Тема № 10. Апроксимація нелінійних динамічних систем.

10.1. Апроксимація стаціонарних систем.

Розглядається стаціонарна нелінійна динамічна система:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t),u(t)\right),\ x(t_0) = x^0 \in R^n,\ t \in [t_0,T], \tag{1}$$

$$u(t) \in U(t) \subset R^m, \tag{2}$$

$$f : R^n \times R^m \to R^n. \tag{3}$$

Тут x – вектор стану, u – вектор входу (керування), t – час. Будемо вважати, що вектор-функція $f\left(x(t),u(t)\right) = \left(f_1\left(x(t),u(t)\right), f_2\left(x(t),u(t)\right),..., f_n\left(x(t),u(t)\right)\right)^{tr}$ являється неперервно-диференційованою за змінними $x_i,\ i = \overline{1,n}$ та за змінними $u_j,\ j = \overline{1,m}$. Одним із способів вивчення таких систем є використання понять опорне керування та опорна траєкторія та перехід до дослідження відповідних їм лінійних систем.

Нехай $\bar{u}(t),\ t \in [t_0,T]$ – опорне керування а $\bar{x}(t),\ t \in [t_0,T]$ – опорна траєкторія, яка відповідає опорному керуванню $\bar{u}$. Таким чином справджується така рівність:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right),\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0. \tag{4}$$

Тепер будемо вивчати як поводить себе траєкторія системи (1) – (3) в залежності від керувань, які мало відрізняються від опорного керування $\bar{u}(t),\ t \in [t_0,T]$. Для цього уведемо керування:

$$u(t) = \bar{u}(t) + \Delta u(t),\ t \in [t_0,T], \tag{5}$$

де $\Delta u(t),\ t \in [t_0,T]$ – «малі відхилення» або збурення опорного керування. Збурення опорного керування породжує збурення опорної траєкторії $\Delta x(t),\ t \in [t_0,T]$, тобто:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \Delta x(t),\ t \in [t_0,T]. \tag{6}$$

Продиференціюємо обидві частини рівності (6). Справедливе наступне співвідношення:

$$\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) + \frac{d\Delta x(t)}{dt}. \tag{7}$$

Підставимо вираз (5) у формулу (1):

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), \bar{u}(t) + \Delta u(t)\right) = f\left(\bar{x}(t) + \Delta x(t), \bar{u}(t) + \Delta u(t)\right). \qquad (8)$$

Розкладемо вектор-функцію f у правій частині рівності (8) у ряд Тейлора:

$$\dot{x}(t) = f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) + \frac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial x} \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial u} \cdot \Delta u(t), \qquad (10)$$

тут $\dfrac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial x}$ – це матриця, (i, j)-м елементом якої є $\dfrac{\partial f_i\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial x_j}$, $i, j \in \overline{1, n}$,

а $\dfrac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial u}$ – це матриця, (i, j)-м елементом якої є

$\dfrac{\partial f_i\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial u_j}$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$.

Самостійна робота. Записати матриці $\dfrac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial x}$ ***та*** $\dfrac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial u}$ ***поелементно.***

Прирівняємо праві частини у рівностях (7) та (10):

$$\dot{\bar{x}}(t) + \frac{d\Delta x(t)}{dt} =$$

$$= f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right) + \frac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial x} \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial u} \cdot \Delta u(t), \qquad (11)$$

і врахувавши рівність (4), із (11) отримаємо співвідношення:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \frac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial x} \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial u} \cdot \Delta u(t). \qquad (12)$$

Уведемо такі позначення:

$$A(t) = \frac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial x}; \quad B(t) = \frac{\partial f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t)\right)}{\partial u}.$$

Тоді формула (12) перепишеться в такій формі:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = A(t) \cdot \Delta x(t) + B(t) \cdot \Delta u(t). \qquad (13)$$

Із формули (6) отримаємо початкову умову для векторного диференціального рівняння (13):

$$\Delta x(t_0) = x^0 - \bar{x}^0. \qquad (14)$$

У підсумку одержали представлення відповідної динамічної системи у лінійній формі (13) – (14).

10.2. Апроксимація нестаціонарних систем.

Розглядається нестаціонарна нелінійна динамічна система із спостереженнями:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t), t\right),\ x(t_0) = x^0 \in R^n,\ t \in [t_0, T], \qquad (15)$$

$$u(t) \in U(t) \subset R^m, \qquad (16)$$

$$f : R^n \times R^m \times R^1 \to R^n. \qquad (17)$$

$$y(t) = g\left(x(t), u(t), t\right), \qquad (19)$$

$$g : R^n \times R^m \times R^1 \to R^k. \qquad (20)$$

Тут x – вектор стану, u – вектор входу (керування), t – час, y – вектор виходу. Будемо вважати, що вектор-функції $f\left(x(t),u(t),t\right) = \left(f_1\left(x(t),u(t),t\right), f_2\left(x(t),u(t),t\right),..., f_n\left(x(t),u(t),t\right)\right)^{tr}$ та $g\left(x(t),u(t),t\right) = \left(g_1\left(x(t),u(t),t\right), g_2\left(x(t),u(t),t\right),..., g_k\left(x(t),u(t),t\right)\right)^{tr}$ являються неперервно-диференційованою за змінними $x_i,\ i = \overline{1,n}$ та за змінними $u_j,\ j = \overline{1,m}$.

Аналогічно як у попередньому пункті будемо вважати, що $\bar{u}(t),\ t \in [t_0, T]$ – опорне керування, $\bar{x}(t),\ t \in [t_0, T]$ – опорна траєкторія, яка відповідає опорному керуванню $\bar{u}$, а $\bar{y}(t),\ t \in [t_0, T]$ – опорний вихід , який відповідає опорному керуванню $\bar{u}$. Таким чином справджуються такі рівності:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t\right),\ \bar{x}(t_0) = \bar{x}^0;\ \bar{y}(t) = g\left(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t\right). \qquad (21)$$

Тепер знову будемо вивчати як поводить себе траєкторія системи (15) – (17) та вихід системи (19) – (20) в залежності від керувань, які мало відрізняються від опорного керування $\bar{u}(t),\ t \in [t_0, T]$. Для цього уведемо керування:

$$u(t) = \bar{u}(t) + \Delta u(t),\ t \in [t_0, T], \qquad (22)$$

де $\Delta u(t),\ t\in[t_0,T]$– «малі відхилення» або збурення опорного керування. Збурення опорного керування породжує збурення опорної траєкторії $\Delta x(t),\ t\in[t_0,T]$, тобто:

$$x(t)=\bar{x}(t)+\Delta x(t),\ t\in[t_0,T]. \qquad (23)$$

та збурення виходу:

$$y(t)=\bar{y}(t)+\Delta y(t),\ t\in[t_0,T]. \qquad (24)$$

Продиференціюємо обидві частини рівності (23). Справедливі наступні співвідношення:

$$\dot{x}(t)=\dot{\bar{x}}(t)+\frac{d\Delta x(t)}{dt}. \qquad (25)$$

Підставимо вираз (22) у формули (21):

$$\dot{x}(t)=f\left(x(t),\bar{u}(t)+\Delta u(t),t\right)=f\left(\bar{x}(t)+\Delta x(t),\bar{u}(t)+\Delta u(t),t\right). \qquad (26)$$

Розкладемо вектор-функцію f у правій частині рівності (26) у ряд Тейлора:

$$\dot{x}(t)=f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)+\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial x}\cdot\Delta x(t)+\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial u}\cdot\Delta u(t), \qquad (27)$$

тут $\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial x}$– це матриця, (i,j)-м елементом якої є $\frac{\partial f_i\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial x_j},\ i,j\in\overline{1,n}$, а $\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial u}$– це матриця, (i,j)-м елементом якої є $\frac{\partial f_i\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial u_j},\ i\in\overline{1,n},\ j\in\overline{1,m}$.

Прирівняємо праві частини у рівностях (25) та (27):

$$\dot{\bar{x}}(t)+\frac{d\Delta x(t)}{dt}=$$

$$=f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)+\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial x}\cdot\Delta x(t)+\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial u}\cdot\Delta u(t), \qquad (28)$$

і врахувавши рівність (21), із (28) отримаємо співвідношення:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt}=\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial x}\cdot\Delta x(t)+\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial u}\cdot\Delta u(t). \qquad (29)$$

Уведемо такі позначення:

$$A(t)=\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial x};\quad B(t)=\frac{\partial f\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial u}.$$

Тоді формула (29) перепишеться в такій формі:

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt}=A(t)\cdot\Delta x(t)+B(t)\cdot\Delta u(t),\ t\in\left[t_0,T\right]. \tag{30}$$

Із формули (6) отримаємо початкову умову для векторного диференціального рівняння (30):

$$\Delta x\left(t_0\right)=x^0-\bar{x}^0. \tag{31}$$

Аналогічно для виходу системи будуть справедливі перетворення:

$$\begin{aligned}&y(t)=g\left(\bar{x}(t)+\Delta x(t),\bar{u}(t)+\Delta u(t),t\right)=\bar{y}(t)+\Delta y(t)=\\&=g\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)+\frac{\partial g\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial x}\Delta x(t)+\frac{\partial g\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial u}\Delta u(t).\end{aligned} \tag{32}$$

Уведемо такі матриці:

$$D(t)=\frac{\partial g\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial x},\ G(t)=\frac{\partial g\left(\bar{x}(t),\bar{u}(t),t\right)}{\partial u}.$$

Із (32) отримаємо таку рівність для збурення виходу:

$$\Delta y(t)=D(t)\cdot\Delta x(t)+G(t)\cdot\Delta u(t),\ t\in\left[t_0,T\right]. \tag{33}$$

У підсумку одержали представлення відповідної динамічної системи у лінійній формі (30), (33).