Семінар 9

Властивості дискретної випадкової величини

Завдання 1. Двоє підкидають монету n раз. Знайти ймовірність того, що в них випаде однакова кількість гербів.

$$P(\xi = k) = C_n^k {\frac{1}{2}}^{k} {\frac{1}{2}}^{n-k} = C_n^k {\frac{1}{2}}^{n}, \quad P(\eta = k) = C_n^k {\frac{1}{2}}^{n}.$$

Отже, $\sum_{k=0}^{n} P(\xi = k) P(\eta = k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k {\frac{1}{2}}^{n} C_n^k {\frac{1}{2}}^{n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$

Завдання 2. Монету підкидають до першої появи герба. Нехай ξ є випадковою величиною, яка описує число випробувань до першої появи герба. Знайти $M\xi$, $D\xi$.

Розв'язок.

$$P(\xi = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(k(k-1) + k\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + 1$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 2$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 3 - 1 = 2$$

Завдання 3. Нехай ξ має розподіл Пуассона з параметром λ. Знайти $M\frac{1}{1+\xi}$

Розв'язок.

$$M\frac{1}{1+\xi}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=e^{-\lambda}\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}-1\right)=e^{-\lambda}\frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)=\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)$$

Завдання 4. Незай ξ має розподіл $P(\xi=k)=\frac{1}{k(k+1)}$, $k=1,2,\ldots$ Знайти $M\xi$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}P(\xi=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1$$

$$M\xi=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty$$

Завдання для самостійного розгляду

1) Монета підкидається до появи другого герба. Знайти математичне сподівання числа випробувань до другої появи герба.
2) Монета пілкидається до появи двох гербів поспіль. Знайти математичне сподівання числа випробувань.