РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

Основна:

1. Месарович М., Такахара Я. Общая теория систем: математические основы. –М., 1978, –311с.
2. Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Основи системного аналізу, Підручник. –К.: Видав. Група BHV, 2007. – 544с.
3. Губанов В.А., Захаров В.В., Коваленко А.Н. Введение в системный анализ, Уч. пособие, Л.: ЛГУ, 1988. – 232с.
4. Мороз О.І., Назаренко Л.Д. Математична теорія систем, Навч. посібник.-Суми:Сум.ДУ,2006.-220 с.
5. Волкова В.Н., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. –С-Пб.: С-ПбГТУ, 2001. – 512с.
6. Мороз А.И. Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987. –304с.
7. Стопакевич О.А. Теорія систем і системний аналіз. К.: ІСДО, 1996. – 200с.
8. Клір Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач. –М.: Радио и связь, 1990. – 544с.
9. Бакан Г.М., Волошин О.Ф., Зінько П.М. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу “Теорія систем”. – К.: ВПЦ “Київ. університет”, 1997. – 38с.
10. Кононюк А.Е. Системология. Общая теория систем. – К.: Освіта України. 2014.-564 с.
11. http://www.intuit.ru/department/expert/intsys/1/

Додаткова література

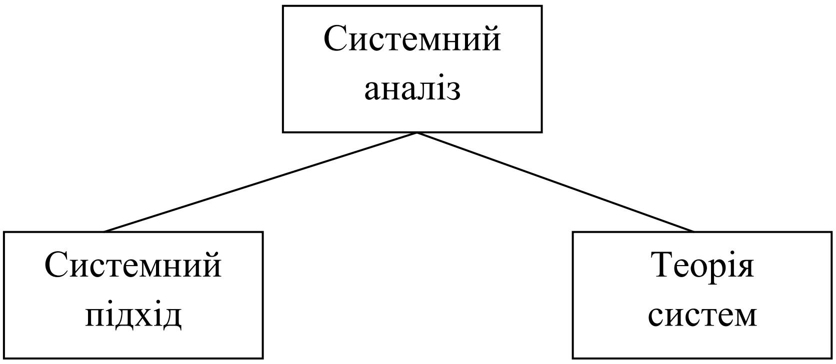
12. Чорней Н.Б., Чорней Р.К. Теорія систем і системний аналіз, Навч. посібник. – К.: МАУП, 2005. – 256с.

13. Сурмин Ю.П. Теория систем и системный анализ, Учеб. пособие.-К.:МАУП,2003.-368с.
14. Семейко М.Г. Методичні рекомендації до розв’язання задач з дисципліни “Теорія систем і системний аналіз”. – К.: МАУП, 2000. – 43с.
15. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г. Задачі, методи та алгоритми оптимізації. – К.: ВПЦ «Київський університет»,2012. – 799с.

Тема 1. Вступ. Основні поняття, що характеризують будову і функціонування систем.

1.1. Предмет, цілі теорії систем.

Спочатку зобразимо наступну схему:



Системний аналіз (СА) – це сукупність методів і засобів, які використовують при:

- досліджені і конструюванні складних і зверх складних об'єктів, явищ і процесів (перш за все методів і засобів вироблення, обґрунтування і прийняття рішень);
- проектуванні, створенні та керуванні соціальними, економічними, екологічними, біологічними, технічними, людино-машинними системами.

Системний аналіз виник у 60-х роках 20-го століття як результат розвитку дослідження операцій і системотехніки. Теоретичну і методологічну основу СА складають ***системний підхід (СП) і теорія систем (ТС) (загальна теорія систем, абстрактна теорія систем.***

Системний підхід – методологічний напрямок, основна задача якого полягає в розробці методів дослідження і конструювання (проектування) складно-організованих об'єктів, явищ і процесів – систем різних типів і класів. Історично СП прийшов на зміну широко розповсюдженим в 17 -19 століттях концепціям механіцизму і по своїх задачах протистоїть цим концепціям. *Теоретичною* базою для розробки таких методів являється *діалектичний принцип системності.*

Найважливіші задачі системного підходу:

- розробка засобів представлення досліджуваних об'єктів, явищ і процесів як систем;
- побудова узагальнених моделей систем, моделей різних класів та специфічних властивостей систем;
- дослідження структури систем, різних системних концепцій і розробок.

Системний підхід звертає увагу на недостатність, а часто і шкоду чисто локальних рішень, отриманих на основі охоплення невеликої кількості істотних факторів. СП спирається на відомий діалектичний закон взаємозв'язку і взаємообумовленості явищ у природі та суспільстві, вимагаючи розглядати досліджувані об'єкти не тільки як самостійну систему, але і як підсистему деякої більшої системи, по відношенню до якої не можна розглядати дану систему як замкнуту.

Теорія систем **–** науковий напрямок, який пов'язаний із розробкою сукупності методологічних та прикладних засобів аналізу і синтезу об’єктів, явищ і процесів довільної природи. Основою для створення ТС являються ізоморфізми (аналогії) процесів, які протікають в об’єктах різного типу (технічних, біологічних, економічних, соціальних, фізичних, екологічних тощо). ТС являє собою область наукових знань, які дозволяють вивчати поведінку, зокрема ціленаправлену, об’єктів, явищ і процесів довільної складності і довільного призначення.

1.2. Історична довідка. Означення системи.

Спочатку проаналізуємо еволюцію поняття *система.* В перших визначеннях в тій чи іншій формі вказувалось, що *система* – це елементи і зв’язки (відношення) між ними. Основоположник теорії систем Л. фон Берталанфі визначив систему як комплекс взаємодіючих елементів, чи як комплекс елементів, що знаходяться у певних відношеннях один з одним і з середовищем. А.Холл визначив систему як множину предметів разом із зв’язками між ними і між їхніми ознаками. Доречно нагадати, прямий переклад із грецької мови: $\sigma\nu\sigma\tau\eta\mu\alpha$ - означає *складене,* тобто складене із частин, з’єднання.

Пізніше у визначені системи появляється поняття цілі. Так у філософському словнику система визначається так: «система це сукупність елементів, що знаходяться у відношеннях і зв’язках між собою певним чином, і які утворюють деяку цілісну єдність ». Згодом в поняття система почали включати разом із елементами, зв’язками, їх властивостями і цілями - спостерігача, особу, що уявляє об’єкт чи процес у вигляді системи . Для побудови системи можна розробити «мову» для виявлення елементів і зв’язків між ними, яка може бути основана на теоретико-множинних , логічних та інших формалізованих представленнях. На перших етапах дослідження системи важливо уміти відокремити систему від середовища, з яким вона взаємодіє.

Зараз запишемо у символічній формі декілька узагальнюючих визначень системи, які відрізняються одне від одного кількістю врахованих факторів і ступенем абстрактності (від найбільш абстрактного «так» - «ні» до найбільш конкретного, наближеного до дійсності).

1). Система є дещо ціле: $S = H\left(1;0\right)$.

Визначення виражає факт існування і цілісність. Двоїсте судження $H(1;0)$ виражає наявність чи відсутність якихось якостей (властивостей) (електроніка).

2). Система є організована множина: $S =$ (ОРГ, М), де ОРГ – оператор організації, М – множина (суспільствознавство).

3). Система є множина предметів, властивостей і відношень: $S = \left(\{m\}, \{n\}, \{r\}\right)$, де $m -$ предмети, $n -$ властивості, $r -$ відношення (геологія).

4). Система є множина елементів, що утворюють структуру і забезпечують певну поведінку в умовах навколишнього середовища:

S = (ЕЛ, СТ, ПО, НС), де ЕЛ – елементи, СТ – структура, ПО – поведінка, НС – навколишнє середовище (ботаніка).

5). Система є множина входів, множина виходів, множина станів, що характеризуються функцією переходів і функцією виходів: $S = \left(X, Y, U, \varphi, \eta\right)$, де $X -$ стани, $Y -$ виходи, $U -$ входи, $\varphi -$ функція переходів, $\eta -$ функція виходів (автоматика).

6). Це шестичленне означення відповідає рівню біонічних систем і враховує генетичний (родовий) початок (ГП) , умови існування (УІ), обмінні явища (ОЯ), розвиток (РЗ), функціонування (ФН), репродукцію (відтворення) (РЕ):

S = (ГП, УІ, ОЯ, РЗ, ФН, РЕ).

7). Це нейро-кібернетичне означення системи оперує поняттями моделі (МО), зв’язку (ЗВ), перерахунку (ПР), самонавчання (СН), самоорганізації (СО), провідності зв’язків (ПЗ), збудженості моделей (ЗМ):

S = (МО, ЗВ, ПР, СН, СО, ПЗ, ЗМ).

8). Якщо означення *5)* доповнити фактором часу і функціональними зв’язками, то отримаємо визначення системи, яким користуються в теорії автоматичного керування:

$$S = \left(T, X, Y, U, \Omega, V, \eta, \varphi\right),$$

де $T -$ час, $X -$ стани, $Y -$ виходи, $U -$ входи, $\Omega -$ клас функцій на виході, $V -$ значення функцій на виході, $\eta -$ функціональний зв'язок у рівнянні

$$y(t_2) = \eta\left[x(t_1), u(t_1), t_2\right],$$

$\varphi -$ функціональний зв'язок у рівнянні

$$x(t_2) = \varphi\left[x(t_1), u(t_1), t_2\right],\ t_2 \geq t_1.$$

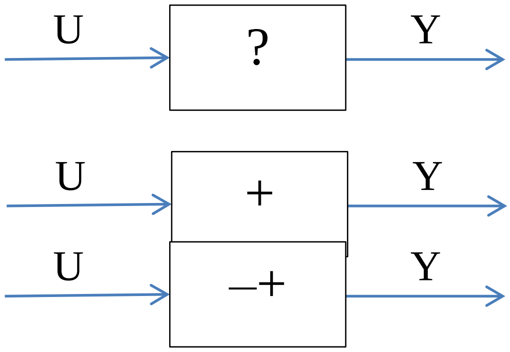
9). Для <u>організаційних (економічних) систем </u>у визначені поняття системи враховують цілі та плани (ЦП), ресурси зовнішні (РЗ), ресурси внутрішні (РВ), виконавців (ВК), процес (ПР), перешкоди (ПЕ), контроль (КО), керування (КЕ), ефективність (ЕФ):

S = (ЦП, РЗ, РВ, ВК, ПР, ПЕ, КО, КЕ, ЕФ).

10) Система чорний ящик

11) Система білий ящик

12) Система сірий ящик



(<u>фізика</u>).

Послідовність означень можна продовжувати, щоби врахувати таку кількість елементів, зв’язків і дій в реальній системі, яка необхідна для розв’язання задачі, для досягнення поставленої мети.

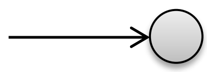
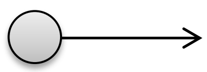
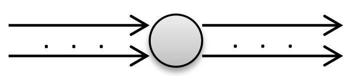
Аналізуючи різні означення системи треба розуміти, що на різних етапах дослідження чи конструювання системи <u>можливі</u> різні означення (а на певному етапі приймати якесь «робоче» означення).

1.3. Поняття, що характеризують будову і функціонування систем.

Поняття, що характеризують будову і функціонування систем не можуть бути визначені незалежно, а визначаються одне через інше, уточнюючи одне одного.

Елементом називають деякий об’єкт (<u>матеріальний, енергетичний, інформаційний</u>), що володіє певними важливими для нас властивостями, але внутрішня будова (зміст) якого безвідносна до цілі (мети) розгляду системи. Тобто елемент – найпростіша неділима частина системи. Що ж являється такою частиною? Відповідь на це питання неоднозначна і залежить від мети (цілі) розгляду об’єкта (явища, процесу) як системи, від точки зору на нього, чи від аспекту його вивчення. Таким чином, під *елементом* потрібно розуміти границю поділу системи на частини з точки зору розв’язування конкретної задачі, з точки зору поставленої цілі.

Класифікація елементів системи:

Основа класифікації	Тип елемента	Х а р а к т е р и с т и к а е л е м е н т а
Ступінь споріднення	Гомогенний Гетерогенний	Однотипний з іншими елементами Різнотипний з іншими елементами
Ступінь самостійності	Програмний Адаптивний Ініціативний	Діє по жорсткій програмі Володіє властивістю пристосування Володіє властивістю змінювати дійсність
Період існування	Постійний Тимчасовий	Постійно існує в системі Виникає тимчасово
Часова належність	Минулого Теперішній Майбутнього	Залишився від минулих етапів життя с. Характерний для сьогодення Характерний для майбутнього
Роль в системі	Основний Другорядний	Відіграє головну роль в системі Має другорядне значення в системі
Активність в системі	Активний Пасивний	Впливає на процеси в системі Слабо впливає на процеси в системі
Характер дії на систему	Визначений чи передбачуваний Невизначений чи непередбачуваний	Здійснює цілком визначену дію на систему Здійснює невизначену (непередбачену) дію на систему
Характер сприйняття сигналів	Не сприймаючий Перетворюючий Передаючий	Не сприймає сигнали Перетворює сигнали, які на нього поступають Передає сигнал у такому вигляді, в якому отримав
Число входів і виходів	З одним входом і без виходу З одним виходом і без входу З різною кількістю входів і виходів	  

Система може бути розділена на елементи не зразу, а послідовним поділом на *підсистеми,* які являють собою компоненти більш крупні ніж елементи і в той же час більш детальні ніж система в цілому. Поділ системи на *підсистеми* полягає у виділені сукупності взаємозалежних елементів, які можуть виконувати відносно незалежні під-функції, під-цілі , що направлені на досягнення загальної функції, цілі системи. Цим підсистема відрізняється від простої групи елементів, для якої не сформована під-функція, під-ціль і не виконуються властивості цілісності (для такої групи використовують назву *компоненти чи група елементів*).

Структура системи (structure – побудова, розміщення, порядок зв’язків) – це сукупність стійких зв’язків між елементами системи, які забезпечують цілісність системи і тотожність її самій собі. Структура відображає найбільш істотні взаємовідношення між елементами і їх групами (компонентами, підсистемами), які мало змінюються при змінах в системі і забезпечують існування системи і її основних властивостей. Розчленування системи на групи може мати матеріальну (речову), функціональну, алгоритмічну чи іншу основу. Групи елементів в структурі виділяються по принципу більш слабких зв’язків між елементами різних груп. Структура описується наступними характеристиками:

а) загальним числом зв’язків, які характеризують складність системи;

б) частотою зв’язків, тобто кількістю зв’язків, які припадають на один елемент;

в) числом внутрішніх зв’язків, які визначають внутрішню будову системи;

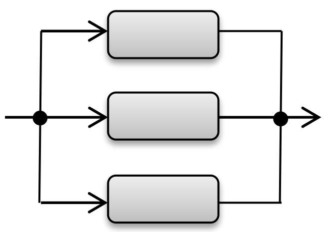
г) числом зовнішніх зв’язків, які характеризують взаємодію системи із середовищем, її відкритість.

Поняття структура набагато складніше ніж поняття склад. Поняття склад дає відповідь на питання «Із чого складається система ?», а поняття структура дає відповідь на питання «Як побудована система ?».

Структура системи може бути представлена графічно, у вигляді теоретико-множинних описів, математичних формул, у вигляді графів, схем, таблиць, креслень, дерев і т.п. Структура системи може бути охарактеризована за наявними типами зв’язку, зокрема:

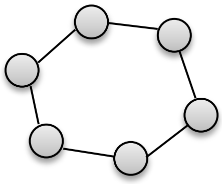
послідовний зв'язок

паралельний зв'язок

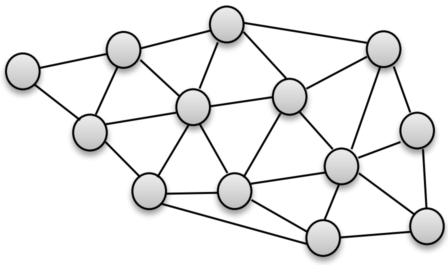


обернений зв'язок

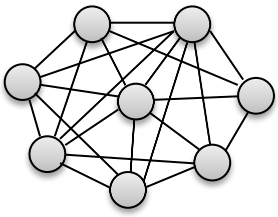
кільцевий зв'язок



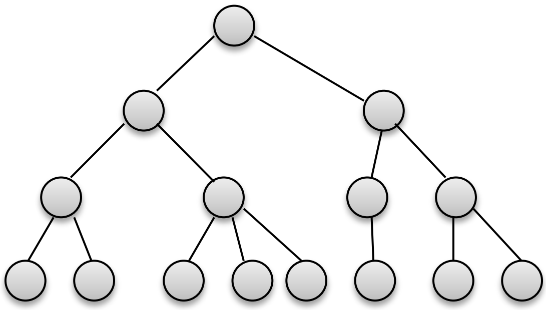
стільниковий зв'язок



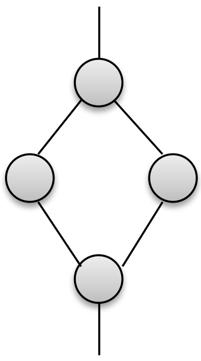
мережевий зв'язок



деревовидний зв'язок



ромбовидний зв'язок



змішаний зв'язок – складається із вказаних вище типів.

Під організацією систем розуміють внутрішню упорядкованість елементів цілого, а також сукупність процесів, які встановлюють взаємозв’язки між окремими частинами системи. Для організації властиво:

а) просторове положення елементів;

б) часова упорядкованість елементів;

в) цільова упорядкованість системи;

г) функціональна упорядкованість елементів.

Зв’язком називають важливий для цілей розгляду обмін між елементами (матерією, інформацією, енергією). Зв'язок забезпечує виникнення і збереження структури і цілісних властивостей системи. Це поняття одночасно характеризує і будову (статику) і функціонування (динаміку) системи. Зв'язок можна характеризувати напрямом, силою, характером (чи видом). По перших двох ознаках зв’язки розділяють на *направлені і ненаправлені, сильні і слабкі* (чи можна ввести шкалу сили зв’язку); а по характеру – на *зв’язки підлеглості, зв’язки породження (генетичні), рівноправні чи нерівноправні, зв’язки керування.* Зв’язки також розділяють по місцю прикладання (*внутрішні і зовнішні*), по направленості процесів у системі в цілому чи в окремих її підсистемах (*прямі, обернені чи зі зворотнім зв’язком*).

Зв'язок між елементами системи необхідно розглядати з точки зору чотирьох підходів: *формального, функціонального, логічного, змістовного.*

При формальному підході зв’язки діляться на такі різновиди: *направлені і ненаправлені, односторонні і двосторонні, рівноправні і нерівноправні, внутрішні і зовнішні, довготривалі й короткочасні, часті й рідкісні і т.д.*

При функціональному підході зв’язки розглядають з точки зору виконуваної ними функції. При цьому виділяють два типи: *нейтральні* (дія і протидія однакові за величиною, змін не відбувається); *функціональні* (характеризуються тим, що дія і протидія не співпадають, і елемент починає реалізовувати в системі деяку функцію). Під функціональні попадають прямі і обернені зв’язки.

При логічному підході зв’язки діляться на: *причинно-наслідкові*, (одне явище породжує інше), *кореляційні (*зміна одного явища приводить до зміни іншого, яке в свою чергу змінює перше явище*), станів* (із одного стану системи випливає інший стан).

При змістовному підході зв’язки діляться на: *енергетичні* (процеси передачі енергії між елементами системи), *матеріально-речові* (характеризуються матеріально-речовими перетвореннями), *інформаційні* (представляють собою інформаційні потоки).

Поширимо поняття зв'язку на взаємодію системи з «не системою», яку називають *зовнішнім середовищем.* Для елемента системи виділяють:

а) дії, яких він зазнає зі сторони інших елементів і «не системи»;

б) дії, які він спрямовує на інші елементи і «не систему» .

Першу групу дій називають *входами* (діями на елемент), а другу – *виходами* (діями від елемента). Як правило, виходи елемента визначаються входами і його внутрішньою побудовою. Через те кажуть, що вихід є функція від входу і самого елемента.

Поняття входу і виходу переноситься на довільну сукупність елементів, включаючи і всю систему в цілому.

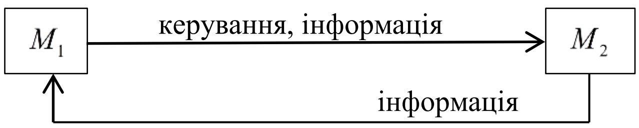
Декомпозицією називають ділення системи на частини, зручне для деяких операцій із цією системою. Найважливішим стимулом і суттю декомпозиції є спрощення системи, занадто складної для розгляду в цілому. Таке спрощення може:

а) фактично приводити до заміни системи на якусь іншу, в якомусь розумінні відповідну первісній (як правило це робиться вводом гіпотез, відкиданням чи послабленням окремих зв'язків в системі);

б) повністю відповідати первісній системі і при цьому полегшувати роботу з нею – така декомпозиція називається строгою і потребує спеціальних процедур узгодженості і координації розглядуваних частин.

Агрегування – обернена операція до декомпозиції.

Ієрархічною системою називають систему з наявністю підлеглості, тобто нерівноправних зв'язків між елементами (чи групами елементів), коли дія в одному із напрямів викликає більший вплив на елемент (групу елементів), ніж в іншому. Типовий ієрархічний зв'язок з дією типу «інформація», «керування» зображений на малюнку:



Тут домінує елемент M_1 .

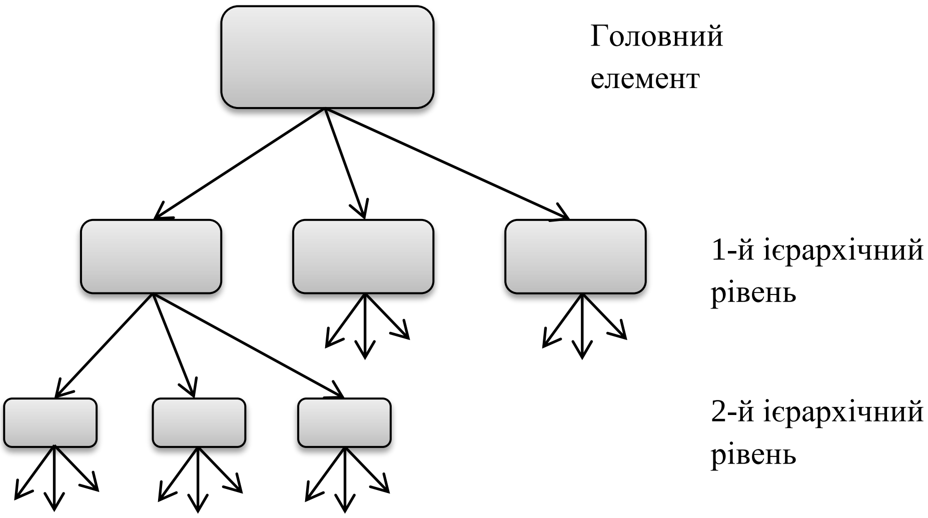
Видів ієрархічних структур багато, починаючи від кільцевих (перший елемент домінує над другим, другий – над третім і т.д., але останній – над першим), чи в яких міняється напрям домінування. Для практики важливі такі два види ієрархічних структур – деревовидна (віяло) і ромбовидна. *Деревовидна ієрархічна структура* найбільш зручна для аналізу і реалізації. В ній майже завжди виділяють *ієрархічні рівні* – групи елементів, які знаходяться на однаковій (по числу проміжних елементів) відстані від верхнього (головного) елемента. Наприклад:

- Міністерство освіти і науки України, вузи, факультети (інститути), кафедри (групи), викладачі (студенти);

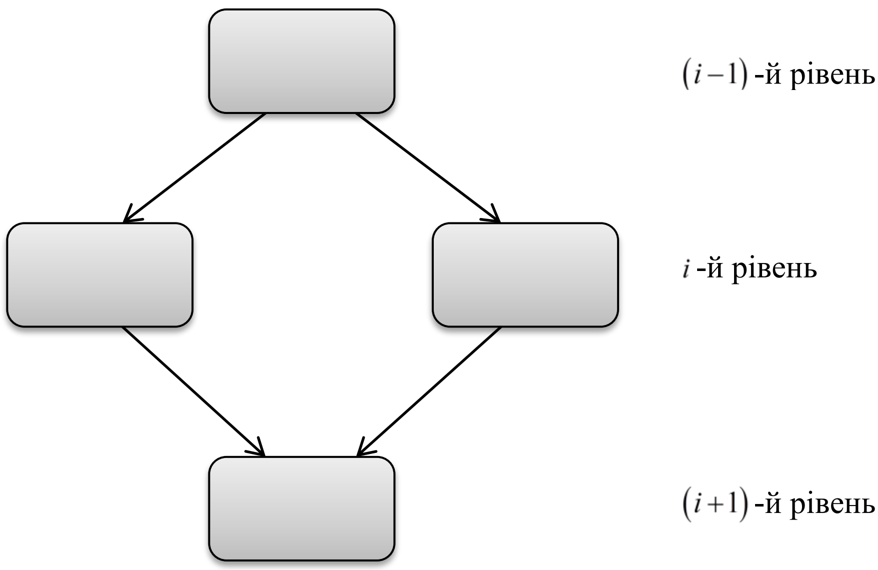
- Національний банк України, банки, управління (департаменти), відділи, співробітники.

Ромбовидна структура приводить до подвійної (іноді і більшої) підлеглості, звітності, приналежності нижнього елемента. Прикладом таких структур являється участь певного елементу в роботі більше ніж одного вузла, блоку, чи використання одних і тих же даних чи результатів вимірювань в різних задачах. Приклад із проектування: (і-1)-й рівень – проектування системи автоматизованої посадки літака в цілому; і-й рівень – проектування основної та аварійної систем автоматизованої посадки; (і+1)-й рівень – проектування процесора, який буде незалежно поставлений в основну і аварійну системи.

Деревовидна структура



Ромбовидна структура



Стан – миттєва фотографія, «зріз» системи , зупинка в її розвитку. Стан визначають або через вхідні та вихідні сигнали (результати), або через макро-параметри, макро-властивості системи (наприклад тиск, швидкість, прискорення, температура). *Стан спокою* – стабільні вхідні та вихідні сигнали.

Поведінка. Якщо система здатна переходити із одного стану в інший (наприклад $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$) то кажуть, що система має поведінку. Цим поняттям користуються, коли невідомі закономірності переходів із одного стану в інший. Тоді кажуть , що система володіє такою – то поведінкою і виясняють її закономірності.

Стійкість – здатність системи вертатися в стан спокою після того, як вона була із цього стану виведена під впливом зовнішніх збурень.

Розвиток – це здатність системи покращувати свої певні характеристики.

1.4. Основні закономірності систем.

Цілісність (емерджентність) – проявляється у виникненні нових інтегрованих якостей (властивостей) в системі, які не властиві компонентам, що її утворюють.

Розглядаються дві сторони цілісності:

1) властивості системи (як цілого) не являються сумою властивостей елементів чи частин;
2) властивості системи (цілого) залежать від властивостей елементів, частин.

Комунікативність – система утворює особливу єдність із середовищем:

1) довільна система являє собою елемент системи більш високого порядку;
2) елементи системи в свою чергу виступають як системи більш низького рівня.

Ієрархічність – це закономірність побудови всього світу і довільно виділеної із нього системи. Всі ми добре уявляємо ієрархічну впорядкованість у природі, починаючи від атомно-молекулярного рівня до людського суспільства. Найважливіша особливість ієрархії полягає в тому, що закономірність цілісності проявляється на кожному рівні ієрархії. Завдяки цьому на кожному рівні ієрархії виникають нові властивості, які не можуть бути виведені як сума властивостей елементів. При цьому важливо, що не тільки об’єднання елементів в кожному вузлі приводить до появи нових властивостей, яких у них не було, і втрати деяких властивостей елементів, але і що кожний підлеглий член ієрархії набуває нових властивостей, які відсутні у нього в ізольованому стані.

Еквіфінальність – характеризує граничні можливості системи певного класу складності.

Історичність – довільна система не може бути незмінною, вона не тільки функціонує, але й розвивається. *Час* являється безумовною характеристикою системи.

1.5. Процеси в системі.

Зафіксуємо всі значення характеристик (показників) в системі, які важливі для цілей розгляду системи. Таку ситуацію назвемо *станом системи* (миттєвий зріз системи, фотографія системи). *Процесом* назвемо набір станів системи, який відповідає упорядкованій неперервній чи дискретній зміні деякого параметра (як правило це час). Процес зміни системи у часі називають *динамікою системи.* Параметрами системи можуть також виступати температура, тиск чи інші фізичні величини.

Для символьного запису процесу вводиться багатовимірна (по числу характеристик) величина x , яка описує конкретні значення характеристик. Вся множина цих можливих величин позначається через $X : x \in X$. Введемо *параметр процесу* t , множину його значень T і опишемо x як функцію від параметра $t : x = x(t)$. Тоді процес $S_{t_0,t}$ є деяке правило переходу від ситуації зі значенням параметра t_0 до ситуації зі значенням $t > t_0$ через всі його проміжні неперервні чи дискретні значення:

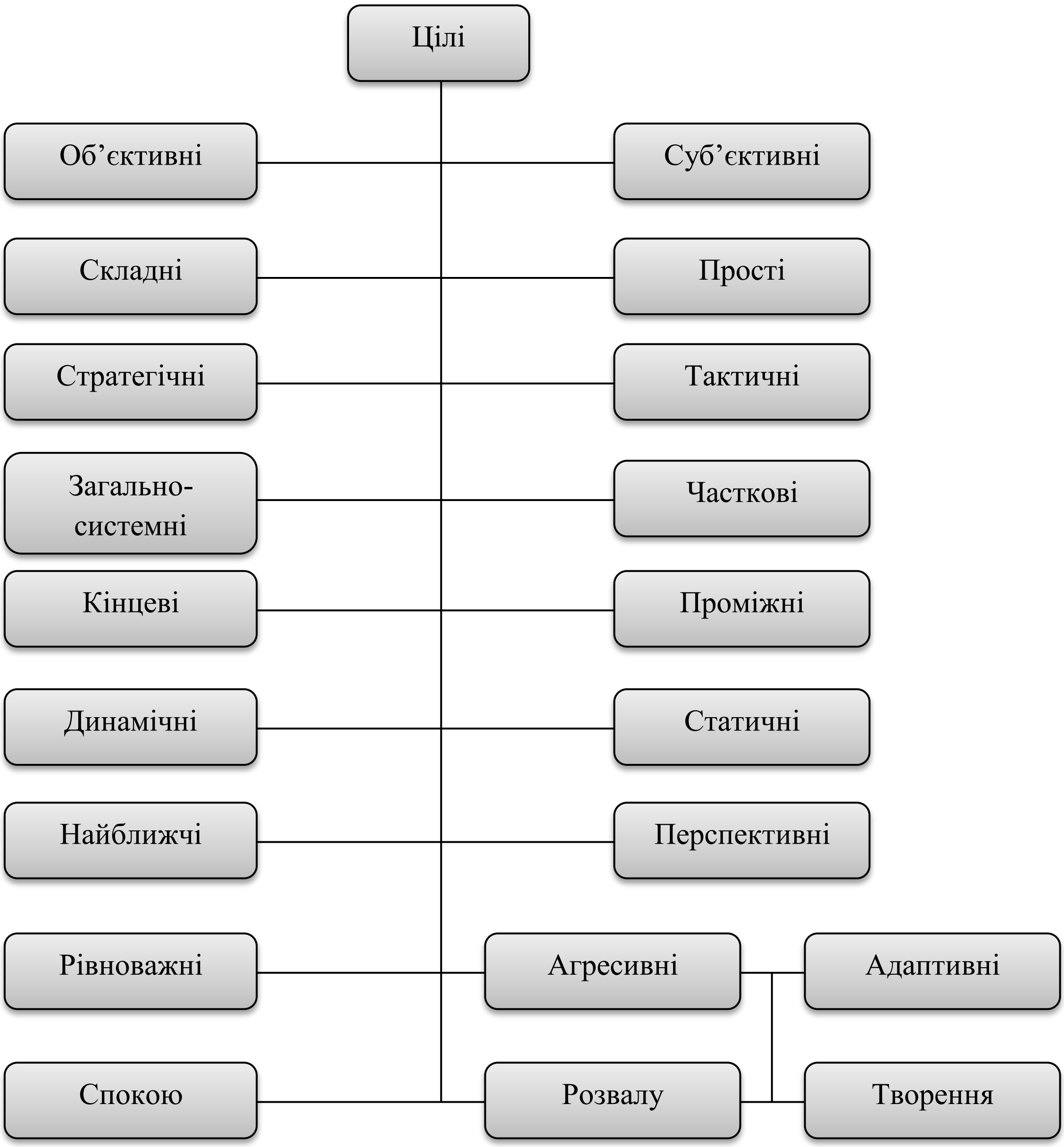
$$S_{t_0,t}\left(x(t_0)\right) = x(t),\ x \in X,\ t \in T.$$

Цьому процесу відповідає відображення множини $T \times X \to X.$

1.6. Цілі та функціонування систем.

В теорії систем *ціль (мету)* розглядають в суб’єктивному і об’єктивному розумінні. В *суб’єктивному* розумінні вона виступає як ціль людини, яка досліджує, проектує, конструює, керує системою. Ціль представляється як те, на що направлена діяльність людини по відношенню до системи (*цілеспрямовані системи*). В *об’єктивному* розумінні під ціллю розуміють той стан, до якого прямує система, заради чого вона існує (*цілунаправлені системи*).

Класифікація цілей системи:



Постановка цілі перед системою (часто кажуть *глобальної цілі*) тягне за собою необхідність:

а) формулювання *локальних цілей*, які стоять перед елементами системи і групами елементів;

б) ціленаправленого втручання в функціонування системи.

Ціленаправлене втручання в процес в системі називають *керуванням.* Керування – найважливіше поняття для цілеспрямованих систем. Науковий підхід до керування вимагає чіткого визначення:

а) того, чим ми можемо розпоряджатися;

б) які границі, в яких ми можемо вибирати;

в) який вплив даного керування на процес.

Перейдемо до символьного запису введених понять.

Загальний вигляд процесу $S_{t_0,t}^{u}$ з керуванням u із деякої сукупності керувань U є таким:

$$S_{t_0,t}^{u}\left(x\left(t_0\right)\right)=x\left(t,u\right),\ x\in X,\ t\in T,\ u\in U.$$

Цьому керованому процесу буде відповідати відображення множин:

$$U\times T\times X\rightarrow X.$$

Якщо задати критерій J функціонування системи, то позначивши G за ціль системи і J_G значення J в момент t_G , ми можемо ставити задачу вибору керування u , щоб виконувалось:

$$S_{t_0,t_G}^{u}\left(x\left(t_0\right)\right)=x\left(t_G,u\right),\ J\left(x\left(t_G,u\right)\right)=J_G,\ x\in X,\ u\in U,\ t\in T$$

<u>Функціонування систем.</u>

Функція (function - виконання) – це спосіб виявлення активності системи, стійкі активні взаємовідношення елементів, при яких зміни одних об'єктів призводять до зміни інших. Поняття функція вживається в різних аспектах. Воно може означати здатність до діяльності і саму діяльність, властивість, значення, залежність однієї величини від іншої. Функція – це перш за все вияв властивостей системи.

Розрізняють <u>зовнішні і внутрішні функції.</u>

Зовнішні функції – це активні, направлені дії системи на оточуюче середовище для досягнення поставлених цілей. Вони бувають декількох видів:

а) *перетворюючі функції* – властиві для творчих систем,які перетворюють зовнішнє середовище відповідно до своєї сутності;

б) *пасивні функції* – пасивне існування системи як матеріалу для інших систем;

в) *споживчі функції* – властиві для систем, які одержують із зовнішнього середовища матерію, енергію, інформацію;

г) *функції поглинання* – поглинання, експансія інших систем і середовища;

д) *адаптивні функції* – в системах, які здатні пристосовуватись до змін середовища;

е) *обслуговуючі функції* – обслуговування систем більш високого порядку.

Внутрішні функції системи визначаються тим, що виконання системою зовнішньої функції вимагає мобілізації системи. Різновиди внутрішніх функцій:

а*) розпорядча* – закріплення за елементами і частинами певних дій (функцій);

б) *координація і узгодження;*

в) *субординація;*

г) *контролююча функція.*

Реалізація внутрішніх функцій забезпечується природою системи.

1.7. Класифікація систем.

Системи ділять на класи за різними ознаками, в залежності від розв'язуваної задачі можна вибирати різні принципи класифікації. На протязі короткої історії розвитку теорії системних досліджень робились різноманітні спроби класифікувати системи. Так один із класиків теорії систем Богданов О. класифікував системи за ступенем організованості:

а) *організовані системи;*

б) *неорганізовані систем;*

в) *нейтральні системи.*

Бір С. дав наступну предметну класифікацію:

Системи	Прості	Складні	Дуже складні
Детерміновані			
Ймовірнісні			
Змішані			

В клітинки даної таблиці заносяться конкретні системи, наприклад: суспільство – ймовірнісна, дуже складна система; літак – складна детермінована система.

Афанасєв класифікував системи наступним чином:

а) системи, які існують в об'єктивній дійсності, в живій і неживій природі, суспільстві;

б) системи концептуальні, ідеальні, які іноді називають абстрактними;

в) штучні (матеріальні), які створені людиною;

г) змішані, в які входять системи і елементи попередніх типів.

Лесєчко класифікував системи за:

а) походженням – природні, штучні, змішані;

б) за описом змінних – з якісними змінними, з кількісними змінними, зі змішаними змінними;

в) за типами операторів – системи «чорний ящик», системи «білий ящик», параметричні, непараметричні;

г) за способом керування – керовані і некеровані, системи з комбінованим керуванням.

Наш сучасник Сурмін Ю.П. розробив класифікацію систем за чотирма основними параметрами: субстанція, будова, функціонування і розвиток. Під *субстанцією* розуміють істотну властивість предмета як цілого, основу і центр його змін, джерело функціонування. Під *будовою* розуміють наявність в системі елементів, зв'язків і їх організацію. *Функціонування* розглядається як процес реалізації системою своєї функції, а *розвиток* – як процес якісних та кількісних змін системи. А система – це структурно-функціональна субстанційна цілісність, що розвивається.

Нижче наводиться класифікація систем за Сурміним Ю.П.:

I. Субстанційний рівень системи.

Основа класифікації	Тип системи	Характеристика системи
Природа системи	Біологічна Хімічна Кібернетична Соціальна Технічна Інтелектуальна	Організми чи їх сукупності Множина елементів, взаємозв'язаних хімічними зв'язками (молекула, хімічна сполука) Множина взаємозв'язаних об'єктів, здатних сприймати, запам'ятовувати, передавати і переробляти інформацію (автопілот, інформаційно-обчислювальний центр) Суспільство чи деяка його складова, яка розвивається як ціле (держава, економіка, законодавство) Сукупність деталей, технічних пристроїв (станок, конвеєр) Знання, способи пізнання і мислення (методи наукового пізнання, математика)
Спосіб існування системи	Абстрактна Матеріальна	Єдність деяких символів чи знаків (теорія, система числення) Сукупність матеріальних об'єктів (гірська система, місто)
Характер детермінації	Стохастична (ймовірнісна) Детермінована	Поведінка носить випадковий характер (ціноутворення, ігри) Поведінка визначена (падіння

		предмета, лінії метро)
Походження системи	Природна Штучна Змішана	Виникає і розвивається природно (без участі людини) (материки, океани) Виникає і розвивається завдяки людині (інженерні комунікації, енергетичні системи) Виникає і розвивається природно і за участі людини (національні парки)
Масштаби	Мікросистема Макросистема Метасистема Мегасистема	Відносно невелике утворення (віруси) Значне за розміром утворення (місто) Зверх-велике утворення (планета) Нескінчене за розміром утворення (Всесвіт)
Здатність до самовідтворення	Неорганічна Органічна	Нездатність до самовідтворення (станок) Здатність до самовідтворення (організми)

<u>II. Рівень побудови системи.</u>

Кількість елементів	Одноелементна Бінарна Трьохелементна Багатоелементна	Складається із одного елемента (Земля, клітина) Складається із двох елементів (дует,Земля-Місяць) Складається із трьох елементів (трикутник, ціп) Складається із багатьох елементів (план міста, військово-промисловий комплекс)
Ступінь відкритості	Відкрита Закрита	Відкрита для дії зовнішнього середовища (демократичне суспільство) Закрита для дії зовнішнього середовища (тоталітарне суспільство)
Характер	Координаційна	Елементи характеризуються

взаємодії елементів	Ієрархічна Координаційно-ієрархічна	рівноправністю (відділи одного рівня в системі керування) Елементи підпорядковані (система керування банком) Об’єднує рівноправні і нерівноправні елементи (суспільство,студентська група)
Ступінь організованості	Недостатньо організована чи хаос-система Організована Заорганізована	Перехідна економіка, криза Уряд, підприємство Однозначно визначена поведінка елементів (тюрма, армія)
Ступінь складності системи	Проста Велика Складна Зверх складна	Складається із невеликої кількості елементів і зв’язків між ними (телефонний абонент) Складається із великої кількості елементів і однотипних зв’язків між ними (телефонна станція) Складається із великої кількості різнотипних елементів та зв’язків (космічна станція) Складається із великої кількості складних систем (народне господарство країни)
Тип структури	Лінійна Кільцева Мережева Деревовидна Змішана	Лінійна структура взаємозв’язку елементів (лінія метро) Напр. кільцева лінія метро Система телефонного зв’язку Система вищої освіти країни Складається із попередніх типів (транспортна система країни)
Наявність інформації про будову	Чорний ящик Сірий ящик Білий ящик	З невідомою будовою З наявністю частини інформації про будову системи З відомою будовою
Характер розміщення	Одновимірна Плоска Трьохвимірна Багатовимірна	Автомагістраль, газова труба Розміщення в площині (футбольне поле) Склад Медичне обслуговування

<u>III. Рівень функціонування системи.</u>

Основа	Тип	Характеристика системи

класифікації		
Кількість функцій	Монофункціональна Поліфункціональна	Реалізація однієї функції (касир) Реалізація декількох функцій (ректор вузу)
Характер відтворення	Відтворюється зовнішнім середовищем Відтворює собі подібних	Наслідок якихось дій (колоніальні держави) Тварини, рослини
Рівновага	Рівноважна Не рівноважна	Збереження рівноваги (ринок) Порушення рівноваги (конфлікт)
Ціль	Одноцільова Багатоцільова	Орієнтована на досягнення однієї цілі (перевезення пасажирів літаком) Орієнтована на досягнення декількох цілей (туристична поїздка)
Ефективність	Неефективна Середньо ефективна Ефективна	Навантаження непідготовленими людьми Вантажник Автонавантажувач
Результат	З нульовим результатом Результативна	Не має результату (розв'язування задачі некваліфікованим колективом) Є результат (кваліфікований колектив)

IV. <u>Рівень розвитку системи.</u>

Вектор розвитку	Стабільна Спадна Зростаюча	Зберігаються показники (економіка країни) Показники спадають Ріст показників
Етап розвитку	Зародок Дитяча Молода Зріла Кризова Перехідна Деградуюча	Знаходиться на стадії виникнення На стадії становлення (діти) В процесі досягнення зрілості (молодь) Відповідає всім якостям зрілості (людина середнього віку) Падають показники, рушиться економіка Переходить із одного стану в інший Домінування процесів погіршання показників і розрухи (економіка України початку 90-х років)
Траєкторія розвитку	Лінійна Квадратична	Лінійні залежності Квадратична залежність

	Нелінійна	Нелінійна залежність
Здатність пристосовуватись	Адаптивна Не адаптивна	Здатність пристосовуватись, не втрачаючи своєї ідентичності (студент 1-го курсу не двійочник) Не здатність пристосовуватись (студент 1-го курсу двійочник)
Здатність до руху	Статична Динамічна	Не змінюється з часом (скеля) Змінюється з часом (економіка)

1.8. Принципи системного підходу.

Що таке принципи системного підходу ? Відповідь на це питання можна дати таку. Це твердження дуже загального характеру, які узагальнюють досвід людини при дослідженні (проектуванні) складних систем. Перерахуємо основні із них:

1) *принцип кінцевої цілі:* абсолютний пріоритет кінцевої (глобальної) цілі;
2) *принцип єдності (цілісності)* : одночасний розгляд системи як цілого і як сукупності частин (елементів);
3) *принцип модульної побудови:* виділення модулів у системі і розгляд системи як сукупності модулів;
4) *принцип ієрархії:* введення ієрархії частин (елементів) і (чи) їх ранжування;
5) *принцип зв'язності:* розгляд довільної частини (елемента) сумісно з її зв'язками з оточенням;
6) *принцип функціональності:* сумісний розгляд структури і функції системи з пріоритетом функції над структурою;
7) *принцип розвитку:* врахування змінюваності системи, її здатності до розвитку, розширення, заміни частин, накопичення інформації;
8) *принцип децентралізації:* врахування в своїх рішеннях і керуванні як централізації так і децентралізації;
9) *принцип невизначеності:* врахування невизначеностей і випадковостей в системі;
10) *принцип нормативності:* будь-яка система може бути зрозумілою тільки в тому випадку, якщо вона буде зрівнюватись з деякою нормативною системою;
11) *принцип оптимальності:* будь-яка система може бути приведена в стан найкращого її функціонування з точки зору деякого критерію;
12) *принцип формалізації:* будь-яка система з певною мірою коректності може бути представлена моделями (математичними, логічними, кібернетичними і т.д.);

13) *принцип елементаризму:* система представляє собою сукупність взаємозв'язаних елементарних складових.

Про використання принципів системного підходу. Для довільної конкретної системи, проблеми, ситуації вказані принципи системного підходу можуть і повинні бути конкретизовані, і що важливо розуміти, деякі із принципів можуть бути непридатними для застосування.

1.9. Загальна система, глобальний стан і глобальна реакція системи за М. Месаровичем.

Означення 1. *(Загальною) системою* називається відношення на непорожніх (абстрактних) множинах:

$$S \subset \times\left\{V_i : i \in I\right\}, \tag{9.1}$$

де $\times -$ символ декартового добутку, $I -$ множина індексів, множини V_i називаються об'єктами системи.

Якщо множина I скінчена, то (9.1) можна переписати у вигляді:

$$S \subset V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n. \tag{9.2}$$

Означення 2. Нехай $I_x \subset I$, $I_y \subset I$ утворюють розбиття множини I, тобто $I_x \cap I_y = \varnothing$ та $I_x \cup I_y = I$. Множину $X = \times\left\{V_i : i \in I_x\right\}$ будемо називати *вхідним об'єктом,* а множину $Y = \times\left\{V_i : i \in I_y\right\} -$ *вихідним об'єктом системи.* Тоді *система* S визначається відношенням:

$$S \subset X \times Y \tag{9.3}$$

(таку систему називають *системою «вхід-вихід»*).

Означення 3. Якщо S являється функцією

$$S : X \to Y, \tag{9.4}$$

То відповідна система називається *функціональною.*

Для зручності позначень домовимось: дужки у виразі $F : (A) \to B$ будуть означати, що функція F являється всього лише *частковою*, тобто що вона не обов'язково визначена для довільного елемента множини A. Область визначення функції F позначимо через $D(F) \subset A$, а область її значень (чи кообласть) – через $R(F) \subset B$.

Аналогічно визначаються область і кообласть відношення $S \subset X \times Y$:

$$D(S) = \left\{ x : (\exists y) \ \left((x, y) \in S \right) \right\},$$

$$R(S) = \left\{ \mathrm{y} : (\exists x) \ \left((x, y) \in S \right) \right\}.$$

Припускається, що $D(S) = X$.

Означення 4. Для даної загальної системи S нехай $C -$ довільна множина, а функція $R : (C \times X) \to Y$ така, що

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c)\left[R(c, x) = y \right].$$

Тоді C називається *множиною чи об’єктом глобальних станів системи,* а її елементи – просто *глобальними станами системи,* функція R називається *глобальною реакцією системи* S.

Теорема 1. Кожній системі відповідає деяка глобальна реакція і ця функція R не являється частковою, тобто

$$R : C \times X \to Y.$$

1.9.1. Абстрактні лінійні системи.

Поняття лінійності являється корисним на довільному рівні загальності.

Означення 5. Нехай A - деяке поле, $X, Y -$ лінійні алгебри над A , $S -$ відношення, $S \subset X \times Y$, причому S не порожнє. Нехай також виконуються:

$$(i) \ \ s \in S \, @ \, s' \in S \Rightarrow s + s' \in S,$$

$$(ii) \ s \in S \, @ \, \alpha \in \mathrm{A} \Rightarrow \alpha s \in S,$$

де + означає внутрішню операцію додавання в $X \times Y$, а через αx позначено результат зовнішньої операції множення на скаляр. Тоді S називають *абстрактною повною лінійною системою.*

Примітка. Лінійною алгеброю називають множину з одною внутрішньою і одною зовнішньою операціями, які задовольняють аксіомам векторного простору а операції + і множення на скаляр визначаються на $X \times Y$ природнім чином:

$$(x, y)+(\hat{x}, \hat{y})=(x+\hat{x}, y+\hat{y}),\ \alpha(x, y)=(\alpha x, \alpha y),$$

де $(x, y),(\hat{x}, \hat{y}) \in X$, $\alpha \in \mathrm{A}$.

Теорема 2. Нехай $X, Y -$ лінійні алгебри над одним і тим же полем A. Система $S \subset X \times Y$ являється лінійною в тому і тільки в тому випадку, коли знайдеться така глобальна реакція $R: C \times X \rightarrow Y$, що

(i) C є лінійна алгебра над A;

(ii) існує пара таких лінійних відображень

$R_1 : C \rightarrow Y$, $R_2 : X \rightarrow Y$, що для всіх

$(c, x) \in C \times X$ виконується $R(c, x) = R_1(c) + R_2(x)$.

Означення 6. Нехай $S \subset X \times Y$ - лінійна система, а $R -$ відображення, $R: C \times X \rightarrow Y$. Відображення R називається *лінійною глобальною реакцією системи* тоді і тільки тоді, коли:

(i) R узгоджується з S, тобто

$$(x, y) \in S \Leftrightarrow (\exists c)\left[y = R(c, x)\right];$$

(ii) C являється лінійною алгеброю над полем A скалярів лінійних алгебр X та Y;

(iii) існує два таких лінійних відображення $R_1 : C \to Y$ та $R_2 : X \to Y,$ що для довільних $(c, x) \in C \times X$ виконується $R(c, x) = R_1(c) + R_2(x).$

В цьому випадку C називається *лінійним об'єктом глобальних станів,* відображення $R_1 : C \to Y -$ *глобальною реакцією на стан,* а $R_2 : X \to Y -$ *глобальна реакція на вхід.*

Наслідок. Система являється лінійною тоді і тільки тоді, коли для неї існує лінійна глобальна реакція.

1.9.2. Загальні часові та динамічні системи.

Означення 7. *Множиною моментів часу* (загальної часової системи) називається лінійно впорядкована (абстрактна) множина. Ця множина позначається символом $T,$ а визначене в ній відношення порядку – через $\leq$.

Для зручності позначень вважають, що в множині T існує мінімальний елемент 0. Іншими словами припускається, що існує деяка над множина $\overline{T}$, лінійно упорядкована відношенням $\leq$, і яка містить фіксований елемент 0 , такий, що множину T можна визначити як $T = \{t : t \geq 0\}.$

Означення 8. Нехай $\mathrm{A}, \ \mathrm{B} -$ деякі довільні множини , $T -$ деяка множина моментів часу, $\mathrm{A}^T, \mathrm{B}^T -$ множини усіх відображень із T в A і B , відповідно, і $X \subset \mathrm{A}^T, Y \subset \mathrm{B}^T$. *Загальною часовою системою* S *над* X *і* Y називають відношення на X і Y , тобто $S \subset X \times Y.$ Множини A і B називають *алфавітами вхідних дій (входів) і вихідних дій (виходів) системи,* відповідно. Множини X, Y називають іще *часовими об'єктами системи;* їх елементами $x : T \to \mathrm{A}$ і $y : T \to \mathrm{B}$ служать абстрактні функції часу. Значення функцій із X та Y в моменти часу t позначаються через $x(t)$ та $y(t)$.

Тема 2. Системи і моделювання.

2.1. Типи моделей.

Нехай ми маємо деякий конкретний об'єкт. Лише в одиничних випадках ми можемо провести із цим об'єктом всі дослідження, які нас цікавлять. В більшості випадків (із-за недоступності, громіздкості, складності і т. і.) ми змушені розглядати не сам об'єкт, а формальний опис тих його особливостей, які істотні для цілей дослідження. Такий формальний опис об'єкта прийнято називати *моделлю об'єкта (системи).* Для дослідження простого радіотехнічного елемента можна подати на його входи всі комбінації сигналів, що нас цікавлять, і зняти відповідні вихідні сигнали і таким чином можна вивчити цей радіотехнічний елемент. З іншого боку проходження сигналу через радіотехнічний елемент можна описати, наприклад, диференціальним рівнянням (чи якимось іншим чином) і на цій основі вивчати радіотехнічний елемент з допомогою диференціального рівняння, подаючи різні входи і обчислюючи відповідні виходи. Це буде робота з моделлю. Радіолюбителю простіше провести натурні експерименти ніж розв'язувати диференціальні рівняння. Зате проектувальник апаратури уже віддасть перевагу моделям, щоби з різних радіотехнічних елементів скласти радіоприлад. Тобто з ростом складності системи можливості натурного експерименту різко падають (тому, що експеримент стає дорогим, трудомістким, тривалим за часом). При досліджені складних систем перевагу віддають роботі з моделлю (наприклад, атомна станція, літак, ракета, економічна система, соціальна група і т.д.). Слід відмітити, що дослідження замість самої системи (явища, процесу, об'єкта) її моделі практично завжди несе <u>ідею спрощення</u>. Ми спрощуємо реальний світ, так як оперувати моделлю простіше і економніше ніж дійсністю.

Розрізняють три основні види моделей:

а) *вербальні* (словесні, описові); (*приклади*)

б) *натурні* (макетування, фізичне моделювання, масштабовані моделі та інші); (*приклади*)

в) *знакові*.

Найважливіший вид – це знакові моделі. У знакових моделях виділяють їх найважливіший клас – математичні моделі. *Математична модель* – це опис протікання процесів, опис стану, зміни системи на мові алгоритмічних дій з математичними формулами і логічними переходами. Приклади інших знакових моделей: хімічні і ядерні формули, графіки, схеми (в тому числі графове зображення зв'язків і інформаційних потоків в системі), креслення, топографічні карти. Знакові моделі відрізняються компактністю запису, зручністю в роботі, можливістю вивчення в формі, абстрагованій від конкретного змісту.

Відмітимо також, що ділення моделей на вербальні, натурні та знакові, в певному розумінні умовне, бо , наприклад, існують *змішані* моделі. Можна навіть стверджувати, що не має знакової моделі без її супроводжуючої описової, бо всі знаки і символи необхідно пояснити словами.

2.2.Загальні і конкретні моделі.

Всі типи моделей необхідно перед їх застосуванням до конкретної ситуації наповнити інформацією, яка відповідає використовуваним символам, макетам, загальним поняттям. Так для математичної моделі – це числове (замість буквених) значення фізичних величин, коефіцієнтів, параметрів; конкретні види функцій і операторів, певні послідовності дій (там де вони не були визначені однозначно). Наповнену інформацією модель прийнято називати *конкретною.*

Модель без наповнення інформацією називають *загальною (теоретичною, абстрактною).*

Особливо широко розповсюджені *абстрактні математичні моделі.* Типовими з точки зору практики є моделі у вигляді наборів формул, систем лінійних і нелінійних диференціальних рівнянь (звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь в частинних похідних), алгебраїчних систем рівнянь, інтегральних рівнянь, операторних рівнянь, функціональних рівнянь (чи систем рівнянь), стохастичних рівнянь і т. ін.

2.3. Формальний запис моделі.

Спочатку позначимо:

- набір вхідних дій (входів) в системі через u а всю їх допустиму сукупність через $U, u \in U$;
- набір вихідних дій (виходів) в системі через y а всю їх допустиму сукупність через $Y, y \in Y$;
- набір параметрів, які характеризують властивості системи і які постійні весь час, і які впливають на виходи системи через a , а всю їх допустиму сукупність через $A, a \in A$;
- набір параметрів, які характеризують властивості системи і які змінюються під час її розгляду (параметри стану) через x , а всю їх допустиму сукупність через $X, x \in X$;
- параметр процесу в системі через t , а всю допустиму сукупність через $T, t \in T$;
- правило S (функція, оператор) визначення параметрів x стану системи за входами u , постійними параметрами a , параметром процесу t:

$$x = S(u, a, t);$$

- правило V (функція, оператор) визначення вихідних характеристик y системи за входами u, постійними параметрами a, параметрами стану x та параметром процесу t:

$$y = V(u, a, x, t);$$

- правило $\overline{V}$ (функція, оператор) визначення вихідних характеристик y системи за входами u, постійними параметрами a та параметром процесу t. Вказане правило $\overline{V}$ може бути отримане підстановкою правила S в правило V, що дає виключення із нього параметру стану x:

$$y = \overline{V}(u, a, t).$$

На основі сказаного модель системи може бути записана так:

$$\Xi : \{u, y, a, x, t, S, V, \overline{V}\}, u \in U, y \in Y, a \in A, x \in X, t \in T. \qquad (*)$$

В цьому кортежі є вісім складових. Нижче ми побачимо, що кількість складових може бути і більшою. Найменше число складових є в моделі чорного ящика:

$$\Xi : \{u, y, \overline{V}\}, u \in U, y \in Y,$$

де $y = \overline{V}(u)$.

Для прикладу розглянемо в якості моделі систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = f(t),\ x(t_0) = x^0,\ t \in [t_0, t_1],$$

яка розв'язується для різних початкових умов і різних правих частин. Маємо наступні:

- входи: початкові умови $t_0, x^0,$ вектор правих частин $f(t)$, значення t_1, до якого інтегрують систему ;
- вихід: значення $x(t_1) = x^1$;
- незмінні параметри системи: матриця A;
- параметри стану: вектор x;
- параметр процесу: t;
- правило S: розв'язок системи диференціальних рівнянь в залежності від початкових умов, констант, правих частин і параметра процесу:

$$x(t) = x(t_0, x^0, A, f(t), t);$$

- правило V: підстановка в розв'язок системи диференціальних рівнянь значення t_1:

$$x(t) = x(t_0, x^0, A, f(t), t)|_{t=t_1};$$

- правило $\overline{V}$: залежність $x_1 = x(t_0, x^0, A, f(t), t_1)$.

Модель системи з керуванням легко отримати з попередньої моделі (*) ввівши правило $S^{\bar{u}}$, що дозволяє вибором керування $\bar{u}$ із деякої фіксованої сукупності $\overline{U}$ досягати значення стану x^G , який забезпечує отримання вихідних дій J^G , які відповідають виконанню цілі G:

$$\Xi^{\bar{u}}:\left\{u,y,a,x,t,\bar{u},J^G,S^{\bar{u}},V^{\bar{u}},\overline{V}^{\bar{u}}\right\},u\in U,y\in Y,a\in A,x\in X,t\in T,\bar{u}\in\overline{U}.$$

2.4. Імітаційне моделювання.

Моделювання процесів з багаторазовим відслідковуванням ходу їх протікання кожен раз при різних умовах називається *імітаційним моделюванням.* Ціль цього виду моделювання – одержати представлення про можливі границі і типи поведінки системи, вплив керувань і випадкових факторів, зміни в структурі і т. і. Важливою особливістю імітаційного моделювання є включення людини, її знань, досвіду, інтуїції в процедуру досліджень моделі. Це робиться між окремими імітаціями поведінки системи, чи серіями імітацій, людина навіть може змінювати сценарії імітації, що являється важливим етапом цього виду моделювання. Імітаційне моделювання являється однією із форм діалогу людини із ЕОМ. Воно являється особливо незамінним коли неможлива строга математична постановка задачі (корисно випробувати різні постановки), відсутній математичний метод розв’язування задачі (можна використати імітацію для ціленаправленого перебору), повна модель надзвичайно складна (тоді потрібно імітувати поведінку декомпозованих частин).

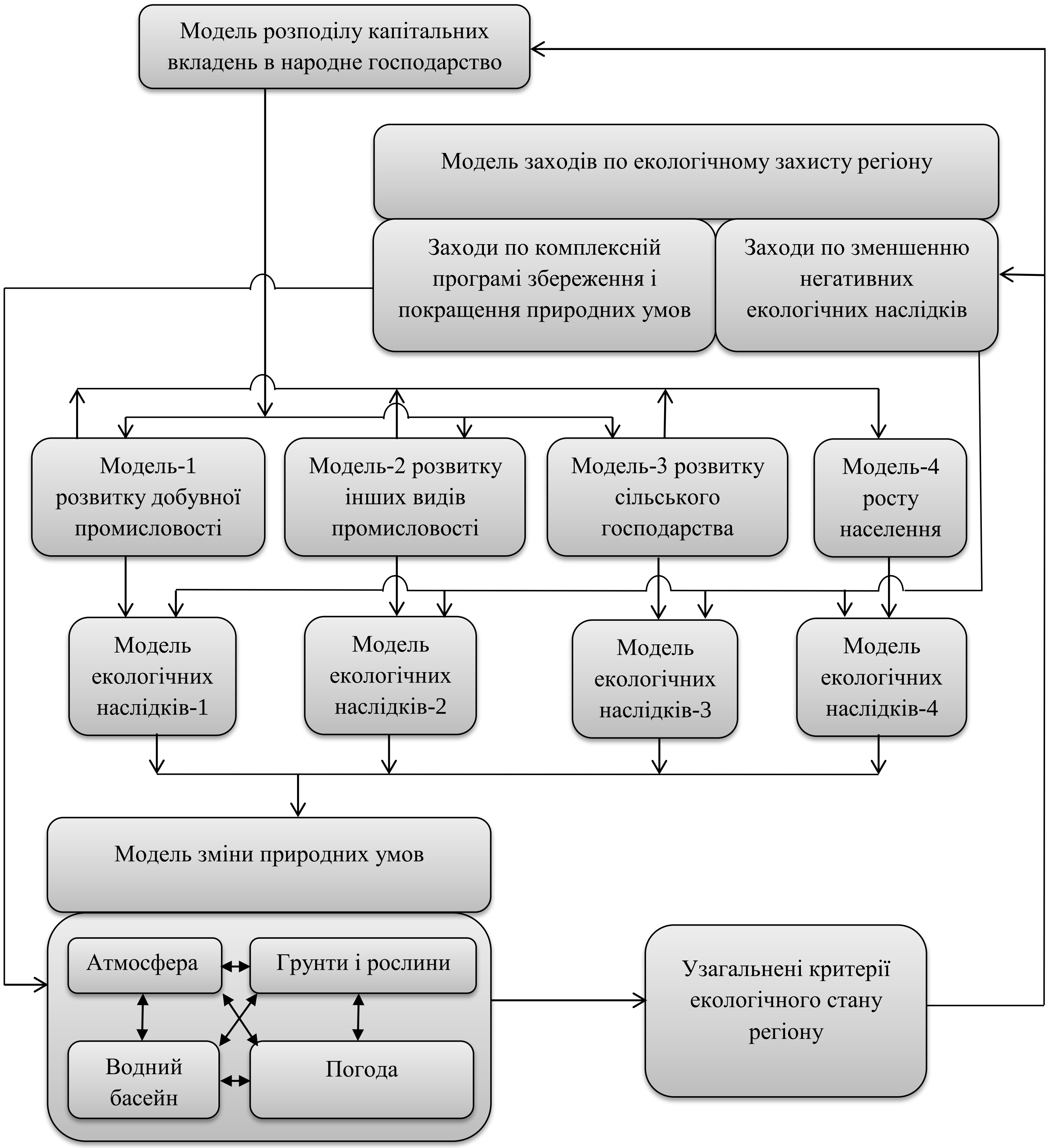
2.5. Моделювання складних систем.

До цього часу мова йшла про моделі, які описують систему цілком. Чи годиться це для складних систем? Єдину модель для складної системи називають *макромоделлю.* В основному достатньо проста і груба, вона годиться лише для приблизних оцінок і для загальних висновків про систему. Якщо ж макромодель уточняти (деталізувати), то це приводить до катастрофічного росту її складності (розмірності) і ефективний аналіз таких моделей не під силу навіть сучасним ЕОМ. Через те при моделюванні складних систем потрібно використовувати декомпозицію і ділення на модулі (блоки, підсистеми), при необхідності вводити ієрархію модулів, розглядати потоки інформації між окремими модулями і т.д. Вкажемо на наступні дві особливості, які виникають при моделюванні складних систем:

перша – побудова чи вибір моделей для декомпозованих частин системи;

друга – узгодження моделей декомпозованих систем.

Для прикладу розглянемо схему прогнозування екологічного стану регіону:



Практичне використання моделей складних систем частіше всього носить характер імітації. Наприклад, не однократне повторення екологічних змін стану регіону за різними сценаріями капітальних вкладень і заходів по захисту навколишнього середовища, розвитку промисловості і сільського господарства, зміни кількості населення дозволяє вибирати найкращу стратегію розвитку регіону.

Тема 3. Означення, класифікація та представлення лінійних і нелінійних динамічних систем.

3.1. Означення динамічної системи за Р. Калманом.

Формалізація динамічної (процесної) точки зору на систему приводить до математичного визначення її предмету, яке ввів Р.Калман. Наведемо цитату із філософії: «Причинність загальна, так як немає явищ, які не мали би своїх причин, як немає явищ, які не породжували б тих чи інших наслідків». В теорії систем причинний процес називають *входом (керуванням)*, а процес-наслідок – *виходом (реакцією системи).* Іншим фундаментальним поняттям ТС являється поняття стану. *Стан в момент* t – це певні об'єкти, які зв'язують всю передісторію входів-причин до моменту t і вихід в цей момент. Конкретною причиною явища в процесі-виході, основою реалізації якраз цього явища, є деякий стан (детермінізм). Отже, в кожний момент часу t система характеризується деяким станом – елементом із її множини станів, який однозначно визначає значення виходу в цей момент t, і це одна із аксіом ТС. Вплив входу на вихід зводиться до залежності стану в кожний момент t від процесу-входу, який реалізувався до цього моменту t, тобто в стані накопичуються всі причини , що реалізувалися в минулому, і які визначають сучасність. Треба звернути увагу на наступне. Якщо в конструкції поняття системи використання процесів входу і виходу було визвано фізичними уявленнями про функціонування системи, то поняття стану має відношення до закону формування виходу. Об'єкт, який взаємодіє із системою, може здійснювати цю взаємодію тільки через вхід і вихід системи, а встановити безпосередній зв'язок з процесом в просторі станів неможливо. Знання, в якому стані знаходиться система в деякий момент часу, може бути отримане лише в результаті розв'язування деякої теоретико-системної задачі.

Крім входу, стану і виходу є ще два поняття, які необхідні при побудові поняття системи: <u>відображення виходу і перехідні відображення.</u> Оскільки вихід однозначно визначається станом, то існує зв'язок між ними, який виражається відображенням із множини значень станів в множину значень, які приймає вихід. Це відображення називається *відображенням виходу.* Аналогічно, існує зв'язок між входом і станом. Якщо в момент t_0 система характеризувалась станом x^0, а в момент $t_1,\ t_1 > t_0$ – станом x^1, причому в момент часу $\tau,\ t_0 < \tau < t_1$, вхід приймав певні значення $u(\tau)$, то зміна стану якраз в x^1, а не в який-небудь інший, визивається дією певного закону поведінки системи. Іншими словами, існує іще одна характеристика – закон, якому підпорядковується поведінка системи в просторі станів. В процесі формалізації цей закон можна описати у вигляді відображення, яке кожному стану і кожному входу ставить у відповідність певний стан, причому це відображення залежить від двох моментів часу як від параметрів. Воно називається *перехідним відображенням.*

Таким чином, конструкція поняття динамічної системи включає первісні поняття входу, стану, виходу а також відношення між цими поняттями, що виражаються відображеннями виходу і перехідним. Знання множини станів, перехідного відображення і відображення виходу дозволяє відповісти на такі питання: яку поведінку може мати система, як потрібно підійти до розв'язування задачі про передбачення поведінки системи і як розв'язати задачу забезпечення заданої поведінки?

А тепер переходимо до <u>строгих математичних викладок</u>. Для математичного визначення процесу необхідно виділити множину його значень і впорядковану множину, яка фіксує, в якій послідовності ці значення реалізуються. В основному в якості впорядкованої множини розглядають множину дійсних чисел (чи якусь підмножину множини дійсних чисел). Часто упорядковану множину трактують як час, і тоді кажуть про процеси, що протікають у часі (динамічні процеси). Упорядковану множину для трьох процесів (входу, стану, виходу) будемо вважати однією і тією ж, і позначати через T і називати *множиною моментів часу.* Через U, Y, X позначимо *множину значень входу, виходу і станів,* відповідно.

Елементи множини $U^T, U^T : T \to U,$ тобто множини всіх відображень із T в U , позначимо через $u(\cdot)$ і назвемо *входами*. Елементи $y(\cdot)$ множини $Y^T, Y^T : T \to Y,$ назвемо *виходами*, і елементи $x(\cdot)$ множини $X^T, X^T : T \to X,$ назвемо *процесами в просторі станів*. Значення вхідного процесу $u(\cdot)$, наприклад, в деякий момент t , є $u(t) \in U,$ (аналогічно $x(t) \in X, y(t) \in Y$).

Кожна конкретна система характеризується своєю множиною входів, яку називають *допустимою* і позначають $U(\cdot) \subset U^T$. Через $u[t_1, t_2]$ позначимо звуження відображення $u(\cdot)$ на інтервал $[t_1, t_2]$. Відносно множини $U(\cdot)$ будемо припускати, що вона не порожня, тобто система не ізольована від інших систем. Також будемо припускати, що якщо $u^1(\cdot) \in U(\cdot)$ і $u^2(\cdot) \in U(\cdot)$, то для довільних $t_1 < t_2 < t_3$ можна вибрати такий допустимий вхід $u(\cdot) \in U(\cdot),$ що $u[t_1, t_2] = u^1[t_1, t_2]$ і $u[t_2, t_3] = u^2[t_2, t_3]$.

Множина всіх реакцій системи, тобто множина виходів, також являється характеристикою системи. Позначимо її через $Y(\cdot) \subset Y^T$. Як відмічалось вище, конкретний вихід $y(\cdot) \in Y(\cdot)$ в кожний момент t повністю визначається станом і тільки станом системи в цей момент t . Позначимо цей стан через $x(t)$. Тоді існує відображення $\eta : T \times X \to Y$ таке, що виконується співвідношення:

$$y(t)=\eta(t,x(t)),\ t\in T.$$

Тут залежність відображення η від t означає, що характер залежності виходу від стану з часом може змінюватися. Відображення η називається *відображенням виходу чи функцією спостереження.*

Вище обговорювалась аксіома, яка полягає в тому, що в кожний момент t система знаходиться в певному стані, причому стан в момент $t\geq\tau$ однозначно визначається станом x в момент τ і відрізком входу $u[\tau,t]$. В цьому відображається принцип детермінізму (визначеності) в поведінці систем. При формалізації цієї обставини встановлюється існування сімейства відображень $\mu_{\tau t}:X\times U(\cdot)\to X,$ заданих для всіх значень параметрів $\tau\in T,\ t\in T,\ \tau\leq t.$ Конкретне відображення, яке відповідає фіксованим τ і t, дозволяє для довільних x і довільних $u(\cdot)$ визначити стан в момент t , якщо в момент τ система знаходилась в стані x і використовувався вхід $u(\cdot)$, за формулою:

$$x(t)=\mu_{\tau t}(x,u(\cdot)). \tag{1}$$

Аксіома однозначної визначеності стану в момент $t>\tau$ за станом в момент τ і входом $u(\cdot)$ накладає обмеження на сімейство відображень $\{\mu_{\tau t}\}$. Запишемо формальний вираз цієї аксіоми. Для цього фіксуємо $u(\cdot)$ і моменти $t_0,t_1,t_2,$ де $t_0\leq t_1\leq t_2$. Умова детермінізму сімейства відображень $\{\mu_{\tau t}\}$ така:

$$\mu_{t_0t_2}(x^0,u(\cdot))=\mu_{t_1t_2}(\mu_{t_0t_1}(x^0,u(\cdot)),u(\cdot)), \tag{2}$$

яка повинна виконуватись для всіх $t_0\leq t_1\leq t_2$, всіх $x^0=x(t_0)$ і всіх $u(\cdot)$.

Позначимо через $(T\times T)^+$ множину $\{(t,\tau),\ \tau\leq t\}$. Визначимо *перехідне відображення* $\sigma:(T\times T)^+\times X\times U(\cdot)\to X$ за формулою:

$$\sigma(t;\tau,x,u(\cdot))=\mu_{\tau t}(x,u(\cdot)).$$

Із (1) маємо $x(t)=\sigma(t;\tau,x,u(\cdot))$, причому із (2) випливає:

$$\sigma(t_2;t_0,x,u(\cdot))=\sigma(t_2;t_1,\sigma(t_1;t_0,x,u(\cdot)),u(\cdot)).$$

Наступна вимога, якій повинно задовольняти перехідне відображення, полягає в тому, щоб рівність

$$\sigma(t;t,x,u(\cdot))=x$$

виконувалась тотожно при всіх $t,x,u(\cdot)$, (це означає, що в один і той же момент часу t система не може знаходитися в двох різних станах).

Також відображення σ повинно бути таким, щоб стан в момент t не залежав від значень входу , які поступають в моменти часу більші моменту t.

Тепер наведемо всі аксіоми, яким задовольняє перехідне відображення σ:

1. *Аксіома узгодженості.* Для довільних $t \in T,\ x \in X,\ u(\cdot) \in U(\cdot)$ виконується рівність:
$$\sigma\big(t;t,x,u(\cdot)\big) = x.$$
2. *Аксіома детермінізму.* Для довільних $t_0 \le t_1 \le t_2,\ x \in X,\ u(\cdot) \in U(\cdot)$ виконується рівність:
$$\sigma\big(t_2;t_0,x,u(\cdot)\big) = \sigma\Big(t_2;t_1,\sigma\big(t_1;t_0,x,u(\cdot)\big),u(\cdot)\Big).$$

Цю аксіому також називають *асоціативною чи наполовину груповою.*

3. *Аксіома причинності.* Для довільних $x \in X,\ (t,t_0) \in (T \times T)^+$ і будь-яких $u(\cdot) \in U(\cdot),\ \bar{u}(\cdot) \in U(\cdot),$ таких, що $u[t_0,t] = \bar{u}[t_0,t],$ виконується рівність:
$$\sigma\big(t;t_0,x,u(\cdot)\big) = \sigma\big(t;t_0,x,\bar{u}(\cdot)\big).$$

Означення (Р.Калман). Кажуть, що деяка система Ξ визначена, якщо задані впорядкована множина T , множина значень входів U , виходів Y і станів X , допустимі множини входів $U(\cdot)$ і виходів $Y(\cdot)$, перехідне відображення σ , яке задовольняє аксіомам узгодженості, детермінізму і причинності, і відображення виходу η такі, що для довільного $y(\cdot) \in Y(\cdot)$ існує $x(\cdot): T \to X$ і $u(\cdot) \in U(\cdot),$ для яких при довільних $\tau, t \in T,$ де $\tau \le t$ виконується співвідношення:
$$y(t) = \eta\Big(t,\sigma\big(t;\tau,x(\tau),u(\cdot)\big)\Big), \tag{3}$$
і навпаки, довільний процес $y(t), t \ge \tau,$ який отримується із (3), належить допустимій множині виходів $Y(\cdot)$.

Тема 4. Основні проблеми теорії систем. Класифікація динамічних систем.

4.1. Основні проблеми теорії систем.

Проблеми, які стоять перед системним дослідником, зв'язані з побудовою множини $X,$ відображень σ та η і вивченням їх властивостей. Круг проблем <u>аналізу систем</u> в основному починають з виявлення всіх факторів, які впливають на поведінку досліджуваної системи. В системному аналізі останні називають *релевантними факторами*. По суті ця проблема зв'язана з вивченням і описом множин $U, U(\cdot), Y, Y(\cdot)$.

Потім виникає задача опису динамічних взаємозв'язків між входами і виходами, тобто задача побудови <u>моделей</u> цих зв'язків, яка називається *проблемою ідентифікації.* Розв'язком цієї проблеми є множина значень станів $X\ (X(\cdot))$ і відображення σ і η.

Нехай X,σ,η задані чи ідентифіковані. Одною із основних цілей одержання X,σ,η є можливість передбачати (прогнозувати) поведінку системи. В основному представляє інтерес прогноз спостережуваної поведінки, тобто виходу $y(t)$. Проте, враховуючи зв'язок

$$y(t)=\eta\big(x(t),t\big), \tag{1}$$

цю задачу можна звести до прогнозу процесу в просторі станів. Із співвідношення $x(t)=\sigma\big(t;t_0,x^0,u(\cdot)\big)$ випливає, що передбачення $x(t)$ для $t\geq t_0$ при відомому вході $u(\cdot)$ являється можливим, якщо в момент t_0 відомо x^0. У відповідності з цим третя <u>основна проблема теорії систем</u> з точки зору аналізу пов'язана з вивченням розв'язуваності задачі знаходження стану системи по спостережуваному входу і виходу, яка називається *проблемою спостережності.*

Нехай фіксований вхід $u(\cdot)$ і для знаходження стану в момент t_1 використовується інформація тільки про вихід в момент t_1. Тоді задача зводиться до розв'язуваності відносно x^1 рівняння виходу $y(t)=\eta\big(x(t),t\big)$, при $y(t_1)=y^1$:

$$y^1=\eta\big(x^1,t_1\big). \tag{2}$$

Якщо, наприклад, розмірність вектора x^1 дорівнює розмірності вектора y^1 і рівняння в (2) незалежні, то із цієї системи можна визначити єдиний розв'язок x^1. Проте множина станів системи в основному буває «багатшою» за множину Y (в цьому і проявляється складність систем). Для систем, у яких X і Y – скінчено вимірні лінійні простори, це виражається в тому, що розмірність X більша розмірності Y. Тоді розв'язок рівняння (2) не являється єдиним, тобто спостережуваному y^1 будуть відповідати різні стани, при яких воно може реалізовуватись. Отже, інформації про вихід в фіксований момент t_1 недостатньо для відновлення стану в цей момент; необхідно мати більше інформації про вихід, наприклад, на інтервалі $[t_0,t_1]$.

Введемо дві множини процесів $X(\cdot)|_{[t_0,t_1]}$ і $Y(\cdot)|_{[t_0,t_1]}$. Процес $x[t_0,t_1]$ однозначно визначає відповідний йому вихід $y[t_0,t_1]$, тобто існує відображення

$$H_{u(\cdot)}: X(\cdot)|_{[t_0,t_1]} \rightarrow Y(\cdot)|_{[t_0,t_1]} .$$

Якщо б для $H_{u(\cdot)}$ існувало обернене відображення $H_{u(\cdot)}^{-1}$, тобто $H_{u(\cdot)}^{-1}$ було б взаємно однозначним, то довільний спостережуваний вихід $y[t_0,t_1]$ породжувався би єдиним процесом $x[t_0,t_1]$ і задача оцінки стану була би розв'язуваною. Для її розв'язання достатньо знайти $H_{u(\cdot)}^{-1}$. Якщо ж $H_{u(\cdot)}$ відображує різні $x[t_0,t_1]$ в один і той же вихід $y[t_0,t_1]$, то оцінити однозначно стан по цьому виходу неможливо.

Означення 1. Система Ξ, відображення $H_{u(\cdot)}$ якої являється взаємно однозначним, називається t_0 – *спостережуваною.*

Відмітимо, що властивість спостережуваності залежить від конкретного входу $u(\cdot)$. Тому при оцінці стану виникає не тільки задача синтезу відповідного алгоритму, але і задача знаходження входу $u(\cdot)$, при якому система буде повністю спостережуваною. Із визначення повністю спостережуваної системи випливає, що спостережуваність являється властивістю відображень σ і η, тобто внутрішньою структурною властивістю системи. В теорії спостережуваності вивчаються умови на σ і η, при яких спостережуваність має місце.

В теорії скінчених автоматів проблему спостережуваності називають *діагностичною проблемою.* Прикладом проблеми спостережуваності є задача діагностики захворювань. Конкретні захворювання – це один із можливих станів, в якому в даний момент знаходиться організм як система. Задача полягає в оцінці цього стану по спостережуваному виходу системи, наприклад, тиск, температура, пульс, кардіограма, аналіз крові і т. і.

Із повної t_0- спостережуваності системи на $[t_0,t_1]$ випливає можливість оцінки довільного стану в момент t_0 за виходом $y[t_0,t_1]$. Якщо ж розглянути задачу оцінки стану в момент t_0 за виходом, який спостерігався до моменту t_0 , наприклад, за $y[t_{-1},t_0]$, де $t_{-1}<t_0$, то ця задача відрізняється від задачі спостережуваності. Задачу оцінки стану системи за виходом, який спостерігався в попередні моменти часу, Р. Калман назвав задачею *реконструкції чи оцінювання.*

Наступна основна проблема теорії систем пов'язана з дослідженням питань розв'язуваності задач формування спеціальної поведінки систем. Формування спеціальної поведінки диктується необхідністю задоволення певних вимог, які накладаються на процес. Останні називаються *ціллю (метою),* яка ставиться перед системою. При цьому вважається, що в момент початку формування входів процес в системі не задовольняв вимогам, сформульованим в цілі (меті) керування.

Впливати на поведінку системи можна тільки входами, тому в множині входів виділяється підмножина $U_1(\cdot)$, елементи якої формуються суб'єктом. Таким чином, множина входів розбивається на дві підмножини $U_1(\cdot)$ і $U_2(\cdot)$, $\left(U_1(\cdot)\cup U_2(\cdot)=U(\cdot), U_1(\cdot)\cap U_2(\cdot)=\varnothing\right)$, одна з яких не залежить від суб'єкта (і називається *підмножиною збурень* $U_2(\cdot)$), а друга – *підмножина керувань* $U_1(\cdot)$. Система, ціль (мета) і початкові дані, на основі яких повинна розв'язуватись задача знаходження керувань (входів), які забезпечують досягнення цілі (мети), називається *проблемою керування.*

Вимоги на поведінку системи в основному накладаються на вихідний процес. Проте, враховуючи (1) , їх завжди можна (і це має смисл при розв'язуванні задач керування) переформулювати у вигляді умов, які накладаються на процес в просторі станів (тобто, на $x(\cdot)$).

Однією з найважливіших задач теорії керування є *двохточкова гранична задача* , яка полягає в наступному. Нехай ціль керування полягає в тому, щоби в момент $t_1>t_0$ система знаходилася в стані x^1 (причому в момент t_0 система знаходилася в стані x^0). Потрібно знайти такий вхід $\bar{u}(\cdot)\in U(\cdot)$, щоби виконувалася рівність

$$x^1=\sigma\left(t_1;t_0,x^0,\bar{u}(\cdot)\right) . \qquad (3)$$

Якщо зафіксувати $\left(t_0,x^0\right)$, то для деяких $\left(t_1,x^1\right)$ рівняння (3) відносно $\bar{u}(\cdot)$ може бути розв'язаним, а для інших – нерозв'язаним. (Лабораторна №3).

Означення 2. Система називається (t_0,x^0)– *глобально досяжною,* якщо для довільного x^1 існують $t_1(x^1)>t_0$ та $\bar{u}(\cdot)$, які задовольняють співвідношення (3).

Означення 3. Система називається (t_1,x^1)– *глобально керованою,* якщо для довільного x^0 існує $t_0(x^0)<t_1$ і $\bar{u}(\cdot)$ такі, що виконується співвідношення (3).

Якщо можна вказати скінчений окіл точки x^0 , такий що для всіх x^1 із цього околу виконуються умови досяжності, то кажуть про *локальну досяжність.* Аналогічно треба розуміти *локальну керованість*.

Можна також ввести поняття керованості і досяжності на заданому скінченому інтервалі часу.

Із означень 2, 3 витікає, що керованість і досяжність являються властивостями перехідного відображення σ . Задачі, які зв'язані з розробкою ефективних критеріїв, що дозволяють за відображенням σ встановлювати , чи являється система повністю керованою чи повністю досяжною, складають *предмет теорії керування.*

Важливою проблемою аналізу систем є *проблема стійкості*. Вона виникає при вивчені питання, чи буде система виконувати свою функцію і призначення в умовах , коли виникають різні збурення, що часто являється проявом неповного знання про навколишнє середовище і саму систему. Нехай призначення системи полягає в перетворені заданого входу $u^0(\cdot)$ (який породжує процес $x^0(\cdot)$) у вихід $y^0(\cdot)$. Якщо в результаті деяких обставин процес $\bar{x}(\cdot)$ в просторі станів не співпадає з $x^0(\cdot)$, тобто $\bar{x}(t_0)=x^0(t_0)+\vartriangle x(t_0)$, що може бути наслідком того, що в момент t_0 появилось відхилення $\vartriangle x(t_0)$, то природно виникає питання , чи збігається при $t>t_0$ і $t\to\infty$ процес $\bar{y}(t)=\eta(\bar{x}(t),t)$ в деякому розумінні до процесу $y^0(\cdot)$, чи буде він до нього близький. Вказана збіжність буде мати місце, якщо $\sigma(t;t_0,x^0+\vartriangle x(t_0),u^0(\cdot))$ буде збігатися до $\sigma(t;t_0,x^0,u^0(\cdot))$. Процес $x^0(\cdot)$ називають *незбуреним рухом системи,* а процес $\bar{x}(\cdot)$– *збуреним рухом.* Вивчення властивостей відображення σ , які забезпечують вказану збіжність процесів чи їх близькість, складають предмет *теорії стійкості систем.* (Лабораторна №4).

Багато інших проблем теорії систем являються деталізацією сформульованих вище проблем. Ці проблеми виникають при синтезі систем з потрібними властивостями. До них відносяться такі проблеми синтезу: *оптимального програмного керування; оптимальних законів керування(синтез),* тобто керування, яке формується в кожний момент часу на основі інформації про стан системи в цей момент (Тема №6); *законів керування,* які забезпечують стійкість системи; *оберненого зв'язку,* тобто керування за виходом системи; *адаптивних систем,* де в процесі керування проходить, зокрема, процес ідентифікації системи, зв'язаний з оцінкою її структурних параметрів; *систем розпізнавання чи класифікації вхідних даних* і т.д..

4.2. Класифікація динамічних систем.

Означення 1. Динамічна система називається *дискретною за часом,* якщо

$$T = \{t_k : k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ t_{k-1} \le t_k\} .$$

Означення 2. Динамічна система називається *неперервною за часом* , якщо T співпадає із множиною всіх дійсних чисел, чи є інтервалом $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \infty)$.

Означення 3. Динамічна система називається *скінченим автоматом,* якщо вона являється дискретною за часом а множини U, X, Y мають скінчене число елементів.

Означення 4. Динамічна система називається *скінчено вимірною,* якщо множини U, X, Y являються скінчено вимірними лінійними просторами **.**

Означення 5. Динамічна система називається *стаціонарною* , якщо:

1) T являється адитивною групою;
2) для довільного $s \in T$ із $u(\cdot) \in U(\cdot)$ витікає $\bar{u}(\cdot) \in U(\cdot)$, де для всіх $t \in T$ виконується рівність $\bar{u}(t-s) = u(t)$;
3) рівність $\sigma(t; t_0, x, u(\cdot)) = \sigma(t-s; t_0 - s, x, \bar{u}(\cdot))$ виконується для всіх $s \in T$;
4) відображення $\eta(x,t)$ не залежить від t .

Означення 6. Динамічна система називається *лінійною,* якщо:
1) множини $X, Y, U, U(\cdot), Y(\cdot)$ являються лінійними просторами;
2) відображення $\sigma(t; t_0, x, u(\cdot))$ лінійне по x і $u(\cdot)$;
3) відображення $\eta(x,t)$ лінійне по x .

Таким чином, у випадку лінійних систем відображення σ і η мають вигляд:

$$\sigma(t; t_0, x, u(\cdot)) = \Phi^0(t, t_0)x + \Theta^0(t, t_0)u(\cdot),$$
$$\eta(x, t) = C^0(t)x,$$

де $\Phi^0(t,t_0)$ – лінійний оператор, що відображає X в X;

$\Theta^0(t,t_0)$ – лінійний оператор із $U(\cdot)$ в X;

$C^0(t)$ – лінійний оператор із X в Y.

Означення 7. Лінійний скінчений автомат називається *лінійною послідовною машиною.*

Зауважимо, що клас лінійних систем (що задається означенням 6) значно ширший класу систем, які описуються скінченим набором лінійних диференціальних рівнянь.

Означення 8. Динамічна система називається *гладкою,* якщо:

1) множини $T,U,X,Y,U(\cdot)$ являються топологічними просторами;
2) функція $x(t)=\sigma(t;s,x,u(\cdot))$ при довільних s,x належить класу гладких функцій, якщо $u(\cdot)$ – неперервна функція.

Як показано у книзі Р. Калмана, у випадку гладких систем існує таке відображення $f:T\times X\times U\to X$, що перехідне відображення σ являє собою розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\left(x(t),u(t),t\right)$$

при початковій умові $x(s)=x^s$.

Тому проблема ідентифікації для гладких систем зводиться до знаходження відображення $f:T\times X\times U\to X$, що є менш громіздкою задачею.

Аналогічно, у випадку дискретних за часом динамічних систем існує таке відображення $f(x,u,t_k)$, що $\sigma(t_k;t_0,x^0,u(\cdot))$ являється розв'язком рекурентного співвідношення (чи різницевого рівняння):

$$x(t_{k+1})=f(x,u,t_k),\ x(t_0)=x^0\ .$$

На основі сказаного закон поведінки систем, які належать класу гладких чи класу дискретних за часом систем, можна описувати парою відображень f,η а не парою σ,η .

Дану класифікацію можна продовжувати, вимагаючи певних властивостей від X,Y,U і фіксуючи ті чи інші властивості відображень σ,η чи відображень f,η . Наприклад, якщо X не являється лінійним простором, але має узгоджені між собою топологічні і групові структури, то одержуємо *клас систем на многовидах.*

Тема 5. Основні проблеми теорії систем. Класифікація динамічних систем за Калманом.

4.1. Основні проблеми теорії систем.

Проблеми, які стоять перед системним дослідником, зв'язані з побудовою множини $X,$ відображень σ та η і вивченням їх властивостей. Круг проблем аналізу систем в основному починають з виявлення всіх факторів, які впливають на поведінку досліджуваної системи. В системному аналізі останні називають *релевантними факторами*. По суті ця проблема зв'язана з вивченням і описом множин $U, U(\cdot), Y, Y(\cdot)$.

Потім виникає задача опису динамічних взаємозв'язків між входами і виходами, тобто задача побудови моделей цих зв'язків, яка називається *проблемою ідентифікації.* Розв'язком цієї проблеми є множина значень станів $X\ (X(\cdot))$ і відображення σ і $\eta.$

Нехай X, σ, η задані чи ідентифіковані. Одною із основних цілей одержання X, σ, η є можливість передбачати (прогнозувати) поведінку системи. В основному представляє інтерес прогноз спостережуваної поведінки, тобто виходу $y(t).$ Проте, враховуючи зв'язок

$$y(t) = \eta(x(t), t), \qquad (1)$$

цю задачу можна звести до прогнозу процесу в просторі станів. Із співвідношення $x(t) = \sigma(t; t_0, x^0, u(\cdot))$ випливає, що передбачення $x(t)$ для $t \geq t_0$ при відомому вході $u(\cdot)$ являється можливим, якщо в момент t_0 відомо x^0. У відповідності з цим третя основна проблема теорії систем з точки зору аналізу пов'язана з вивченням розв'язуваності задачі знаходження стану системи по спостережуваному входу і виходу, яка називається *проблемою спостережності.*

Нехай фіксований вхід $u(\cdot)$ і для знаходження стану в момент t_1 використовується інформація тільки про вихід в момент t_1. Тоді задача зводиться до розв'язуваності відносно x^1 рівняння виходу $y(t) = \eta(x(t), t),$ при $y(t_1) = y^1$:

$$y^1 = \eta(x^1, t_1). \qquad (2)$$

Якщо, наприклад, розмірність вектора x^1 дорівнює розмірності вектора y^1 і рівняння в (2) незалежні, то із цієї системи можна визначити єдиний розв'язок x^1 . Проте множина станів системи в основному буває «багатшою» за множину Y (в цьому і проявляється складність систем). Для систем, у яких X і Y – скінчено вимірні лінійні простори, це виражається в тому, що розмірність X більша розмірності Y. Тоді розв'язок рівняння (2) не являється єдиним, тобто спостережуваному y^1 будуть відповідати різні стани, при яких воно може реалізовуватись. Отже, інформації про вихід в фіксований момент t_1 недостатньо для відновлення стану в цей момент; необхідно мати більше інформації про вихід, наприклад, на інтервалі $[t_0,t_1]$.

Введемо дві множини процесів $X(\cdot)|_{[t_0,t_1]}$ і $Y(\cdot)|_{[t_0,t_1]}$. Процес $x[t_0,t_1]$ однозначно визначає відповідний йому вихід $y[t_0,t_1]$, тобто існує відображення

$$H_{u(\cdot)}: X(\cdot)|_{[t_0,t_1]} \to Y(\cdot)|_{[t_0,t_1]} .$$

Якщо б для $H_{u(\cdot)}$ існувало обернене відображення $H_{u(\cdot)}^{-1}$, тобто $H_{u(\cdot)}^{-1}$ було б взаємно однозначним, то довільний спостережуваний вихід $y[t_0,t_1]$ породжувався би єдиним процесом $x[t_0,t_1]$ і задача оцінки стану була би розв'язуваною. Для її розв'язання достатньо знайти $H_{u(\cdot)}^{-1}$. Якщо ж $H_{u(\cdot)}$ відображує різні $x[t_0,t_1]$ в один і той же вихід $y[t_0,t_1]$, то оцінити однозначно стан по цьому виходу неможливо.

Означення 1. Система Ξ, відображення $H_{u(\cdot)}$ якої являється взаємно однозначним, називається t_0 – *спостережуваною.*

Відмітимо, що властивість спостережуваності залежить від конкретного входу $u(\cdot)$. Тому при оцінці стану виникає не тільки задача синтезу відповідного алгоритму, але і задача знаходження входу $u(\cdot)$, при якому система буде повністю спостережуваною. Із визначення повністю спостережуваної системи випливає, що спостережуваність являється властивістю відображень σ і η, тобто внутрішньою структурною властивістю системи. В теорії спостережуваності вивчаються умови на σ і η, при яких спостережуваність має місце.

В теорії скінчених автоматів проблему спостережуваності називають *діагностичною проблемою.* Прикладом проблеми спостережуваності є задача діагностики захворювань. Конкретні захворювання – це один із можливих станів, в якому в даний момент знаходиться організм як система. Задача полягає в оцінці цього стану по спостережуваному виходу системи, наприклад, тиск, температура, пульс, кардіограма, аналіз крові і т. і.

Із повної t_0 – спостережуваності системи на $[t_0,t_1]$ випливає можливість оцінки довільного стану в момент t_0 за виходом $y[t_0,t_1]$. Якщо ж розглянути задачу оцінки стану в момент t_0 за виходом, який спостерігався до моменту t_0, наприклад, за $y[t_{-1},t_0]$, де $t_{-1}<t_0$, то ця задача відрізняється від задачі спостережуваності. Задачу оцінки стану системи за виходом, який спостерігався в попередні моменти часу, Р. Калман назвав задачею *реконструкції чи оцінювання.*

Наступна основна проблема теорії систем пов'язана з дослідженням питань розв'язуваності задач формування спеціальної поведінки систем. Формування спеціальної поведінки диктується необхідністю задоволення певних вимог, які накладаються на процес. Останні називаються *ціллю (метою),* яка ставиться перед системою. При цьому вважається, що в момент початку формування входів процес в системі не задовольняв вимогам, сформульованим в цілі (меті) керування.

Впливати на поведінку системи можна тільки входами, тому в множині входів виділяється підмножина $U_1(\cdot)$, елементи якої формуються суб'єктом. Таким чином, множина входів розбивається на дві підмножини $U_1(\cdot)$ і $U_2(\cdot)$, $(U_1(\cdot)\cup U_2(\cdot)=U(\cdot), U_1(\cdot)\cap U_2(\cdot)=\varnothing)$, одна з яких не залежить від суб'єкта (і називається *підмножиною збурень* $U_2(\cdot)$), а друга – *підмножина керувань* $U_1(\cdot)$. Система, ціль (мета) і початкові дані, на основі яких повинна розв'язуватись задача знаходження керувань (входів), які забезпечують досягнення цілі (мети), називається *проблемою керування.*

Вимоги на поведінку системи в основному накладаються на вихідний процес. Проте, враховуючи (1), їх завжди можна (і це має смисл при розв'язуванні задач керування) переформулювати у вигляді умов, які накладаються на процес в просторі станів (тобто, на $x(\cdot)$).

Однією з найважливіших задач теорії керування є *двохточкова гранична задача*, яка полягає в наступному. Нехай ціль керування полягає в тому, щоби в момент $t_1>t_0$ система знаходилася в стані x^1 (причому в момент t_0 система знаходилася в стані x^0). Потрібно знайти такий вхід $\bar{u}(\cdot)\in U(\cdot)$, щоби виконувалася рівність

$$x^1=\sigma\left(t_1;t_0,x^0,\bar{u}(\cdot)\right). \qquad (3)$$

Якщо зафіксувати (t_0, x^0), то для деяких (t_1, x^1) рівняння (3) відносно $\bar{u}(\cdot)$ може бути розв'язаним, а для інших – нерозв'язаним. (Лабораторна робота №3).

Означення 2. Система називається (t_0, x^0)– *глобально досяжною,* якщо для довільного x^1 існують $t_1(x^1) > t_0$ та $\bar{u}(\cdot)$, які задовольняють співвідношення (3).

Означення 3. Система називається (t_1, x^1)– *глобально керованою,* якщо для довільного x^0 існує $t_0(x^0) < t_1$ і $\bar{u}(\cdot)$ такі, що виконується співвідношення (3).

Якщо можна вказати скінчений окіл точки x^0, такий що для всіх x^1 із цього околу виконуються умови досяжності, то кажуть про *локальну досяжність.* Аналогічно треба розуміти *локальну керованість*.

Можна також ввести поняття керованості і досяжності на заданому скінченому інтервалі часу.

Із означень 2, 3 витікає, що керованість і досяжність являються властивостями перехідного відображення σ. Задачі, які зв'язані з розробкою ефективних критеріїв, що дозволяють за відображенням σ встановлювати , чи являється система повністю керованою чи повністю досяжною, складають *предмет теорії керування.*

Важливою проблемою аналізу систем є *проблема стійкості*. Вона виникає при вивчені питання, чи буде система виконувати свою функцію і призначення в умовах , коли виникають різні збурення, що часто являється проявом неповного знання про навколишнє середовище і саму систему. Нехай призначення системи полягає в перетворені заданого входу $u^0(\cdot)$ (який породжує процес $x^0(\cdot)$) у вихід $y^0(\cdot)$. Якщо в результаті деяких обставин процес $\bar{x}(\cdot)$ в просторі станів не співпадає з $x^0(\cdot)$, тобто $\bar{x}(t_0) = x^0(t_0) + \Delta x(t_0)$, що може бути наслідком того, що в момент t_0 появилось відхилення $\Delta x(t_0)$, то природно виникає питання , чи збігається при $t > t_0$ і $t \to \infty$ процес $\bar{y}(t) = \eta(\bar{x}(t), t)$ в деякому розумінні до процесу $y^0(\cdot)$, чи буде він до нього близький. Вказана збіжність буде мати місце, якщо $\sigma(t; t_0, x^0 + \Delta x(t_0), u^0(\cdot))$ буде збігатися до $\sigma(t; t_0, x^0, u^0(\cdot))$. Процес $x^0(\cdot)$ називають *незбуреним рухом системи,* а процес $\bar{x}(\cdot)$– *збуреним рухом.* Вивчення властивостей відображення σ, які забезпечують вказану збіжність процесів чи їх близькість, складають предмет *теорії стійкості систем.* (Лабораторна робота №4).

Багато інших проблем теорії систем являються деталізацією сформульованих вище проблем. Ці проблеми виникають при синтезі систем з потрібними властивостями. До них відносяться такі проблеми синтезу: *оптимального програмного керування; оптимальних законів керування(синтез),* тобто керування, яке формується в кожний момент часу на основі інформації про стан системи в цей момент (Лабораторна робота №5); *законів керування,* які забезпечують стійкість системи; *оберненого зв'язку,* тобто керування за виходом системи; *адаптивних систем,* де в процесі керування проходить, зокрема, процес ідентифікації системи, зв'язаний з оцінкою її структурних параметрів; *систем розпізнавання чи класифікації вхідних даних* і т.д..

5.2. Класифікація динамічних систем за Калманом.

Означення 4. Динамічна система називається *дискретною за часом,* якщо

$$T = \{t_k : k = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \ t_{k-1} \le t_k\} \ .$$

Означення 5. Динамічна система називається *неперервною за часом* , якщо T співпадає із множиною всіх дійсних чисел, чи є інтервалом $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \infty)$.

Означення 6. Динамічна система називається *скінченим автоматом,* якщо вона являється дискретною за часом а множини U, X, Y мають скінчене число елементів.

Означення 7. Динамічна система називається *скінчено вимірною,* якщо множини U, X, Y являються скінчено вимірними лінійними просторами **.**

Означення 8. Динамічна система називається *стаціонарною* , якщо:

1) T являється адитивною групою;
2) для довільного $s \in T$ із $u(\cdot) \in U(\cdot)$ витікає $\bar{u}(\cdot) \in U(\cdot)$, де для всіх $t \in T$ виконується рівність $\bar{u}(t-s) = u(t)$;
3) рівність $\sigma(t; t_0, x, u(\cdot)) = \sigma(t-s; t_0 - s, x, \bar{u}(\cdot))$ виконується для всіх $s \in T$;
4) відображення $\eta(x,t)$ не залежить від t .

Означення 9. Динамічна система називається *лінійною,* якщо:
1) множини $X,Y,U,U(\cdot),Y(\cdot)$ являються лінійними просторами;
2) відображення $\sigma(t;t_0,x,u(\cdot))$ лінійне по x і $u(\cdot)$;
3) відображення $\eta(x,t)$ лінійне по x .

Таким чином, у випадку лінійних систем відображення σ і η мають вигляд:

$$\sigma(t;t_0,x,u(\cdot)) = \Phi^0(t,t_0)x + \Theta^0(t,t_0)u(\cdot),$$
$$\eta(x,t) = C^0(t)x,$$

де $\Phi^0(t,t_0)$ – лінійний оператор, що відображає X в X;
$\Theta^0(t,t_0)$ – лінійний оператор із $U(\cdot)$ в X;
$C^0(t)$ – лінійний оператор із X в Y.

Означення 10. Лінійний скінчений автомат називається *лінійною послідовною машиною.*

Зауважимо, що клас лінійних систем (що задається означенням 6) значно ширший класу систем, які описуються скінченим набором лінійних диференціальних рівнянь.

Означення 11. Динамічна система називається *гладкою,* якщо:
1) множини $T,U,X,Y,U(\cdot)$ являються топологічними просторами;
2) функція $x(t)=\sigma(t;s,x,u(\cdot))$ при довільних s,x належить класу гладких функцій, якщо $u(\cdot)$ – неперервна функція.

Як показано у книзі Р. Калмана, у випадку гладких систем існує таке відображення $f: T\times X\times U \to X$, що перехідне відображення σ являє собою розв’язок диференціального рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),u(t),t)$$

при початковій умові $x(s) = x^s$.

Тому проблема ідентифікації для гладких систем зводиться до знаходження відображення $f: T\times X\times U \to X$, що є менш громіздкою задачею.

Аналогічно, у випадку дискретних за часом динамічних систем існує таке відображення $f(x,u,t_k)$, що $\sigma(t_k;t_0,x^0,u(\cdot))$ являється розв’язком рекурентного співвідношення (чи різницевого рівняння):

$$x(t_{k+1}) = f(x,u,t_k),\ x(t_0)=x^0 .$$

На основі сказаного закон поведінки систем, які належать класу гладких чи класу дискретних за часом систем, можна описувати парою відображень f,η а не парою σ,η .

Дану класифікацію можна продовжувати, вимагаючи певних властивостей від X,Y,U і фіксуючи ті чи інші властивості відображень σ,η чи відображень f,η . Наприклад, якщо X не являється лінійним простором, але має узгоджені між собою топологічні і групові структури, то одержуємо *клас систем на многовидах.*

Тема № 6. Методи розв'язання типових задач оптимального керування.

6.1. Лінійна задача Майєра

Задача 0.13. Знайти керування $u(t) \in R^r$, яке в кожен момент часу $t \in [t_0;T]$ належить заданій множині $V(t) \subset R^r$ $(u(t) \in V(t))$ і максимізує значення $(c, x(T))$ на розв'язках $x(T)$ керованої системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + g(u(t), t)$$

для заданих моментів часу t_0, T, заданої матриці $A(t) \in R^n \times R^n$, заданої вектор-функції $g(u(t), t) \in R^n$ і заданого вектора $c \in R^n$.

Розв'язання. З теореми принципу максимуму для даної задачі випливає, що в кожен момент часу t значення $u^0(t)$ оптимального керування є максимізатором скалярного добутку $(g(u(t),t), \psi(t))$ на допустимій множині $V(t)$, де $\psi(t)$ – розв'язок задачі Коші для спряженої системи

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t), \; \psi(T) = c,$$

тобто для всіх $u(t) \in V(t)$ виконується нерівність принципу максимуму

$$(g(u^0(t),t), \psi(t)) \geq (g(u(t),t), \psi(t)).$$

Отже, метод побудови оптимального керування $u^0(t)$ реалізується за допомогою використання числового алгоритму для обчислення траєкторії $\psi(t)$ у зворотному часі t, починаючи від відомого в кінцевий момент часу $t = T$ значення $\psi(T) = c$ до початкового моменту часу $t = t_0$ з паралельним обчисленням у кожен момент часу t оптимального керування

$$u^0(t) = \arg \max_{u \in V(t)} (g(u,t), \psi(t)).$$

Приклад 0.8. Знайти керування $u(t) \in R^r$, яке в кожен момент часу t належить множині $V(t) = \{u \subset R^r \mid -1 \leq u_i \leq 1, \; i = \overline{1,r}\}$, тобто кожна компонента вектор-функції керування належить інтервалу $[-1;1]$ $\left(u_i(t) \in [-1;1], \; i = \overline{1,r}\right)$ і максимізує значення скалярного добутку $(c, x(T))$ на розв'язку $x(T) = (x_1(T), x_2(T))^T$ задачі Коші

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \; \frac{dx_2}{dt} = u$$

для заданих моментів часу $t_0 = 0,\ T = 1$.

Розв'язання. У даному прикладі маємо керовану систему $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + g(u(t),t)$ із матрицею $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ і вектор-функцією $g(u(t),t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix}$. Вектор-функція $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))^T$ є розв'язком задачі Коші $\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t),\ \psi(T) = c$, і для транспонованої матриці $A^T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ задовольняє рівняння

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = 0,\ \frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1(t),\ \psi_1(T) = c_1,\ \psi_2(T) = c_2 .$$

Розв'язком цих рівнянь є функції $\psi_1(t) = c_1,\ \psi_2(t) = c_1(T-t) + c_2$. Для даного прикладу маємо

$$\left(g(u,t), \psi(t)\right) = u(t)\psi_2(t) = u(t)(c_1(T-t) + c_2),$$

тому оптимальне керування $u^0(t)$ обчислюємо за формулою принципу максимуму

$$u^0(t) = \arg\max_{|u|\le 1}(g(u,t), \psi(t)) = \arg\max_{|u|\le 1}(u\psi_2(t)) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо } \psi_2(t) > 0, \\ -1, & \text{якщо } \psi_2(t) < 0, \\ \text{будь-якому числу із } [-1;1], & \text{якщо } \psi_2(t) = 0. \end{cases}$$

З рівняння $\psi_2(t) = c_1(T-t) + c_2$ випливає, що

$$\psi_2(t) > 0 \text{ для } t < T + c_2 / c_1;$$

$$\psi_2(t) < 0 \text{ для } t > T + c_2 / c_1;$$

$$\psi_2(t) = 0 \text{ для } t = T + c_2 / c_1.$$

Це означає, що $u^0(t) = 1$ для моментів часу $t < T + c_2 / c_1$, $u^0(t) = -1$ – для моментів часу $t > T + c_2 / c_1$ і $u^0(t)$ дорівнює будь-якому числу з інтервалу $[-1;1]$ у момент часу $t = T + c_2 / c_1$.

З а д а ч а 0.14. Знайти керування $u(t)$, яке в кожен момент часу t належить множині $u(t) \in V(t) \subset R^r$ і для заданої опуклої функції $F : R^n \to R$ максимізує значення $F(x(T))$ на розв'язках $x(T)$ задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + g(u(t),t),\ x(t_0) = x^0 \in R^n .$$

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли оптимальне значення $x^0(T)$ не є внутрішньою точкою множини $X(T)$ значень $x(T)$, визначених усіма допустимими керуваннями $u(t) \in V(t) \subset R^r$. Якщо $c^0 \neq 0$ є таким вектором, що оптимальний розв'язок $x_c(T)$ задачі 0.13 при $c = c^0$ задовольняє нерівність $F(x) \leq F(x_c(T)) + (c, x - x_c(T))$ для всіх $x \in R^n$, то оптимальним розв'язком задачі 0.14 є оптимальний розв'язок задачі 0.13 для вектора $c = c^0$, при цьому вектор c^0 є узагальненим градієнтом функції F у точці $x_c(T)$. Це випливає з того, що множина $X(T)$ усіх значень $x_c(T)$, визначених усіма допустимими керуваннями $u(t) \in V(t) \subset R^r$, є опуклою, а вектор c – опорним до множини $X(T)$ у точці $x_c(T)$. Отже, шуканий вектор c^0 може бути обчислений як максимізатор функції $\varphi(c) \triangleq F(x_c(T))$, узагальненим градієнтом якої є вектор $\Pi(F, x_c(T), c) - c$, де $\Pi(F, x_c(T), c)$ – проекція вектора c на множину узагальнених градієнтів функції F у точці $x_c(T)$.

У випадку диференційованої функції F множина опорних градієнтів складається з одного вектора $\nabla_x F(x_c(T))$, тому для обчислення вектора c^0 можна скористатися ітераційною формулою

$$c^{k+1} = c^k + \lambda_k (\nabla_x F(x_c(T)) - c^k),\ k = 1, 2, \ldots,\ c^1 \in R^n$$

з вибором множника λ_k з умови $F(x_{c^{k+1}}(T)) > F(x_{c^k}(T))$.

6.2. Побудова керування, оптимального за швидкодією

З а д а ч а 0.15. Знайти керування $u(t) \in R^r$, яке в кожен момент часу $t \in [t_0; T]$ належить заданій множині $V(t) \subset R^r$ $(u(t) \in V(t))$ і переводить керовану систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + g(u(t), t),\ x(t_0) = x^0 \in R^n,$$

у заданий кінцевий стан $x(T) = x^1$ за мінімальний час $T - t_0$, тобто мінімізує значення T.

Розв'язання. З опуклості множини $X(T)$ усіх значень $x(T)$, генерованих допустимими керуваннями $u(t) \in V(t)$, випливає, що розв'язком задачі 0.15. є розв'язок задачі 0.13 для мінімального часу $T = T^0$, який задовольняє умову $x^1 \in X(T)$, і вектора $c = c^0$, за якого розв'язок $x(T^0)$ задачі 0.13 задовольняє рівність $x(T^0) = x^1$. Для відшукання оптимальних значень T^0, c^0 можна скористатися числовим алгоритмом побудови збіжної до T^0, c^0 послідовності $\{T^k, c^k\}_{k=1}^{\infty}$ згідно з твердженням леми 0.2.

Лема 0.2. Якщо на розв'язку задачі 0.13 для значень $T = T^k$, $c = c^k$ допоміжна функція $\varphi(t, c^k) \triangleq (\psi(t), x^1 - x(t))$ задовольняє нерівність $\varphi(t, c^k) > 0$ для всіх $t \in [t_0; T^k]$, то $T^0 > T^k$.

Справедливість леми 0.2 випливає з того, що множина $X(t)$ опукла і, отже, з нерівності $\varphi(t, c^k) > 0$ випливає, що точка x^T не належить множині $X(t)$.

Момент часу T^{k+1}, який залежить від значення вектора c^k, обчислюється як найменший корінь рівняння $\varphi(t, c^k) = 0$, більший за T^k, а значення c^{k+1} – за формулою методу узагальненого градієнта

$$c^{k+1} = \psi(T^{k+1})c^k + \lambda_k (x^1 - x(T^{k+1})) .$$

Відомо, що метод узагальненого градієнта генерує збіжну до T^0 послідовність T^k при $\lambda_k = L / k$ із будь-якою додатною константою L.

6.3. Двоїста задача Майєра. Мінімізація амплітуди керування

Задача 0.16. Знайти оптимальне керування $u(t) \in R^r$, яке в кожен момент часу $t \in [t_0; T]$ задовольняє нерівність $| u_i(t) | \le \alpha,\ i = \overline{1, r}$, і за найменшого значення α переводить лінійну керовану систему $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ із заданого початкового стану $x(t_0) = x^0 \in R^n$ у стан $x(T)$, що задовольняє рівність $(c, x(T)) = d$.

Розв'язання. З розв'язку задачі 0.13 випливає, що значення оптимального керування $u^0(t)$ для задачі 0.16 в кожен момент часу t є максимізатором функції $(B(t)u, \psi(t))$ на множині $\{u \mid\ | u_i(t) | \le \alpha,\ i = \overline{1, r}\}$. Легко перевірити, що в даному випадку

$$u^0(t) = \alpha sign[B^T(t)\psi(t)],$$

де $\psi(t)$ – розв'язок задачі Коші $\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t),\ \psi(T) = c$, а символом $sign[v]$ позначено вектор, отриманий з вектора v, координатами якого є значення функції $sign$ від відповідних координат вектора, а саме: якщо $v_i > 0$, то $sign(v_i) = 1$; якщо $v_i < 0$, то $sign(v_i) = -1$; якщо $v_i = 0$, то $sign(v_i) = 0$.

З тотожності

$$(c, x(T)) \equiv (\psi(t_0), x(t_0)) + \int_{t_0}^{T} (\psi(t), B(t)u(t))dt ,$$

яка виконується для траєкторії $x(t)$ керованої системи та траєкторії $\psi(t)$ спряженої системи $\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t),\ \psi(T) = c$, випливає, що на оптимальному керуванні справедливі рівності

$$d = (\psi(t_0), x(t_0)) + \alpha \int_{t_0}^{T} (\psi(t), B(t) sign[B^T(t)\psi(t)])dt =$$

$$= (\psi(t_0), x(t_0)) + \alpha \int_{t_0}^{T} \| B^T(t)\psi(t) \|_2 \, dt ,$$

де $\| v \|_2 \triangleq \sum_i | v_i |$. Звідси мінімальне значення α^0 обчислюється за формулою

$$\alpha^0 = \left(d - (\psi(t_0), x(t_0)) \right) \Big/ \int_{t_0}^{T} \| B^T(t)\psi(t) \|_2 \, dt ,$$

а оптимальне керування для задачі 0.16 – за формулою

$$u^0(t) = \alpha^0 sign[B^T(t)\psi(t)] .$$

З а д а ч а 0.17. Знайти оптимальне керування $u(t) \in R^r$, яке в кожен момент часу $t \in [t_0; T]$ задовольняє нерівності $| u_i(t) | \le \alpha,\ i = \overline{1, r}$, і за найменшого значення α переводить лінійну керовану систему $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ із заданого початкового стану $x(t_0) = x^0 \in R^n$ у заданий стан $x(T) = x^1$.

Розв'язання. Якщо $c^0 \ne 0$ – такий вектор, що оптимальна траєкторія $x^0(t)$ задачі 0.13 при $c = c^0$ і $d = (x^1, c^0)$ задовольняє умову $x^0(T) = x^1$, то оптимальним керуванням для задачі 0.17 є оптимальне керування для задачі 0.13 при $c = c^0$.

Вектор c^0 обчислюється як максимізатор за c мінімального значення

$$\alpha^0(c) \triangleq \left((c, x^1) - (\psi(t_0), x(t_0)) \right) \Big/ \int_{t_0}^{T} \| B^T(t)\psi(t) \|_2 \, dt$$

для задачі 0.13 за умови $d = (c^0, x^1)$, тобто $c^0 = \arg\max_c \alpha^0(c)$ на розв'язку $\psi(t)$ задачі Коші $\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t),\ \psi(T) = c$. Оскільки функція $\alpha^0(c)$ опукла догори, то для її максимізації можна скористатися будь-яким із числових алгоритмів максимізації опуклих догори функцій, беручи до уваги, що узагальненим градієнтом функції $\alpha^0(c)$ є вектор $x^1 - x_c(T)$, визначений за значенням $x_c(T)$ оптимального розв'язку задачі 0.16 для $d = (c, x^1)$.

З а д а ч а 0.18. Знайти оптимальне керування $u(t) \in R^r$, яке в кожен момент часу $t \in [t_0; T]$ задовольняє нерівності $| u_i(t) | \le \alpha,\ i = \overline{1, r}$, і за найменшого значення α переводить лінійну керовану систему $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ із заданого початкового стану $x(t_0) = x^0 \in R^n$ на задану множину $X^* \subset R^n$ допустимих кінцевих станів $x(T) \in X^*$.

Метод розв'язання задачі 0.18 аналогічний методу розв'язання задачі 0.17 для $x^T = \arg\min_{x \in X^*} (c, x)$.

6.4. Мінімізація квадратичного функціонала

Задача 0.19. Знайти оптимальне керування $u(t) \in R^r$, що мінімізує квадратичний функціонал $\int_{t_0}^{T} (K(t)u(t), u(t))dt$ і при цьому переводить лінійну керовану систему $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f^1(t)$ із заданого початкового стану $x(t_0) = x^0 \in R^n$ у заданий кінцевий стан $x(T) = x^1 \in R^n$.

Розв'язання. Розглянемо випадок додатно визначеної матриці $K(t)$, для якої існує обернена матриця $K^{-1}(t)$, і скористаємося відомою формулою

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) + \Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t} \Psi^T(\tau,t_0)(B(\tau)u(\tau) + f^1(t))d\tau$$

залежності траєкторії $x(t)$ від початкового стану $x(t_0)$, керування $u(t)$ і збурення $f^1(t)$ на інтервалі часу $t \in [t_0;T]$, де матриця Коші $\Phi(t,t_0)$ є розв'язком матричної задачі Коші

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt} = A(t)\Phi(t,t_0),\ \Phi(t_0,t_0) = I,$$

I – одинична матриця, а матриця $\Psi^T(t,t_0)$ транспонована до матриці Коші $\Psi(t,t_0)$ для спряженої системи $\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t)$, тобто

$$\frac{d\Psi(t,t_0)}{dt} = -A^T(t)\Psi(t,t_0),\ \Psi(t_0,t_0) = I.$$

Важливою властивістю цих матриць є тотожність $\Psi^T(t,t_0) \equiv \Phi^{-1}(t,t_0)$.

Зі сформульованої вище теореми принципу максимуму випливає, що оптимальне керування $u^0(t)$ для задачі 0.13 є мінімізатором для функціонала

$$I(u) = -(1/2)(K(t)u,u) + (\psi(t), B(t)u),$$

тобто $u^0(t) = K^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)$. Згідно з визначенням $\Psi(t,t_0)$ маємо

$$\psi(t_0) = \Psi(t,t_0)\ \psi(t_0),\ u^0(t) = K^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t,t_0)\psi(t_0).$$

Тому оптимальна траєкторія

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0) +$$

$$+\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}[\Psi^T(\tau,t_0)B(\tau)(K^{-1}(\tau)B^T(\tau)\Psi(\tau,t_0)\psi(t_0)+f^1(\tau))]d\tau$$

визначається вектором $\psi(t_0)$, який обчислюємо за умовою $x(T)=x^1$ із системи рівнянь

$$x^1=\Phi(T,t_0)x^0+$$

$$+\Phi(T,t_0)\int_{t_0}^{T}[\Psi^T(\tau,t_0)B(\tau)K^{-1}(\tau)B^T(\tau)\Psi(\tau,t_0)\psi(t_0)+f^1(\tau)]d\tau.$$

Якщо ввести позначення

$$M\triangleq\int_{t_0}^{T}\Psi^T(\tau,t_0)B(\tau)K^{-1}(\tau)B^T(\tau)\Psi(\tau,t_0)d\tau$$

і скористатися тотожністю $\Psi^T(t,t_0)\equiv\Phi^{-1}(t,t_0)$, то із системи рівнянь

$$M\psi(t_0)=\Psi^T(T,t_0)x^1-x^0-\int_{t_0}^{T}\Psi^T(\tau,t_0)f^1(\tau)d\tau$$

отримуємо

$$\psi(t_0)=M^{-1}[\Psi^T(T,t_0)x^1-x^0-\int_{t_0}^{T}\Psi^T(\tau,t_0)f^1(\tau)d\tau].$$

Отже, оптимальне керування $u^0(t)$ для задачі 0.13 визначається за формулою

$$u^0(t)=K^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t,t_0)M^{-1}[\Psi^T(T,t_0)x^1-x^0-\int_{t_0}^{T}\Psi^T(\tau,t_0)f^1(\tau)d\tau].$$

Очевидно, що існування оберненої матриці M^{-1} є достатньою умовою існування оптимального керування для будь-якого початкового стану $x(t_0)=x^0$ і будь-якого кінцевого стану $x(T)=x^1$ керованої системи.

Алгоритм розв’язання задачі 0.19

I. Паралельно обчислити всі стовпці $\psi^i(t)$, $i=\overline{1,n}$ матриці $\Psi(t,t_0)$ як розв’язки задач Коші для спряженої системи $\frac{d\psi(t)}{dt}=-A^T(t)\psi(t)$, $\psi_j^i(t_0)=0$ для $i\neq j$, $\psi_i^i(t_0)=1$ (наприклад, методом Рунге – Кутта) з одночасним обчисленням матриць $\Psi^T(t,t_0)B(t)K^{-1}(t)B^T(t)\Psi(t,t_0)$, вектор-функцій $\Psi^T(t,t_0)f^1(t)$ та інтегралів

$$M=\int_{t_0}^{T}\Psi^T(\tau,t_0)B(\tau)K^{-1}(\tau)B^T(\tau)\Psi(\tau,t_0)d\tau,\quad f=\int_{t_0}^{T}\Psi^T(\tau,t_0)f^1(\tau)d\tau.$$

II. Обчислити обернену матрицю M^{-1}.

III. Розв’язати задачу Коші для систем

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^T(t)\psi(t), \quad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)K^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)$$

із початковими умовами $x(t_0) = x^0$ та $u^0(t)$, $\psi(t_0) = M^{-1}\left[\Psi^T(T, t_0)x^1 - x^0 - f\right]$. У процесі числового розв’язання цієї задачі Коші паралельно обчислюємо оптимальне керування $u^0(t) = K^{-1}(t)B^T(t)\psi(t)$ та оптимальну фазову траєкторію $x^0(t)$.

Приклад 0.9. Знайти керування $u(t)$, що переводить систему

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u$$

із початкового стану $x(0) = x^0$ у стан $x(1) = x^1$ за мінімального значення функціонала $\int_0^1 (u(t), u(t))dt$.

Розв’язання. У даному прикладі маємо матрицю $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, матрицю $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ і матрицю $K(t) = 1$, для яких отримуємо

$$\Phi(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Оптимальне керування обчислюємо за формулою

$$u^0(t) = B^T(t)\Psi(t, 0)M^{-1}[\Psi^T(1, 0)x^1 - x^0] =$$

$$= (6 - 12t)x_1^1 + (12t - 6)x_1^0 + (6t - 2)x_2^1 + (6t - 4)x_2^0.$$

Означення 0.17. Система $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ називається ***повністю керованою,*** якщо для будь-яких фазових станів x^0, x^1 існує керування u, що переводить керовану систему з початкового стану $x(t_0) = x^0$ у кінцевий стан $x(T) = x^1$.

З отриманого вище оптимального керування

$$u^0(t) = B^T(t)\Psi(t, t_0)M^{-1}[\Psi^T(T, t_0)x^1 - x^0]$$

для задачі мінімізації квадратичного функціонала в умовах одиничної матриці $K(t)$ і функції $f^1(t) \equiv 0$ випливає, що керована система $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ – повністю керована, якщо існує обернена матриця для матриці $\bar{M} = \int_{t_0}^{T} \Psi^T(\tau, t_0) B(\tau) B^T(\tau) \Psi(\tau, t_0) d\tau$. Умови існування оберненої матриці $\bar{M}^{-1}$, а отже, умови повністю керованої неавтономної лінійної системи формулюються у теоремі

Теорема 0.8 (повної керованості). *Якщо існує момент часу* t*, в який знайдеться n лінійно незалежних векторів серед векторів* $b_{s,j}(t)$, $j = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,r}$, *визначених за формулами*

$$b_{s,j}(t) = -A(t) b_{s,j-1}(t) + \frac{d}{dt} b_{s,j-1}(t), \quad b_{s,1}(t) = b_s(t), \quad j = \overline{2,n},$$

де $b_s(t)$ *є* s*-м стовпцем матриці* $B(t)$*, то лінійна система* $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ *є повністю керованою.*

7. Числові методи побудови оптимального керування.

7.1. Узагальнена задача мінімізації квадратичного функціонала

Задача 0.20. Знайти керування $u(t) \in R^r$, $t \in [t_0;T]$, для якого траєкторія $x(t) \in R^n$ керованої системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in [t_0;T]$$

задовольняє граничні умови

$$Hx(t_0) + h = 0,\ Gx(T) + g = 0$$

і значення $I(x,u)$ квадратичного функціонала

$$I(x,u) \triangleq \int_a^b \{(C(t)x(t), x(t)) + (D(t)u(t), u(t)) +$$
$$+(L(t)x(t), u(t)) + (k(t), u(t)) + (m(t), x(t))\}dt$$

досягає мінімального значення для заданих матричних функцій A, B, C, D, L, H, G, вектор-функцій k, m і векторів h та g відповідних розмірностей.

Розв'язання. З теореми принципу максимуму випливає, що оптимальне керування $u^*(t)$ у кожен момент часу t мінімізує функцію

$$(C(t)x(t), x(t)) + (D(t)u(t), u(t)) + (L(t)x(t), u(t)) + +(k(t) - B^T(t)\psi(t), u(t)) + (m(t), x(t)),$$

тобто задовольняє рівність

$$u^*(t) = \frac{1}{2}D^{-1}(t)[B^T(t)\psi(t) - L^T(t)x(t) - k(t)]$$

на розв'язках $\psi(t)$ та $x(t)$ крайових задач для систем

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \frac{1}{2}B(t)D^{-1}(t)[B^T(t)\psi(t) - L^T(t)x(t) - k(t)],$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -(c(t) + \frac{1}{2}L(t)D^{-1}(t)L^T(t))x(t) -$$

$$-(A^T(t) - \frac{1}{2}L(t)D^{-1}(t)B^T(t))\psi(t)\ +m(t) - \frac{1}{2}L(t)D^{-1}(t)k(t)$$

із крайовими умовами

$$Hx(t_0) + h = 0,\ Gx(T) + g = 0,\ H^T p + \psi(t_0) = 0,\ G^T q + \psi(T) = 0.$$

7.2. Градієнтні методи побудови оптимального керування.

Задача 0.21. Знайти керування $u(t) \in R^r$, $t \in [t_0;T]$, що на траєкторії $x(t) \equiv x(t,u) \in R^n$ керованої системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\left(x(t),u(t),t\right),\ x\left(t_0\right) = x^0 \in R^n,\ t \in [t_0;T]$$

максимізує функціонал

$$I\left(u\right) \triangleq F(x(T,u)) + \int_{t_0}^{T} f_0\left(x\left(t,u\right),u\left(t\right),t\right)dt$$

для заданих неперервних разом зі своїми похідними за аргументом x функцій $f : R^n \times R^r \times R \to R^n$, $f_0 : R^n \times R^r \times R \to R$, $F : R^n \to R$.

Розв'язання. За допомогою градієнтного методу мінімізації функціонала I будуємо послідовність керувань

$$u^1, u^2, \ldots, u^k, u^{k+1},\ u^{k+1}(t) = u^k(t) + \lambda_k \nabla_u I(u^k)(t),\ t \in [t_0;T],$$

де значення $\nabla_u I(u^k)(t)$ градієнта функціонала I на керуванні $u = u^k$ обчислюємо в моменти часу $t \in [t_0;T]$ за формулами

$$\nabla_u I(u^k)(t) = \left[\frac{\partial f(x(t,u^k),u^k(t),t)}{\partial u}\right]^T y(t) + \nabla_u f_0(x(t,u^k),u^k(t),t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\frac{\partial f(x(t,u^k),u^k(t),t)}{\partial x}\right]^T y(t) + \nabla_x f_0(x(t,u^k),u^k(t),t),$$

$$y(T) = \nabla F(x(T,u^k)),$$

а множник λ_k – як максимальне число з послідовності $\{\lambda_{k-1} / 2^{q-1},\ q = 1,2,\ldots\}$, для якого виконується нерівність $I(u^{k+1}) \ge I(u^k) + s\lambda_k^2$.

Доведено , що при довільно вибраному початковому керуванні u^1 і довільно вибраних числових значеннях параметрів алгоритму $\lambda_0 > 0,\ s > 0$ послідовність $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ задовольняє рівність $\lim\limits_{k\to\infty} \| \nabla_u I\left(u^k(t)\right) \| = 0$ та ε-екстремальне керування може бути обчислене за скінченну кількість кроків k.

7.3. Числові методи побудови оптимального керування за наявності обмежень на керування

З а д а ч а 0.22. Відрізняється від задачі 0.21 лише наявністю обмежень $u(t) \in \Omega \subset R^r$ на значення керування $u(t)$ у моменти часу $t \in [t_0;T]$.

Розв'язання. Залежно від властивостей функцій f, f_0, F і властивостей множини Ω використовують різноманітні числові алгоритми побудови послідовностей керувань $u^1,u^2,\ldots,u^k,u^{k+1}$, що мінімізують функціонал I на допустимій множині Ω. Зокрема, такі послідовності будують :

– методами *проекції градієнтів*

$$u^{k+1}(t) = \bar{u}_{\Omega}^{k+1}(t) \triangleq \Pi_{\Omega}\left(u^k(t)+\lambda_k \nabla_u I(u^k)(t)\right) \triangleq$$

$$\triangleq \arg\min_{u\in\Omega} \| u-(u^k(t)+\lambda_k \nabla_u I(u^k)(t)) \|;$$

– *модифікованими методами проекції градієнтів* на підмножини Ω_k, $\Omega_k \triangleq \Omega \bigcap \{u \mid \| u-u^k \| \le \lambda_k \}$, $u^{k+1}(t) = \bar{u}_{\Omega_k}^{k+1}(t)$;

– методами *допустимих напрямків*

$$u^{k+1}(t) = \arg\max_{u\in\Omega_k} (\nabla_u I(u^k)(t),u);$$

– методами *умовних градієнтів*

$$u^{k+1}(t) = u^k(t)+\lambda_k(z^k(t)-u^k(t)),\ z^k(t) = \arg\max_{u\in\Omega} (\nabla_u I(u^k)(t),u);$$

– методами *локального принципу максимуму*

$$u^{k+1}(t) = \bar{u}^{k+1}(t,\Omega_k) \triangleq$$

$$\triangleq \arg\max_{u\in\Omega_k}((y(t), f(x(t,u^k),u,t)) + f_0(x(t,u^k),u,t));$$

– методами *умовного принципу максимуму*

$$u^{k+1}(t) = u^k(t)+\bar{\lambda}_k\left(\bar{u}_{\Omega}^{k+1}(t)-u^k(t)\right),$$

$$\bar{\lambda}_k = \arg\max_{\lambda} F(x(T,u^k+\lambda(z^k-u^k)),$$

що базуються на використанні розв’язку $y(t)$, $t\in[t_0;T]$ допоміжної задачі Коші

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left[\frac{\partial f(x(t,u^k),u^k(t),t)}{\partial x}\right]^T y(t)+\nabla_x f_0(x(t,u^k),u^k(t),t),$$

$$y(T) = \nabla F(x(T,u^k))$$

і значень λ_k як максимальних значень послідовності $\{\lambda_k = \lambda_{k-1}/2^{1-q},\ q=1,2,\ldots\}$ (λ_0 – довільне додатне число), для яких виконується нерівність

$$I(u^{k+1}) \ge I(u^k)+s(\lambda_k)^2,$$

або використанні програмно заданих послідовностей

$$\lambda_k \to 0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k = \infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 < \infty,\ \lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = 1,$$

що забезпечують збіжність підпослідовності $\{I(u^{k_i})\}_{i=1}^{\infty}$ до локального або глобального максимуму функціонала $I(u)$ на множині Ω.

7.4. Числовий метод побудови оптимального керування за принципом максимуму

Числовий метод побудови оптимального керування $u^*(t)\in\Omega$, $t\in[t_0;T]$ для задачі 0.22 за допомогою принципу максимуму базується на твердженні теореми принципу максимуму, що в кожен момент часу $t\in[t_0;T]$ оптимальне значення $u^*(t)$ є максимізатором

$$u^*(t)=\bar{u}^*(x(t),y(t),t)\triangleq\arg\max_{u\in\Omega}((y(t),f(x(t),u,t))+f_0(x(t),u,t))$$

на розв'язку $(x(t),y(t))$, $t\in[t_0;T]$ системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(x(t),\bar{u}^*(x(t),y(t),t),t)\,,\ t\in[t_0;T],$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=\left[\frac{\partial f(x(t),\bar{u}^*(x(t),y(t),t),t)}{\partial x}\right]^T y(t)+\nabla_x f_0(x(t),\bar{u}^*(x(t),y(t),t),t)$$

із граничними умовами

$$x(t_0)=x^0,\ y(T)=\nabla F(x(T)).$$

Для обчислення значення $y^*(t_0)$, яке разом із початковим значенням $x(t_0)=x^0$ визначає розв'язок $(x(t),y(t))$, що задовольняє рівність $y(T)=\nabla F(x(T))$, використаємо числові алгоритми мінімізації функції $\varphi(y(t_0))\triangleq\|y(T)-\nabla F(x(T))\|^2$ за допомогою методу опорних градієнтів

$$y^{k+1}(t_0)=y^k(t_0)+\lambda_k z^k(t_0)\,,$$

де опорний градієнт $z^k(t_0)$ обчислимо як розв'язок задачі Коші

$$\frac{dz(t)}{dt}=\left[\frac{\partial f(x^k(t),\bar{u}^*(x^k(t),y^k(t),t),t)}{\partial x}\right]^T z(t)+$$
$$+\nabla_x f_0(x^k(t),\bar{u}^*(x^k(t),y^k(t),t),t),$$

$$z(T)=\nabla F(x^k(T)),$$

на траєкторії $(x^k(t),y^k(t))$ із початковими значеннями $x^k(t_0)=x^0$ та $y^k(t_0)$.

7.5. Використання методів оптимізації для побудови математичних моделей

Методи й числові алгоритми оптимізації є основним інструментарієм для відшукання й оптимізації математичних моделей причинно-наслідкових залежностей $x \to y$ між причинними факторами $x \in X$ і наслідковими $y \in Y$.

Наприклад, у найпростішій задачі відшукання лінійної причинно-наслідкової залежності $y = ax + b$ за даними натурних спостережень (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$, невідомі параметри a та b лінійної моделі знаходять або за методом найменших квадратів як мінімізатор функції

$$\varphi(a,b) \triangleq \sum_{i=1}^{m} (y_i - (ax_i + b))^2, \ (a,b) = \arg\min_{(a,b)} \varphi(a,b),$$

або за методом мінімаксного оцінювання як мінімізатор максимального відхилення

$$\psi(a,b) \triangleq \max_i | y_i - (ax_i + b) |, (a,b) = \arg\min_{(a,b)} \psi(a,b).$$

У першому випадку параметри (a,b) є розв'язком системи двох рівнянь

$$\frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b} = 0,$$

у другому – мінімізатор опуклої функції ψ можна обчислити за допомогою числових алгоритмів мінімізації опуклих функцій.

Аналогічно значення коефіцієнтів p_j лінійно параметричної моделі $y \triangleq \sum_{j=0}^{n} p_j f_j(x)$ можемо обчислити як мінімізатор функції

$$\overline{\overline{\varphi}}(p_0, p_1, ..., p_n) \triangleq \sum_{i=1}^{m} (y_i - (\sum_{j=0}^{n} p_j f_j(x_i))^2,$$

який є розв'язком системи $(n+1)$ рівнянь $\nabla\overline{\overline{\varphi}}(p) = 0$, тобто системи

$$\frac{\partial\overline{\overline{\varphi}}(p_0, p_1, ..., p_n)}{\partial p_i} = 0, \ i = \overline{0,n},$$

а значення векторного параметра $p \triangleq (p_0, p_1, ..., p_n)$ нелінійної моделі $y \triangleq f(x, p)$ – як мінімізатор функції

$$\bar{\bar{\bar{\varphi}}}(p_0, p_1, ..., p_n) \triangleq \sum_{i=1}^{m} (y_i - f(x_i, p))^2,$$

який є розв'язком системи $(n+1)$ рівнянь $\nabla\bar{\bar{\bar{\varphi}}}(p) = 0$.

Відповідно за мінімаксними критеріями параметри $p \triangleq (p_0, p_1, ..., p_n)$ математичних моделей

$$y \triangleq \sum_{j=0}^{n} p_j x^j, \quad y \triangleq \sum_{j=0}^{n} p_j f_j(x), \quad y \triangleq f(x, p)$$

обчислюємо як мінімізатори функцій

$$\bar{\psi}(p_0, p_1, ..., p_n) \triangleq \max_{i=\overline{1,m}} | y_i - \sum_{j=0}^{n} p_j x_i^j |,$$

$$\bar{\bar{\psi}}(p_0, p_1, ..., p_n) \triangleq \max_{i=\overline{1,m}} | y_i - \sum_{j=0}^{n} p_j f_j(x_i) |,$$

$$\bar{\bar{\bar{\psi}}}(p_0, p_1, ..., p_n) \triangleq \max_{i=\overline{1,m}} | y_i - f(x_i, p) |.$$

Типові математичні моделі динамічних процесів будують у вигляді явних чи неявних систем звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t, p), \quad x(t) \in R^n, \quad t \in [0; T],$$

$$f(\frac{dx(t)}{dt}, x(t), t, p) = 0;$$

інтегральних рівнянь

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(t, \tau, x(\tau), p) d\tau;$$

узагальнених інтегро-диференціальних систем

$$f^0\left(x(t_0), \dot{x}(t), x(t), t, p, \int_{D(t,x,p)} f^1\big(x(s), s, x(t), t, p\big) ds \right) = 0.$$

Значення шуканих параметрів p динамічних моделей можемо обчислювати за даними натурних спостережень як мінімізатори функціоналів нев'язок

$$\int_0^T \left\| \frac{d\bar{x}(t)}{dt} - f(\bar{x}(t), t, p) \right\|^2 dt, \quad \left\| \int_0^T f(\frac{d\bar{x}(t)}{dt}, \bar{x}(t), t, p) \right\|^2 dt,$$

$$\int_0^T \left\| \overline{x}(t) - \overline{x}(0) - \int_0^t f(t, \tau, \overline{x}(\tau), p) d\tau \right\|^2 dt \,,$$

$$\int_0^T \left\| f^0(\overline{x}(t_0), \dot{\overline{x}}(t), \overline{x}(t), t, p, \int_{D(t,x,p)} f^1\left(\overline{x}(s), s, \overline{x}(t), t, p\right) ds) \right\|^2 dt$$

або як мінімізатори норм різниці

$$\int_0^T \left\| x(t,p) - \overline{x}(t) \right\|^2 dt \,, \quad \max_{t \in [0;T]} \left\| x(t,p) - \overline{x}(t) \right\|$$

між записаною при натурних спостереженнях траєкторією $\overline{x}(t)$, $t \in [0;T]$ і траєкторією $x(t,p)$, обчисленою за математичною моделлю з параметрами p.

Тема №8. Канонічна декомпозиція лінійних динамічних систем.

У цій темі розглядаються лінійні стаціонарні динамічні системи і вивчаються структурні властивості їх представлень, які пов'язані з властивостями керованості та спостережності. Спочатку це розглядається у відношенні властивості керованості, потім – властивості спостережності, і наостанок – властивості сумісної керованості та спостережності.

8.1. Канонічна декомпозиція за керованістю.

Означення 1. Підпростір $L,\ L \subset X$ називається *інваріантним підпростором системи*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

відносно керування $u(\cdot) \in U(\cdot)$, якщо при довільних допустимих $u(\cdot)$ розв'язок $x(t)$ системи (1), який відповідає початковій умові $x(t_0) = x^0 \in L$, при всіх $t \ge t_0$ належить підпростору L. (Тут $x \in R^n,\ A -$матриця розмірності $n \times n,\ B -$матриця розмірності $n \times m$).

Позначимо через Q_l лінійний підпростір простору X, який натягується на лінійно-незалежні стовпці матриці

$$N = \left(B \middle\| AB \middle\| A^2 B \middle\| ... \middle\| A^{n-1} B \right),$$

тобто $l = rangN,\ l < n$.

Твердження.1. Підпростір Q_l являється інваріантним підпростором

(без доведення).

У просторі станів X уведемо новий базис із векторів

$$p^1, p^2, ..., p^l, p^{l+1}, ..., p^n.$$

В якості перших l векторів цього базису візьмемо які-небудь l лінійно-незалежних векторів із підпростору G_l. Тоді, позначаючи коефіцієнти розкладу вектора x по цьому базису через $\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ ...\ ,\hat{x}_n$, маємо:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i p^i = \sum_{i=1}^{n} p^i \hat{x}_i = R\hat{x},$$

де $R-(n\times n)$матриця, стовпцями якої є вектори $p^1, p^2, ..., p^l, p^{l+1}, ..., p^n$, а вектор $\hat{x}=\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ ...\\ \hat{x}_n\end{pmatrix}$.

Оскільки матриця R є неособливою, то існує обернена матриця R^{-1} і в новому базисі рівняння системи (1) приймуть вигляд:

$$\frac{dR\hat{x}(t)}{dt}=AR\hat{x}(t)+Bu(t).$$

Винесемо матрицю-константу R за знак похідної зліва та помножимо зліва обидві частини отриманої рівності на матрицю R^{-1}:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt}=R^{-1}AR\hat{x}(t)+R^{-1}Bu(t). \tag{2}$$

Уведемо такі нові матриці $\hat{A}$ та $\hat{B}$:

$$\hat{A}=R^{-1}AR,\quad \hat{B}=R^{-1}B.$$

Тоді рівняння (2) прийме вигляд:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt}=\hat{A}\hat{x}(t)+\hat{B}u(t). \tag{3}$$

Твердження 2. Матриці $\hat{A}$ та $\hat{B}$ мають вигляд:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix}\hat{A}_1 & \hat{A}_2\\ 0 & \hat{A}_3\end{pmatrix},\quad \hat{B}=\begin{pmatrix}\hat{B}_1\\ 0\end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $\hat{A}_1$ – матриця розмірності $(l\times l)$, $\hat{A}_3$ – матриця розмірності $(n-l\times n-l)$ та $\hat{B}_1$ – матриця розмірності $(l\times m)$. При цьому ранг матриці

$$\left(\hat{B}_1 \middle\| \hat{A}_1\hat{B}_1 \middle\| \; ... \middle\| \hat{A}_1^{l-1}\hat{B}_1\right)$$

дорівнює l (тобто пара підматриць $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$ – повністю керована).

Із твердження 2 випливає, що якщо початкова система (1) не являється повністю керованою, то вона допускає декомпозицію такого типу, що частина координат її вектора стану не залежать від вхідного керуючого сигналу $u(\cdot)$, а решту координат відповідають повністю керованій підсистемі, бо формула (3), з врахуванням (4), набуде в координатній формі вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{a}_{11}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{12}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \dots \ + \hat{a}_{1l}^{(1)}\hat{x}_l + \hat{a}_{11}^{(2)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{12}^{(2)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{1,n-l}^{(2)}\hat{x}_n + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{1i}^{(1)}u_i, \\ \dfrac{d\hat{x}_2}{dt} = \hat{a}_{21}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{22}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \dots \ + \hat{a}_{2l}^{(1)}\hat{x}_l + \hat{a}_{21}^{(2)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{22}^{(2)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{2,n-l}^{(2)}\hat{x}_n + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{2i}^{(1)}u_i, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{d\hat{x}_l}{dt} = \hat{a}_{l1}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{l2}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \dots \ + \hat{a}_{ll}^{(1)}\hat{x}_l + \hat{a}_{l1}^{(2)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{l2}^{(2)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{l,n-l}^{(2)}\hat{x}_n + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{li}^{(1)}u_i, \\ \dfrac{d\hat{x}_{l+1}}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{11}^{(3)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{12}^{(3)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{1,n-l}^{(3)}\hat{x}_n + \ \ 0, \\ \dfrac{d\hat{x}_{l+2}}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{21}^{(3)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{22}^{(3)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{2,n-l}^{(3)}\hat{x}_n + \ \ 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{d\hat{x}_n}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{n-l,1}^{(3)}\hat{x}_{l+1} + \hat{a}_{n-l,2}^{(3)}\hat{x}_{l+2} + \dots + \hat{a}_{n-l,n-l}^{(3)}\hat{x}_n + \ \ 0. \end{cases}$$

8.2. Канонічна декомпозиція за спостережністю.

Тепер розглянемо питання про декомпозицію лінійної динамічної системи заданої матрицями A розмірності $(n\times n)$ та C розмірності $(k\times n)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t), \tag{5}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{6}$$

(оскільки другий доданок у формулі (1) не впливає на властивість спостережності).

Означення 2. *Підпростором неспостережності системи* (5), (6) називається множина таких векторів стану $x \in X$, що відповідний їм вихід $y(\cdot)$ тотожно рівний нулю.

Цей підпростір будемо позначати через $Q_r^{\bar{\eta}}$, де r – його розмірність а $\bar{\eta}$ – означає, що це простір неспостережності. Якщо $x^0 \in Q_r^{\bar{\eta}}$, то відповідний вихід у момент $t \in T$ є таким

$$y(t) = Ce^{tA}x^0,$$

а із умови $0 \equiv Ce^{tA}x^0$ випливають такі співвідношення:

$$\begin{cases} Cx^0 = 0, \\ CAx^0 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ CA^{n-1}x^0 = 0, \end{cases}$$

тобто $Q_r^{\overline{\eta}}$ представляє собою множину таких векторів стану x^0, які ортогональні рядкам матриці спостережності системи (5), (6).

Твердження 3. Підпростір $Q_r^{\overline{\eta}}$ інваріантний відносно перетворення A.

Виберемо базис у просторі станів X наступним чином. В якості перших r векторів $p^1, p^2, ..., p^r$ нового базису візьмемо лінійно-незалежні вектори із простору неспостережності $Q_r^{\overline{\eta}}$, а решту $p^{r+1}, p^{r+2}, ..., p^n$ доповнимо до базису.

Зробивши заміну змінних:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i p^i = \sum_{i=1}^{n} p^i \hat{x}_i = R\hat{x},$$

де $R-(n\times n)$матриця, стовпцями якої є вектори $p^1, p^2, ..., p^l, p^{l+1}, ..., p^n$, а вектор

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ ... \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$$

перейдемо до системи:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= R^{-1}AR\hat{x}(t) \\ y(t) &= CRx(t) \end{aligned} \quad . \tag{7}$$

Уведемо такі нові матриці $\hat{A}$ та $\hat{C}$:

$$\hat{A} = R^{-1}AR, \;\; \hat{C} = CR,$$

і отримаємо таке представлення:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \hat{A}\hat{x}(t), \;\; \hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t). \tag{8}$$

Матриці $\hat{A}, \; \hat{C}$ мають вигляд:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ 0 & \hat{A}_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \left(0, \; \hat{C}_2\right),$$

де $\hat{A}_1$ – матриця розмірності $(r \times r)$, $\hat{A}_3$ – матриця розмірності $(n-r \times n-r)$ та $\hat{C}_2$ – матриця розмірності $(k \times n-r)$. Для підматриць $\hat{A}_3,\ \hat{C}_2$ виконується:

$$rang\begin{pmatrix} \hat{C}_2 \\ \hat{C}_2\hat{A}_3 \\ \ldots \\ \hat{C}_2\hat{A}_3^{\,n-r-1} \end{pmatrix} = n-r,$$

тобто робимо висновок, що підсистема утворена підматрицями $\hat{A}_3,\ \hat{C}_2$ є повністю спостережною.

Тепер можемо стверджувати, що у нових змінних підпростір неспостережності описується такими співвідношеннями:

$$\begin{cases} \hat{x}_{r+1} = 0, \\ \hat{x}_{r+2} = 0, \\ \ldots \\ \hat{x}_n = 0, \end{cases}$$

оскільки у нових змінних система має такий вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{a}_{11}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{12}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \ldots\ + \hat{a}_{1r}^{(1)}\hat{x}_r + \hat{a}_{11}^{(2)}\hat{x}_{r+1} + \hat{a}_{12}^{(2)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{a}_{1,n-r}^{(2)}\hat{x}_n, \\ \dfrac{d\hat{x}_2}{dt} = \hat{a}_{21}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{22}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \ldots\ + \hat{a}_{2r}^{(1)}\hat{x}_r + \hat{a}_{21}^{(2)}\hat{x}_{r+1} + \hat{a}_{22}^{(2)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{a}_{2,n-r}^{(2)}\hat{x}_n, \\ .\ .\ . \\ \dfrac{d\hat{x}_r}{dt} = \hat{a}_{r1}^{(1)}\hat{x}_1 + \hat{a}_{r2}^{(1)}\hat{x}_2 + \ \ldots\ + \hat{a}_{rr}^{(1)}\hat{x}_r + \hat{a}_{r1}^{(2)}\hat{x}_{r+1} + \hat{a}_{r2}^{(2)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{a}_{r,n-r}^{(2)}\hat{x}_n, \\ \dfrac{d\hat{x}_{r+1}}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{11}^{(3)}\hat{x}_{r+1} + \hat{a}_{12}^{(3)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{a}_{1,n-r}^{(3)}\hat{x}_n, \\ \dfrac{d\hat{x}_{r+2}}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{21}^{(3)}\hat{x}_{r+1} + \hat{a}_{22}^{(3)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{a}_{2,n-r}^{(3)}\hat{x}_n, \\ .\ .\ . \\ \dfrac{d\hat{x}_n}{dt} = \qquad 0 \qquad + \hat{a}_{n-r,1}^{(3)}\hat{x}_{r+1} + \hat{a}_{n-r,2}^{(3)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{a}_{n-r,n-r}^{(3)}\hat{x}_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = \quad 0 \quad + \quad \hat{c}_{11}^{(2)}\hat{x}_{r+1} + \hat{c}_{12}^{(2)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{c}_{1,n-r}^{(2)}\hat{x}_n, \\ \hat{y}_2 = \quad 0 \quad + \quad \hat{c}_{21}^{(2)}\hat{x}_{r+1} + \hat{c}_{22}^{(2)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{c}_{2,n-r}^{(2)}\hat{x}_n, \\ .\ .\ . \\ \hat{y}_k = \quad 0 \quad + \quad \hat{c}_{k1}^{(2)}\hat{x}_{r+1} + \hat{c}_{k2}^{(2)}\hat{x}_{r+2} + \ldots + \hat{c}_{k,n-r}^{(2)}\hat{x}_n. \end{cases}$$

8.3. Канонічна декомпозиція сумісно за керованістю та спостережністю.

Зараз зробимо декомпозицію представлення лінійної динамічної системи з матрицями A, B, C відповідних розмірностей, що основується одночасно на врахуванні властивостей керованості та спостережності. Для цього виберемо у просторі станів X базис наступним чином. Нехай перетин підпросторів Q_l та $Q_r^{\overline{\eta}}$ має розмірність $l-n^0$ (параметр l уведений у пункті 8.1 а параметр r – у пункті 8.2). Тоді в якості перших $l-n^0$ векторів нового базису виберемо вектори із перетину підпросторів $Q_l \cap Q_r^{\overline{\eta}}$. Наступні n^0 векторів нового базису виберемо із різниці підпросторів $Q_l \setminus Q_r^{\overline{\eta}}$. Потім наступні $r+n^0-l$ векторів нового базису візьмемо із різниці підпросторів $Q_r^{\overline{\eta}} \setminus Q_l$ і на завершення $n-r-n^0$ векторів доповнимо до нового базису в просторі станів X. Згідно з результатами пункту 8.2 декомпозиція за спостережністю приведе до нових матриць $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \hat{B}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, \; \hat{C}=\begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & C_2 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}$ – квадратні матриці, відповідно, таких розмірностей: $l-n^0,\, n^0,\, r+n^0-l,\; n-r-n^0$; B_1, B_2, B_3, B_4 – прямокутні матриці, відповідно, таких розмірностей: $(l-n^0 \times m)$, $(n^0 \times m)$, $(r+n^0-l \times m)$, $(n-r-n^0 \times m)$; C_1, C_2 – прямокутні матриці відповідно, таких розмірностей: $(k \times n^0)$, $(k \times n-r-n^0)$.

В результаті декомпозиції за керованістю згідно пункту 8.1 прийдемо до представлення системи з трійкою матриць $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ такої структури:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \hat{B}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \hat{C}=\begin{pmatrix} 0 & C_1 & 0 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Ранг матриці $\left(B_2 \| A_{22}B_2 \| ... \| A_{22}^{l-1}B_2\right)$ дорівнює числу її рядків n^0. Ранг матриці $\left(B_2 \| A_{22}B_2 \| ... \| A_{22}^{n^0-1}B_2\right)$ також дорівнює числу n^0. Ранг матриці

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_1A_{22} \\ \cdots \\ C_1A_{22}^{n^0-1} \end{pmatrix}$$

Також дорівнює числу n^0.

Тому підсистема:

$$\begin{cases}\dfrac{dz(t)}{dt} = A_2 z(t) + B_2 u(t), \\ y(t) = C_1 z(t)\end{cases} \tag{11}$$

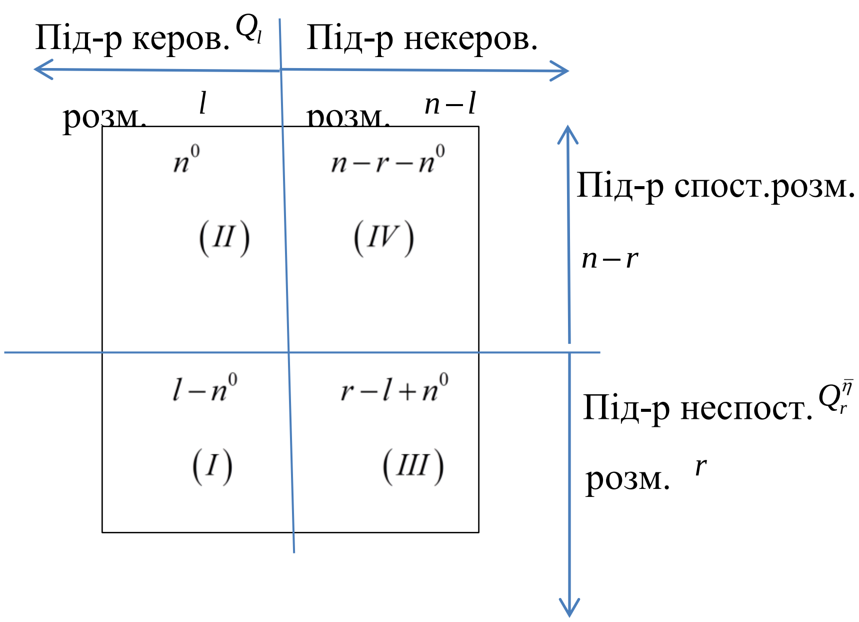
являється повністю керованою та повністю спостережною.

Представлення системи, у якому матриці $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ мають вигляд (10) , де пара підматриць $A_{22},\ B_2$ являється повністю керованою, а пара A_{22}, C_1 – повністю спостережною , називається *представленням у формі канонічної декомпозиції.*

Якщо розбити компоненти вектора стану $\hat{x}$ на чотири групи:

$$\hat{x} = col\left(\hat{x}^{I}, \hat{x}^{II}, \hat{x}^{III}, \hat{x}^{IV}\right),$$

розмірність яких, відповідно, дорівнює: $l-n^0,\ n^0,\ r+n^0-l,\ n-r-n^0$, то поведінка x^I описується повністю керованою, але не спостережною підсистемою; поведінка x^{II} – повністю керованою і повністю спостережною підсистемою; поведінка x^{III} – не керованою і не спостережною підсистемою; поведінка x^I описується повністю керованою, але не спостережною підсистемою; поведінка x^{IV} – не керованою, але повністю спостережною підсистемою. У цьому розумінні можна говорити про *декомпозицію початкової системи на підсистеми з вказаними властивостями.* Нижче зображено схему канонічної декомпозиції сумісно за керованістю та спостережністю:



Твердження 4 (Р. Калман). Передавальна матриця представлення лінійної динамічної системи з матрицями A, B, C співпадає з передавальною матрицею представлення з матрицями $A_{22},\ B_2,\ C_1$.