Лекція 8

Багатовимірні закони розподілу

Нехай на дискретному ймовірносному просторі (Ω, U, P) задано n випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$. Їх можна розглядати, як одну n-вимірну випадкову величину $\xi'(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_n(\omega))$. ***n-вимірним законом розподілу*** випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ (або законом розподілу векторної випадкової величини $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$) будемо називати ймовірність

$$P\{\xi \in B\} = P\{(\xi_1, ..., \xi_n) \in B\},$$

яка розглядається як функція числової множини $B \subset R^n$.

Цей закон можна задавати ймовірностями

$P\{\xi_1 = x_{1j_1}, \xi_2 = x_{2j_2}, ..., \xi_n = x_{nj_n}\} = p_{j_1 j_2 \dots j_n}$, де $p_{j_1 j_2 \dots j_n} \geq 0, \quad \sum_{j_1, j_2, ..., j_n} p_{j_1 j_2 \dots j_n} = 1$, а

$x_{1j_1}, x_{2j_2}, x_{nj_n}$ - значення, які приймають випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$.

За n-вимірним законом розподілу випадкових величин $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ можна визначити закон розподілу кожної ξ_i, який називається ***одновимірним законом розподілу***:

$$P(\xi_i = x_{ij_i}) = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_{i-1}, \\ j_{i+1}, \dots, j_n}} p_{j_1 \dots j_{i-1} j_i j_{i+1} \dots j_n} .$$

Якщо задано закон розподілу, то можна побудувати вибірковий ймовірносний простір і визначити на ньому функції $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ таким чином, щоб їх закон розподілу співпадав з початковим.

Дійсно, нехай X_1 - множина значень ξ_1,..., X_n - множина значень ξ_n. Тоді за простір елементарних подій Ω візьмемо

$$\Omega = \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times ... \times \mathrm{X}_n = \{x' = (x_{1j_1}, ..., x_{nj_n}) : x_{1j_1} \in \mathrm{X}_1, ..., x_{nj_n} \in \mathrm{X}_n\}.$$

Множина X – зліченна. σ-алгебра U підмножин X нехай буде множиною усіх підмножин: $U = 2^X$. Ймовірність P задамо значеннями на одноелементних множинах $\{x\}$ співвідношенням

$$P(\{x\}) \overset{def}{=} p_{j_1 j_2 \dots j_n}.$$

Побудований ймовірносний простір $(X, 2^X, P)$ називається ***вибірковим ймовірносним простором***.

Визначимо на ньому випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ співвідношеннями

$$\xi_i(x) = x_{ij_i}, \quad \text{де} \quad x' = (x_{1j_1}, ..., x_{nj_n}).$$

Очевидно, що n-вимірний розподіл $\xi_1(x), ..., \xi_n(x)$ співпадає з початковим.

Відзначимо, що одновимірні закони розподілу однозначно визначаються за багатовимірним. Зворотне твердження в загальному випадку невірне. Воно буде справедливим в одному частковому випадку, який ми зараз розглянемо.

Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ називаються ***незалежними***, якщо для довільних $x_{1j_1}, ..., x_{nj_n}$

$$P(\xi_1 = x_{1j_1}, ..., \xi_n = x_{nj_n}) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_{ij_i}). \tag{1}$$

Можна дати інше визначення незалежності. Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні, якщо для довільних числових множин $B_1, B_2, ..., B_n$

$$P\{\xi_1 \in B_1, ..., \xi_n \in B_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \in B_i\}. \tag{2}$$

Лема 1. Визначення незалежності (1) і (2) еквівалентні.

Доведення. Те, що з (2) випливає (1) очевидно. Достатньо покласти $B_i = \{x_{ij_i}\}, \quad i = 1, 2, ..., n$. Таким чином залишилось перевірити, що з (1) випливає (2). Для скорочення запису зробимо це у випадку n=2.

$$P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2) = P(\bigcup_{\substack{x_1 \in B_1 \\ x_2 \in B_2}} \{\omega : \xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2\}) = \sum_{\substack{x_1 \in B_1 \\ x_2 \in B_2}} P(\xi = x_1, \xi_2 \in x_2) =$$

$$= \sum_{\substack{x_1 \in B_1 \\ x_2 \in B_2}} P(\xi_1 = x_1) P(\xi_2 = x_2) = \left[\sum_{x_1 \in B_1} P(\xi_1 = x_1) \right] \left[\sum_{x_2 \in B_2} P(\xi_2 = x_2) \right] = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2).$$

Наведена низка рівностей завершує доведення.

Випадкові величини послідовності $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, які задані на одному ймовірносному просторі, будемо називати ***незалежними,*** якщо незалежний будь-який скінченний набір випадкових величин цієї послідовності.

У подальшому часто буде використовуватись наступний результат.

Т е о р е м а 2. Нехай ξ і η - незалежні дискретні випадкові величини, а f і g - довільні дійсні функції. Тоді $f(\xi)$ і $g(\eta)$ незалежні випадкові величини.

Доведення. Слід показати, що $P\{f(\xi)=u,\, g(\eta)=v\} = P\{f(\xi)=u\}P\{g(\eta)=v\}$ для довільних чисел u і v. Нехай у (3.5) $B_1 = f^{-1}(u) = \{x : f(x)=u\},\, B_2 = g^{-1}(v) = \{x : g(x)=v\}$. Тоді

$$P\{f(\xi)=u,\, g(\eta)=v\} = P\{\xi \in f^{-1}(u), \eta \in g^{-1}(v)\} =$$

$$= P\{\xi \in f^{-1}(u)\}P\{\eta \in g^{-1}(v)\} = P\{f(\xi)=u\}P\{g(\eta)=v\}.$$

Теорему доведено.