Семінар I

Основний принцип комбінаторики (правило множення). Нехай треба послідовно виконати k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу — n_2 способами, потім третю — n_3 способами і т. д. до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дії разом можуть бути виконані

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

способами.

Комбінації (сполуки) з n елементів по k. Нехай є множина A, що містить n елементів. Тоді число підмножин множини A, що містить k елементів, дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!},$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Комбінаціями з n елементів $\{a_1, \ldots, a_n\}$ по k називаються k-елементні підмножини множини $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Упорядковані множини. *Множина в n елементів називається впорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність певне число (номер елемента) від 1 до n так, що різним елементам відповідають різні числа.* Упорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами або їх порядком.

Перестановки даної множини. *Різні впорядковані множини, які, відрізняються тільки порядком елементів (тобто можуть бути утворені в тієї самої множини), називаються перестановками цієї множини.* Число перестановок множини з n елементів дорівнює

$$P_n = n!$$

Розміщення з n по k. *Упорядковані k-елементні підмножини множини, що містить n елементів, називаються розміщенням з n по k.* Число розміщень з n по k дорівнює

$$A_n^k = k!\, C_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1).$$

Число способів розбиття множини з n елементів на m груп. Нехай $k_1, k_2, \dots, k_m$ — цілі невід'ємні числа, причому $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Число способів, якими можна подати множину A з n елементів у вигляді суми m множин $B_1, \dots, B_m$, що містять відповідно $k_1, \dots, k_m$ елементів, дорівнює

$$C_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_m!}.$$

Перестановки з повтореннями Число різних перестановок, які можна утворити з n елементів, серед яких є k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, ..., k_m елементів m-го типу, дорівнює

$$C_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_m!}.$$

2. На вершину гори веде 7 доріг. Скількома способами турист може піднятись на гору і спуститися з неї? Дати відповідь на те саме запитання, якщо підняття і спуск відбуваються різними шляхами.

3. У розиграшу першості країни з футбола бере участь 17 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова медалі?

4. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4?

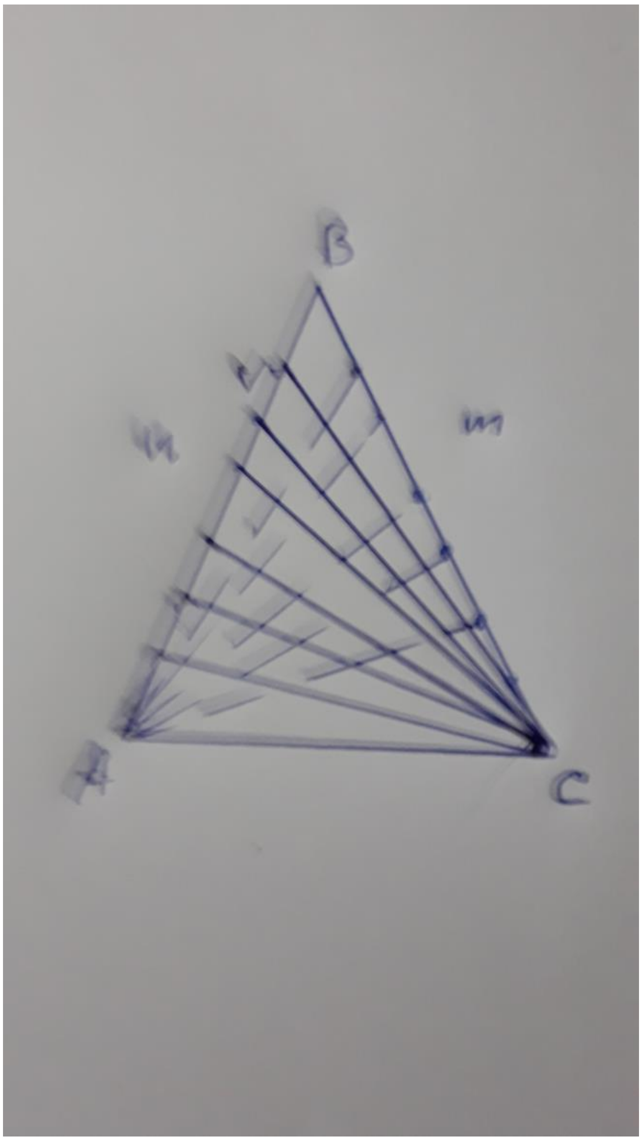
5. Скільки тризначних чисел можна записати цифрами 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожну з цих цифр використовувати не більше одного разу?

6. Скількома способами 7 осіб можуть стати в чергу до каси?

7. У класі вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

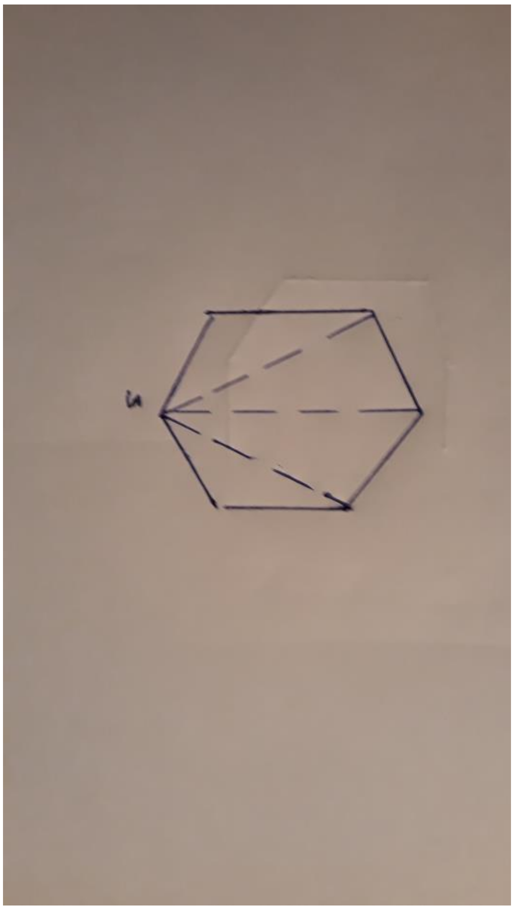
8. Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5?

9. На одній із бічних сторін трикутника взято n точок, на другій — m точок. Кожну вершину при основі трикутника сполучено прямими з точками, взятими на протилежній бічній стороні. На скільки частин поділиться трикутник проведеними прямими?



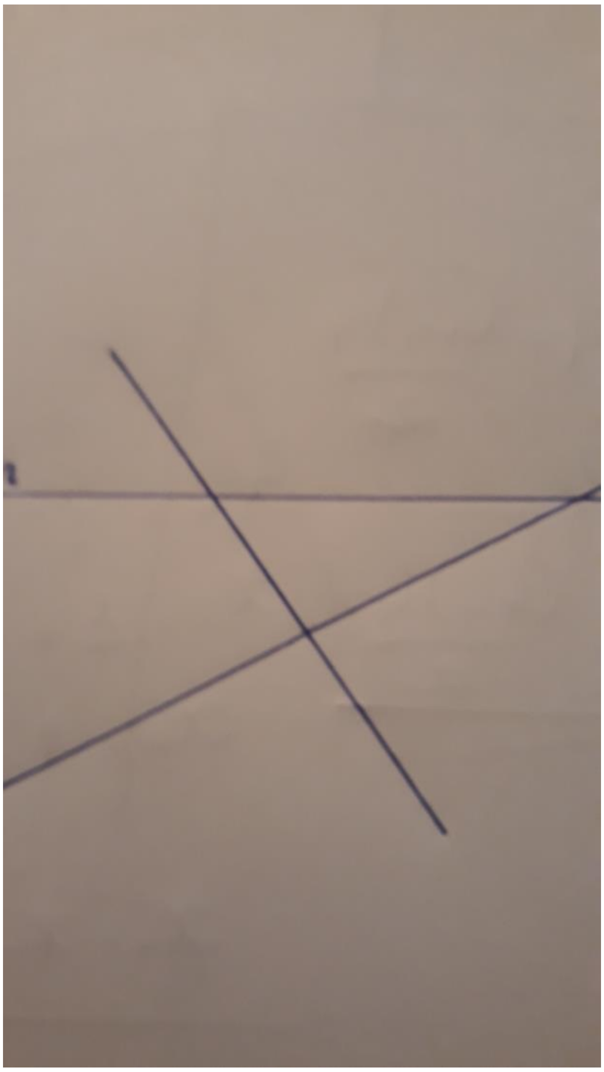
$(n+1)(m+1)$

11. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?



$$\frac{n(n-3)}{2}$$

12. На площині проведено n прямих ліній, причому жодні дві з них не є паралельними і жодні три не перетинаються в одній точці. Скільки точок перетину утвориться при цьому?



13. На яке найбільше число частин можуть поділити площину n прямих?

$x_n = x_{n-1} + n$

$x_1 = x_0 + 1$ $\qquad$ $x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

14. На яке найбільше число частин можуть поділити простір n площин?