Семінар 3

Завдання для самостійного розгляду.

Задача 1 У ліфті знаходиться сім пасажирів. Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Яка ймовірність того, що жодні два пасажири не вийдуть на одному поверсі?

$$|A| = A_{10}^{7} \quad ,|\Omega| = \underbrace{10\cdot\ldots\cdot 10}_{7} = 10^{7}$$

$$P(A) = \frac{A_{10}^{7}}{10^{7}}$$

Задача 2 Кидають 12 гральних кубиків. Яка ймовірність того, що кожне число з'явиться 2 рази?

$$|\Omega| = \underbrace{6\cdot\ldots\cdot 6}_{12} = 6^{12}, \quad |A| = C_{12}^{2}\cdot C_{10}^{2}\cdot C_{8}^{2}\cdot C_{6}^{2}\cdot C_{4}^{2}\cdot C_{2}^{2} = \frac{12!}{2!10!}\cdot\frac{10!}{2!8!}\cdot\frac{8!}{2!6!}\cdot\frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{4!}{2!2!}\cdot\frac{2!}{2!0!} = \frac{12!}{(2!)^{6}}$$

$$P(A) = \frac{12!}{2^{6}\cdot 6^{12}}$$

Задача 3 Серед n осіб виділено особу A і особу B. Усі n осіб шикуються у шеренгу в будь-якому порядку. Яка ймовірність того, що між A і B буде рівно r осіб?

Варіант I.

$$A(B)\underbrace{111\ldots111}_{A_{n-2}^{r}}B(A) \qquad \square \qquad 2A_{n-2}^{r}$$

$$1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad 1 \qquad \square \qquad (n-r-2)!(n-r-2+1)$$

Отже, $|A| = 2A_{n-2}^{r}(n-r-2)!(n-r-2+1)$, $\quad |\Omega| = n!$

$$P(A) = \frac{2A_{n-2}^{r}(n-r-1)!}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$$

Варіант II.

$\ldots$ $|\Omega| = n(n-1)$, A 1 2 $\ldots r$ B $\ldots$

1 2 3 $n-1$ n 1 2 3 $r+1$ $r+2$ $r+3$ n

$|A| = 2(n-(r+2)+1) = 2(n-r-1)$, $P(A) = \dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$

****

<u>Задача 1</u> У три вагони заходять дев’ять пасажирів. Яка ймовірність того, що:

а) у перший вагон зайде три пасажири?

б) у кожен вагон зайде по три пасажири?

в) в один з вагонів зайде чотири, в другий - три і в третій - два пасажири?

Вапіант І.

а) $|A_1| = C_9^3 \cdot 2^6$, $|\Omega| = \underbrace{3 \cdot \ldots \cdot 3}_{9} = 3^9$, $P(A_1) = \dfrac{2^6 C_9^3}{3^9}$

б) $|A_1| = C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \dfrac{9!}{(3!)^3}$ $|\Omega| = \underbrace{3 \cdot \ldots \cdot 3}_{9} = 3^9$ $P(A_2) = \dfrac{9!}{(3!)^3 3^9}$

в) $|A_3| = A_3^3 \cdot C_9^4 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 3!\dfrac{9!}{4!3!} = \dfrac{9!}{4!}$ $|\Omega| = \underbrace{3 \cdot \ldots \cdot 3}_{9} = 3^9$ $P(A_3) = \dfrac{9!}{4!3^9}$

Варіант ІІ.

Беремо до уваги тільки кількість пасажирів.

Розглянемо кількість цілих додатніх розв’язків рівняння:

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

$\underset{x_1}{1}0\underset{x_2}{1111}0\underset{x_3}{111}0\ldots\underset{x_n}{0}$, Отже, нулів $n-1$, одиниць k. Чисдо розв’язків $C_{n-1+k}^k = \bar{C}_{n+k-1}^k$. Тоді будемо мати:

а) $|\Omega| = \{x_1 + x_2 + x_3 = 9\} = C_{9+3-1}^9 = C_{11}^9$, $|A| = \{3 \quad x_1 + x_2 = 6\} = C_{6+2-1}^6 = C_7^6$

$P(A) = \dfrac{C_7^6}{C_{11}^9} = \dfrac{7}{55}$

б) $|A| = 1$, $P(A) = \dfrac{1}{C_{11}^9} = \dfrac{1}{55}$.

в) $|A| = 3!$, $P(A) = \frac{3!}{C_{11}^{9}} = \frac{6}{55}$

<u>Задача 2</u> Учасник лотереї “Спортлото” 6 із 49 заповнив одну картку. Яка ймовірність виграшу та повного виграшу?

Ймовірність вгадати k номерів дорівнює $P(A) = \frac{C_6^k C_{49-6}^{6-k}}{C_{49}^{6}}$.

Ймовірність виграти дорівнює $P(B) = \sum_{k=3}^{6} \frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^{6}}$,

Ймовірність повного виграшу дорівнює: $P(C) = \frac{1}{C_{49}^{6}} \approx 10^{-7}$

Задачі для самостійного розгляду.

1) Серед 10 угод страхування авто 5 укладено на випадок крадіжки, 3 – на випадок ушкоджень з вини автовласника та 2 – на випадок ушкоджень не з вини автовласника. Всі страхові випадки рівноможливі. Знайти ймовірність того, що з трьох страхових випадків:

а) будуть рівно два, що мають одну і ту саму причину;

б) всі випадки будуть мати різні причини.

2) З колоди карт у 32 карти два рази виймають по одній карті без повернення. Яка ймовірність того, що:

а) лише одна з цих карт буде валет?

б) принаймні одна з цих карт буде валет?

3) Підрахувати ймовірність того, що серед k осіб, вибраних випадковим чином, кожна особа відзначає свій день народження в інший день року.