Алгоритм визначення стабільності для лінійних стаціонарних систем

1. Неперервні системи

Нехай ми маємо справу з лінійною стаціонарною системою (З константними коефіцієнтами):

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t), x\in X=R^k (1)$$

Для даної початкової умови $x(0)=x_0$ можна знайти конкретний розв'язок рівняння (1):

$$x(t)=e^{(At)}x_0$$

Система (1) буде стабільною тоді і лише тоді, коли дійсні частини всіх власних значень матриці A менші нуля. Власні числа визначаються як корені рівняння:

$$det(A-sI)=s^k+a_{k-1}s^{(k-1)}+...+a_1 s+a_0=0.(2)$$

Для встановлення стабільності необов'язково розв'язувати це рівння, а можна застосувати критерій Гурвіца. Розглянемо наступний визначник:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{k-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k-5} & a_{k-4} & a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Для того, щоб система була стійка, необхідно і достатньо, щоб усі діагональні мінори визначника Гурвіца буди додатні.

Аналіз стабільності може базуватись на коефіцієнтах пропускання. Для одновимірної замкнутої системи керування:

$$E(s)=\frac{(Y^*(s))}{(1+K(s))}, K(s)=K_R(s)K_O(s)$$

де функція K(s) — коефіцієнт пропускання системи керування з розімкненим контуром. Для y * (t) = y * ·1 (t) форма ε (t) визначається характеристичними коренями замкнутої системи, тобто коренями характеристичного рівняння

$L(s)+M(s)=0$, де L(s) і M(s) позначають поліноми в чисельнику і знаменнику коефіцієнта пропускання K(s) відповідно.

2. Дискретні системи

Умови стабільності дискретних лінійних систем аналогічні умовам неперервних систем. Розв'язок рівняння

$$x_{n+1}=Ax_n.(3)$$

має вигляд $x_n=A^n*x_0$.

Система (2) стабільна тоді і лише тоді, коли усі модулі коренів рівняння

$$det(A-zI)=0.(4)$$

менші за 1 (Умова 1).

Після перетворень рівняння (4) набуває вигляду (2) з невідомим z замість s. Щоб визначити умову, що всі корені цього рівняння лежать всередині кола радіусом 1 в z-площині − можна застосувати перетворення z = (w + 1) / (w − 1). Підставивши цей вираз замість z, після деяких перетворень отримаємо лінійне алгебраїчне рівняння k-го ступеня з невідомим w, для якого можна застосувати критерій Гурвіца.

Для одновимірної замкнутої системи з коефіцієнтом пропускання відкритої системи $K(z)=K_R(z)K_O(z)$ умова 1 стосується коренів рівняння $L(z)+M(z)=0$, де L(z) і M(z) позначають поліноми в чисельнику та знаменнику K(z) відповідно.

Розглянемо приклад.

Визначимо умову стійкості замкнутого контуру системи керування з наступними коефіцієнтами пропускання системи та контролера

$$K_O(s)=\frac{k_O}{(sT_1+1)},$$

$$K_R(s)=\frac{k_R}{(s(sT_2+1))},$$

Характеристичне рівняння системи виглядає так:

$$k+s(sT_1+1)(sT_2+1)=T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+k=0$$

де $k=k_Ok_R$ - коефіцієнт ампліфікації системи з розімкненим контуром. Тоді маємо:

$$a_2=\frac{(T_1+T_2)}{(T_1T_2)}, a_1=\frac{1}{(T_1T_2)}, a_0=\frac{k}{(T_1T_2)}.$$

Застосовуючи критерій Гурвіца, ми отримаємо:

$$a_2>0, a_1a_2-a_0>0, a_0\Delta_2>0\, або\, a_0>0.$$

Оскільки $T_1T_2>0$, то умова стабыльності виглядає так:

$$0<k<\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}$$

Умова k > 0 очевидна, оскільки це означає, що зворотний зв'язок має бути негативним. Права частина (10.15) означає, що коефіцієнт посилення повинен бути досить малим і що для занадто великих значень T_1, T_2 лімiт стабільності $k=\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}$ може бути перевищено.

Стабільність нелінійних і нестаціонарних дискретних систем

Розглянемо нелінійну і нестаціонарну систему

$x_{n+1}=F(c_n,x_n).(5)$,

де $c_n \in C$ - вектор параметрів, що змінюються з часом. Представимо (1) у вигляді

$x_{n+1}^{(i)}=F_i(c_n,x_n), i=1,2,...,k$

і припустимо, що функції F_i виглядають так:

$$F_i(c_n,x_n)=\sum_{(j=1)}^{k}(a_{i,j}(c_n,x_n)x_n^j),$$,

$$x_{n+1}=A(c_n,x_n)x_n.(6)$$

де матриця $A(c_n,x_n)=[a_{i,j}(c_n,x_n)] \in R^{(k*k)}$. Згідно з попереднім припущенням про розв'язок рівняння $x=F(x)$, для кожного $c \in C$ рівняння $x=A(c,x)x$ має єдиний розв'язок $x_e=\vec{0}$ (точка рівноваги).

Для лінійної системи:

$x_{n+1}=A(c_n)x_n$,

Для стаціонарної системи:

$x_{n+1}=A(x_n)x_n$

Норма матриці для визначеної норми вектора:

$$\|A\|=\max_{x \in \Delta_x}\left(\frac{\|Ax\|}{d}\right), \Delta_x=\{x \in X : \|x\|=d\}$$.

Отже, це максимальне відношення довжини вектора Ax до довжини вектора x для різних векторів x з однаковою довжиною. Найчастіше використовуються наступні норми:

1. Евклідова норма (норми 1.1 і 1.2):

   $\|x\|=\sqrt{x^T x}$

   $\|A\|=\sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$,

   де λ_{max} - найбільше власне значення матриці $A^T A$.

2. Якщо

   $\|x\|=\max_{1 \le i \le k}|x^{(i)}|$ (норма 2.1)

   або $\|x\|=\sum_{(i=1)}^{k}|x^{(i)}|$ (норма 3.1),

   то $\|A\|=\max_{1 \le i \le k}\sum_{(j=1)}^{k}|a_{ij}|$ (норма 2.2) і $\|A\|=\max_{1\le j\le k}\sum_{(i=1)}^{k}|a_{ij}|$ (норма 3.2) відповідно.

Теорема 1: Якщо існує норма $\|.\|$, така, що
$\bigwedge_{n\ge0}(\bigwedge_{x\in X}\|A(c_n,x)\|)<1$ (Умова 2),
тоді система (6) є стійкою.

Теорема 2: Якщо існує норма $\|.\|$ і неодинична матриця $P\in R^{(k*k)}$, така, що $\bigwedge_{n\ge0}(\bigwedge_{x\in X}\|P^{-1}A(c_n,x)P\|)<1$, тоді система (6) є стійкою.

Теорема 3: Позначимо $\lambda_i(A)=\lambda_i(c_n,x)$ власні числа матриці A, і від 1 до k. Якщо $A(c_n,x)$ - симетрична матриця, і $\bigwedge_{n\ge0}(\bigwedge_{x\in X}\max_i|\lambda_i(c_n,x)|)<1$, тоді система (6) є стійкою.

Зазначимо, що теореми 1, 2, 3 формулюють лише достатні умови стійкості. Задоволення цих умов забезпечує монотонну збіжність $\|x_n\|$ до 0, що не є необхідним для стійкості. Коли умова 2 не буде виконуватися, ми не знаємо, чи стабільна система. Для різних норм можуть бути отримані різні конкретні достатні умови 2, а шляхом правильного вибору матриці P можна спробувати отримати більш слабку умову 2. Основну умову 2 можна використовувати двома способами:

1. Ми намагаємося визначити загальну умову стійкості для параметрів системи, а отже – і для керуючих параметрів α . Якщо не вдається вибрати значення а для виконання умови (10.26), спробуємо визначити область глобальної стійкості D_x для фіксованого α .
2. Визначаємо глобальну область стабільності D_x , тобто таку множину D_x , що містить стан рівноваги 0 , що якщо $x_0\in D_x$, то $x_n\rightarrow0$. Зазначимо, що якщо $x_N\in\bar{D}_x$, де
   $\bar{D}_x=\{x\in X:\}\bigwedge_{n\ge N}\|A(c_n,x)\|<1$,
   тоді $\|x_{N+1}\|<\|x_N\|$. З іншого боку, якщо $x_N\in D_x$, тоді $x_n\rightarrow\vec{0},n>N$. Тоді множина D_x є максимальною областю визначення нерівності $\|x\|\le d$ і міститься в області $\bar{D}_x$, тобто
   $D_x=\{x\in X:\|x\|\le d\}$
   для найбільшого d, такого, що
   $\bigwedge_{\|x\|\le d}x\in\bar{D}_x$.

Проблема збіжності ускладнюється, коли вихід системи із замкненим контуром вимірюється із застосуванням випадкового вектора шуму z_n . У такому випадку можна застосувати так званий **алгоритм стохастичної апроксимації**, який для статичної системи $y=\Phi(u)$, розглянутої вище, приймає форму

$u_{n+1} = u_n + \gamma_n (y^* - \bar{y}_n)$, де
$\bar{y}_n = y_n + z_n$ - результат вимірювання виходу. За деяких дуже загальних припущень щодо функції Φ та шуму z_n , які зазвичай виконуються на практиці − можна довести, що такий процес у ймовірнісному сенсі сходиться до u^* , тобто до розв'язку рівняння $\Phi(u) = y^*$, якщо $\gamma_n > 0$ для кожного n, послідовності γ_n сходяться до 0 і задовольняють умовам:

$$\sum_{(n=0)}^{\infty} \gamma_n = \infty , \sum_{(n=0)}^{\infty} \gamma_n^2 < \infty \quad .$$

Для забезпечення збіжності процесу апроксимації слід застосувати так званий дегресивний зворотний зв'язок, тобто зворотний зв'язок, що діє все слабше (з усе меншим γ_n) для все більшого n. Наведеним вище умовам задовольняє послідовність $\gamma_n = \frac{\gamma}{n}$. Стохастичне наближення широко застосовується в процесах апроксимації для контролю та ідентифікації, а також адаптації та навчання.

Приклад.

Розглянемо одновимірну систему керування зі зворотним зв'язком з безперервною установкою (plant), що складається з нелінійної статичної частини, що описується функцією $w = \Phi(u)$, і лінійної динамічної частини, що описується коефіцієнтом пропускання:

$$K_O(s) = \frac{k_O}{(s(s+1))} \quad .$$

Управління установкою здійснюється дискретно з використанням(zero-order hold) (рис. 1), $u(t) = k_R \epsilon(t), u_n(t) = u(nT)$, де T – період вибірки. Легко показати, що, вибравши змінні стану $x_n^{(1)} = y(nT) = -\epsilon(nT), x_n^{(2)} = \dot{y}(nT)$, можна отримати таке рівняння:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1}^{(1)} \\ x_{n+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - g(-x_n^{(1)})(T - 1 + e^{-T}) & (1 - e^{-T}) \\ -g(-x_n^{(1)})(1 - e^{-T}) & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

де

$$\frac{1}{k_O k_R} \; g(-x^{(1)}) = g(u) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(u)}{u} & \text{for} \quad u \neq 0 \\ \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\Phi(u)}{u} & \text{for} \quad u = 0 \, . \end{cases}$$

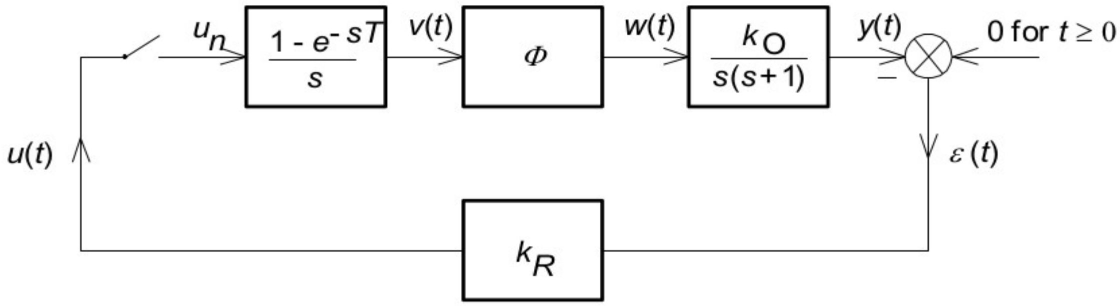

рис.1: Блок-схема системи з прикладу

Застосувавши теорему 3 з нормою 2.2, маємо:

$$|1-k_O k_R g(u)(T-1+e^{-T})|+(1-e^{-T})<1,$$
$$|k_O k_R g(u)(1-e^{-T})|+e^{-T}$$

і нарешті

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1-e^{-T}}{k_O k_R (T-1+e^{-T})} < g(u) < \dfrac{1+e^{-T}}{k_O k_R (T-1+e^{-T})}, \\ -1 < g(u) < 1, \end{array}\right\}$$

припускаючи, що $T-1+e^{-T}>0$. Вищезазначені нерівності визначають границі g_1, g_2 для g(u). Якщо $g_1 \leq g(u) \leq g_2$ для кожного u, тобто характеристика $w=\Phi(u)$ лежить між прямими $w=g_1(u), w=g_2(u)$ (рис. 2), то система повністю стабільна . Іноді в цьому випадку ми використовуємо термін “умова абсолютної стійкості”, тобто умова щодо всієї сукупності нелінійних характеристик. Якщо задана характеристика $w=\Phi(u)$ розташована між зазначеними лініями і відомо, що $k_{O,min} \leq k_{O,n} \leq k_{O,max}$, то вибір k_R , що задовольняє умову

$$\frac{1+e^{-T}}{g_1 k_{\mathrm{O,min}}(T-1+e^{-T})} < k_{\mathrm{R}} < \frac{1+e^{-T}}{g_2 k_{\mathrm{O,max}}(T-1+e^{-T})}$$

гарантує стабільність. Це також умова для нестаціонарної системи за умови, що для кожного $n \geq 0$ $k_{O,min} \leq k_{O,n} \leq k_{O,max}$.

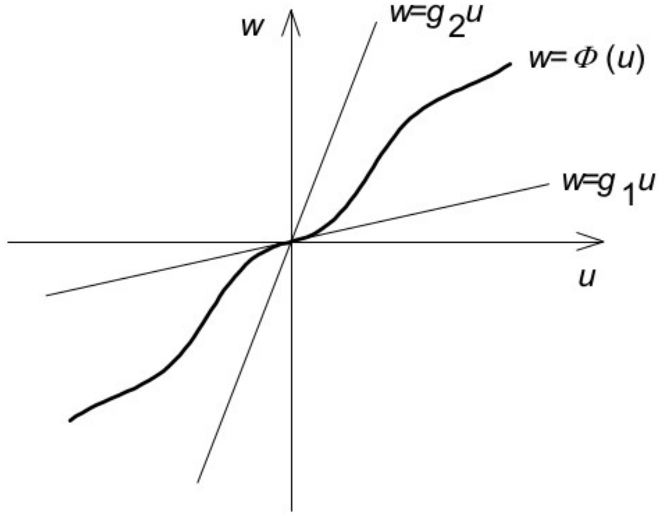

Рис. 2