i) + e(x, K, v) < e(x, K, v)$$

(нестрога нерівність випливає з супераддитивності), що суперечить вибору коаліції K. Визначимо вектор y за умовою

$$y^j = \begin{cases} x^i + \varepsilon, \text{ если } j = i, \\ x^j - \dfrac{\varepsilon}{n-1}, \text{ если } j \neq i, \end{cases}$$

де ε – додатне число, яке менше за $\min_{K \notin \Xi} e(x, K, v) - \min_{K \subset N} e(x, K, v)$. Для $K \in \Xi$ виконуються нерівності

$$e(y, K, v) = \sum_{i \in K} y^i - v(K) = \sum_{i \in K} x^i - v(K) + \varepsilon - \frac{|K| - 1}{|N| - 1}\varepsilon =$$

$$= e(x, K, v) + \varepsilon - \frac{|K| - 1}{|N| - 1}\varepsilon > e(x, K, v),$$

а для $K \notin \Xi$ мають місце нерівності

$$e(y, K, v) = \sum_{i \in K} y^i - v(K) \geq \sum_{i \in K} x^i - \varepsilon - v(K) = e(x, K, v) - \varepsilon > e(x, I, v)$$

для деякої коаліції $I \in \Xi$. Значить відношення $(e(x,K),v)_{K \subset N} \underline{\triangleright} (e(y,K,v))_{K \subset N}$ не вірне, що суперечить вибору вектора x. Теорему доведено.

Теорема про селектор

Теорема. Якщо в грі $\langle N, v\rangle$ С-ядро не є порожнім, то *N*-ядро міститься в ньому.

Доведення. За теоремою про характеризацію ядра С-ядро складається з усіх поділів, для яких $e(x, K, v) \geq 0$ для всіх коаліцій *K*. Якщо ця множина не є порожньою, то йому обов'язково належить *N*-ядро.

Алгоритм пошуку *N*-ядра.

Крок 1. Позначимо $\Sigma^{(1)}$ множину всіх власних коаліцій. Перш за все знайдемо максимум функції $\min\limits_{K\in\Sigma^{(1)}} e(x, K)$ на множині векторів, що задовольняють рівності $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = v(N)$. N - ядро неодмінно належить множині розв'язків цієї задачі. Введенням допоміжної змінної w ця задача зводиться до наступної задачі лінійного програмування:

$$w \to \max,$$
$$e(x, K) = \sum_{i\in K} x_i - v(K) \geq w,\ K \in \Sigma^{(1)}, \tag{1}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N).$$

Розв'язку $(x^{(1)}, w^{(1)})$ цієї задачі відповідає сідлова точка $(x^{(1)}, w^{(1)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$ функції Лагранжа

$$w + \sum_{K\in\Sigma^{(1)}} \lambda_K (\sum_{i\in K} x_i - v(K) - w) + \mu(\sum_{i\in N} x_i - v(N)) =$$
$$= (1 - \sum_{K\in\Sigma^{(1)}} \lambda_K) w + \sum_{i\in N} (\sum_{K\in\Sigma^{(1)}: i\in K} \lambda_K + \mu) x_i - \sum_{K\in\Sigma^{(1)}} \lambda_K v(K) - \mu v(N),$$

де двоїсті змінні $\lambda_K \geq 0$, $K \in \Sigma^{(1)}$, а змінна μ може приймати довільні значення.

Звідси випливає, що $\sum\limits_{K\in\Sigma^{(1)}} \lambda_K^{(1)} = 1$, а значить множина $\Xi^{(1)} = \left\{K \in \Sigma^{(1)} : \lambda_K^{(1)} > 0\right\}$ не порожня. Слід зазначити, що за умовами доповнюючої нежорсткості для задач лінійного програмування множина $\Xi^{(1)} = \{K \in \Sigma^{(1)} \big| \ \sum\limits_{i\in K} x_i^{(1)} - v(K) = w^{(1)}\}$.

Покладемо $\Sigma^{(2)} = \Sigma^{(1)} \setminus \Xi^{(1)} = \{K \in \Sigma^{(1)} \big| \ \sum\limits_{i\in K} x_i^{(1)} - v(K) > w^{(1)}\}$. Перейдемо на крок 2, якщо ранг системи рівнянь

$$e(x, K) = \sum_{i\in K} x_i - v(K) = w^{(1)},\ K \in \Xi_1, \tag{2}$$

менший за n (система має множину розв'язків). У протилежному випадку, коли існує єдиний розв'язок цієї системи рівнянь, то він буде N - ядром, тому припиняємо роботу алгоритму.

Крок t. Розв'яжемо задачу лінійного програмування:

$$w \to \max,$$
$$e(x,K) = \sum_{i\in K} x_i - v(K) \ge w,\ K \in \Sigma_t,$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N),$$
$$e(x,K) = \sum_{i\in K} x_i - v(K) \ge w^{(1)},\ K \in \Sigma_1, \tag{3}$$
$$\dots$$
$$e(x,K) = \sum_{i\in K} x_i - v(K) \ge w^{(t-1)},\ K \in \Sigma_{t-1}.$$

Розв'язку $(x^{(t)}, w^{(t)})$ цієї задачі відповідає сідлова точка $(x^{(t)}, w^{(t)}, \lambda^{(t)}, \mu^{(t)})$ функції Лагранжа

$$w + \sum_{K\in\Sigma^{(t)}} \lambda_K (\sum_{i\in K} x_i - v(K) - w) + \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{K\in\Xi^{(k)}} \lambda_K (\sum_{i\in K} x_i - v(K) - w_k) + \mu(\sum_{i\in N} x_i - v(N)) =$$
$$= (1 - \sum_{K\in\Sigma^{(t)}} \lambda_K) w + \sum_{i\in N} (\sum_{K\in\Sigma^{(t)}: i\in K} \lambda_K + \mu) x_i - \sum_{k=1}^{t-1} \sum_{K\in\Xi^{(t)}} \lambda_K w_k - \sum_{K\in\Sigma^{(t)}} \lambda_K v(K) - \mu v(N),$$

де двоїсті змінні $\lambda_K \ge 0$, $K \in \Sigma^{(1)}$, а змінна μ може приймати довільні значення.

Будуємо множину

$$\Xi^{(t)} = \{K \in \Sigma^{(t)} : \lambda_K^{(t)} > 0\} = \{K \in \Sigma^{(t)} \mid \sum_{i\in K} x_i^{(t)} - v(K) = w^{(t)}\}.$$

Покладемо $\Sigma^{(t+1)} = \Sigma^{(t)} \setminus \Xi^{(t)} = \{K \in \Sigma^{(t)} \mid \sum_{i\in K} x_i^{(t)} - v(K) > w^{(t)}\}$. Перейдемо на крок $(t+1)$, якщо ранг системи рівнянь

$$e(x,K) = \sum_{i\in K} x_i - v(K) = w^{(1)},\ K \in \Xi_1,$$
$$\dots$$
$$e(x,K) = \sum_{i\in K} x_i - v(K) = w^{(t)},\ K \in \Xi_t,$$

менший за n. Інакше припиняємо роботу алгоритму.

Оскільки кількість рівнянь в цій системі з кожним кроком зростає, то алгоритм зупиняється за скінченну множину кроків.

Єдиний розв'язок цієї системи рівнянь і буде N - ядром.

Процес пошуку N-ядра може бути уніфікований переходом до двоїстих задач. Задача 1 еквівалентна такої.

Задача 1*.

$$\sum_{K\in\Sigma_1} \lambda_K v(K) + \mu v(N) \to \max,$$

$$\sum_{K \ni i} \lambda_K + \mu = 0,\ K \in \Sigma_1,$$

$$\sum_{K\in\Sigma_1} \lambda_K = 1,$$

$$\lambda_K \geq 0,\ K \in \Sigma_1.$$

Поклавши $\delta_K = -\dfrac{\lambda_K}{\mu}$, $K \in \Sigma_1$, прийдемо до еквівалентної задачі

$$\frac{\sum_{K\in\Sigma_1} \delta_K v(K) - v(N)}{\sum_{K\in\Sigma_1} \delta_K} \to \max,$$

$$\sum_{K \ni i} \delta_K = 1,\ K \in \Sigma_1,$$

$$\delta_K \geq 0,\ K \in \Sigma_1.$$

Так як задачі еквівалентні, максимум в останній задачі досягається в одній з крайніх точок множини її допустимих розв’язків. Знаючи крайні точки множини збалансованих покриттів, цей максимум легко знайти.

Аналогічним чином модифікується і розв’язки задач $t = 2, \ldots$.

При малій кількості гравців множина збалансованих покриттів може бути описано явно, що дозволяє ефективно знаходити N-ядро.

Приклад. Знайти N - ядро у грі трьох осіб з характеристичною функцією: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0;$ $v(\{1,2\}) = 0,6;$ $v(\{1,3\}) = 0,7;$ $v(\{2,3\}) = 0,8$; $v(\{1,2,3\}) = 1$.

Розв’язання. Відповідно до алгоритму побудови N - ядра на першому кроці розв’яжемо задачу лінійного програмування (1):

$$w \to \max,$$

$$e(x,\{1,2\}) = x_1 + x_2 - 0,6 \geq w, \tag{4}$$

$$e(x,\{1,3\}) = x_1 + x_3 - 0,7 \geq w, \tag{5}$$

$$e(x,\{2,4\}) = x_2 + x_3 - 0,8 \geq w, \tag{6}$$

$$e(x,\{1\}) = x_1 \geq w,\ e(x,\{2\}) = x_2 \geq w,\ e(x,\{3\}) = x_3 \geq w, \tag{7}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{8}$$

Вектор $(x^{(1)}, w^{(1)}) = (7/30, 1/3, 13/30, -1/30)$ буде розв’язком цієї задачі.

Легко перевірити, що з обмежень (4) – (7) лише (4) – (6) будуть виконуватися як рівності. Тому множина

$$\Xi^{(1)} = \{K \in \Sigma^{(1)} \mid \sum_{i \in K} x_i^{(1)} - v(K) = w^{(1)}\} = \{\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}\}.$$

Нехай

$$\Sigma^{(2)} = \Sigma^{(1)} \setminus \Xi^{(1)} = \{K \in \Sigma^{(1)} \mid \sum_{i \in K} x_i^{(1)} - v(K) > w^{(1)}\} = \{\{1\},\ \{2\},\ \{3\}\}.$$

Зазначимо, що елементами $\Sigma^{(2)}$ будуть коаліції, які відповідають обмеженням (7), що виконуються як строгі нерівності.

Складемо систему рівнянь (2):

$$e(x,\{1,2\}) = x_1 + x_2 = 17/30,$$

$$e(x,\{1,3\}) = x_1 + x_3 = 20/30,$$

$$e(x,\{2,4\}) = x_2 + x_3 = 23/30.$$

Оскільки вектор $x^{(1)} = (7/30, 1/3, 13/30)$ є її єдиним розв’язком, то він і буде N - ядром гри.

Лекція 33. Вектор Шепли

Означення. Автоморфізмом гри $\langle N, v\rangle$ називається всяка перестановка π елементів множини *N*, яка задовольнить умові: $v(K) = v(p(K))$ для будь-якої коаліції *K*.

Означення. Носієм гри в характеристичній формі $\langle N, v\rangle$ називається така коаліція T, що $v(S) = v(S \bigcap T)$ для $\forall S \subset N$.

Означення. Вектором Шеплі називається відображення, яке кожній грі в формі характеристичної функції ставить у відповідність поділ $\Phi(v) = (\Phi^1(v), ..., \Phi^n(v))$, якщо воно задовольняє таким умовам:

1. $\sum_{i \in K} \Phi^i(v) = v(K)$ для будь-якого носія K (аксіома ефективності);
2. $\Phi^i(v) = \Phi^{\pi(i)}(v)$ для будь-якого автоморфізма π гри (аксіома симетрії);
3. $\Phi(v' + v'') = \Phi(v') + \Phi(v'')$ для будь-яких ігор $\langle N, v'\rangle$ і $\langle N, v''\rangle$ (аксіома агрегації).

Теорема. Замість аксіоми ефективності можна використовувати таку властивість

4. $\Phi^i(v) = v(i)$ для будь-якого бовдура *i* (аксіома бовдура).

Доведення. Нехай виконані аксіоми 1,2,3. Розглянемо довільного бовдура *i*. Множина $N \setminus \{i\}$ є носієм, тому $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} \Phi^j(v) = v(K)$. Так як гравець *i* є бовдуром, то $v(N \setminus \{i\}) + v(i) = v(N)$. А так як вектор $\Phi(v)$ є поділом в грі $\langle N, v\rangle$, то виконується умова $\sum_{j \in N} \Phi^j(v) = v(N)$. Порівнюючи три отриманих рівності, отримаємо $\Phi^i(v) = v(i)$, тобто виконується аксіома 4.

Назад, нехай виконуються аксіоми 2, 3 і 4. Розглянемо довільний носій *K*. Так як всі гравці, що не входять в *K* є бовдурами, то виконується умова $v(K) + \sum_{j \in N \setminus K} v(j) = v(N)$. За аксіомою бовдура $v(j) = \Phi^j(v)$ для $j \in N \setminus K$. А так як вектор $\Phi(v)$ є поділом в грі $\langle N, v\rangle$, то виконується умова $\sum_{j \in N} \Phi^j(v) = v(N)$. З цих трьох умов отримуємо рівність $\sum_{i \in K} \Phi^i(v) = v(K)$, що означає, що виконано твердження аксіоми 1.

Теорема. Можливе завдання вектора Шеплі двома властивостями:

5. $\pi(\Phi(v)) = \Phi(\pi(v))$ для будь-якої перестановки π множини *N* (аксіома анонімності);
6. якщо для будь-яких ігор $\langle N, v\rangle$ і $\langle N, w\rangle$ $v(K \bigcup \{i\}) - v(K) = w(K \bigcup \{i\}) - w(K)$ для всіх коаліцій *K*, що не містять гравця *i*, то $\Phi^i(v) = \Phi^i(w)$ (аксіома маргінальності).

Знаходження вектора Шеплі

Теорема. Єдина функція, яка задовольнить аксіомам Шеплі, задається формулами:

$$\Phi^i(v)=\sum_{K\subset N,\ i\in K}\frac{(|K|-1)!(n-|K|)!}{n!}(v(K)-v(K\setminus\{i\})),\ i=1,\ldots,n\ . \quad (1)$$

Доведення. Почнемо з аналізу аксіом.

Лема. Якщо j – бовдур, то з аксіом Шепли випливає, що $v(j)=\Phi^j(v)$.

Лема. Для будь-якого числа $\lambda>0$ і найпростішої гри $\langle N,v_R\rangle$ аксіомам Шеплі задовольняє тільки вектор

$$\Phi^i(v_R)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{|R|}, i\in R,\\ 0,\ i\notin R.\end{cases}$$

Доведення. Якщо коаліція R складається з одного гравця, твердження випливає з першої аксіоми.

Нехай i і k - будь-які два гравці з коаліції R. Розглянемо перестановку π, що міняє місцями гравців i і k, і залишає всіх інших гравців на місці. Безпосередньо перевіряється, що ця перестановка є автоморфизмом. Тоді за другою аксіомою $\Phi^i(v)=\Phi^k(v)$. Таким чином, всі компоненти вектора Φ, відповідні гравцям з коаліції R рівні. Але ця коаліція є носієм. Значить, за аксіомою 1, сума цих компонент дорівнює λ. Звідси випливає доведення першої частини твердження.

Друга частина випливає з попередньої леми і того факту, що всі гравці, що не входять до R є бовдурами.

Лема. Якщо різниця характеристичних функцій v і w є характеристичною функцією, то $\Phi(v-w)=\Phi(v)-\Phi(w)$.

Доведення. За аксіомою агрегації в такому разі $\Phi(v)=\Phi(v-w)+\Phi(w)$, звідси і випливає твердження леми.

Лема. $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}=\frac{(n-k)!(k-1)!}{n!}$.

Доведення. Скористуємося рівністю $\displaystyle\int_0^1 x^{i-1}dx=\frac{1}{i}$ і формулою бінома Ньютона, одержимо

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}=\sum_{i=k}^{n}\int_0^1 x^{i-1}dx(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}=\int_0^1\left(\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}x^{i-1}\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}C_{n-k}^{i-k}x^{i-k}\right)x^{k-1}dx=\int_0^1\left(\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^{j}C_{n-k}^{j}x^{j}\right)x^{k-1}dx=\int_0^1(1-x)^{n-k}x^{k-1}dx.$$

Залишилося обчислити інтеграл в правій частині рівності, очевидно,

$\int_0^1 (1-x)^{n-1}dx = \frac{1}{n}$. Інтегруючи по частинах, отримаємо

$$\int_0^1 (1-x)^{n-k} x^{k-1}dx = \frac{n-k}{k}\int_0^1 (1-x)^{n-k-1} x^k dx.$$

Звідси по індукції отримуємо

$$\int_0^1 (1-x)^{n-k} x^{k-1}dx = \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!},$$

що доводить лему.

Лема. Існує не більше однієї функції, що задовольняє аксіомам Шеплі.

Доведення. Розкладемо функцію v по базису з найпростіших функцій і скористаємося доведеною вище «адитивністю» вектора Шеплі по відношенню до зважених сум найпростіших функцій. Отримаємо

$$\Phi^i(v) = \Phi^i\left(\sum_{R\ni\{i\}}\left(\sum_{K\subset R}(-1)^{\#R-\#K}v(K)\right)v_R\right) = \sum_{R\ni\{i\}}\left(\sum_{K\subset R}(-1)^{|R|-|K|}v(K)\right)\Phi^i(v_R) =$$

$$= \sum_{R\ni\{i\}}\left(\sum_{K\subset R}(-1)^{|R|-|K|}v(K)\right)\frac{1}{|R|} = \sum_{K}\left(\sum_{R\supset K\cup\{i\}}(-1)^{|R|-|K|}\frac{1}{|R|}\right)v(K).$$

Перетворимо цей вираз

$$\sum_{K}\left(\sum_{R\supset K\cup\{i\}}(-1)^{\#R-\#K}\frac{1}{\#R}\right)v(K) =$$

$$= \sum_{K:\{i\}\in K}\left(\sum_{R\supset K\cup\{i\}}(-1)^{\#R-\#K}\frac{1}{\#R}\right)v(K) + \sum_{K:\{i\}\notin K}\left(\sum_{R\supset K\cup\{i\}}(-1)^{\#R-\#K}\frac{1}{\#R}\right)v(K) =$$

$$= \sum_{K:\{i\}\in K}\left(\sum_{R\supset K}(-1)^{\#R-\#K}\frac{1}{\#R}\right)v(K) + \sum_{K:\{i\}\in K}\left(\sum_{R\supset K}(-1)^{\#R-\#K+1}\frac{1}{\#R}\right)v(K\setminus\{i\}) =$$

$$= \sum_{K:\{i\}\in K}\left(\sum_{R\supset K}(-1)^{\#R-\#K}\frac{1}{\#R}\right)(v(K)-v(K\setminus\{i\})) =$$

$$= \sum_{K:\{i\}\in K}\left(\sum_{r=\#K}^{\#N}\sum_{R\supset K,\#R=r}(-1)^{\#R-\#K}\frac{1}{\#R}\right)(v(K)-v(K\setminus\{i\})).$$

Число коаліцій R, що містять коаліцію K і мають r членів дорівнює $C_{|N|-|K|}^{r-|K|}$. Залишається скористатися результатом попередньої леми.

Тепер перевіримо, що функція, яка задана формулами (1), задовольняє всім аксіомам Шеплі.

Лема. Формула (1) визначає поділ.

Доведення. Доведемо індивідуальну раціональність. В силу супераддитивності

$$\Phi^i(v) = \sum_{i \in K \subset N} \frac{(|N| - |K|)!(|K| - 1)!}{|N|!} (v(K) - v(K \setminus i)) \geq$$

$$\geq \sum_{i \in K \subset N} \frac{(|N| - |K|)!(|K| - 1)!}{|N|!} v(i) = v(i) \sum_{i \in K \subset N} \frac{(|N| - |K|)!(|K| - 1)!}{|N|!} =$$

$$= v(i) \sum_{k=1}^{|N|} \sum_{i \in K, |K| = k} \frac{(|N| - k)!(k-1)!}{|N|!}.$$

Внутрішя сума містить $C_{|N|-1}^{k-1}$ однакових доданків, тому

$$\Phi^i(v) \geq v(i) \sum_{k=1}^{|N|} C_{|N|-1}^{k-1} \frac{(|N| - k)!(k-1)!}{|N|!} =$$

$$= v(i) \sum_{k=1}^{|N|} \frac{|N| - 1}{(k-1)!(|N| - k)!} \frac{(|N| - k)!(k-1)!}{|N|!} = v(i) \sum_{k=1}^{|N|} \frac{1}{|N|} = v(i).$$

Доведемо колективну раціональність. Для цього обчислимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi^i(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \in K \subset N} \frac{(|N| - |K|)!(|K| - 1)!}{|N|!} (v(K) - v(K \setminus i)).$$

Визначимо коефіцієнт при $v(K)$ в цій сумі. Якщо $K \neq N$, то $v(K)$ входить в цю суму $|K|$ раз із знаком плюс, і $|N| - |K|$ раз із знаком мінус. Отже, шуканий коефіцієнт дорівнює

$$|K| \frac{(|N| - |K|)!(|K| - 1)!}{|N|!} - (|N| - |K|) \frac{(|N| - |K| - 1)!|K|!}{|N|!} = 0$$

Член $v(N)$ входить в суму тільки із знаком плюс, причому $|N|$ раз. Отже, коефіцієнт при ньому дорівнює

$$|N| \frac{(|N| - |N|)!(|N| - 1)!}{|N|!} = |N| \frac{0!(|N| - 1)!}{|N|!} = 1.$$

Отже, шукана сума дорівнює $v(N)$, що і доводить лему.

Лема. Формула (1) визначає вектор Шеплі.

Доведення. Перевіримо виконання аксіоми ефективності. Якщо гравець i є бовдуром, то

$$\Phi^i(v) = \sum_{i \in K \subset N} \frac{(|N| - |K|)!(|K| - 1)!}{|N|!} (v(K) - v(K \setminus i)) = \sum_{i \in K \subset N} \frac{(|N| - |K|)!(|K| - 1)!}{|N|!} v(i).$$

Як встановлено при доведенні попередньої леми, сума в правій частині цієї рівності дорівнює $v(i)$. Таким чином $\Phi^i(v) = v(i)$, для будь-якого бовдура i. Тому, якщо K - носій гри, то $\sum_{i \in N \setminus K} \Phi^i(v) = \sum_{i \in N \setminus K} v(i)$ і $v(K) + \sum_{i \in N \setminus K} v(i) = v(N)$. А в силу попередньої леми $\sum_{i \in N} \Phi^i(v) = v(N)$. З цих трьох умов випливає рівність

$$\sum_{i\in K}\Phi^i(v)=v(K).$$

Доведемо справедливість твердження аксіоми симетрії. Нехай π - довільний автоморфизм. Маємо

$$\Phi^{\pi(i)}(v)=\sum_{K:\pi(i)\in K}\frac{(|N|-|K|)!(|K|-1)!}{|N|!}(v(K)-v(K\setminus\pi(i)))=$$

$$=\sum_{K:\pi(i)\in\pi(K)}\frac{(|N|-|\pi(K)|)!(|\pi(K)|-1)!}{|N|!}(v(\pi(K))-v(\pi(K)\setminus\pi(i))),$$

так як разом з K коаліції $\pi(K)$ весь клас підмножини множини N. Далі

$$\Phi^{\pi(i)}(v)=\sum_{K:\pi(i)\in\pi(K)}\frac{(|N|-|\pi(K)|)!(|\pi(K)|-1)!}{|N|!}(v(\pi(K))-v(\pi(K)\setminus\pi(i)))=$$

$$\sum_{K:\pi(i)\in\pi(K)}\frac{(|N|-|\pi(K)|)!(|\pi(K)|-1)!}{|N|!}(v(\pi(K))-v(\pi(K\setminus i)))=$$

$$=\sum_{K:\pi(i)\in\pi(K)}\frac{(|N|-|K|)!(|K|-1)!}{|N|!}(v(K)-v(K\setminus i))$$

(остання рівність є вірною в силу визначення автоморфізму). Але тоді

$$\Phi^{\pi(i)}(v)=\sum_{K:\pi(i)\in\pi(K)}\frac{(|N|-|K|)!(|K|-1)!}{|N|!}(v(K)-v(K\setminus i))=$$

$$=\sum_{K:i\in K}\frac{(|N|-|K|)!(|K|-1)!}{|N|!}(v(K)-v(K\setminus i))=\Phi^i(v).$$

Аксіома 3 є справедливою, так як функція Ф за означенням є лінійною.

Лему, а з нею і теорему доведено.

Приклад знаходження вектора Шеплі. Нехай троє споживачів повинні побудувати сховища спецпродукції, при порушенні правил зберігання якої може виникнути небезпечна ситуація. Витрати на будівництво залежать від об'єму сховищ. Для спорудження сховищ споживачі можуть організовувати коаліції. Витрати на будівництво сховищ задані такою зростаючою функцією, що характеристична функція приймає значення: $v(\{1\})=2;$ $v(\{2\})=3;$ $v(\{3\})=0;$ $v(\{1,2\})=8;$ $v(\{2,3\})=6{,}5;$ $v(\{1,3\})=5;$ $v(\{1,2,3\})=10$. Знайти вектор Шеплі.

Розв'язання. Скористуємося теоремою. Формула вектор Шеплі для $n=3$ прийме такий вигляд:

$$y_1=\tfrac{1}{3}v(N)+\tfrac{1}{6}(v(1,2)+v(1,3)-2v(2,3))+\tfrac{1}{6}(2v(1)-v(2)-v(3))=$$

$$=10/3+(8+5-2*6{,}5)/6+(2*2-3-0)/6=10/3+0+1/6=7/2;$$

$$y_2 = \tfrac{1}{3} v(N) + \tfrac{1}{6}(v(1,2) + v(2,3) - 2v(1,3)) + \tfrac{1}{6}(2v(2) - v(1) - v(3)) =$$
$$= 10/3 + (8 + 6{,}5 - 2*5)/6 + (2*3 - 2 - 0)/6 = 10/3 + 3/4 + 2/3 = 57/12;$$
$$y_3 = \tfrac{1}{3} v(N) + \tfrac{1}{6}(v(2,3) + v(1,3) - 2v(1,2)) + \tfrac{1}{6}(2v(3) - v(2) - v(1)) =$$
$$= 10/3 + (6{,}5 + 5 - 2*8)/6 + (2*0 - 3 - 2)/6 = 10/3 + 3/4 - 5/6 = 39/12.$$

Таким чином, $y^* = (7/2; 57/12; 39/12)$. Оскільки вектор Шеплі в даному прикладі характеризує витрати на будівництво сховищ, то з порівняння внесків видно, що споживачам вигідніше об'єднатися в коаліцію $S = \{1, 2, 3\}$ і будувати одне сховище.

Лекція 34. Альтернативні означення вектора Шеплі

Конструктивне означення.

Якщо коаліція *K* вже сформувалася, то цінність гравця *i*, який не входить до неї, з точки зору цієї коаліції дорівнює $v(K)-v(K\setminus i)$. Тому розумною платою за приєднання гравця *i* до коаліції *K* є саме ця величина.

Теорема. Якщо гравці приєднуються до гри у випадковому порядку, причому всі порядки рівноймовірні, то математичне сподівання виграшу *i*-го гравця визначається відповідною компонентою вектора Шеплі.

Доведення. Усього є $n!$ рівноймовірних результатів. Число випадків, коли гравці, що входять до коаліції *K*, приєднаються до гри раніше гравця *i*, дорівнює $|K|!(|N|-|K|-1)!$, тому ймовірність того, що гравець *i* отримає виграш $v(K\bigcup\{i\})-v(K)$, дорівнює $\dfrac{|K|!(|N|-|K|-1)!}{|N|!}$. Залишається скористатися означенням математичного сподівання і зробити заміну змінної підсумовування.

Теорему доведено.

Варіаційне означення

Теорема. Значення вектора Шеплі для гри $\langle N,v\rangle$ є точкою мінімуму функції $\sum\limits_{K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!\left(v(K)-\sum\limits_{i\in K}x^i\right)^2$ на множині векторів *x*, що задовольняють умові $\sum\limits_{i\in N}x^i=v(N)$.

Доведення. Очевидно, що розв’язок даної оптимізаційної задачі існує і він єдиний. Будемо вирішувати її стандартним методом пошуку умовного екстремуму. Диференціюючи функцію Лагранжа

$$\sum_{K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!\left(v(K)-\sum_{i\in K}x^i\right)^2+2\lambda\left(v(N)-\sum_{i=1}^{n}x^i\right),$$

одержимо систему рівнянь

$$\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!\left(v(K)-\sum_{i\in K}x^i\right)=\lambda\,,\ i\in N,$$

або

$$\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!\sum_{i\in K}x^i=\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)-\lambda\,.$$

Гравець *i* входить в C_{n-1}^{k-1} коаліцій, що містять гравця *i* та мають *k* членів, а гравець $j\neq i$ входить в C_{n-2}^{k-2} коаліцій, що містять гравця *i* та мають *k* членів. Тому рівняння перетвориться до виду

$$\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!(n-k-1)!C_{n-1}^{k-1}x^i+\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)!(n-k-1)!C_{n-2}^{k-2}\sum_{j\neq i}x^j=$$

$$=\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)-\lambda.$$

Після спрощень получимо

$$(n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}x^i+(n-2)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{n-k}\sum_{j\neq i}x^j=\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)-\lambda,$$

або

$$(n-1)!x^i+(n-2)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{n-k}\sum_{j=1}^{n}x^j=\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1))!v(K)-\lambda.$$

З урахуванням умови задачі отримаємо

$$(n-1)!x^i+(n-2)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{n-k}v(N)=\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)-\lambda. \qquad (1)$$

Підсумуємо всі ці рівняння

$$(n-1)!\sum_{j=1}^{n}x^j+n(n-2)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{n-k}v(N)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)-n\lambda,$$

розділимо на n і врахуємо умову задачі

$$\frac{(n-1)!}{n}v(N)+(n-2)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{n-k}v(N)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)-\lambda.$$

Віднімаючи з рівняння (1), отримаємо

$$(n-1)!x^i=\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1))!v(K)-$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{j\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)+\frac{(n-1)!}{n}v(N).$$

Перетворимо праву частину

$$(n-1)!x^i=\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)-$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{K\subset N}\sum_{j\in K}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)+\frac{(n-1)!}{n}v(N)=$$

$$=\sum_{i\in K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)-\frac{1}{n}\sum_{i\in K\subset N}\sum_{j\in K}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)+$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{i\notin K\subset N}\sum_{j\in K}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)+\frac{(n-1)!}{n}v(N).$$

В суму $\sum_{i\in K\subset N}\sum_{j\in K}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)$ член з $v(K)$ входить $|K|$ раз, а в суму $\sum_{i\notin K\subset N}\sum_{j\in K}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!v(K)$ доданок $v(K\setminus\{i\})$ входить $|N|-|K|$ раз. Окрім того, кожній коаліції K, що містить i відповідає коаліція $K\setminus\{i\}$, що не містить i. Тому

$$(n-1)!x^i=\frac{1}{n}\sum_{i\in K\subseteq N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!\big(v(K)-v(K\setminus\{i\})\big).$$

Звідси і маємо твердження теореми.

Вектор Шеплі і С-ядро

Лема. У 0-1-скороченій грі трьох осіб вектор Шеплі належить ядру тоді й лише тоді, коли виконуються нерівності

$$4v(\{1,2\})+v(\{1,3\}+v(\{2,3\}))\le 4,\ 4v(\{1,3\})+v(\{1,2\}+v(\{2,3\}))\le 4,$$
$$4v(\{2,3\})+v(\{1,2\}+v(\{1,3\}))\le 4.$$

Доведення. Згідно до отриманої формули в даному випадку вектор Шеплі має компоненти

$$\Phi^1(v)=\frac{v(\{1,2,3\})}{3}+\frac{v(\{1,2\})+v(\{1,3\})-2v(\{2,3\})}{6}+\frac{2v(1)-v(2)-v(3)}{6}=$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{v(\{1,2\})+v(\{1,3\})-2v(\{2,3\})}{6},$$
$$\Phi^2(v)==\frac{1}{3}+\frac{v(\{1,2\})+v(\{2,3\})-2v(\{1,3\})}{6},$$
$$\Phi^2(v)==\frac{1}{3}+\frac{v(\{1,2\})+v(\{2,3\})-2v(\{1,2\})}{6}.$$

За теоремою про характеризацію ядра цей вектор надлежит *C*-ядру, тоді й лише тоді, коли виконуються нерівності

$$\Phi^1(v)+\Phi^2(v)\ge v(\{1,2\}),\ \Phi^1(v)+\Phi^3(v)\ge v(\{1,3\}),\ \Phi^2(v)+\Phi^3(v)\ge v(\{2,3\}),$$

Звідки і випливає твердження теореми.

Приклад. Витрати на створення системи водопостачання в трьох районах описуються характеристичної функцією

$$v(\{1\})=-120, v(\{2\})=-140, v(\{3\})=-120, v(\{1,2\})=-170, v(\{1,3\})=-160,$$
$$v(\{2,3\})=-190, v(\{1,2,3\})=-255.$$

Вектор Шеплі в цій грі $\left(-73\frac{1}{3},-98\frac{1}{3},-83\frac{1}{3}\right)$ не належить *C*-ядру, так як наприклад, $-73\frac{1}{3}-98\frac{1}{3}<-170$. Однак *C*-ядро в цій грі не порожне. Йому надлежить, наприклад, точка $\left(-68\frac{1}{3},-98\frac{1}{3},-88\frac{1}{3}\right)$.

Взагалі кажучи, вектор Шеплі лежить поза ядром.

Опуклі ігри

У цьому розділі розглядаємо тільки опуклі гри.

Теорема. Нехай π - довільна перестановка множини *N*. Тоді вектор x_π, який визначається умовами

$$x_\pi^1 = v(\pi(1)),\ x_\pi^i = v(\{\pi(1),...,\pi(i)\}) - v(\{\pi(1),...,\pi(i-1)\}),\ i = 2,\ldots,n$$

є вершиною С-ядра, і інших вершин немає.

Доведення. Без обмеження загальності, можна вважати, що перестановка є тотожньою. Належність відповідного поділу С-ядру доведена в лекції, присвяченій С-ядру.

Розглянутий вектор лежить на границі множини, що задається нерівностями

$$x^1 \geq v(\{1\}),\ x^1 + x^2 \geq v\left(\{1,2\}\right),\ldots,x^1 + \ldots + x^n \geq v(\{1,\ldots n\})\ x^1 \geq v(\{1\}).$$

Вектори нормалі гіперплощин границь цiє множини лінійно незалежні, тому будь-який вектор y може бути представлений як їхня лінійна комбінація. Якщо вектор ненульовий, то, по при наймні, один коефіцієнт в цьому розкладі буде ненульовим. Якщо він негативний, то рух в напрямку вектора y призведе до порушення відповідної нерівності. А якщо він позитивний, то рух в напрямку вектора -y призведе до порушення тієї ж нерівності. В будь-якому з цих випадків точка вийде за межі ядра. Отже, точка x є граничною.

Нехай тепер x - вершина С-ядра. Розглянемо множину

$$\kappa(x) = \left\{K \subseteq N : \sum_{i \in K} x^i = v(K)\right\}.$$

Множина $\kappa(x)$ є замкненою щодо операцій об'єднання і перетину. Справді, нехай K і I - коаліції з цього сімейства. Тоді

$$v(K \bigcup I) \leq \sum_{i \in K \bigcup I} x^i = \sum_{i \in K} x^i + \sum_{i \in I} x^i - \sum_{i \in K \bigcap I} x^i =$$

$$= v(K) + v(I) - \sum_{i \in K \bigcap I} x^i \leq v(K) + v(I) - v(K \bigcap I) \leq v(K \bigcup I)$$

(перша і друга нерівності випливають з того, що x належить С-ядру, а остання - з того, що гра є опуклою). Значить, насправді $v(K \bigcup I) = \sum_{i \in K \bigcup I} x^i$.

Аналогічно розглядається і випадок з перетином.

Нехай $\varnothing = K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_m = N$ - найбільший по довжині ланцюжок коаліцій, що належать $\kappa(x)$. Припустимо, що, при наймні, два елементи i та j належать $K_{k+1} \setminus K_k$.Так як x є вершиною С-ядра, вона є єдиним розв’язком системи рівнянь

$$\sum_{i \in K} x^i = v(K),\ K \in \kappa(x).$$

Тому існує $K \in \kappa(x)$ така, що $i \in K$, але $j \notin K$ (або навпаки). Тоді $S = (K \bigcup K_k) \bigcap K_{k+1}$ належить $\kappa(x)$ з огляду на замкнутістт щодо об'єднання і перетину і $K_k \subset S \subset K_{k+1}$, що суперечить вибору ланцюжка. Отже, довжина ланцюжка дорівнює n і вектор x має шуканий вид.

Теорема. Для опуклих ігор вектор Шеплі належить С-ядру.

Доведення. В силу формули (1) вектор Шеплі є лінійної комбінацією точок x_π. Оскільки С-ядро є опуклим, вектор Шеплі належить йому.

Означення. Гра $\langle N,v \rangle$ називається строго опуклою, якщо вона опукла і для будь-яких двох коаліцій $K \neq I$ виконується нерівність

$$v(I)+v(K)<v(I \bigcup K)+v(I \bigcap K).$$

Теорема. Якщо гра строго є опуклою, то всі вектори x_π є різними.

Доведення. Якщо I і K належать $\kappa(x)$, то або $K \subseteq I$, або $I \subseteq K$. Дійсно, в протилежному випадку

$$v(I)+v(K)=\sum_{i\in I} x^i+\sum_{i\in K} x^i=\sum_{i\in I\bigcup K} x^i+\sum_{i\in I\bigcap K} x^i=v(I \bigcup K)+v(I \bigcap K),$$

що суперечить строгій опуклості.

Тому відповідність між вершинами x і множинами $\kappa(x)$ є взаємно однозначною, а ці множини утворюють всі ланцюжки довжини n.

Наслідок. Для строго опуклих ігор значення вектора Шеплі є центром ваги вершин С-ядра.

Список літератури

1. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень – навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2- ге вид., перероб. та допов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010.
2. Мащенко С. О. Збірник задач з теорії прийняття рішень: навч. посіб. – К.: «Видавництво Людмила», 2018.
3. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели : монография. – М. : Мир, 1991.
4. Васин А.А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики : учеб. пособие. – М. : МАКС Пресс, 2005.