Функціональний аналіз

Семенов Володимир Вікторович

Кафедра обчислювальної математики
ФКНК КНУТШ
semenov.volodya@gmail.com

Лекції для студентів 3-го курсу спеціальності «Системний аналіз»

Юрию Ивановичу Петунину (30.09.1937-1.06.2011), наставнику и коллеге, учившему смотреть на конкретные задачи глазами функционального аналитика и тополога.

Організаційні питання

Лекції (четвер, 12.20–13.55) — 14

Практичні заняття (п'ятниця, 10.35–12.10 САТР, 12.20–13.55 ПС) — 13

Дві модульні контрольні роботи — 25+25 = 50 балів.

Чотири самостійні роботи — 10 +10 +10 +10 = 40 балів.

Доповідь з презентацією на обрану вами тему (перелік тем отримаєте у кінці лютого) — 10 балів (травень).

В кінці семестру отримуєте залік. Залік виставляється за результатами роботи студента впродовж усього семестру і не передбачає додаткових заходів оцінювання для успішних студентів.

Література

- Колмогоров А.Н. Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1989.
- Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Киев: Вища школа, 1990.
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ. Москва: Мир, 1977.
- Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск: НИЦ «РХД», 2009.
- Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. Москва: Наука, 1988.
- Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев: Вища школа, 1990.
- Анікушин А.В., Семенов В.В. Збірник задач з функціонального аналізу. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2017.

Що будемо розбирати найближчим часом?

1 Метричні простори: основні поняття та приклади

- Метрика, метричний простір
- Приклади метрик та метричних просторів
- Кулі, сфери та послідовності точок в метричних просторах
- Топологія метричних просторів

Метрика, метричний простір

Одним з фундаментальних понять аналізу є поняття метричного простору.

Нехай X — довільна множина (далі завжди припускається, що $X \neq \emptyset$).

Означення 1. Функція $d: \ X \times X \to [0 + \infty)$ називається метрикою на множині X, якщо виконано такі умови:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$ (симетрія);
- $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (нерівність трикутника).

Означення 2. Упорядкована пара (X, d), де d — метрика на X, називається метричним простором.[1]

Означення 3. Нехай (X, d) — метричний простір. Множина $Y \subseteq X$, наділена метрикою з X, тобто пара (Y, d), називається підпростором метричного простору (X, d).

[1] На множині можна задати різні метрики та отримати різні метричні простори. Вираз «метричний простір X» без вказівки метрики означає, що деяка метрика обрана та зафіксована.

Метрика, метричний простір

Різні метрики на множині можуть мати різний практичний зміст.

Пропоную подивитись на географічну мапу. Беремо якусь групу поселень, що з'єднані дорогами та стежками. Три підходи до вимірювання відстані між поселеннями:

- по відрізку прямої на мапі;
- найкоротший шлях по дорогам;
- найкоротший шлях по дорогам та по стежкам.

Три введені метрики можуть суттєво відрізнятись.

Метрика, метричний простір

З означення метрики випливають такі три властивості (в $\mathbb{R}^3$ з евклідовою відстанню ми до них звикли з дитинства).

Лема 1. Для довільного набору x_1, x_2,..., x_n точок X виконується нерівність

$$d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Лема 2. Для x, y, $z \in X$ виконується нерівність

$$|d(x, z) - d(z, y)| \le d(x, y).$$

Лема 3 (нерівність чотирикутника). Для x, y, u, $v \in X$ виконується нерівність

$$|d(x, u) - d(y, v)| \le d(x, y) + d(u, v).$$

Маємо (нерівність трикутника та симетрія використані)

$$d(x, u) \le d(x, y) + d(y, u) \le d(x, y) + d(y, v) + d(v, u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; d(x, u) - d(y, v) \le d(x, y) + d(u, v).$$

Аналогічно

$$d(x, u) - d(y, v) \ge -d(x, y) - d(u, v).$$

Приклади метрик та метричних просторів

1. Довільна множина X стає метричним простором з дискретною метрикою

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

2. На $\mathbb{R}^n$ є багато корисних метрик

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}, \quad d(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \quad d(x,y) = \max_k |x_k - y_k|.$$

3. Множина $B(M)$ усіх обмежених функцій $f : M \to \mathbb{R}$ є метричним простором з метрикою

$$d(f,g) = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|.$$

Частинний випадок: простір ℓ_∞ усіх дійсних обмежених послідовностей (x_n) з метрикою

$$d(x,y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Приклади метрик та метричних просторів

4. Множина $C([0,1])$ неперервних функцій на сегменті $[0,1]$ — метричний простір з метрикою попереднього прикладу, $M = [0,1]$.

5. Множина ℓ_2 усіх таких дійсних послідовностей $x = (x_n)$: $\sum_n x_n^2 < +\infty$, з метрикою

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2}.$$

6. Множина ℓ_p, де $p \in [1, +\infty)$, усіх таких дійсних послідовностей $x = (x_n)$: $\sum_n |x_n|^p < +\infty$, з метрикою

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Приклади метрик та метричних просторів

7. На множині $\mathbb{R}^\infty$ усіх дійсних послідовностей $x = (x_n)$ можна ввести метрику

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

8. Якщо дана скінченна родина метричних просторів (X_k, d_k), $k = \overline{1, n}$, то на добутку $\prod_{k=1}^{n} X_k$, що складається з усіх n-ок $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_k \in X_k$, можна ввести метрику

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{n} d_k(x_k, y_k).$$

9. Якщо дана зліченна родина метричних просторів (X_n, d_n), то на добутку $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, що складається з усіх послідовностей $x = (x_n)$, $x_n \in X_n$, можна ввести метрику

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Кулі, сфери та послідовності точок в метричних просторах

Для загального метричного простору (X, d) визначається багато понять, відомих для $\mathbb{R}^n$.

Означення 4. Відкритою кулею радіуса $r > 0$ із центром у точці $x_0 \in X$ називається множина

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}.$$

Означення 5. Замкненою кулею радіуса $r > 0$ із центром у точці $x_0 \in X$ називається множина

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) \leq r\}.$$

Означення 6. Сферою радіуса $r > 0$ із центром у точці $x_0 \in X$ називається множина

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) = r\}.$$

Означення 7. Множина $A \subseteq X$ називається обмеженою, якщо вона лежить в деякій кулі. Діаметром обмеженої множини A називають число

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y) < +\infty.$$

Кулі, сфери та послідовності точок в метричних просторах

Означення 8. Послідовність (x_n) елементів простору (X, d) збігається до $x \in X$, якщо

$$d(x_n, x) \to 0, \quad n \to \infty.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\varepsilon \ \ d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Точку x називають границею послідовності (x_n).

Позначення: $x_n \to x$ та $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Лема 4. Нехай $x_n \to x$ та $x_n \to y$. Тоді $x = y$.

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \to 0 \ \Rightarrow \ d(x, y) = 0 \ \Rightarrow \ x = y.$$

Лема 5. Нехай $x_n \to x$ та $y_n \to y$. Тоді $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Запишемо нерівність чотирикутника

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0.$$

Кулі, сфери та послідовності точок в метричних просторах

Означення 9. Послідовність (x_n) елементів простору (X, d) називається фундаментальною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n, k \geq n_\varepsilon \ \ d(x_n, x_k) < \varepsilon.$$

Лема 6. Збіжна послідовність є фундаментальною.

Нехай $x_n \to x$. Фундаментальність (x_n) випливає з нерівності

$$d(x_n, x_k) \leq d(x_n, x) + d(x, x_k).$$

Але фундаментальна послідовність може не збігатись. Простий приклад:

$$X = [0, 1), \ \ d(x, y) = |x - y|, \ \ x_n = 1 - \tfrac{1}{n}.$$

Означення 10. Метричний простір називають повним, якщо довільна фундаментальна послідовність в ньому збігається.

Поговоримо про повні простори пізніше.

Топологія метричних просторів

Нехай (X, d) — метричний простір.

Означення 9. Множина $A \subseteq X$ називається відкритою, якщо $\forall x \in A$ $\exists \varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Порожню множину теж вважаємо відкритою.

Означення 10. Множина $F \subseteq X$ називається замкненою, якщо її доповнення $X \setminus F$ відкрите.

Завжди X та $\emptyset$ відкриті та замкнені. В $\mathbb{R}^n$ зі звичайною метрикою немає інших множин, одночасно відкритих та замкнених, а в просторі з дискретною метрикою усі множини відкриті та замкнені.

Теорема 1. Відкрита куля $B(x_0, r)$ є відкритою множиною, а замкнена куля $\overline{B}(x_0, r)$ є замкненою множиною. Сфера $S(x_0, r)$ є замкненою множиною

Нехай $z \in B(x_0, r)$ та $z \neq x_0$. Тоді $d(z, x_0) < r$. Покладемо $r_1 = r - d(z, x_0)$. З нерывності трикутника випливає $B(z, r_1) \subseteq B(x_0, r)$.

Теорема 2. Об'єднання довільної кількості відкритих множин є відкритою множиною. Перетин скінченної кількості відкритих множин є відкритою множиною.

Нехай для кожного $t \in T$ множина $A_t \subseteq X$ відкрита.
Нехай $x \in A = \bigcup_{t \in T} A_t$. Тоді $\exists t_0 \in T$: $x \in A_{t_0}$. З відкритості A_{t_0} випливає існування $\varepsilon > 0$: $B(x, \varepsilon) \subseteq A_{t_0} \subseteq A = \bigcup_{t \in T} A_t$.

Нехай множини $A_1, A_2, ..., A_n \subseteq X$ відкриті. Нехай $x \in A = \bigcap_{i=1}^n A_i$. Тоді $x \in A_i$ для $i = \overline{1, n}$. З відкритості A_i випливає існування $\varepsilon_i > 0$: $B(x, \varepsilon_i) \subseteq A_i$. Розглянемо $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\} > 0$ та $B(x, \varepsilon)$. Маємо

$$B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_i) \subseteq A_i \ \ \forall i.$$

Отже, $B(x, \varepsilon) \subseteq A = \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Теорема 3. Перетин довільної кількості замкнених множин є замкненою множиною. Об'єднання скінченної кількості замкнених множин є замкненою множиною.

Випливає з теореми 2 та правил двоїстості.

Що будемо розбирати на цій лекції?

2 Метричні простори: основні поняття та приклади

- Внутрішність та замикання множини
- Щільні та ніде не щільні множини
- Сепарабельні метричні простори

Внутрішність та замикання множини

Будемо розглядати множини з простору (X, d).

Означення 1. Точка $x \in A$ називається внутрішньою для множини A, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 : \; B(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

Означення 2. Множина усіх внутрішніх точок множини A називається її внутрішністю (позначення: $\mathrm{int} A$).

Теорема 1. Множина $A \subseteq X$ відкрита тоді й лише тоді, коли $A = \mathrm{int} A$.

Внутрішність та замикання множини

Теорема 2. Операція взяття внутрішності має властивості:

1) $\mathrm{int}A \subseteq A$;
2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{int}A \subseteq \mathrm{int}B$;
3) $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$;
4) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$;
5) $\mathrm{int}X = X$.

Внутрішність та замикання множини

Означення 3. Точка $x \in X$ називається точкою дотику множини A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Означення 4. Точка $x \in X$ називається граничною точкою множини A, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 : \ (B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Означення 5. Ізольованою точкою множини A називають точка дотику множини A, яка не є граничною.

Означення 6. Множина усіх точок дотику множини A називається її замиканням (позначення: $\mathrm{cl} A$, $\overline{A}$).

Очевидно, що $A \subseteq \mathrm{cl} A$.

Теорема 3. Точка $x \in X$ є граничною точкою множини A тоді й лише тоді, коли існує збіжна до x послідовність різних точок з A.

Нехай $x \in X$ є граничною точкою множини A. Шукану послідовність можна побудувати так: починаємо з $x_1 \in (B(x, 1) \setminus \{x\}) \cap A$, а далі

$$x_{n+1} \in (B(x, r_n) \setminus \{x\}) \cap A, \quad r_n < \frac{d(x, x_n)}{2}.$$

Теорема 4. Множина $A \subseteq X$ замкнена тоді й лише тоді, коли $A = \mathrm{cl} A$.

Внутрішність та замикання множини

Мають місце такі рівності

$$X \backslash \mathrm{cl}A = \mathrm{int}(X \backslash A), \quad X \backslash \mathrm{int}A = \mathrm{cl}(X \backslash A).$$

Теорема 5. Операція замикання має властивості:

1) $A \subseteq \mathrm{cl}A$;
2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{cl}A \subseteq \mathrm{cl}B$;
3) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$;
4) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$;
5) $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$.

Питання для «розумників»: скільки різних множин можна отримати із заданої множини метричного простору за допомогою операцій замикання та взяття доповнення?

Щільні та ніде не щільні множини

І тут будемо розглядати множини з простору (X, d).

Означення 7. Множина $A \subseteq X$ називається щільною в множині $B \subseteq X$, якщо замикання A містить B ($B \subseteq \mathrm{cl} A$).

(!) Навіть якщо A щільна в B, то $A \cap B$ може бути порожнім.

Означення 8. Множина $A \subseteq X$ називається щільною (всюди щільною, скрізь щільною), якщо $\mathrm{cl} A = X$.

Означення 9. Множина $A \subseteq X$ називається ніде не щільною, якщо в довільній відкритій множині $V \subseteq X$ є куля B додатнього радіуса, що не перетинається з A.

Мегаприклад: щільність поліномів в $C([0,1])$

Теорема (Вейєрштрасс, 1885). Нехай $f \in C([0,1])$. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий алгебраїчний поліном p, що

$$d(f,p) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - p(x)| < \epsilon.$$

Існує багато доведень цієї теореми. Розберемо доведення С.Н. Бернштейна.

Мегаприклад: щільність поліномів в $C([0,1])$

Нехай $f \in C([0,1])$. Розглянемо поліноми

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \ \ x \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

Поліном $B_n(f,\cdot)$ називають поліномом Бернштейна функції f.

Нехай $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Справедливі тотожності

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}. \tag{3}$$

Мегаприклад: щільність поліномів в $C([0,1])$

Доведемо, що

$$d(f, B_n(f,\cdot)) \to 0. \tag{4}$$

Нехай $\varepsilon > 0$ задано. За теоремою Кантора існує $\delta > 0$ таке, що для $x', x'' \in [0,1]$ $\ |x' - x''| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Позначимо $M = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Використовуючи тотожності, одержимо

$$\forall x \in [0,1] : \ |f(x) - B_n(f,x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} +$$

$$+ \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\delta} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} <$$

$$< \tfrac{\varepsilon}{2} \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + 2M \sum_{k:\left|x-\frac{k}{n}\right|\geq\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq \tfrac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \tfrac{k}{n}\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Нехай тепер $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\forall n \geq n_0 \; : \; \frac{M}{2n\delta^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\forall n \geq n_0 \; : \; d(f, B_n(f,\cdot)) < \varepsilon.$$

Тобто, має місце (4).

Сепарабельні метричні простори

Означення 10. Метричний простір називають сепарабельним, якщо в ньому є не більш ніж зліченна щільна підмножина.

Дійсна пряма з звичайною метрикою сепарабельна: множина $\mathbb{Q}$ зліченна та щільна в $\mathbb{R}$.

Простори $C([0,1])$ та ℓ_2 сепарабельні. В ℓ_2 щільна множина послідовностей з скінченною кількістю відмінних від нуля раціональних координат. А в $C([0,1])$ щільна зліченна множина поліномів з раціональними коефіцієнтами.

Простір усіх дійсних обмежених послідовностей ℓ_∞ несепарабельний. У ньому є незліченна множина диз'юнктних відкритих куль вигляду

$$B(x, \tfrac{1}{3}),$$

де $x \in M = \{y = (y_n) : \ y_n \in \{0,1\} \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Зліченна множина $A \subseteq \ell_\infty$ не може бути присутня в усіх цих кулях.

Сепарабельні метричні простори

Теорема 6 (властивість Ліндельофа). З довільного набору відкритих множин сепарабельного метричного простору можна виділити не більш ніж зліченний піднабір з тим самим об'єднанням.

Нехай множини U_α відкриті в (X, d). Візьмемо зліченну щільну множину $\{x_n\} \subseteq X$. Для кожної точки x_n є зліченна множина відкритих куль $B(x_n, r_k)$ з раціональними радіусами $r_k > 0$.

Якщо $B(x_n, r_k)$ лежить в якійсь з множин U_α, то відмітимо рівно одну таку множину $U_{n,k}$. В результаті ми відмітимо не більш ніж зліченний набір множин.

Покажемо, що об'єднання усіх відмічених множин співпадає з $\cup_\alpha U_\alpha$. Нехай $x \in U_\alpha$. Тоді $\exists r > 0$: $B(x, r) \subseteq U_\alpha$. Беремо x_n: $d(x_n, x) < \frac{r}{4}$. Ясно, що знайдеться $r_k < \frac{r}{4}$: $x \in B(x_n, r_k)$. В силу нерівності трикутника

$$B(x_n, r_k) \subseteq B(x, r) \subseteq U_\alpha.$$

Оскільки $B(x_n, r_k) \subseteq U_\alpha$, то є відмічена множина $U_{n,k}$, що містить $B(x_n, r_k)$. Отже, $x \in B(x_n, r_k) \subseteq U_{n,k}$.

Сепарабельні метричні простори

Теорема 7. Підпростір сепарабельного метричного простору є сепарабельним.

Нехай S — зліченна щільна підмножина метричного простору X. Нехай $Y \subseteq X$.

Кожній точці $s \in S$ поставимо у відповідність підмножину $Y_s \subseteq Y$ (порожню або не більш ніж зліченну): для кожного $n \in \mathbb{N}$ оберемо точку $y_n \in Y$ з $d(y_n, s) < \frac{1}{n}$, якщо така є.

Множина $\cup_{s \in S} Y_s \subseteq Y$ не більш ніж зліченна. Покажемо, що вона щільна в Y. Дійсно, для довільних $y \in Y$ та $n \in \mathbb{N}$ знайдеться $s_y \in S$: $d(s_y, y) < \frac{1}{n}$. Оскільки $B(s_y, \frac{1}{n}) \cap Y \neq \emptyset$, то в побудованій множині є точка y_n: $d(s_y, y_n) < \frac{1}{n}$. А це дає співвідношення

$$d(y, y_n) \leq d(y, s_y) + d(s_y, y_n) < \frac{2}{n}.$$

Що будемо розбирати на цій лекції?

3 Метричні простори: основні поняття та приклади. Повні метричні простори

- Ізометрія
- Неперервні відображення: означення
- Приклади повних метричних просторів
- Принцип вкладених куль
- Теорема Бера про категорію

Ізометрія

Означення 1. Ізометрією двох метричних просторів (X, d_X) і (Y, d_Y) називається така бієкція $I : X \leftrightarrow Y$, що

$$d_Y(I(x_1), I(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Метричні простори X і Y називають ізометричними, якщо між ними існує ізометрія. Багато властивостей метричних просторів інваріантні відносно ізометрій. До таких властивостей відносяться повнота, обмеженість, сепарабельність.

Ізометрія

Теорема 1. Кожний метричний простір (X, d) ізометричний підмножині простору $B(X)$.

Зафіксуємо $x_0 \in X$ та для кожної точки $x \in X$ задамо функцію $f_x : X \to \mathbb{R}$ за допомогою рівності

$$f_x(y) = d(y, x) - d(y, x_0) \quad \forall y \in X.$$

В силу нерівності трикутника $|f_x(y)| \leq d(x, x_0)$, тобто функція f_x обмежена. Для фіксованих $x_1, x_2 \in X$ маємо

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d(y, x_1) - d(y, x_2)| \leq d(x_1, x_2),$$

що дає $d(f_{x_1}, f_{x_2}) \leq d(x_1, x_2)$. Тому $d(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2)$, оскільки

$$|f_{x_1}(x_1) - f_{x_2}(x_1)| = d(x_1, x_2).$$

Отже, відображення $I : x \mapsto f_x$ з X в $B(X)$ є ізометрією X і $I(X)$.

Відомо, що довільний сепарабельний метричний простір ізометричний підмножині простору $C([0, 1])$ (з рівномірною метрикою)!

Неперервні відображення: означення

Будемо розглядати відображення, що діють з (X, d_X) в (Y, d_Y).

Означення 2. Відображення $f : X \to Y$ називають неперервним в точці $x \in X$, якщо для кожної послідовності (x_n), що збігається до x, послідовність $(f(x_n))$ збігається до точки $f(x) \in Y$. Відображення f називають неперервним, якщо воно неперервне у кожній точці.

Неперервність в точці x можна сформулювати в (ε, δ)-термінах: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $d_Y(f(z), f(x)) < \varepsilon$ для всіх таких $z \in X$, що $d_X(z, x) < \delta$.

Дійсно, з цієї властивості очевидно випливає неперервність. З іншого боку, якщо вона не виконується, то $\exists \varepsilon > 0$ та $\exists (x_n)$:

$$d_X(x_n, x) < \tfrac{1}{n}, \quad d_Y(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon.$$

Це суперечить неперервності, бо $x_n \to x$, але $f(x_n) \not\to f(x)$.

Позначення: $C(X, Y)$ — множина усіх неперервних відображень з X в Y.

Теорема 2 (критерій неперервності). Для відображення $f : X \to Y$ такі умови рівносильні:

1) $f : X \to Y$ — неперервне відображення;
2) $\forall$ відкритої множини $V \subseteq Y$ множина $f^{-1}(V) \subseteq X$ відкрита;
3) $\forall$ замкненої множини $Z \subseteq Y$ множина $f^{-1}(Z) \subseteq X$ замкнена.

1) $\Rightarrow$ 2) Нехай $f \in C(X, Y)$ та множина $V \subseteq Y$ відкрита. Доведемо відкритість $U = f^{-1}(V)$. Нехай $x \in U$. Для $y = f(x)$ знайдеться $\varepsilon > 0$: $B(y, \varepsilon) \subseteq V$. Оскільки f — неперервне відображення, то знайдеться $\delta > 0$: $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B(y, \varepsilon)) \subseteq U$. Це означає відкритість U.

2) $\Rightarrow$ 1) Нехай $x \in X$ — фіксована точка та $\varepsilon > 0$. Куля $V = B(y, \varepsilon) \subseteq Y$, де $y = f(x)$, є відкритою множиною. Тому $f^{-1}(V)$ теж відкрита множина. Для $x \in f^{-1}(V)$ маємо:

$$\exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V) \quad \Rightarrow \quad f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon).$$

2) $\Leftrightarrow$ 3) Випливає з співвідношення $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$.

Теорема 3 (неперервність суперпозиції). Нехай (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) — метричні простори та $f \in C(X, Y)$, $g \in C(Y, Z)$. Нехай $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$. Тоді відображення $h = g \circ f : X \to Z$ неперервне.

Випливає з теореми 2 та формули

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)), \quad V \subseteq Z.$$

Неперервні відображення: означення

Отримаємо узагальнення теореми Больцано–Коші.

Означення 3. Нехай (X, d) — метричний простір. Множина $M \subseteq X$ називається зв'язною множиною в (X, d), якщо не існує відкритих множин A та B, що задовольняють умовам:

$$1)\ A \cap B = \emptyset, \quad 2)\ A \cap M \neq \emptyset, \quad 3)\ B \cap M \neq \emptyset, \quad 4)\ M \subseteq A \cup B.$$

Які множини в $\mathbb{R}$ є зв'язними?

Теорема 4 (узагальнена теорема Больцано–Коші). Нехай (X, d_X), (Y, d_Y) — метричні простори, $f \in C(X, Y)$ та X — зв'язна множина. Тоді множина $f(X)$ зв'язна в (Y, d_Y).

Припустимо, що $f(X)$ незв'язна. Тоді існують відкриті множини $A, B \subseteq Y$: $A \cap B = \emptyset$, $A \cap f(X) \neq \emptyset$, $B \cap f(X) \neq \emptyset$, $f(X) \subseteq A \cup B$. Перейшли до прообразів і отримали:

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset, \ \ f^{-1}(A) \cap X \neq \emptyset, \ \ f^{-1}(B) \cap X \neq \emptyset, \ \ X \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

А ще множини $f^{-1}(A)$ та $f^{-1}(B)$ відкриті. Отже, X — незв'язна множина.

Неперервні відображення: означення

Означення 4. Бієкцію $f : X \leftrightarrow Y$ називають гомеоморфізмом, якщо f і f^{-1} неперервні. Простори між якими існує гомеоморфізм називають гомеоморфними.

Пряма $\mathbb{R}$ та $(0, 1)$ гомеоморфні, $\mathbb{R}$ та $[0, 1]$ — ні.[2]

Чи будуть гомеоморфними $\mathbb{R}$ та $\mathbb{R}^2$?

Означення 5. Відображення $f : X \to Y$ називають рівномірно неперервним, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ при $d_X(x_1, x_2) < \delta$.

[2] Розглядається звичайна метрика.

Приклади повних метричних просторів

Нагадаємо

Означення 6. Метричний простір називають повним, якщо довільна фундаментальна послідовність в ньому збігається.

Теорема 5. Нехай (X, d) — повний метричний простір і $Y \subseteq X$ — замкнена множина. Тоді простір (Y, d) є повним.

Доведемо повноту простору ℓ_2 — простору усіх таких дійсних послідовностей $x = (x_i)$: $\sum_n x_n^2 < +\infty$, з метрикою

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2}.$$

Приклади повних метричних просторів

Нехай послідовність елементів $x_n = (\xi_i^n) \in \ell_2$ фундаментальна в ℓ_2:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n, k \geq n_\varepsilon \;\; d(x_n, x_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left|\xi_i^n - \xi_i^k\right|^2} < \varepsilon. \qquad (1)$$

Для кожного $i \in \mathbb{N}$ числова послідовність (ξ_i^n) фундаментальна. За критерієм Коші $\exists \; \xi_i = \lim_{n\to\infty} \xi_i^n$.

Покажемо, що $x = (\xi_i) \in \ell_2$ та $d(x_n, x) \to 0$. З (1) випливає, що $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\forall n, k \geq n_\varepsilon \;\; \sum_{i=1}^{N} \left|\xi_i^n - \xi_i^k\right|^2 < \varepsilon^2 \;\; \Rightarrow \;\; \forall n \geq n_\varepsilon \;\; \sum_{i=1}^{N} \left|\xi_i^n - \xi_i\right|^2 < \varepsilon^2.$$

Із $\sum_i |\xi_i^n|^2 < +\infty$, $\sum_i |\xi_i^n - \xi_i|^2 < +\infty$ випливає $\sum_i |\xi_i|^2 < +\infty$, тобто, $x = (\xi_i) \in \ell_2$. Крім того, маємо

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_\varepsilon \;\; d^2(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i|^2 \leq \varepsilon^2,$$

тобто, $d(x_n, x) \to 0$.

Приклади повних метричних просторів

Доведемо повноту простору $C([0,1])$ неперервних на сегменті $[0,1]$ функцій з рівномірною метрикою

$$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Нехай послідовність функцій $f_n \in C([0,1])$ фундаментальна в $C([0,1])$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n,k \geq n_\varepsilon \ \forall x \in [0,1] \ \ |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Для кожного $x \in [0,1]$ числова послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна. За критерієм Коші $\exists\ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Покажемо, що $f \in C([0,1])$ та $d(f_n, f) \to 0$. З (2) випливає

$$\forall n \geq n_\varepsilon \ \forall x \in [0,1] \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \Rightarrow \ \forall n \geq n_\varepsilon \ d(f_n, f) \leq \varepsilon.$$

А неперервність f випливає з відомого факту математичного аналізу: границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій є неперервною.

Принцип вкладених куль

Теорема 6. Нехай $\left(\overline{B}(x_n, r_n)\right)$ — послідовність замкнених куль в повному метричному просторі (X, d), яка задавольняє умовам:

$$1)\ \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{B}(x_n, r_n);\ \ 2)\ r_n \to 0.$$

Тоді $\exists!\ x \in X$: $\forall n \in \mathbb{N}\ x \in \overline{B}(x_n, r_n)$ або $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x\}$.

Покажемо, що послідовність центрів (x_n) фундаментальна. Беремо $\varepsilon > 0$. З 2) випливає $\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N$: $r_n < \varepsilon$. А з 1) маємо

$$\forall n > m \geq N : \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq \overline{B}(x_m, r_m) \ \ \Rightarrow \ \ d(x_m, x_n) \leq r_m < \varepsilon. \qquad (3)$$

З повноти простору X випливає $\exists x \in X$: $x_n \to x$. В (3) перейдемо до границі при $n \to \infty$. Отримаємо $\forall m \geq N :\ \ d(x, x_m) \leq r_m$. Тобто, $\forall m \geq N$: $x \in \overline{B}(x_m, r_m)$. А в силу умови 1), маємо $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$.

Якщо $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n)$, то $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2r_n \to 0$. Звідки, $x = y$.

Справедливе твердження, обернене до теореми 6.

Теорема Бера про категорію

Означення 6. Підмножина A метричного простору X називається множиною першої категорії, якщо A можна зобразити як зліченне об'єднання ніде не щільних в X підмножин. Підмножина в X, яка не є множиною першої категорії, називається множиною другої категорії.

Теорема 7. Повний метричний простір — множина другої категорії.

Нехай X — повний метричний простір, A_1, A_2, ... — ніде не щільні підножини в X. Треба показати, що $X \neq \cup_n A_n$.

A_1 ніде не щільна $\Rightarrow \exists\ B_1 = \overline{B}(x_1, r_1)$ з $r_1 \in (0, \frac{1}{2})$ і $B_1 \cap A_1 = \emptyset$.
A_2 ніде не щільна $\Rightarrow \exists\ B_2 = \overline{B}(x_2, r_2) \subseteq B_1$ з $r_2 \in (0, \frac{1}{4})$ і $B_2 \cap A_2 = \emptyset$.

....

A_n ніде не щільна $\Rightarrow \exists\ B_n = \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq B_{n-1}$ з $r_n \in (0, \frac{1}{2^n})$ і $B_n \cap A_n = \emptyset$.

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots \quad \text{та} \quad r_n \to 0.$$

За принципом вкладених куль $\exists\ x \in X$: $\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\}$. Точка x не лежить в $\cup_n A_n$, оскільки $B_n \cap (\cup_{i=1}^{n} A_i) = \emptyset$. Отже, $X \neq \cup_n A_n$.

Що будемо розбирати на цій лекції?

4 Поповнення та принцип стискаючих відображень

- Поповнення метричного простору
- Існування поповнення
- Єдиність поповнення з точністю до ізометрії
- Стискаючі відображення
- Теорема Банаха про нерухому точку
- Застосування теореми Банаха про нерухому точку

Поповнення метричного простору

Нехай (X, d_X) — метричний простір.

Означення 1. Повний метричний простір (Y, d_Y) називається поповненням метричного простору (X, d_X), якщо (X, d_X) ізометричний скрізь щільному підпростору в (Y, d_Y).

Приклад. $\mathbb{R}$ поповнення $\mathbb{Q}$ (метрика $d(x, y) = |x - y|$).

Теорема 1 (існування). Довільний метричний простір має поповнення.

Теорема 2 (єдиність з точністю до ізометрії). Всі поповнення метричного простору ізометричні.

Поповнення метричного простору

Доведення теореми 1. Будуємо поповнення простору (X, d) так.

Вкладаємо ізометрично (X, d) в простір $B(X)$ усіх обмежених функцій $f : X \to \mathbb{R}$ з метрикою

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|\,.$$

Позначимо через $I(X) \subseteq B(X)$ образ X при цьому вкладенні.

Оскільки простір $B(X)$ повний, то шуканим поповненням є множнина

$$\mathrm{cl} I(X),$$

тобто замикання множини $I(X)$ в просторі $B(X)$.

Зауваження. На практичних розглянемо іншу конструкцію поповнення. Але надзвичайно корисну.

Поповнення метричного простору

Лема 1 (про продовження ізометрії). Нехай (X_1, d_1), (X_2, d_2) — повні метричні простори, $E_1 \subseteq X_1$, $E_2 \subseteq X_2$ — скрізь щільні множини та I — ізометрія з E_1 на E_2. Тоді I продовжується єдиним чином до ізометрії X_1 та X_2.

Кожна точка $x \in X_1 \setminus E_1$ є границею послідовності (x_n), $x_n \in E_1$. Оскільки простір X_2 повний, а I — ізометрія, то $(I(x_n))$ має границю $y \in X_2$.

Інша послідовність точок $x_n' \in E_1$, що збігається до x, приведе теж до точки y, оскільки $x_1, x_1', \dots, x_n, x_n', \dots$ збігається до x.

Покладемо $I(x) = y$. Відображення I зберігає відстані:

$$x_n \to x, \;\; z_n \to z \;\; \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \;\; d_1(x, z) = \lim_{n\to\infty} d_1(x_n, z_n) = \lim_{n\to\infty} d_2(I(x_n), I(z_n)) = d_2(I(x), I(z)).$$

Нарешті, $I(X_1) = X_2$, бо до кожної точки $y \in X_2$ збігається якась послідовність точок $I(x_n)$, де $x_n \in E_1$, а тоді (x_n) фундаментальна в X_1 та збігається до деякого $x \in X_1$, що дає $I(x) = y$.

Єдиність ізометричного продовження вже очевидна.

Доведення теореми 2. Нехай (X_1, d_1), (X_2, d_2) — два поповнення простору (X, d), тобто

простори (X_1, d_1), (X_2, d_2) — повні та існують ізометрії простору X на скрізь щільні підмножини

$$E_1 \subseteq X_1, \quad E_2 \subseteq X_2.$$

Позначимо їх I_1 та I_2, відповідно.

Очевидно, що $I = I_2 \circ I_1^{-1} : E_1 \to E_2$ — ізометрія E_1 та E_2.

За лемою 1 ізометрія I продовжується до ізометрії X_1 та X_2.

Стискаючі відображення

Нехай (X, d) — метричний простір та $f : X \to X$ — відображення цього простору в себе.

Означення 2. Точка $x \in X$ називається нерухомою точкою відображення f, якщо $f(x) = x$.

Означення 3. Відображення $f : X \to X$ називається стискаючим, якщо

$$\exists \alpha \in [0, 1) : \quad d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in X.$$

Число α називають коефіцієнтом стискання.

Ясно, що стискаюче відображення є неперервним.

Теорема Банаха про нерухому точку

Теорема 3 (принцип стискаючих відображень). Стискаюче відображення f повного метричного простору (X, d) в себе має єдину нерухому точку.

Нехай $x_0 \in X$. Покладемо $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що послідовність (x_n) фундаментальна. Помітимо, що (α — коефіцієнт стискання f)

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

Тому

$$d(x_{m+n}, x_n) \leq d(x_{m+n}, x_{n+m-1}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (\alpha^{n+m-1} + \ldots + \alpha^n) d(x_1, x_0),$$

що дає

$$d(x_{m+n}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

З повноти X випливає існування $x = \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. В силу неперервності f маємо

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Єдиність нерухомої точки випливає з нерівності

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

для іншої нерухомої точки y.

Коментар. В нерівності

$$d(x_{m+n}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

перейдемо до границі при $m \to \infty$. Отримаємо

$$d(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

Ця нерівність дає оцінку відстані від наближення x_n до нерухомої точки.

В кулю $\overline{B}(x, \varepsilon)$ ми потрапимо за

$$O\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

кроків.

Теорема 4 (локальний принцип стискаючих відображень). Нехай (X, d) — повний метричний простір, $f : \overline{B}(x_0, r) \to X$ — стискаюче відображення з коефіцієнтом стискання $\alpha \in (0, 1)$. Тоді при умові

$$d(x_0, f(x_0)) \leq (1 - \alpha) r$$

існує єдина нерухома точка відображення f в кулі $\overline{B}(x_0, r)$.

Покажемо, що відображення f переводить замкнену кулю $\overline{B}(x_0, r)$ в себе. Дійсно, якщо $x \in \overline{B}(x_0, r)$, то

$$\begin{aligned} d(x_0, f(x)) \leq d(x_0, f(x_0)) + d(f(x_0), f(x)) \leq (1 - \alpha) r + \alpha d(x_0, x) \leq \\ \leq (1 - \alpha) r + \alpha r = r. \end{aligned}$$

Почавши з довільної точки $y_0 \in \overline{B}(x_0, r)$, отримаємо послідовність $y_n = f(y_{n-1})$, яка лежить в замкненій кулі $\overline{B}(x_0, r)$. Все інше міститься теоремі 3.

Теорема 5 (узагальнений принцип стискаючих відображень). Відображення f повного метричного простору (X, d) в себе, для якого степінь

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}$$

є стискаючим відображенням, має єдину нерухому точку.

Існує точка $x \in X$ з $f^n(x) = x$. Тоді

$$f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(x),$$

тобто $f(x)$ — нерухома точка f^n. З єдиності нерухомої точки стискаючого відображення випливає, що $f(x) = x$.

Якщо $y \in X$ — інша нерухома точка відображення f, то

$$f^n(y) = f^{n-1}(f(y)) = f^{n-1}(y) = \ldots = y.$$

Звідки, $x = y$.

Теорема Банаха про нерухому точку

Теорема 6. Нехай (X, d) — повний метричний простір, а $f, g : X \to X$ — стискаючі відображення з коефіцієнтом стискання $\alpha \in (0, 1)$. Тоді для нерухомих точок x_f і x_g цих відображень справедлива нерівність

$$d(x_f, x_g) \leq \frac{1}{1-\alpha} \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Покладемо $y_n = g^n(x_f)$. З доведення теореми Банаха випливає, що

$$y_n \to x_g.$$

Тому

$$d(x_f, x_g) = \lim_{n \to \infty} d(x_f, y_n).$$

Для кожного n маємо

$$d(x_f, y_n) \leq d(x_f, g(x_f))(1 + \alpha + \ldots + \alpha^n) \leq \frac{d(f(x_f), g(x_f))}{1-\alpha},$$

звідки все і випливає.

Застосування теореми Банаха про нерухому точку

Задача Коші для ЗДР. Нехай $v \in C(\mathbb{R}^2)$, причому

$$|v(t,x) - v(t,y)| \le L|x-y| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \forall t \in [0, +\infty),$$

де $L > 0$. Тоді для кожного $x_0 \in \mathbb{R}$ на промені $[0, +\infty)$ задача Коші

$$\dot{x}(t) = v(t, x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

має єдиний розв'язок.

Розглянемо сегмент $[0, r]$, де $rL < 1$. Задача Коші рівносильна рівнянню

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Для доведення існування та єдиності розв'язку інтегрального рівняння розглянемо відображення $F : C([0, r]) \to C([0, r])$, що задане формулою

$$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [0, r], \quad x \in C([0, r]).$$

Застосування теореми Банаха про нерухому точку

Покажемо, що відображення $F : C([0,r]) \to C([0,r])$ стискаюче. Маємо

$$d(F(x),F(y)) = \max_{t\in[0,r]} \left| \int_0^t (v(\tau,x(\tau)) - v(\tau,y(\tau)))\, d\tau \right| \le$$

$$\le \max_{t\in[0,r]} \int_0^t |v(\tau,x(\tau)) - v(\tau,y(\tau))|\, d\tau \le$$

$$\le r \max_{\tau\in[0,r]} |v(\tau,x(\tau)) - v(\tau,y(\tau))| \le rL \max_{\tau\in[0,r]} |x(\tau) - y(\tau)| =$$

$$= rLd(x,y).$$

Отже, існує єдина функція $x \in C([0,r])$, для якої $F(x) = x$.

Далі це міркування повторимо для $[r,2r]$ і т.д.

Застосування теореми Банаха про нерухому точку

Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду. Нехай $K \in C([a, b] \times [a, b])$ та $f \in C([a, b])$. Розглянемо рівняння

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau)\, d\tau + f(t), \quad t \in [a, b],$$

де $\lambda \in \mathbb{R}$. Якщо

$$|\lambda| < \frac{1}{\max_{(t,\tau)\in[a,b]^2} |K(t, \tau)|(b - a)},$$

то для довільної $f \in C([a, b])$ існує єдиний розв'язок $x \in C([a, b])$ цього рівняння.

В повному метричному просторі $C([a, b])$ (з рівномірною метрикою) застосуємо теорему Банаха до відображення

$$F(x)(t) = \lambda \int_a^b K(t, \tau) x(\tau)\, d\tau + f(t), \quad t \in [a, b], \quad x \in C([a, b]).$$

Що будемо розбирати на цій лекції?

5 Компактність

- Компактні множини та компактні простори
- Неперервні відображення на компактах
- Цілком обмежені множини (передкомпактні множини)

Компактні множини та компактні простори

Дуже важливу роль в неперервній математиці має поняття компактності. Це поняття вводиться в категорії топологічних просторів. Ми розглянемо лише випадок метричних просторів.

Покриття множини A — це набір множин, об'єднання яких містить A. Відкрите покриття — це покриття, що складається з відкритих множин.

Означення 1. Множина в метричному просторі називається компактною (або компактом), якщо з довільного його покриття відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття.

Означення 2. Метричний простір (X, d) називаємо компактним, якщо X — компакт.

Центрована система — це такий набір множин, що кожен його скінченний піднабір має непорожній перетин.

Лема 1. Метричний простір (X, d) є компактним тоді й тільки тоді, коли кожна центрована система його замкнених підмножин має непорожній перетин.

Нехай X — компакт. Припустимо, що центрована система $\mathbf{M}$ замкнених підмножин X має порожній перетин. Переходячи до доповнень, одержуємо, що

$$\bigcup_{V \in \mathbf{M}} (X \setminus V) = X.$$

Отже, множини $X \setminus V$ утворюють відкрите покриття X. Виділимо скінченне підпокриття $X \setminus V_i$, $i = 1, \ldots, n$. Але умова $\cup_{i=1}^{n}(X \setminus V_i) = X$ суперечить центрованості $\mathbf{M}$.

Нехай $\mathbf{N}$ — відкрите покриття X, тоді набір $\mathbf{M}$ доповнень множин з $\mathbf{N}$ має порожній перетин. За припущенням $\mathbf{M}$ не є центрованою системою замкнених множин. Це дає існування скінченного підпокриття в $\mathbf{N}$.

Компактні множини та компактні простори

Теорема 1. Замкнена підмножина компакту є компактом.

Нехай множина A замкнена в компакті K та $\{U_\alpha\}$ відкрите покриття A. Додамо до покриття доповнення A та отримаємо нове відкрите покриття K. Виділимо з нього скінченне підпокриття. Воно складається з множин $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ вихідного покриття та, можливо, доповнення A. Перші n множин покривають A.

Теорема 2. Компакт є замкненою множиною.

Нехай K — компакт в просторі X та $y \in X \setminus K$. Для кожної точки $x \in K$ існує окіл U_x точки x та окіл V_x точки y з $U_x \cap V_x = \emptyset$. Набір околів $\{U_x\}_{x \in K}$ є відкритим покриттям K. Виділимо з нього скінченне підпокриття $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ компакту K. Тоді окіл $V = V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$ точки y не перетинається з K, бо не перетинається з $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Отже, $V \subseteq X \setminus K$, що доводить відкритість $X \setminus K$.

Теорема 3. Довільна нескінченна підмножина компакту має граничну точку в цьому компакті.

Нехай A — нескінченна підмножина компакту K. Якщо жодна точка $x \in K$ не є граничною для A, то для кожної точки $x \in K$ існує така відкрита множина U_x, що $x \in U_x$ і $U_x \cap A$ скінченна. Набір $\{U_x\}_{x \in K}$ є відкритим покриттям K. Виділимо з нього скінченне підпокриття $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Маємо

$$A = (U_{x_1} \cap A) \cup \ldots \cup (U_{x_n} \cap A).$$

Множина A скінченна. Прийшли до протиріччя.

Теорема 4. Образ компакту при неперервному відображенні є компактом.

Нехай X — компактний простір і $f(X)$ — його образ при неперервному відображенні f в простір Y. Для кожного відкритого покриття $\{V_\alpha\}$ множини $f(X)$ отримуємо відкрите покриття $\left\{f^{-1}(V_\alpha)\right\}$ простору X (неперервність!). Виділимо з нього скінченне підпокриття

$$f^{-1}(V_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(V_{\alpha_n})$$

та отримаємо скінченне покриття множини $f(X)$ множинами $V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}$.

Наслідок 1. Неперервна дійснозначна функція на компакті досягає найменшого та найбільшого значення.

Теорема 5. Нехай f — неперервне бієктивне відображення компактного метричного простору X на метричний простір Y. Тоді відображення $f^{-1} : Y \to X$ неперервне.[3]

Нехай $g = f^{-1}$. Якщо множина $M \subseteq X$ замкнена, то M компактна. Тоді компактною є множина
$$g^{-1}(M) = f(M).$$
Тому множина $g^{-1}(M)$ замкнена. Це дає неперервність g.

[3] У цій ситуації простори X та Y гомеоморфні.

Теорема 6 (теорема Кантора). Неперервне відображення з компактного метричного простору в метричний простір є рівномірно неперервним.

Нехай $f \in C(X, Y)$, (X, d_X) — компактний метричний простір, (Y, d_Y) — метричний простір. Для $\varepsilon > 0$ для кожної точки $x \in X$ існує таке $\delta_x > 0$, що

$$d_Y(f(y), f(z)) \leq \varepsilon \quad \text{як тільки} \quad d_X(y, x) \leq \delta_x, \;\; d_X(z, x) \leq \delta_x.$$

Відкриті кулі $B(x, \delta_x/2)$ покривають X, тому з них можна виділити скінченну кількість $B(x_1, \delta_{x_1}/2)$,..., $B(x_n, \delta_{x_n}/2)$, що покривають X. Покладемо

$$\delta = \min\{\delta_{x_1}/2, ..., \delta_{x_n}/2\}.$$

Нехай $d_X(x, y) \leq \delta$. Існує така точка x_i, що $d_X(x, x_i) < \delta_{x_i}/2$. А тоді $d_X(y, x_i) \leq \delta_{x_i}$, бо $\delta \leq \delta_{x_i}/2$. Отже, маємо

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Цілком обмежені множини (передкомпактні множини)

Означення 3. Нехай A — множина в метричному просторі (X, d) та $\varepsilon > 0$. Множина $E \subseteq X$ називається ε-сіткою для A, якщо для довільної точки $a \in A$ знайдеться точка $e \in E$ з $d(a, e) < \varepsilon$. Точки з E називають вузлами ε-сітки.

Означення 4. Множина A в метричному просторі називається цілком обмеженою (передкомпактною), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ вона має скінченну ε-сітку.[4]

Простір $\mathbb{N}$ з дискретною метрикою не є цілком обмеженим. В просторі ℓ_2 кулі не є цілком обмеженими.

Лема 2. Цілком обмежений простір є сепарабельним.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ беремо скінченне число вузлів $\frac{1}{n}$-сітки та отримуємо зліченну щільну підмножину.

[4] Вузли ε-сітки з означення 4 можуть і не лежати в A, але за цією ε-сіткою в множині A можна знайти 2ε-сітку з не більшою кількістю вузлів.

Цілком обмежені множини (передкомпактні множини)

Теорема 7 (критерій цілком обмеженості). Підмножина A метричного простору X цілком обмежена тоді і тільки тоді, коли з довільної нескінченної послідовності її елементів можна виділити фундаментальну підпослідовність.

Нехай A цілком обмежена та (x_n), $x_n \in A$. Покриваємо A скінченним числом куль з радіусом 1. Принаймні одна куля U_1 цього покриття містить нескінченну частину $\{x_n\}$. Множину $A \cap U_1$ можна покрити скінченним числом куль з радіусом $\frac{1}{2}$ та взяти серед них таку кулю U_2, що $U_1 \cap U_2$ містить нескінченну частину $\{x_n\}$. Продовжуючи за індукцією, для кожного n отримуємо кулю U_n з радіусом $\frac{1}{n}$ і властивістю: множина $V_n = U_1 \cap \ldots \cap U_n$ містить нескінченну частину $\{x_n\}$. Фундаментальну підпослідовність отримуємо так: беремо різні елементи $x_{k_n} \in V_n$, $k_n > k_{n-1}$.

Нехай множина A має вказану властивість. Припустимо, що для деякого $\varepsilon > 0$ в A немає скінченної ε-сітки. Будуємо послідовність точок $x_n \in A$ з попарними відстанями не менше ε: x_1 — довільний елемент A; якщо точки x_1, ..., x_n побудовані, то знайдеться така точка $x_{n+1} \in A$, що $d(x_{n+1}, x_i) \geq \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$, бо інакше $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — ε-сітка множини A. З такої послідовності не виділити фундаментальну підпослідовність.

Що будемо розбирати на цій лекції?

6 Компактність

- Критерій компактності
- Компактніть в ℓ_2
- Компактніть в $C([0,1])$

Критерій компактності

Теорема 1 (критерій компактності). Нехай K — множина в метричному просторі X. Наступні умови рівносильні:

1) множина K компактна;
2) кожна нескінченна підмножина множини K має граничну точку в K;
3) довільна нескінченна послідовність елементів K має підпослідовність, збіжну до точки з K;
4) множина K цілком обмежена та повна.

1) $\Rightarrow$ 2) Це теорема 3 попередньої лекції.

2) $\Rightarrow$ 3) Беремо нескінченну послідовність (x_n), $x_n \in K$. Множина $\{x_n\}$ має граничну точку $x \in K$. Підпослідовність, збіжну до x, будуємо так: у кожній кулі $B(x, \frac{1}{n})$ беремо точку $x_{k_n} \neq x$, $k_n > k_{n-1}$.

3) $\Rightarrow$ 4) Цілком обмеженість випливає з теореми 7 попередньої лекції. Повнота випливає з того, що довільна фундаментальна послідовність точок з K має збіжну в K підпослідовність і тому сама збіжна.

Критерій компактності

4) $\Rightarrow$ 1) Нехай дано відкрите покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ множини K. Через сепарабельність K за теоремою Ліндельофа існує не більш ніж зліченне його підпокриття $\{U_{\alpha_i}\}_{\alpha_i}$.

Припустимо, що з цього підпокриття не можна виділити скінченне. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдеться точка

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

З послідовності (x_n) можна виділити підпослідовність (x_{n_k}), збіжну до точки $x \in K$. Знайдеться такий номер $m \in \mathbb{N}$, що $x \in U_{\alpha_m}$. Отже, для деякого N отримуємо $x_{n_k} \in U_{\alpha_m}$ для всіх $k \geq N$. Це суперечить тому, що

$$x_{n_k} \notin \bigcup_{i=1}^{n_k} U_{\alpha_i}$$

для кожного k.

Критерій компактності Хаусдорфа

Теорема 2. Нехай (X, d) — повний метричний простір та $K \subseteq X$. Наступні умови рівносильні:

1) множина K компактна в просторі X;
2) множина K цілком обмежена та замкнена в просторі X.

Компактніть в ℓ_2

Множина $K \subseteq \mathbb{R}^n$ компактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена, обмежена. В просторі ℓ_2 ситуація складніша.

Теорема 3. Множина $K \subseteq \ell_2$ компактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена, обмежена та виконана умова:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in K} \sum_{n=m}^{\infty} |x_n|^2 = 0.$$

Якщо множина $K \subseteq \ell_2$ компактна, то вона замкнена, обмежена та для кожного $\varepsilon > 0$ має скінченну ε-сітку $a^1, \ldots, a^p$. Беремо $m \in \mathbb{N}$ таким, що $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n^i|^2 < \varepsilon^2$ для всіх $i = 1, \ldots, p$. Для кожного $x \in K$ існує таке $i \leq p$, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - a_n^i|^2 < \varepsilon^2,$$

та $|x_n|^2 \leq 2|x_n - a_n^i|^2 + 2|a_n^i|^2$. Тому для кожного $x \in K$ маємо

$$\sum_{n=m}^{\infty} |x_n|^2 < 4\varepsilon^2.$$

Компактніть в ℓ_2

Навпаки, нехай множина $K \subseteq \ell_2$ замкнена, обмежена та виконана умова:

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in K} \sum_{n=m}^{\infty} |x_n|^2 = 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ побудуємо скінченну ε-сітку. Беремо таке m, що

$$\sup_{x\in K} \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} \Rightarrow \forall x \in K : \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Множина

$$K_m = \{(x_1, x_2, ..., x_m, 0, 0, ...) : x = (x_n) \in K\}$$

є $\frac{\varepsilon}{2}$-сіткою для K. В множині K_m є скінченна $\frac{\varepsilon}{2}$-сітка (чому?), яка буде ε-сіткою для множини K.

Компактніть в $C([0,1])$

Означення 1. Множина $A \subseteq C([0,1])$ називається одностайно неперервною, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall f \in A$ з $|x-y| < \delta$ $(x, y \in [0,1])$ випливає $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Довільна скінченна множина $A \subseteq C([0,1])$ одностайно неперервна. Множина $A = \{x^n :\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq C([0,1])$ не є одностайно неперервною.

Теорема 4 (Асколі–Арцела). Множина $A \subseteq C([0,1])$ компактна тоді і тільки тоді, коли вона замкнена, обмежена та одностайно неперервна.

Компактніть в $C([0,1])$

Нехай множина A компактна в $C([0,1])$. Доведемо її одностайну неперервність.

Для довільного $\varepsilon > 0$ множина A має скінченну ε-сітку f_1, f_2, ..., f_n. Функції f_i рівномірно неперервні на $[0,1]$. Тому існують такі $\delta_i > 0$,

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \varepsilon,$$

як тільки $|x_1 - x_2| < \delta_i$.

Покладемо $\delta = \min_i \delta_i$. Для довільної $f \in A$ беремо таку f_i, що $d(f, f_i) < \varepsilon$. Тоді при $|x_1 - x_2| < \delta$ маємо

$$\begin{aligned}|f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - f_i(x_1)| + |f_i(x_1) - f_i(x_2)| + |f_i(x_2) - f(x_2)| \leq \\ &\leq d(f, f_i) + |f_i(x_1) - f_i(x_2)| + d(f, f_i) < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Одностайну неперервність A доведено.

Компактніть в $C([0,1])$

Навпаки, нехай множина $A \subseteq C([0,1])$ замкнена, обмежена та одностайно неперервна. Для $\varepsilon > 0$ побудуємо скінченну 5ε-сітку множини A.

Нехай $\max_{x\in[0,1]} |f(x)| \le M$ для всіх $f \in A$ та оберемо так $\delta > 0$, що для всіх $f \in A$ маємо $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, як тільки $|x_1 - x_2| < \delta$. Будуємо розбиття сегментів $[0,1]$ та $[-M, M]$

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1, \quad -M = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = M$$

на проміжки довжини менше δ та ε, відповідно. Поставимо функції $f \in A$ у відповідність таку неперервну кусково-лінійну функцію φ (ламану) з вершинами в (x_i, y_k), що $|f(x_i) - \varphi(x_i)| < \varepsilon \ \forall i$.

Множина таких кусково-лінійних функцій є скінченною 5ε-сіткою для A. Дійсно, для $x \in [0,1]$ та найближчої до неї зліва точки x_i маємо

$$|f(x) - \varphi(x)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - \varphi(x)| <$$
$$< \varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon = 5\varepsilon,$$

оскільки для $\in [x_i, x_{i+1}]$:

$$|\varphi(x_i) - \varphi(x)| \le |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})| \le$$
$$\le |\varphi(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - \varphi(x_{i+1})| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Теми для доповідей (на останній тиждень)

1. Поняття топологічного простору. Основні поняття (збіжність, неперервність). Способи задання топологій. Аксіоми зліченності.
2. Хаусдорфові топологічні простори. Приклади та основні властивості.
3. Компактні топологічні простори. Приклади та основні властивості.
4. Нормальні топологічні простори. Лема Урисона.
5. Добуток топологічних просторів. Теорема Тихонова про компактність добутку компактів.
6. Продовження ліпшицевих функцій. Лема Макшейна.
7. Теорема Урисона про універсальність простору $C([0,1])$ в класі сепаребельних метричних просторів.
8. Напівнеперервні знизу функції. Теореми про існування мінімумів.
9. Категорний метод доведення існування. Доведення Банаха існування неперервних та ніде недиференційовних функцій.
10. Лема Цорна та її застосування в аналізі (існування базису, теореми Тихонова, Хана–Банаха,...).

Теми для доповідей (на останній тиждень)

11 Поповнення лінійного нормованого простору.

12 Слабка збіжність. Обмеженість слабко збіжної послідовності. Лема Опяла.

13 Теорема про виділення слабко збіжної підпослідовності з обмеженої послідовності елементів гільбертового простору.

14 Метод циклічного проектування та його збіжність.

15 Метод Красносельського–Манна та його збіжність.

16 Теорема Йордана–фон Неймана про характеризацію просторів зі скалярним добутком.

17 Теореми про віддільність опуклих множин.

18 Похідні за Гато та за Фреше функціоналів.

19 Теореми про неявне відображення.

20 Метод Ньютона–Канторовича.

Теми для доповідей (на останній тиждень)

21 Лема Лакса–Мільграма.

22 Теорема Крейна–Мільмана.

23 Теорема Кіршбрауна–Валентайна.

24 Теореми Радона та Каратеодорі.

25 Теорема Хеллі.

26 Проблема опуклості чебишовських множин та теорема Бунта–Моцкіна.

27 Лема Шпернера та теорема Брауера про нерухому точку (комбінаторне доведення в $\mathbb{R}^2$).

28 Теорема Брауера про нерухому точку (аналітичне доведення).

29 Теорема Шаудера про нерухому точку.

30 Теорема Какутані про нерухому точку та рівновага Неша.

7 Дві фундаментальні теореми

- Теорема Стоуна про рівномірну апроксимацію
- Теорема Тітце–Урисона про неперервне продовження

Теорема Стоуна

Нехай X – компакт[5]. Розглядаємо лінійний простір $C(X)$ неперервних функцій $X \to \mathbb{R}$ з рівномірною метрикою

$$d(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|, \; f, g \in C(X).$$

Простір $C(X)$ з рівномірною метрикою є повним.

Означення 1. Нехай $A \subseteq C(X)$. Множину A називають алгеброю, якщо $\forall f, g \in A$ і $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $f + g \in A$, $\alpha f \in A$, $fg \in A$.

Факт. Нехай $A \subseteq C(X)$ – алгебра. Доведіть, що $\mathrm{cl} A$ також алгебра.

Означення 2. Нехай $A \subseteq C(X)$. Множина A розділяє точки множини X, якщо

$$\forall x_1, x_2 \in X, \; x_1 \neq x_2 \; \exists f \in A : \; f(x_1) \neq f(x_2).$$

[5] X – компактний метричний простір, або хаусдорфовий компактний топологічний простір.

Теорема Стоуна

Теорема 1 (Стоун, 1937). Нехай X – компакт, $A \subseteq C(X)$. Припустимо, що:

A1) A – алгебра;

A2) A розділяє точки множини X;

A3) $1 \in A$, де 1 – функція, визначана рівністю $1(x) = 1$, $x \in X$.

Тоді множина A щільна в $C(X)$, тобто $\mathrm{cl} A = C(X)$.

Лема 1. Якщо $x_1, x_2 \in X$ і $a, b \in \mathbb{R}$, то існує функція $f \in A$ така, що

$$f(x_1) = a\,, \;\; f(x_2) = b.$$

Оскільки A розділяє точки X, то існує функція $g \in A$ така, що $g(x_1) \neq g(x_2)$. Покладемо

$$f(x) = a + \frac{b-a}{g(x_2) - g(x_1)} \left(g(x) - g(x_1)\right)\,, \;\; x \in X.$$

Умова A3 гарантує виконання включення $f \in A$.

Теорема Стоуна

Лема 2. Якщо $f \in A$, то $|f| \in \mathrm{cl}A$.

Не зменшуючи загальності, вважаємо, що

$$\max_{x \in X} |f(x)| \leq 1.$$

Існує послідовність поліномів p_n, що рівномірно збігається до $t \to |t|$ на сегменті $[-1, 1]$ і така, наприклад, що $|p_n(t) - |t|| < \frac{1}{n}$ для всіх $t \in [0, 1]$. Оскільки $\max_{x \in X} |f(x)| \leq 1$, то звідси випливає нерівність

$$d(p_n(f), |f|) < \frac{1}{n},$$

тобто

$$|f| = \lim_{n \to \infty} p_n(f).$$

Оскільки алгебра A містить усі константи, то $p_n(f) \in A$. Отже, $|f| \in \mathrm{cl}A$.

Теорема Стоуна

Лема 3. Якщо $f_1, f_2, ..., f_n \in A$, то $\max\{f_1, f_2, ..., f_n\} \in \mathrm{cl}A$ і $\min\{f_1, f_2, ..., f_n\} \in \mathrm{cl}A$.

Нехай $f_1, f_2 \in A$. Маємо

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|}{2},$$

$$\min\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|}{2}.$$

Враховуючи лему 2 і те, що $\mathrm{cl}A$ – алгебра, отримуємо

$$\max\{f_1, f_2\} \in \mathrm{cl}A, \ \ \min\{f_1, f_2\} \in \mathrm{cl}A.$$

Далі індукція по n.

Теорема Стоуна

Нехай $h \in C(X)$. Потрібно перевірити, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує функція $f \in \mathrm{cl} A$ така, що $d(f, h) < \varepsilon$. Тоді $h \in \mathrm{cl} A$, тобто $\mathrm{cl} A = C(X)$.

Нехай $x, y \in X$ – довільні точки. За лемою 1 існує функція $f_{xy} \in A$ така, що

$$f_{xy}(x) = h(x)\,, \ \ f_{xy}(y) = h(y).$$

Існують такі околи $O_{xy}(x)$ і $O_{xy}(y)$ точок x і y, що

$$h(t) - \varepsilon < f_{xy}(t) < h(t) + \varepsilon \tag{1}$$

для всіх $t \in O_{xy}(x) \cup O_{xy}(y)$.

Зафіксуємо точку $y \in X$. З покриття $\{O_{xy}(x) : x \in X\}$ компакта X можна виділити скінченне підпокриття $\{O_{x_1 y}(x_1), ..., O_{x_k y}(x_k)\}$.

Покладемо $V_y = \bigcap_{i=1}^{k} O_{x_i y}(y)$ і $f_y = \min\{f_{x_1 y}, f_{x_2 y}, ..., f_{x_k y}\}$. Тоді з (1) випливає, що

$$h(t) - \varepsilon < f_y(t) < h(t) + \varepsilon \ \ \forall t \in V_y, \tag{2}$$

$$f_y(t) < h(t) + \varepsilon \ \ \forall t \in X. \tag{3}$$

Теорема Стоуна

З покриття $\{V_y : y \in X\}$ компакта X виділимо скінченне підпокриття $\{V_{y_1}, ..., V_{y_n}\}$ і покладемо

$$f = \max\{f_{y_1}, f_{y_2}, ..., f_{y_n}\}.$$

Тоді з (2) маємо

$$h - \varepsilon < f,$$

а з (3) маємо

$$f < h + \varepsilon.$$

Отже, $d(f, h) < \varepsilon$, а $f \in \mathrm{cl}A$ згідно з лемою 3.

Теорема 2 (Titze, Урисон). Нехай:

1) A — замкнена підмножина метричного[6] простору (X, d);
2) $f : A \to \mathbb{R}$ — неперервна функція.

Тоді існує неперервне продовження g функції f на весь простір X. Якщо $f(A) \subseteq [-1, 1]$, то і продовження g можна обрати таким, що $g(X) \subseteq [-1, 1]$.

---

[6] Результат вірний і для нормальних топологічних просторів.

Теорема Тітце–Урисона: доведення

Лема 4. Нехай A, B — диз'юнктні замкнені підмножини метричного простору (X, d). Тоді існує така неперервна функція $\varphi : X \to [0, 1]$, що

$$\varphi = 1 \ \text{ на } \ A, \quad \varphi = 0 \ \text{ на } \ B.$$

$$\varphi(x) = \frac{d(x, B)}{d(x, A) + d(x, B)} \quad \forall x \in X.$$

Лема 5. Нехай A, B — диз'юнктні замкнені підмножини метричного простору (X, d), $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тоді існує така неперервна функція $\psi : X \to [a, b]$, що

$$\psi = a \ \text{ на } \ A, \quad \psi = b \ \text{ на } \ B.$$

$$\psi(x) = b + (a - b)\varphi(x) \quad \forall x \in X.$$

Теорема Тітце–Урисона: доведення

Випадок $f(A) \subseteq [-1,1]$. Можна вважати, що $\inf_A f = -1$, $\sup_A f = 1$.

$$A_- = \left\{x \in A : \ f(x) \leq -\tfrac{1}{3}\right\}, \quad A_+ = \left\{x \in A : \ f(x) \geq \tfrac{1}{3}\right\}.$$

За лемою 5 існує $g_0 \in C(X)$: $g_0 = -\frac{1}{3}$ на A_-, $g_0 = \frac{1}{3}$ на A_+, $|g_0| \leq \frac{1}{3}$ на X. Крім того,

$$|f(x) - g_0(x)| \leq \tfrac{2}{3} \quad \forall x \in A.$$

Повторимо міркування для $f_1 = f - g_0$ замість та $\frac{2}{3}$ замість 1. Існує $g_1 \in C(X)$:

$$|g_1| \leq \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3} \ \text{ на } \ X, \quad |f_1(x) - g_1(x)| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \quad \forall x \in A.$$

Теорема Тітце–Урисона: доведення

Крок за кроком будуємо $g_n \in C(X)$ та $f_n = f_{n-1} - g_{n-1} \in C(A)$:

$$|g_n| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{на} \quad X, \qquad |f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall x \in A.$$

Маємо

$$f_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(x), \quad x \in A.$$

Ряд $\sum_k g_k$ рівномірно збіжний на X. Отже, його сума $g \in C(X)$. Крім того,

$$|g(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 1 \quad \forall x \in X.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при $x \in A$, то $f(x) = g(x)$ при $x \in A$.

Функція $g \in C(X)$ — шукане продовження f на X.

Теорема Тітце–Урисона: доведення

Загальний випадок.

Будуємо
$$h(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}, \quad x \in A.$$
Ясно, що $h \in C(A)$, $h(A) \subseteq (-1, 1)$ та $f = \frac{h}{1-|h|}$. Продовжуємо h на X. Нехай $e \in C(X)$ — таке продовження h, що $|e| \le 1$. Зразу покласти $g = \frac{e}{1-|e|}$ не вийде, бо $|e|$ може приймати значення 1.

Покладемо $B = \{x \in X : |e(x)| = 1\}$. Множина B замкнена та $A \cap B = \emptyset$. Візьмемо функцію φ, що розділяє A і B і нульову на B (лема 4). Покладемо $p = \varphi e$. Маємо $p(X) \subseteq (-1, 1)$ та $p = h$ на A.

Шукане продовження
$$g(x) = \frac{p(x)}{1 - |p(x)|}, \quad x \in X.$$

Наслідок 1. Нехай:

1) A — замкнена підмножина метричного простору (X, d);
2) $f : A \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відображення.

Тоді існує неперервне продовження g відображення f на весь метричний простір X.

Питання на модуль «Метричні простори», групи ПС-3, САТР-3

Основні поняття

1. Означення метрики. Метричний простір. Підпростір метричного простору.
2. Приклади метрик та метричних просторів.
3. Відкрита та замкнена кулі.
4. Відкрита та замкнена множина.
5. Точка дотику, гранична точка, ізольована точка. Замикання множини.
6. Внутрішня точка, внутрішність.
7. Зв'язна множина.
8. Границя послідовності елементів метричного простору.
9. Фундаментальна послідовність.
10. Приклади фундаментальних послідовностей, що не мають границі.
11. Скрізь щільна множина.
12. Сепарабельний метричний простір.
13. Повний метричний простір.
14. Ніде не щільна множина.
15. Множина 1-ої категорії, множина 2-ої категорії.
16. Неперервність відображення в точці (два означення). Рівномірна неперервність відображення.
17. Стискаюче відображення.
18. Ізометрія. Гомеоморфізм.
19. Поповнення метричного простору.
20. Компактна множина та компактний метричний простір.
21. Наведіть приклади обмежених замкнених некомпактних множин.
22. Цілком обмежені множини.

Питання на модуль «Метричні простори», групи ПС-3, САТР-3

Теореми та твердження з доведеннями

1. Нерівність чотирикутника.
2. Доведіть єдиність границі.
3. Доведіть збіжність фундаментальної послідовності, що має збіжну підпослідовність.
4. Доведіть відкритість відкритої кулі.
5. Властивості відкритих множин, що пов'язані з теоретико-множинними операціями.
6. Теорема Вейєрштрасса про апроксимацію поліномами.
7. Властивість Ліндельофа. Теорема про сепарабельність підпростору сепарабельного метричного простору.
8. Принцип вкладених куль.
9. Теорема Бера.
10. Теорема Банаха про нерухому точку.
11. Теорема про продовження ізометрії.
12. Теорема Хаусдорфа про існування та «єдиність» поповнення.
13. Неперервність суперпозиції неперервних відображень.
14. Теорема Кантора про рівномірну неперервність.
15. Узагальнена теорема Больцано-Коші.
16. Доведіть компактність замкненої підмножини компактної множини.
17. Доведіть замкненість компактної множини.
18. Критерій цілком обмеженості Хаусдорфа.
19. Доведіть сепарабельність цілком обмеженого простору.
20. Критерій компактності Хаусдорфа.
21. Теорема Асколі–Арцела.
22. Теорема Стоуна.
23. Теорема Тітце–Урисона.

Питання на модуль «Метричні простори», групи ПС-3, САТР-3

Задачі

1. Довести, що довільна непорожня відкрита множина в $\mathbb{R}$ є не більш ніж зліченним об'єднанням відкритих інтервалів, які не перетинаються, два з яких можуть бути відкритими променями. Описати структуру замкненої множини в $\mathbb{R}$.
2. Нехай X — метричний простір, $A \subseteq X$. Доведіть формулу $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$.
3. Нехай X — метричний простір, $A \subseteq X$. Доведіть формулу $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$.
4. Нехай X — метричний простір, $A \subseteq X$. Доведіть рівності $X \setminus \mathrm{cl}A = \mathrm{int}(X \setminus A)$, $X \setminus \mathrm{int}A = \mathrm{cl}(X \setminus A)$.
5. Скільки різних множин можна отримати з заданої підмножини $\mathbb{R}$ за допомогою операцій замикання та взяття доповнення?
6. Нехай (x_n) — послідовність у метричному просторі X, $x \in X$. Припустимо, що довільна підпослідовність (x_{n_k}) має підпослідовність $(x_{n_{k_l}})$, збіжну до x. Доведіть, що $x_n \to x$.
7. Доведіть, що в довільному метричному просторі $\mathrm{cl}B(x,r) \subseteq \overline{B}(x,r)$. Наведіть приклад ситуації $\mathrm{cl}B(x,r) \neq \overline{B}(x,r)$.
8. Доведіть, що простір $B(X)$ заданих на непорожній множині X обмежених дійснозначних функцій повний відносно метрики $d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.
9. Доведіть повноту простору ℓ_∞.
10. Доведіть повноту простору ℓ_p $(p \in [1, +\infty))$.
11. Доведіть повноту простору c.
12. Доведіть повноту простору c_0.
13. Доведіть повноту простору $\mathbb{R}^\infty$.
14. Доведіть повноту простору $C([0,1])$ (метрика рівномірна).
15. Нехай (X,d) — повний метричний простір і $Y \subseteq X$. Довести, що простір (Y,d) повний тоді й лише тоді, коли Y — замкнена множина.
16. Нехай (X,d) — повний метричний простір, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — зліченний набір відкритих скрізь щільних підмножин X. Довести, що множина $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ непорожня та скрізь щільна.

Питання на модуль «Метричні простори», групи ПС-3, САТР-3

Задачі

17. Чи буде простір ℓ_∞ сепарабельним?
18. Доведіть сепарабельність простору ℓ_p $(p \in [1, +\infty))$.
19. Доведіть сепарабельність простору c.
20. Доведіть сепарабельність прос тору c_0.
21. Доведіть сепарабельність простору $\mathbb{R}^\infty$.
22. Доведіть сепарабельність простору $C([0,1])$ (метрика рівномірна).
23. Нехай A, B — компактні підмножини метричного простору (X, d), при цьому $A \cap B = \emptyset$. Доведіть, що існують такі точки $x \in A$, $y \in B$, що $d(x, y) = d(A, B)$.
24. Покажіть, що замкнені кулі просторів ℓ_2 та $C([0,1])$ (метрика рівномірна) некомпактні.
25. Нехай $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to +\infty$. Доведіть, що множина
$$E = \left\{ x \in \ell_2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \leq 1 \right\}$$
компактна в ℓ_2.
26. Нехай (X, d) — компактний метричний простір, а відображення $f : X \to X$ задовольняє умову
$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X, \ x \neq y.$$
Довести, що відображення f має єдину нерухому точку.
27. Доведіть, що рівняння $x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t-\xi} x(\xi) d\xi + 1$ має єдиний розв'язок $x = x(t)$ у просторі $C([0,1])$.
28. Доведіть, що рівняння $x(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 t\xi^2 x(\xi) d\xi + 1$ має єдиний розв'язок $x = x(t)$ у просторі $C([0,1])$.

Питання на модуль «Метричні простори», групи ПС-3, САТР-3

Задачі

29. Розглянемо нескінченну систему рівнянь

$$x_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} x_i + b_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

де $b = (b_i) \in \ell_\infty$. Доведіть, що при $\sup_k \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki}| < 1$ система має єдиний розв'язок у ℓ_∞.

30. Функція $f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ задовольняє умову

$$\exists m > 0 \ \exists M \geq m \ \forall x \in [a, b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ y_1 \neq y_2 : \ m \leq \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \leq M.$$

Довести, що існує єдина функція $g \in C([a, b])$ така, що $f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

31. Які підмножини дійсної прямої зв'язні?
32. Доведіть, що замкнену опуклу множину $A \subseteq \mathbb{R}^n$ не можна розбити на дві непорожні замкнені підмножини (метрика на $\mathbb{R}^n$ стандартна).
33. Доведіть, що відкриту опуклу множину $A \subseteq \mathbb{R}^n$ не можна розбити на дві непорожні відкриті підмножини (метрика на $\mathbb{R}^n$ стандартна).
34. Нехай X, Y — метричні простори. Доведіть, що відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли $f(\mathrm{cl}A) \subseteq \mathrm{cl}f(A)$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Що будемо розбирати на цій лекції?

8 Лінійні нормовані простори

- Згадаємо ряд понять з лінійної алгебри
- Лінійні нормовані та евклідові простори
- Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах
- Некомпактність куль в нескінченновимірних просторах

Лінійні простори

Нагадаємо відоме з лінійної алгебри поняття лінійного (векторного) простору над полем $\mathbb{K}$. У подальшому за поле $\mathbb{K}$ (поле скалярів) у цьому курсі завжди приймаємо поле дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Означення 1. Множину E називаємо лінійним простором, якщо на ній визначено операції додавання та множення на скаляр

$$E \times E \to E, \ (x, y) \mapsto x + y, \quad E \times \mathbb{K} \to E, \ (x, \alpha) \mapsto \alpha x,$$

причому виконуються умови:

1) $\forall x, y \in E$: $x + y = y + x$;
2) $\forall x, y, z \in E$: $x + (y + z) = (y + x) + z$;
3) $\exists! 0 \in E \ \forall x \in E$: $x + 0 = x$;
4) $\forall x \in E \ \exists! (-x) \in E$: $x + (-x) = 0$;
5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E$: $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6) $1x = x$ (1 — одиниця поля $\mathbb{K}$);
7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E$: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Означення 2. Множина $V \subseteq E$ називається лінійно залежною, якщо існує скінченний набір елементів $x_1, ..., x_n \in V$ та скінченний набір скалярів $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, не рівних одночасно нулю, для яких

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0.$$

У протилежному випадку множина V називається лінійно незалежною.

Вам відомо, що в просторі $\mathbb{R}^n$ довільна множина, яка містить більше ніж n елементів, лінійно залежна.

Означення 3. Простір E називається нескінченновимірним, якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ у ньому є n лінійно незалежних векторів.

Приклади лінійних нескінченновимірних просторів

1. Нехай M — нескінченна множина. Простір E всіх функцій $M \to \mathbb{R}$ з поточковими операціями, тобто

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \ \ (\alpha f)(t) = \alpha f(t),$$

лінійний та нескінченновимірний.

2. Беремо $M = \mathbb{N}$ в **1**. Отримуємо простір усіх дійсних послідовностей $x = (x_n)$, що позначається $\mathbb{R}^\infty$.

3. Множина P усіх алгебраїчних поліномів, заданих на відрізку (на нескінченній підмножині $\mathbb{R}$).

4. Простори послідовностей ℓ_2, c, c_0 (операції покомпонентні).

5. Простір $C([0,1])$.

Якщо в цих просторах брати лінійні підпростори, то кількість прикладів сильно зросте.

Означення 4. Лінійно незалежна множина $B = \{x_\alpha\}$ в лінійному просторі E називається алгебраїчним базисом (базисом Хамеля) простору E, якщо довільний вектор $x \in E$ є скінченною лінійною комбінацією векторів з B, тобто

$$x = c_1 x_{\alpha_1} + \ldots + c_n x_{\alpha_n}$$

для деяких скалярів c_i та векторів $x_{\alpha_i} \in B$. В нульовому просторі базисом вважаємо нуль.

Теорема 1 (існування алгебраїчних базисів). Довільний лінійний простір E має алгебраїчний базис. Усі базиси лінійного простору рівнопотужні. Крім того, алгебраїчний базис лінійного підпростору можна доповнити до базису всього простору.

Лема Куратовського–Цорна. Якщо довільний ланцюг[7] в частково упорядкованій множині X має мажоранту, то в X є максимальний елемент.

[7] Підмножина, що складається з порівнюваних елементів.

Доведемо тільки, що довільний лінійний простір E має алгебраїчний базис.

Вважаємо, що $E \neq \{0\}$. Розглянемо множину M усіх лінійно незалежних множин $m \subseteq E$. Введемо на M відношення часткового порядку:

$$m \leq m' \quad \Leftrightarrow \quad m \subseteq m'.$$

За допомогою леми Куратовського–Цорна доводимо, що в M є максимальний елемент, тобто лінійно незалежна множина m, яка не є власною підмножиною іншої лінійно незалежної множини.

Такий максимальний елемент є базисом E, оскільки існування вектора $x \in E$, що не зображається у вигляді лінійної комбінації векторів з m, означає лінійну незалежність множини $m \cup \{x\}$.

Лінійні нормовані та евклідові простори

Означення 5. Функція $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$, визначена на лінійному просторі E, називається нормою, якщо виконано такі умови:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нерівність трикутника).

Означення 6. Упорядкована пара $(E, \|\cdot\|)$, де E — лінійний простір, $\|\cdot\|$ — норма на E, називається лінійним нормованим простором (ЛНП).

ЛНП — метричний простір з метрикою

$$d(x, y) = \|x - y\|, \ \ x, y \in E.$$

Збіжність, фундаментальність, неперервність за цією метрикою називають збіжністю, фундаментальністю, неперервністю за нормою.

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \ \ \Leftrightarrow \ \ \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Означення 7. Повний ЛНП називається банаховим простором[8].

1. В $\mathbb{R}^n$ є багато норм (банаховий в усіх випадках)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_\infty = \max_k |x_k|.$$

2. Лінійний простір $B(M)$ усіх обмежених функцій $f : M \to \mathbb{R}$ є банаховим простором з нормою

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|.$$

Частинний випадок: простір ℓ_∞ усіх дійсних обмежених послідовностей (x_n) з нормою

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

3. Лінійний простір $C([0,1])$ неперервних функцій на сегменті $[0,1]$ — банаховий простір з нормою попереднього прикладу, $M = [0,1]$.

[8] Термін пов'язаний з видатним польським математиком Стефаном Банахом (1892–1945).

4. Лінійний простір ℓ_p, де $p \in [1, +\infty)$, усіх таких дійсних послідовностей $x = (x_n)$: $\sum_n |x_n|^p < +\infty$, з нормою

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Простір ℓ_p банаховий.

Лінійні нормовані та евклідові простори

Введемо важливий клас ЛНП.

Означення 8. Нехай E — дійсний лінійний простір. Функція $(\cdot, \cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ називається скалярним добутком в просторі E, якщо виконуються такі умови:

- $\forall x \in E : \ (x, x) \geq 0, \ (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
- $\forall x, y \in E : \ (x, y) = (y, x);$
- $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}: (\alpha x, y) = \alpha(x, y);$
- $\forall x, y, z \in E : \ (x + y, z) = (x, z) + (y, z).$

Означення 9. Упорядкована пара $(E, (\cdot, \cdot))$, де E — лінійний простір, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток на E, називається евклідовим (передгільбертовим) простором.

Популярний скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$: $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Теорема 2 (нерівність Шварца). Для елементів x і y евклідового простору E має місце нерівність

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Нерівність очевидна коли один з векторів нульовий. Нехай $y \neq 0$. Маємо

$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + 2t(x, y) + t^2(y, y) \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Дискримінант квадратного тричлена недодатній, тобто

$$4|(x, y)|^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0.$$

Покладемо $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Нерівність Шварца набуває такого вигляду

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Введена функція $\| \cdot \|$ є нормою на евклідовому просторі E (її називають евклідовою нормою). Отже, евклідові простори — це ЛНП з нормою, що породжена скалярним добутком.

Не кожну норму можна отримати із скалярного добутку.

Критерій Йордана–фон Неймана. Норма $\|\cdot\|$ в лінійному просторі E породжується скалярним добутком, тоді і тільки тоді, коли для всіх $x, y \in E$ виконується рівність (тотожність паралелограма)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Лінійні нормовані та евклідові простори

Означення 10. Повний евклідовий простір називається гільбертовим простором[9].

1. Лінійний простір ℓ_2 усіх таких дійсних послідовностей $x = (x_n)$: $\sum_n x_n^2 < +\infty$, з скалярним добутком

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Простір ℓ_2 гільбертовий.

2. Лінійний підпростір ℓ_2^0 в ℓ_2, що складається з усіх послідовностей з скінченним числом ненульових координат, неповний. Елементи $(1, 1/2, ..., 1/n, 0, ...)$ утворюють фундаментальну послідовність без границі в ℓ_2^0.

3. Неповним є простір $C([0, 1])$ з скалярним добутком

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

[9] Термін пов'язаний з видатним німецьким математиком Давидом Гільбертом (1862–1943).

Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах

Означення 11. Дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ у лінійному просторі E називають еквівалентними, якщо

$$\exists c_1, c_2 > 0 : \quad c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1 \ \ \forall x \in E.$$

Поняття збіжності, відкритої множини, компактності співпадають для еквівалентних норм.

Теорема 3. Нехай E — скінченновимірний ЛНП. Тоді всі норми на E еквівалентні.

Беремо базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ та за допомогою розкладів $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ введемо норму

$$p(x) = |x_1| + \ldots + |x_n|, \quad x \in E.$$

Нехай q — ще одна норма на E. Покладемо $c = \max_i q(e_i)$. Тоді

$$q(x) \le |x_1|q(e_1) + \ldots + |x_n|q(e_n) \le cp(x).$$

Покажемо, що

$$\exists m > 0 : \quad mp(x) \le q(x) \ \ \forall x \in E.$$

Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах

Маємо

$$|q(x) - q(y)| \leq q(x - y) \leq cp(x - y) \quad \forall x, y \in E.$$

Функція q неперервна на E з нормою p. Сфера

$$S = \{x \in E : \; p(x) = 1\}$$

в просторі E з нормою p компактна. Отже, q досягає на сфері S мінімуму m. Причому $m > 0$, оскільки q не обертається в нуль на S $(0 \notin S)$. Для $x \neq 0$ маємо

$$\frac{x}{p(x)} \in S, \quad q\left(\frac{x}{p(x)}\right) \geq m.$$

Отже,

$$q(x) \geq mp(x).$$

Затишний світ скінченновимірних просторів

Усі скінченновимірні ЛНП повні. Кожний скінченновимірний лінійний підпростір ЛНП замкнений. В скінченновимірному ЛНП замкнені кулі та сфери компактні.

Еквівалентність норм в скінченновимірних просторах

У нескінченновимірних просторах не всі норми можна навіть порівняти.

В просторі послідовностей з скінченною кількістю ненульових координат розглянемо дві норми

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \quad \|x\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|,$$

де $\alpha_{2n} = n$ і $\alpha_{2n+1} = n^{-1}$. Ці норми не оцінюються одна через іншу.

Норми

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

не еквівалентні в $C([0,1])$.

Задача. За допомогою алгебраїчного базису доведіть, що в довільному нескінченновимірному просторі можна задати дві не еквівалентні норми.

Теорема 4 (про майже перпендикуляр). Нехай E_0 — замкнений лінійний підпростір в ЛНП E, причому $E_0 \neq E$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in E \setminus E_0$:

$$\|x_\varepsilon\| = 1, \quad \|x_\varepsilon - y\| \geq 1 - \varepsilon \ \ \forall y \in E_0.$$

Фіксуємо $\varepsilon > 0$. Беремо $z \in E \setminus E_0$ та покладемо

$$\delta = \inf_{y \in E_0} \|z - y\|.$$

Із замкненості E_0 випливає, що $\delta > 0$. Беремо таке $\varepsilon_0 > 0$, що

$$\tfrac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon.$$

Беремо $y_0 \in E_0$ з $\|z - y_0\| < \delta + \varepsilon_0$. Нехай

$$x_\varepsilon = \tfrac{z - y_0}{\|z - y_0\|}.$$

Тоді для всіх $y \in E_0$ маємо

$$\|x_\varepsilon - y\| = \tfrac{1}{\|z - y_0\|} \|z - y_0 - \|z - y_0\| y\| \geq \tfrac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon,$$

оскільки $v = y_0 + \|z - y_0\| y \in E_0$ і тому $\|z - v\| \geq \delta$.

Некомпактність куль в нескінченновимірних просторах

Теорема 5. У нескінченновимірному ЛНП замкнені кулі додатнього радіуса некомпактні.

Розглянемо в ЛНП E ($\dim E = \infty$) кулю

$$\overline{B}(0,1) = \{x \in E : \; \|x\| \leq 1\}.$$

За теоремою 4 індуктивно будуємо послідовність векторів x_n з властивостями:

$$\|x_n\| = 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \|x_n - x_m\| \geq \tfrac{1}{2} \;\; n \neq m.$$

З цієї послідовності не виділити збіжної підпослідовності.

Теорема 6. У нескінченновимірному ЛНП компактні множини ніде не щільні.

Що будемо розбирати на цій лекції?

9 Проекції та базиси

- Метрична проекція на замкнену опуклу множину
- Ортонормована система та ортонормований базис
- Нерівність Бесселя, рівність Парсеваля–Стеклова, теорема про ортогональний розклад
- Теорема Ріса–Фішера про ізоморфізм

Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Означення 1. Множина C в лінійному просторі називається опуклою, якщо для всіх елементів $x, y \in C$ і чисел $\lambda \in [0, 1]$ маємо $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Множина $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$ називається відрізком з кінцями x і y. Отже, опукла множина містить всі відрізки з кінцями з цієї множини.

Кулі, лінійні підпростори — опуклі множини в ЛНП.

Задача про найкраще наближення. Розглянемо в гільбертовому просторі H екстремальну задачу

$$\|y - x\| \to \min_{y \in C},$$

де $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла множина, $x \in H$.

Теорема 1. Нехай $C \subseteq H$ — замкнена опукла множина. Тоді для будь-якого елемента x простору H в C існує єдиний найближчий до x елемент. Іншими словами, існує єдиний елемент $z \in C$, для якого

$$\|z - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\| .$$

Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Нехай $z_k \in C$ — мінімізуюча послідовність, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - x\| = d = \inf_{y\in C} \|y - x\| . \tag{1}$$

За правилом паралелограма

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\,\|a\|^2 + 2\,\|b\|^2 \ , \quad a, b \in H,$$

можемо записати

$$\|z_k - z_l\|^2 = 2\,\|x - z_k\|^2 + 2\,\|x - z_l\|^2 - 4\,\left\|x - \tfrac{z_k+z_l}{2}\right\|^2 . \tag{2}$$

З опуклості C випливає $\frac{1}{2}z_k + \frac{1}{2}z_l \in C$, тому $d^2 \le \left\|x - \frac{z_k+z_l}{2}\right\|^2$. Отже,

$$\|z_k - z_l\|^2 \le 2\,\|x - z_k\|^2 + 2\,\|x - z_l\|^2 - 4d^2.$$

З (1) випливає, що $\lim_{k,l\to\infty} \|z_k - z_l\| = 0$.

Оскільки простір H повний, множина C замкнена, то існує елемент $z \in C$ такий, що $z_k \to z$. Крім того,

$$\|z - x\| = \lim_{k\to\infty} \|z_k - x\| = d.$$

Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Для доведення єдиності найближчого елемента слід тільки зазначити, що після підстановки в (2) замість z_k і z_l довільних двох елементів $z, z' \in C$, які задовольняють $\|z - x\| = \|z' - x\| = d$, одержимо

$$\|z - z'\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|x - z'\|^2 - 4\left\|x - \frac{z + z'}{2}\right\|^2 \le 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

звідки випливає, що $z = z'$.

Теорема 1 дозволяє коректно ввести оператор P_C метричного проектування (проекції) простору H на опуклу замкнену множину $C \subseteq H$, який ставить у відповідність елементу $x \in H$ єдиний елемент $P_C x \in C$, для якого

$$\|P_C x - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|.$$

Ясно, що $P_C^2 = P_C$.

Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Оператор P_C можна охарактеризувати таким чином.

Теорема 2. Нехай $C \subseteq H$ — опукла замкнена множина, $x \in H$, $z \in C$. Такі умови рівносильні:

1) $z = P_C x$.
2) $(z - x, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in C$.
3) $\|z - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|z - x\|^2 \quad \forall y \in C$.

$2) \Leftrightarrow 3)$: $\quad 2(z - y, z - x) = \|z - y\|^2 + \|z - x\|^2 - \|x - y\|^2$.

$1) \Leftrightarrow 2)$: Нехай $x \in H$ і $z = P_C x$. Функція

$$\phi(t) = \|x - z - t(y - z)\|^2 = \|x - z\|^2 - 2t(x - z, y - z) + t^2 \|z - y\|^2$$

досягає мінімуму на $[0, 1]$ в точці $t = 0$. Це означає, що $\frac{d}{dt}\phi(0) \geq 0$, тобто $(x - z, y - z) \leq 0 \ \forall y \in C$, або $(z - x, y - z) \geq 0 \ \forall y \in C$. З іншого боку, якщо $z \in C$ і $(z - x, y - z) \geq 0$ при $y \in C$, то

$$0 \leq (z - x, y - x + x - z) = -\|x - z\|^2 + (z - x, y - x).$$

Отже, $\|x - z\|^2 \leq (z - x, y - x) \leq \|z - x\| \|y - x\|$ і тим самим $\|x - z\| \leq \|y - x\| \ \forall y \in C$, тобто $z = P_C x$.

Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Нехай $C \subseteq H$ — непорожня замкнена опукла множина.

Теорема 3. Оператор P_C є нерозтягуючим, тобто,

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in H.$$

З теореми 2 випливає

$$(P_C x - x, P_C y - P_C x) \geq 0, \quad (P_C y - y, P_C x - P_C y) \geq 0.$$

Складемо ці нерівності та отримаємо

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \leq (P_C x - P_C y, x - y).$$

Застосуємо нерівність Шварца до правої частини.

Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Розглянемо випадок замкненого лінійного підпростору.

Теорема 4. Нехай $L \subseteq H$ — замкнений лінійний підпростір, $x \in H$, $z \in L$. Такі умови рівносильні:

1) $z = P_L x$.
2) $(z - x, y) = 0 \quad \forall y \in L$.

1) $\Rightarrow$ 2) : З теореми 2 випливає

$$(z - x, y - z) \geq 0 \quad \forall y \in L$$

та

$$(z - x, \alpha y - z) \geq 0 \quad \forall y \in L \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Якщо $(z - x, y) \neq 0$ при деякому $y \in L$, то приходимо до абсурдної нерівності

$$\alpha(z - x, y) \geq (z - x, z) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

2) $\Rightarrow$ 1) : З 2) випливає

$$(z - x, y - z) = 0 \quad \forall y \in L.$$

І знову теорема 2.

Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Означення 2. Вектори $a, b \in H$ називають ортогональними ($a \perp b$), якщо $(a, b) = 0$. Вектор $a \in H$ називають ортогональним до множини $M \subseteq H$ ($a \perp M$), якщо $(a, b) = 0 \ \forall b \in M$. Множину векторів, ортогональних до множини M, називають її ортогональним доповненням і позначають $M^\perp$.

Лінійна оболонка множини M —

$$\text{л.о.}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ x_i \in M, \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Замкнена лінійна оболонка множини M — $\text{з.л.о.}(M) = \mathrm{cl}(\text{л.о.}(M))$.

Факти про ортогональне доповнення.

1) Для множини $M \subseteq H$ її ортогональне доповнення $M^\perp$ — замкнений лінійний підпростір в H.
2) Якщо $L = \text{л.о.}(M)$, то $L^\perp = M^\perp$. Для $N = \text{з.л.о.}(M)$ маємо $N^\perp = M^\perp$.

Метрична проекція на замкнену опуклу множину

Теорема 5. Нехай $L \subseteq H$ — замкнений лінійний підпростір. Тоді оператор P_L лінійний, тобто,

$$P_L(\alpha x + \beta y) = \alpha P_L x + \beta P_L y \ \ \forall x, y \in H \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Нехай $x \in H$. Для $\alpha \in \mathbb{R}$ вектор $\alpha P_L x$ лежить в L та

$$\alpha P_L x - \alpha x \perp L.$$

З єдиності проекції випливає, що

$$P_L(\alpha x) = \alpha P_L x.$$

Аналогічно

$$P_L(x + y) = P_L x + P_L y,$$

оскільки $P_L x + P_L y \in L$ та

$$P_L x + P_L y - (x + y) \perp L.$$

Оператор P_L називають ортогональним проектором на L. Має місце рівність

$$\|x\|^2 = \|P_L x\|^2 + \|x - P_L x\|^2.$$

Теорема про ортогональний розклад

Теорема 6. Якщо $L \subseteq H$ — замкнений лінійний підпростір, то

$$H = L \oplus L^{\perp},$$

тобто, кожний $x \in H$ можна єдиним чином подати у вигляді $x = y + z$, де $y \in L$, $z \in L^{\perp}$.

Випливає з формули

$$x = P_L x + (x - P_L x), \quad P_L x \in L, \; x - P_L x \in L^{\perp}.$$

Ортонормована система та ортонормований базис

Нехай H — гільбертовий простір.

Означення 3. Систему векторів $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e_1, e_2, \ldots)$ називають ортонормованою (ОНС), якщо

$$\|e_n\| = 1 \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}, \quad (e_n, e_k) = 0 \text{ для } n \neq k.$$

Приклад ОНС в просторі ℓ_2:

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots),\ e_3 = (0, 0, 1, \ldots), \ldots$$

Факт. Якщо H містить зліченну ортонормовану систему, то H — нескінченновимірний.

Лема 1. Нехай $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ОНС в H. Тоді для збіжності ряду $\sum_n c_n e_n$ $(c_n \in \mathbb{R})$ в H необхідно і достатньо щоб збігався ряд $\sum_n |c_n|^2$.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k - \sum_{k=1}^{m} c_k e_k\right\|^2 = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k\right\|^2 = \sum_{k,i=m+1}^{n} c_k c_i (e_k, e_i) = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2.$$

Теорема 7 (нерівність Бесселя). Нехай $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ОНС в H. Тоді для довільного вектора $x \in H$ ряд

$$\sum_n (x, e_n)e_n$$

збігається в H і виконується нерівність Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \le \|x\|^2.$$

Маємо для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le \left\| x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k \right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k, x - \sum_{k=1}^{n}(x, e_k)e_k \right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n}(x, e_k)(x, e_k) + \sum_{k,i=1}^{n}(x, e_i)(x, e_k)(e_i, e_k) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x, e_k)|^2.$$

Ортонормована система та ортонормований базис

Для $x \in H$ числа $x_n = (x, e_n)$ називають коефіцієнтами Фур'є вектора x за ОНС $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n \; -$$

рядом Фур'є вектора x за цією системою.

Ряд Фур'є будь-якого вектора збігається. А коли

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n?$$

Ортонормована система та ортонормований базис

Нехай $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ОНС в гільбертовому просторі H та $L = \text{з.л.о.}\{e_n\}$. Для $x \in H$ маємо

$$P_L x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n.$$

Це випливає з теореми 4.

Означення 4. ОНС $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e_1, e_2, \ldots)$ називають ортонормованим базисом у гільбертовому просторі H, якщо

$$\text{з.л.о.}\{e_n\} = H.$$

Нехай $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормований базис в H. Тоді кожен $x \in H$ можна подати єдиним чином у вигляді

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n.$$

Мають місце рівності:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)(y, e_n) \ \ \forall x, y \in H, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \ \ \forall x \in H.$$

Ортонормована система та ортонормований базис

Теорема 8. ОНС $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є ортонормованим базисом в H тоді і тільки тоді, коли для всіх $x \in H$ виконується рівність Парсеваля–Стеклова

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2.$$

Доведемо достатність. Рівність

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2$$

виконується для всіх $x \in H$ і $n \in \mathbb{N}$. Тому з рівності Парсеваля–Стеклова випливає

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k \right\|^2 = 0.$$

А це означає, що $x \in \text{з.л.о.}\{e_n\}$. Тобто, $\text{з.л.о.}\{e_n\} = H$.

Наслідок 1. ОНС $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормований базис в $L = \text{з.л.о.}\{e_n\}$.

Ортонормована система та ортонормований базис

Для не більш ніж зліченної множини $\{x_n\}$ можна побудувати таку ОНС (e_n), що

$$\text{л.о.}\{x_n\} = \text{л.о.}\{e_n\}.$$

Процес ортогоналізації Грамма–Шмідта.

Для $x_{k_1} \neq 0$ покладемо $e_1 = \frac{x_{k_1}}{\|x_{k_1}\|}$, в $\{x_n\}$ беремо перший лінійно незалежний e_1 з вектор x_{k_2} і в $\text{л.о.}\{e_1, x_{k_2}\}$ візьмемо e_2: $\|e_2\| = 1$, $e_2 \perp e_1$.

Далі так: якщо вже побудовані e_1, e_2, ..., e_n і

$$E_n = \text{л.о.}\{e_1, e_2, ..., e_n\} \neq \text{л.о.}\{x_n\},$$

то беремо перший вектор $x_{k_{n+1}} \notin E_n$ і в $\text{л.о.}(E_n \cup \{x_{k_{n+1}}\})$ знайдемо e_{n+1}: $\|e_{n+1}\| = 1$, $e_{n+1} \perp E_n$.

В результаті отримаємо шукану ОНС.

Ортонормована система та ортонормований базис

Теорема 9. В кожному нескінченновимірному сепарабельному гільбертовому просторі H існує зліченний ортонормований базис.

Беремо зліченну скрізь щільну множину $\{x_n\} \subseteq H$ та застосуємо до неї процес ортогоналізації Грамма–Шмідта.

Отримана ОНС (e_n) є ортонормованим базисом H. Дійсно, для довільних $x \in H$ та $\varepsilon > 0$ існує x_n: $\|x - x_n\| < \varepsilon$. За побудовою $x_n \in \text{л.о.}\{e_1, \dots, e_N\}$ для деякого $N \leq n$. Отже,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_i) e_i \right\| \leq \|x - x_n\| < \varepsilon.$$

Тоді для всіх $k \geq N$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{k} (x, e_i) e_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, e_i) e_i \right\| < \varepsilon.$$

Отже,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n.$$

Теорема Ріса–Фішера про ізоморфізм

Означення 5. ЛНС $(E_1, \|\cdot\|_1)$ та $(E_2, \|\cdot\|_2)$ називають лінійно ізометрично ізоморфними, якщо існує така лінійна бієкція $I : E_1 \to E_2$, що

$$\|x\|_1 = \|Ix\|_2 \quad \forall x \in E_1.$$

Теорема 10. Кожний нескінченновимірний сепарабельний гільбертовий простір лінійно ізометрично ізоморфний простору ℓ_2. Тому усі нескінченновимірні сепарабельні гільбертові простори лінійно ізометрично ізоморфні між собою.

Нехай $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормований базис в гільбертовому просторі H. Формула

$$Ix = (x_n), \;\; x_n = (x, e_n)$$

задає лінійне відображення в ℓ_2, причому $(Ix, Iy) = (x, y)$. Крім того, $I(H) = \ell_2$. Дійсно, для $(x_n) \in \ell_2$ ряд $\sum_n x_n e_n$ збіжний в H, оскільки

$$\left\|\sum_{n=m}^{m+k} x_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=m}^{m+k} |x_n|^2.$$

Для суми x цього ряду маємо $Ix = (x_n)$.

10 Лінійні неперервні оператори та функціонали

- Лінійні обмежені оператори та функціонали, норми
- Обмеженість $=$ неперервність
- Простори $L(E, F)$ та E^*
- Теорема Банаха–Штейнгауза

Лінійні обмежені оператори та функціонали, норми

Нехай $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ — ЛНП.

Відображення $A : E \to F$ називають лінійним, якщо

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad \forall x, y \in E \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Лінійне відображення = лінійний оператор.

Оператор $I : x \mapsto x$ $(E = F)$ називають одиничним (тотожним).

$R(A) = A(E)$ — образ A, $N(A) = A^{-1}(0) = \{x \in E : \ Ax = 0\}$ — ядро оператора A. Образ та ядро лінійного оператора є лінійними підпросторами.

Лінійні відображення з значеннями в $F = \mathbb{R}$ називають лінійними функціоналами.

Лінійні обмежені оператори та функціонали, норми

Означення 1. Лінійний оператор $A : E \to F$ з називається обмеженим, якщо

$$\exists C \geq 0 : \ \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \ \forall x \in E.$$

Обмеженість лінійного оператора A — це обмеженість в F множини $A(\overline{B}_E)$, де $\overline{B}_E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$.

Для обмеженого лінійного оператора A покладемо

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Ax\|_F < +\infty.$$

Означення 2. Будемо називати $\|A\|$ нормою оператора A.

Норма лінійного функціонала f задається рівністю

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |f(x)|.$$

Формули для норми оператора.

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Ax\|_F = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \min\left\{C \geq 0 : \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E \ \forall x \in E\right\}.$$

Твердження 1. Якщо E, F, G — ЛНП, $A : F \to G$, $B : E \to F$ — обмежені лінійні оператори, то лінійний оператор $AB : E \to G$ $(ABx = A(Bx))$ обмежений та

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

Випливає з

$$\|ABx\|_G \le \|A\|\|Bx\|_F \le \|A\|\|B\|\|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Лінійні обмежені оператори та функціонали, норми

1. Інтегральний оператор $A : C([a,b]) \to C([a,b])$ з неперервним ядром $K \in C([a,b]^2)$, що діє за формулою

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

$$\|A\| = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\, ds.$$

2. Діагональний оператор в сепарабельному гільбертовому просторі H:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, e_n) e_n,$$

де $(e_n)_{n\in N}$ — ортонормований базис в H, $\alpha_n = O(1)$. Маємо

$$\|A\| = \sup_n |\alpha_n|,$$

оскільки $\|Ax\| \le \sup_n |\alpha_n| \|x\|$ та $\|Ae_n\| = |\alpha_n|$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Лінійні обмежені оператори та функціонали, норми

3. Нехай E — евклідовий простір, $a \in E$,

$$f(x) = (a, x).$$

Тоді $\|f\|_* = \|a\|$, оскільки $|f(x)| \le \|a\|\|x\|$, що дає $\|f\|_* \le \|a\|$. З іншого боку, для $a \neq 0$

$$f\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \|a\|.$$

4. Лінійний обмежений функціонал може не досягати максимуму на замкненій одиничній кулі. Приклад:

$$E = \ell_1, \;\; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) x_n.$$

Маємо $\|f\|_* = 1$, але $|f(x)| < 1$ для всіх $x \in \ell_1$ з $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \le 1$.

5. Лінійний функціонал

$$f(x) = x(1/2)$$

на $C([0,1])$ (норма рівномірна) обмежений та $\|f\|_* = 1$. А на просторі $C([0,1])$ з нормою $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt$ — необмежений.

Обмеженість = неперервність

Теорема 1. Для лінійного оператора $A : E \to F$ такі умови рівносильні:

1) оператор A обмежений;
2) оператор A неперервний;
3) оператор A неперервний в деякій точці.

1) $\Rightarrow$ 2) Якщо оператор A обмежений, то

$$\|Ax - Ay\|_F \leq \|A\| \|x - y\|_E \quad \forall x, y \in E.$$

Оператор A задовольняє умові Ліпшиця з сталою $\|A\|$ і тому неперервний.

2) $\Rightarrow$ 3) Очевидно.

3) $\Rightarrow$ 1) Нехай оператор A неперервний в деякій точці x_0. З рівності $Ax = A(x_0 + x) - Ax_0$ випливає неперервність A в нулі: якщо $x_n \to 0$, то $x_n + x_0 \to x_0$, звідки

$$Ax_n = A(x_n + x_0) - Ax_0 \to Ax_0 - Ax_0 = 0.$$

$\exists\, \delta > 0$: $\|Ax\|_F \leq 1$ при $\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|Ax\|_F \leq \frac{1}{\delta}$ при $\|x\|_E \leq 1 \Rightarrow \|A\| \leq \frac{1}{\delta}$.

Обмеженість = неперервність

Теорема 2. Лінійне відображення між ЛНП неперервне тоді і тільки тоді, коли переводить збіжні до нуля послідовності в обмежені послідовності.

Необхідність очевидна. Доведемо достатність. Від супротивнго. Нехай $\|x_n\| \le 1$ та $\|Ax_n\| \to +\infty$. Тоді

$$y_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|Ax_n\|}} \to 0, \quad \|Ay_n\| = \sqrt{\|Ax_n\|} \to +\infty.$$

На скінченновимірному ЛНП всі лінійні оператори є неперервними (обмеженими). В нескінченновимірному випадку ситуація інша.

Обмеженість = неперервність

Приклад. В кожному нескінченновимірному ЛНП існує розривний лінійний функціонал. Нехай в базисі Хамеля $B = \{x_\alpha\}$ всі вектори мають одиничну норму. Візьмемо його зліченну підмножину $\{x_{\alpha_n}\}$ та покладемо

$$\varphi\left(x_{\alpha_n}\right) = n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

на інших базисних елементах задамо φ нулем та довизначимо лінійно на весь простір, тобто

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^{k} c_n x_{\alpha_n} + \sum_{\alpha \notin \{\alpha_n\}} c_\alpha x_\alpha\right) = \sum_{n=1}^{k} n c_n.$$

Цей лінійний функціонал є необмеженим. А тому і розривним в усіх точках.

Приклад. В просторі $C([0,1])$ з нормою $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ розглянемо лінійний функціонал $\varphi(f) = f(0)$. Він розривний.

Явних прикладів необмежених лінійних функціоналів на банахових просторах я не знаю.

Простори $L(E, F)$ та E^*

Для обмежених лінійних операторів $A, B : E \to F$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ задані лінійні оператори

$$A + B : x \mapsto Ax + Bx, \quad \lambda A : x \mapsto \lambda Ax,$$

причому для всіх $x \in E$:

$$\|(A + B)x\|_F \leq \|Ax\|_F + \|Bx\|_F, \quad \|\lambda Ax\|_F = |\lambda|\|Ax\|_F.$$

Отже, для операторної норми має місце

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|.$$

Множина $L(E, F)$ всіх обмежених лінійних операторів, що діють з ЛНП E в ЛНП F, сама стає ЛНП з операторною нормою $A \mapsto \|A\|$.

Якщо $E = F$ пишемо $L(E)$.

Означення 3. Нехай E — ЛНП. Простір $E^* = L(E, \mathbb{R})$ всіх неперервних лінійних функціоналів на просторі E називається спряженим до простору E.

Простори $L(E, F)$ та E^*

Теорема 3. Нехай F — банаховий простір. Тоді для довільного ЛНП E простір операторів $L(E, F)$ є банаховим відносно операторної норми.

Нехай (A_n) — фундаментальна послідовність елементів $L(E, F)$. Для кожного $x \in E$ послідовність $(A_n x)$ фундаментальна в F, оскільки

$$\|A_k x - A_n x\|_F \leq \|A_k - A_n\| \|x\|_E.$$

Тому в F існує $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$. З $\|A_n x\|_F \leq \|A_n\| \|x\|_E$ та обмеженості $(\|A_n\|)$ випливає, що $A \in L(E, F)$ та $\|A\| \leq \sup_n \|A_n\|$.

Покажемо, що $\|A - A_n\| \to 0$. Нехай $\varepsilon > 0$. Беремо N: $\|A_k - A_n\| \leq \varepsilon$ для всіх $n, k \geq N$. Тому для всіх $n \geq N$ маємо

$$\|Ax - A_n x\|_F = \lim_{k\to\infty} \|A_k x - A_n x\|_F \leq \varepsilon$$

для кожного $x \in E$ з $\|x\|_E \leq 1$. Звідси, $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$.

Теорема 4. Спряжений простір E^* є банаховим для довільного ЛНП E.

Теорема Банаха–Штейнгауза

Теорема 5 (принцип рівномірної обмеженості). Нехай дана родина $\{A_\alpha\}$ обмежених лінійних операторів, що діють з банахового простору E в ЛНП F, причому

$$\sup_\alpha \|A_\alpha x\|_F < +\infty \quad \forall x \in E.$$

Тоді $\sup_\alpha \|A_\alpha\| < +\infty$.

Якщо $\sup_\alpha \|A_\alpha\| = +\infty$, то знайдеться така послідовність індексів α_n, що $\|A_{\alpha_n}\| \to +\infty$. Функції $x \mapsto \|A_{\alpha_n} x\|_F$ неперервні та

$$E = \bigcup_{N=1}^{\infty} \left\{ x \in E : \sup_n \|A_{\alpha_n} x\|_F \le N \right\}.$$

За теоремою Бера $\exists\, N$: $\operatorname{int} \{x \in E : \sup_n \|A_{\alpha_n} x\|_F \le N\} \ne \emptyset$. Отже, для деякої кулі $\overline{B}(z, r) \subseteq E$ $(r > 0)$: $\sup_n \|A_{\alpha_n} x\|_F \le N$ для всіх $x \in \overline{B}(z, r)$. З $A_{\alpha_n} x = A_{\alpha_n}(x + z) - A_{\alpha_n} z$ та $\sup_n \|A_{\alpha_n} z\|_F \le N$ випливає

$$\sup_n \sup_{x \in \overline{B}(0,r)} \|A_{\alpha_n} x\|_F \le 2N,$$

що дає обмеженість $\|A_{\alpha_n}\| = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|A_{\alpha_n} x\|_F$.

Теорема Банаха–Штейнгауза

Повнота простору E в теоремі Банаха–Штейнгауза суттєва.

Приклад. Функціонали

$$l_n(x) = nx_n$$

на лінійному підпросторі в ℓ_2, що складається з усіх послідовностей з скінченним числом ненульових координат. Вони поточково обмежені, але норми не обмежені у сукупності: $\|l_n\| = n$.

Приклад. Функціонали

$$l_n(f) = nf\left(\tfrac{1}{n}\right)$$

на лінійному підпросторі в $C([0,1])$, що складається з функцій, які рівні нулю на деякому околі 0 (своєму для кожної функції).

Наслідок 1. Нехай E — банаховий простір, F — ЛНП, $A_n \in L(E, F)$, причому для кожного $x \in E$ існує границя $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ в F. Тоді $A \in L(E, F)$.

A — лінійний оператор. За теоремою Банаха–Штейнгауза маємо $\sup_n \|A_n\| \leq C < +\infty$. Тоді

$$\|Ax\|_F = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_F \leq C\|x\|_E,$$

тобто $\|A\| \leq C$.

Задача. В ситуації попереднього наслідку для кожного компакту $K \subseteq E$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} \|Ax - A_n x\|_F = 0.$$

В $L(E, F)$ окрім збіжності за нормою (операторною) будемо розглядати поточкову збіжність: A — поточкова границя послідовності (A_n), якщо

$$\forall x \in E: \ \|Ax - A_n x\|_F \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Ясно, що збіжність за нормою тягне за собою поточкову, але не навпаки.

Приклад. Нехай $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормований базис в гільбертовому просторі H та

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i, \ \ x \in H.$$

Послідовність операторів $P_n \in L(H)$ збігається поточково до тотожного оператора $Ix = x$, але $\|P_n - I\| = 1$.

Наслідок 2. Нехай E, F — банахові простори, $A_n \in L(E, F)$, причому для кожного $x \in E$ послідовність $(A_n x)$ фундаментальна в F. Тоді існує такий $A \in L(E, F)$, що для кожного $x \in E$ маємо $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$ в F.

Що будемо розбирати на цій лекції?

11 Теореми про обернений оператор та про замкнений графік

- Теорема Банаха–Шаудера про відкрите відображення
- Теорема Банаха про неперервність оберненого оператора
- Теорема про замкнений графік

Теорема Банаха–Шаудера про відкрите відображення

Позначення: $B_X = B(0,1) = \{x \in X : \|x\|_X \le 1\}$, $\alpha B_X = B(0,\alpha)$, $\alpha > 0$.

Лема 1. Нехай E, F — банахові простори, $A \in L(E,F)$. Якщо

$$B_F \subseteq \mathrm{cl} A(B_E),$$

то

$$B_F \subseteq A(B_E).$$

Зокрема, $A(E) = F$.

З умови випливає, що

$$sB_F \subseteq \mathrm{cl}\big(A(sB_E) \cap sB_F\big) \quad \forall s > 0. \tag{1}$$

Нехай $y \in B_F$ і $0 < \varepsilon < 1 - \|y\|_F$. Тоді $\|(1-\varepsilon)^{-1} y\|_F < 1$. Отже, $\exists x_1 \in B_E$:

$$\|(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1\|_F < \varepsilon,$$

тобто $(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1 \in \varepsilon B_F$. З (1) випливає існування $x_2 \in \varepsilon B_E$:

$$\|(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1 - Ax_2\|_F < \varepsilon^2,$$

тобто $(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1 - Ax_2 \in \varepsilon^2 B_F$.

Теорема Банаха–Шаудера про відкрите відображення

За індукцією будуємо послідовність точок $x_n \in \varepsilon^{n-1} B_E$ з

$$\|(1-\varepsilon)^{-1} y - Ax_1 - Ax_2 - \ldots - Ax_n\|_F < \varepsilon^n.$$

Тоді

$$y = (1-\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n.$$

Через повноту E та оцінку $\|x_n\| < \varepsilon^{n-1}$ ряд $(1-\varepsilon)\sum_n x_n$ збіжний. Нехай

$$x = (1-\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E.$$

Маємо

$$Ax = y, \quad \|x\|_E < (1-\varepsilon)(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^{n-1}+\ldots) = 1,$$

тобто $x \in B_E$.

Отримали, що

$$B_F \subseteq A(B_E).$$

Теорема Банаха–Шаудера про відкрите відображення

Теорема 1. Нехай E, F — банахові простори, $A \in L(E, F)$, $R(A) = F$. Тоді для довільної відкритої в E множини V множина $A(V)$ відкрита в F.

Оскільки
$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(nB_E),$$
то за теоремою Бера існує таке k, що множина $A(kB_E)$ щільна в деякій відкритій кулі $B_F(a, r)$, $r > 0$, $a \in F$, тобто
$$B_F(a, r) \subseteq \mathrm{cl} A(kB_E).$$
Оскільки $A(kB_E) = -A(kB_E)$, то множина $A(kB_E)$ щільна в $B_F(-a, r)$. Отже, множина $A(kB_E)$ щільна в кулі $B_F(0, r)$, тобто
$$B_F(0, r) \subseteq \mathrm{cl} A(kB_E).$$
Дійсно, якщо $\|y\| < r$ та $u_n, v_n \in B_E$ такі, що $A(ku_n) \to a + y$, $A(kv_n) \to -a + y$, то
$$w_n = \frac{u_n + v_n}{2} \in B_E, \quad A(kw_n) \to y.$$

Теорема Банаха–Шаудера про відкрите відображення

Замінивши A на $\frac{k}{r}A$ можна вважати, що

$$B_F \subseteq \mathrm{cl} A(B_E).$$

За лемою 1 $B_F \subseteq A(B_E)$. Отже, для всіх $x \in E$ та $r > 0$ маємо

$$B_F(Ax, r) \subseteq A(B_E(x, r)).$$

Припустимо, що V — непорожня відкрита множина в E. Нехай $y \in A(V)$, тобто $y = Ax$, $x \in V$. Знайдемо $\varepsilon > 0$: $B_E(x, \varepsilon) \subseteq V$. Тоді

$$B_F(y, \varepsilon) \subseteq A(B_E(x, \varepsilon)) \subseteq A(V)$$

в силу доведеного вище. Отже, множина $A(V)$ відкрита.

Теорема Банаха про неперервність оберненого оператора

Теорема 2. Нехай A — бієктивне лінійне відображення банахового простору E на банаховий простір F. Тоді обернений оператор A^{-1} є неперервним.

Для довільної відкритої множини $V \subseteq E$ маємо

$$(A^{-1})^{-1}(V) = A(V).$$

Множина $A(V)$ відкрита за теоремою Банаха–Шаудера про відкрите відображення. Звідси випливає неперервність A^{-1}.

Теорема про замкнений графік

Графік оператора $A : E \to F$ — це множина

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Нехай E, F — ЛНП. Введемо в $E \times F$ норму так $\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$. Якщо простори E, F банахові, то $E \times F$ теж буде повним відносно введеної норми.

Теорема 3. Лінійний оператор $A : E \to F$, де E, F — банахові простори, є неперервним тоді і тільки тоді, коли його графік замкнений в $E \times F$.

Доведення вимагає достатність. Графік $\Gamma(A)$ — замкнений лінійний підпростір в $E \times F$, а тому є банаховим простором. Оператор

$$T : \Gamma(A) \to E, \ \ (x, Ax) \mapsto x$$

лінійний, неперервний та бієктивний. За теоремою про обернений оператор відображення $x \mapsto (x, Ax)$ неперервне. Це означає неперервність A.

Що будемо розбирати на цій лекції?

12 Теорема Хана–Банаха

- Теорема Хана–Банаха
- Наслідки теореми Хана–Банаха
- Теореми про віддільнсть опуклих множин
- Другий спряжений простір
- Поповнення ЛНП
- Рефлексивність

Теорема Хана–Банаха

Нехай E — лінійний простір.

Теорема 1 (теорема Хана–Банаха). Нехай $p : E \to \mathbb{R}$ — функціонал, що задовольняє умовам

$$\begin{array}{ll} p(\lambda x) = \lambda p(x) & \forall x \in E \ \forall \lambda > 0, \\ p(x + y) \leq p(x) + p(y) & \forall x, y \in E. \end{array}$$

Нехай Y — лінійний підпростір в ЛП E, $g : Y \to \mathbb{R}$ — лінійний функціонал, що задовольняє умові

$$g(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in Y.$$

Тоді існує такий лінійний функціонал $f : E \to \mathbb{R}$, що

$$f(x) = g(x) \ \ \forall x \in Y, \quad f(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in E.$$

Теорема Хана–Банаха

Перший етап: продовження з Y на $Y_0 = \text{л.о.}\{x_0, Y\}$, де $x_0 \notin Y$.

Довільний елемент $x \in Y_0$ має вигляд $x = y + tx_0$, де $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$. А довільне лінійне продовження g на Y_0 має вигляд

$$f(x) = f(y + tx_0) = g(y) + tc,$$

де $c = f(x_0) \in \mathbb{R}$. Отже, слід так підібрати $c \in \mathbb{R}$, щоб виконувалось

$$g(y) + tc \le p(y + tx_0) \quad \forall y \in Y \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Випадок $t > 0$: (1) записуємо так

$$c \le p\left(\frac{y}{t} + x_0\right) - g\left(\frac{y}{t}\right).$$

Випадок $t < 0$: (1) рівносильно оцінці

$$c \ge -p\left(-\frac{y}{t} - x_0\right) - g\left(\frac{y}{t}\right).$$

Покажемо, що існує $c \in \mathbb{R}$, яке задовольняє двом останнім нерівностям.

Для $y', y'' \in Y$ маємо

$$g(y') - g(y'') \le p(y' - y'') = p(y' + x_0 - x_0 - y'') \le p(y' + x_0) + p(-x_0 - y'').$$

Тобто,

$$p(-x_0 - y'') - g(y'') \le p(y' + x_0) - g(y') \quad \forall y', y'' \in Y.$$

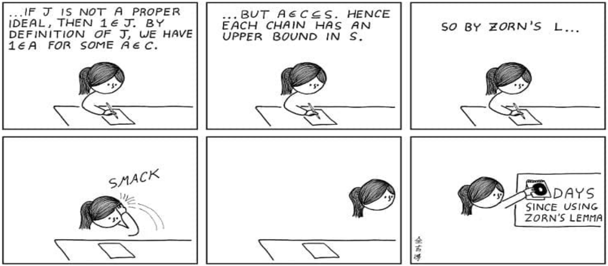
Звідси отримуємо

$$c_1 = \sup_{y \in Y}(p(-x_0 - y) - g(y)) \le c_2 = \inf_{y \in Y}(p(y + x_0) - g(y)).$$

Нам підходить число $c \in [c_1, c_2]$.

Теорема Хана–Банаха

Другий етап: застосування леми Цорна.



Розглянемо множину

$$\mathbf{M} = \left\{ h : H \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} H \text{ — лінійний підпростір } E,\ Y \subseteq H, \\ h \text{ — лінійний функціонал, } h|_Y = g,\ h \le p \text{ на } H \end{array} \right\}.$$

Задамо частковий порядок на $\mathbf{M}$

$$h_1 \preceq h_2 \quad \Leftrightarrow \quad H_1 \subseteq H_2,\ \ h_2|_{H_1} = h_1.$$

В $\mathbf{M}$ є максимальний елемент f. Він є потрібним продовженням g на E.

Теорема 2 (теорема Хана–Банаха в ЛНП). Нехай Y — лінійний підпростір в ЛНП E, $g \in Y^*$. Тоді існує такий функціонал $f \in E^*$, що

$$f(x) = g(x) \ \ \forall x \in Y, \quad \|f\|_{E^*} = \|g\|_{Y^*}.$$

Використовуємо теорему 1 з

$$p(x) = \|g\|_{Y^*}\|x\|.$$

Наслідки теореми Хана–Банаха

Теорема 3. Для довільного елемента $x \in E \setminus \{0\}$ існує такий функціонал $f \in E^*$, що $\|f\|_* = 1$ та $f(x) = \|x\|$.

На $Y = \text{л.о.}\{x\} = \{tx : t \in \mathbb{R}\}$ покладемо $g(tx) = t\|x\|$. Тоді $g(x) = \|x\|$ та $\|g\|_{Y^*} = 1$. Далі продовжимо g на E з збереженням норми.

Теорема 4. Для $x \in E$ маємо

$$\|x\| = \max_{f \in B_{E^*}} |f(x)|. \tag{2}$$

Нехай $x \in E \setminus \{0\}$. Для $f \in B_{E^*}$ маємо

$$|f(x)| \leq \|f\|_* \|x\| \leq \|x\|.$$

Отже,

$$\sup_{f \in B_{E^*}} |f(x)| \leq \|x\|.$$

З теореми 3 випливає існування $f \in E^*$ з $\|f\|_* = 1$ та $f(x) = \|x\|$. Що дає рівність (2).

Наслідки теореми Хана–Банаха

Позначення: $S_X = S(0,1) = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$.

Теорема 5. Нехай Y замкнений лінійний підпростір в ЛНП E. Якщо $x_0 \in E \backslash Y$, то існує такий функціонал $f \in S_{E^*}$, що $f(x) = 0\ \forall x \in Y$ та $f(x_0) = d(x_0, Y) = \inf_{x \in Y} \|x - x_0\|$.

На підпросторі $Z = \text{л.о.}(Y \cup \{x_0\})$ покладемо

$$g(x + tx_0) = td(x_0, Y) \quad \forall x \in Y\ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Маємо $g \in Z^*$, $g(x_0) = d(x_0, Y)$, $g(x) = g(x + 0x_0) = 0\ \forall x \in Y$. Знайдемо норму g:

$$\|g\|_{Z^*} = \sup\left\{\frac{|t|d(x_0, Y)}{|t|\|\frac{x}{t} + x_0\|} : x + tx_0 \in Z\right\} = \sup\left\{\frac{d(x_0, Y)}{\|y - x_0\|} : y \in Y\right\} = 1$$

Далі продовжимо g на E з збереженням норми.

Теореми про віддільнсть опуклих множин

Нехай E — ЛНП.

Означення 1. Гіперплощиною в E називають множину вигляду

$$H = \{x \in E : \ f(x) = \alpha\},$$

де f — ненульовий лінійний функціонал, $\alpha \in \mathbb{R}$

Факт. Гіперплощина $H \subseteq E$ замкнена тоді і тільки тоді, коли $f \in E^*$.

Нехай A, B — підмножини E.

Означення 2. Гіперплощина $H = \{x \in E : \ f(x) = \alpha\}$ відділяє A і B, якщо

$$f(x) \leq \alpha \ \ \forall x \in A, \quad f(x) \geq \alpha \ \ \forall x \in B.$$

Означення 3. Гіперплощина $H = \{x \in E : \ f(x) = \alpha\}$ строго відділяє A і B, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \ \ \forall x \in A, \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \ \ \forall x \in B.$$

Теореми про віддільнсть опуклих множин

Теорема 6 (про віддільнсть опуклих множин). Нехай $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ — непорожні опуклі множини, $A \cap B = \emptyset$. Припустимо, що одна з них відкрита. Тоді існує замкнена гіперплощина, що відділяє A та B.

Нехай C — відкрита опукла підмножина E, $0 \in C$. Введемо функціонал

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \ \frac{x}{\alpha} \in C \right\} \quad \forall x \in E.$$

Функціонал p називають функціоналом Мінковського множини C.

Лема 1. Функціонал p має такі властивості:

1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \ \forall x \in E \ \forall \lambda > 0$;
2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ \forall x, y \in E$;
3) $\exists M > 0$: $0 \leq p(x) \leq M\|x\| \ \forall x \in E$;
4) $C = \{x \in E : \ p(x) < 1\}$.

Доведення леми 1. Доведемо 3). Беремо відкриту кулю $B(0, r) \subseteq C$. Очевидно, що

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Доведемо 4). Нехай $x \in C$. З відкритості C випливає існування такого $\varepsilon > 0$, що $(1+\varepsilon)x \in C$. Тому

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Навпаки, якщо $p(x) < 1$, то $\exists \alpha \in (0, 1)$: $\frac{x}{\alpha} \in C$. Тому

$$x = \alpha \frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)0 \in C.$$

Доведемо 2. Нехай x, $y \in E$ та $\varepsilon > 0$. З 1) та 4) випливає $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ та $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Для всіх $t \in [0, 1]$ маємо $t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Обравши $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, отримаємо $\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$. Звідки

$$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Теореми про віддільнсть опуклих множин

Лема 2. Нехай $C \subseteq E$ непорожня відкрита опукла множина та $x_0 \in E \backslash C$. Тоді існує $f \in E^*$, такий, що

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C.$$

Зокрема, гіперплощина $H = \{x \in E: \ f(x) = f(x_0)\}$ відділяє $\{x_0\}$ та C.

Можна вважати, що

$$0 \in C.$$

Нехай p — функціонал Мінковського C. На підпросторі $Y = \text{л.о.}\{x_0\}$ задамо лінійний функціонал $g(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, що

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in Y.$$

За теоремою Хана–Банаха існує лінійний функціонал $f : E \to \mathbb{R}$, що продовжує g на E та задовольняє умові

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

Зокрема, $f(x_0) = 1$ та $f \in E^*$. Крім того, $f(x) < 1$ для всіх $x \in C$.

Теореми про віддільнсть опуклих множин

Доведення теореми 6. Нехай відкритою множиною є A. Покладемо

$$C = A - B = \{x - y : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Множина C — опукла, відкрита, оскільки $C = \cup_{y \in B}(A - y)$, та $0 \notin C$.

За лемою 2 існує $f \in E^*$, такий, що

$$f(z) < 0 \quad \forall z \in C,$$

тобто

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A \ \forall y \in B.$$

Обираємо α з умови

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

Гіперплощина $H = \{x \in E : \ f(x) = \alpha\}$ відділяє A та B.

Теореми про віддільнсть опуклих множин

Теорема 7 (про віддільнсть опуклих множин). Нехай $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ — непорожні опуклі множини, $A \cap B = \emptyset$, A — замкнена, B — компактна. Тоді існує замкнена гіперплощина, що строго відділяє A та B.

Покладемо $C = A - B$. Множина C — опукла, замкнена та $0 \notin C$. Існує $r > 0$: $B(0, r) \cap C = \emptyset$. За теоремою 6 відділяємо $B(0, r)$ та C замкненою гіперплощиною:

$$\exists f \in E^* \backslash \{0\} : \; f(x - y) \leq f(rz) \;\; \forall x \in A \;\; \forall y \in B \;\; \forall z \in B_E.$$

Звідки $f(x - y) \leq -r\|f\|_*$ $\forall x \in A$ та $\forall y \in B$. Покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2}r\|f\|_* > 0$. Тоді

$$f(x) + \varepsilon \leq f(y) - \varepsilon \;\; \forall x \in A \;\; \forall y \in B.$$

Обираємо α з умови

$$\sup_{x \in A} f(x) + \varepsilon \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon.$$

Гіперплощина $H = \{x \in E : \; f(x) = \alpha\}$ строго відділяє A та B.

Другий спряжений простір

Нехай $(E, \|\cdot\|)$ — ЛНП, $(E^*, \|\cdot\|_*)$ — його спряжений простір. Розглянемо спряжений простір для E^*:

$$(E^*)^* = E^{**}, \quad \|\xi\|_{**} = \sup_{f \in B_{E^*}} |\xi(f)|, \; \xi \in E^{**}.$$

Природно назвати простір E^{**} другим спряженим для E.

Побудуємо лінійне ізометричне вкладення ЛНП E в другий спряжений простір E^{**}.

Для кожного $x \in E$ розглянемо функціонал $\pi_x : f \mapsto f(x)$ на E^*. Ясно, що функціонал π_x лінійний. Крім того,

$$|\pi_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|_* \|x\| \;\; \forall f \in E^*; \quad \exists f \in S_{E^*} : \; \pi_x(f) = f(x) = \|x\|.$$

Отже, $\pi_x \in E^{**}$ та $\|\pi_x\|_{**} = \|x\|$.

Шукане лінійне ізометричне (канонічне) вкладення E в E^{**} має вигляд

$$\pi : x \mapsto \pi_x.$$

Поповнення ЛНП

Означення 4. Поповненням ЛНП $(E, \|\cdot\|_E)$ називається такий банаховий простір $(F, \|\cdot\|_F)$, що простір $(E, \|\cdot\|_E)$ лінійно ізометрично ізоморфний скрізь щільному лінійному підпростору в F.

Існування поповнення E можна довести за допомогою лінійного ізометричного вкладення E в E^{**}.

А саме, за поповнення можна взяти

$$\mathrm{cl}(\pi(E)) \subseteq E^{**}.$$

Рефлексивність

Означення 5. Нехай E — банаховий простір, $\pi : E \to E^{**}$ — канонічне вкладення E в E^{**}. Простір E називають рефлексивним, якщо

$$\pi(E) = E^{**}.$$

Рефлексивні простори з нашого зоопарку

- скінченновимірні простори;
- гільбертові простори;
- ℓ_p, $1 < p < \infty$.

Нерефлексивні

- ℓ_1, ℓ_∞;
- c_0, c;
- $C([0,1])$.

Задача. Нехай E — рефлексивний банаховий простір. Тоді для кожного $f \in E^*$ існує такий $x \in S_E$, що $f(x) = \|f\|_*$.

Що будемо розбирати на цій лекції?

13 Теорема Ріса, спряжені простори та спряжений оператор

- Теорема Ріса про вигляд лінійного неперервного функціонала на гільбертовому просторі
- Лінійні неперервні функціонали на просторах послідовностей
- Спряжений оператор

Теорема Ріса

Теорема 1 (теорема Ріса). Нехай H — гільбертовий простір. Тоді для довільного $y \in H$ формула

$$f_y(x) = (x, y)$$

задає лінійний неперервний функціонал на H і $\|f_y\|_* = \|y\|$. Навпаки, для кожного функціонала $f \in H^*$ існує єдиний елемент $y_f \in H$, такий, що

$$f(x) = (x, y_f) \quad \forall x \in H, \quad \|f\|_* = \|y_f\|.$$

Зауваження 1. Відображення $y \mapsto f_y$ є лінійною ізометрією H на H^*.

З теореми Ріса випливає рефлексивність гільбертового простору (Чому?).

Зауваження 2. Єдиність $y_f \in H$ легко довести від супротивного. Нехай $f(x) = (x, y_f^1) = (x, y_f^2)$ для всіх $x \in H$. Тоді,

$$(x, y_f^1 - y_f^2) = 0 \quad \forall x \in H.$$

Звідки, $y_f^1 - y_f^2 = 0$.

Теорема Ріса

Розглянемо лінійний функціонал $f_y(x) = (x, y)$, де $y \in H$. Рівність $\|f_y\|_* = \|y\|$ випливає з оцінки

$$|f_y(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

та рівності

$$f_y(y) = (y, y) = \|y\|^2.$$

Нехай $f \in H^*$. Якщо $f = 0$, то покладемо $y_f = 0$. У випадку $f \neq 0$, тобто, коли $H_0 = f^{-1}(0) \neq H$, беремо вектор $e \perp H_0$, $\|e\| = 1$, та покладемо

$$y_f = f(e)e.$$

Тоді для всіх $x \in H$ маємо

$$f(x) = (x, y_f).$$

Дійсно, кожен $x \in H$ має вигляд

$$x = x - \frac{f(x)}{f(e)}e + \frac{f(x)}{f(e)}e, \quad \text{де} \quad x - \frac{f(x)}{f(e)}e \in H_0.$$

Лінійні неперервні функціонали на просторах послідовностей

Теорема 2 ($\ell_1^* = \ell_\infty$). Довільний лінійний неперервний функціонал на просторі ℓ_1 має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad x = (x_n) \in \ell_1, \tag{1}$$

де $a = (a_n) \in \ell_\infty$, і навпаки: якщо $a \in \ell_\infty$, то формула (1) задає лінійний неперервний функціонал на ℓ_1, причому $\|f\|_* = \|a\|_{\ell_\infty} = \sup_n |a_n|$.

Нехай $f \in \ell_1^*$. Позначимо $a_i = f(e_i)$, де $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (1 на i-й позиції). Тоді $a = (a_i) \in \ell_\infty$, оскільки

$$|a_i| \le \|f\|_* \|e_i\|_{\ell_1} = \|f\|_*. \tag{2}$$

Довільний елемент $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_1$ є границею послідовності (x^n), де $x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тому

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Навпаки, якщо f має вигляд (1) та $a \in \ell_\infty$, то

$$|f(x)| \leq \sup_n |a_n| \|x\|_{\ell_1} \tag{3}$$

таким чином, функціонал f обмежений (неперервний).

Порівнюючи (2) та (3), отримуємо

$$\|f\|_* = \|a\|_{\ell_\infty} = \sup_n |a_n|.$$

Лінійні неперервні функціонали на просторах послідовностей

Теорема 3 ($c_0^* = \ell_1$). Довільний лінійний неперервний функціонал на просторі c_0 має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad x = (x_n) \in c_0, \tag{4}$$

де $a = (a_n) \in \ell_1$, і навпаки: якщо $a \in \ell_1$, то формула (4) задає лінійний неперервний функціонал на c_0, причому $\|f\|_* = \|a\|_{\ell_1} = \sum_n |a_n|$.

Зауваження 3. $c_0^{**} = \ell_\infty$. Має місце вкладення $\ell_1 \subseteq \ell_\infty^*$ та $\ell_1 \neq \ell_\infty^*$.

Нехай $f \in c_0^*$. Позначимо $a_i = f(e_i)$, де $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (1 на i-й позиції), $a = (a_i)$. Довільний елемент $x = (x_1, x_2, \ldots) \in c_0$ є границею послідовності (x^n), де $x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тому

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Лінійні неперервні функціонали на просторах послідовностей

Для довільного n розглянемо послідовність

$$y^n = (\operatorname{sgn}(a_1), \operatorname{sgn}(a_2), ..., \operatorname{sgn}(a_n), 0, ...) \in c_0.$$

Тоді

$$f(y^n) = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \|f\|_* \|y^n\|_{c_0} \leq \|f\|_*,$$

звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \|f\|_*. \tag{5}$$

Таким чином, $a \in \ell_1$.

Припустимо, що $a \in \ell_1$. Тоді $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, $x = (x_n) \in c_0$ є лінійним неперервним функціоналом, оскільки

$$|f(x)| \leq \|x\|_{c_0} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{6}$$

Порівнюючи (5) та (6), отримуємо $\|f\|_* = \|a\|_{\ell_1} = \sum_n |a_n|$.

Теорема 4 ($\ell_p^* = \ell_q$). Довільний лінійний неперервний функціонал на просторі ℓ_p $(1 < p < \infty)$ має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad x = (x_n) \in \ell_p, \tag{7}$$

де $a = (a_n) \in \ell_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ і навпаки: якщо $a \in \ell_q$, то (7) задає лінійний неперервний функціонал на ℓ_p, причому $\|f\|_* = \|a\|_{\ell_q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/q}$.

Нехай $f \in \ell_p^*$. Позначимо $a_i = f(e_i)$, де $e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (1 на i-й позиції), $a = (a_i)$. Довільний елемент $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$ є границею послідовності (x^n), де $x^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тому

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Якщо всі a_n нульові, то $\|f\|_* = 0$. Інакше беремо таке n, що не всі a_1, …, a_n нульові.

Лінійні неперервні функціонали на просторах послідовностей

Розглянемо $x^n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ з $x_i = |a_i|^{q-1}\mathrm{sgn}(a_i)$. Оскільки $(q-1)p = q$, то

$$f(x^n) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \leq \|f\|_* \|x^n\|_{\ell_p} = \|f\|_* \left(\sum_{i=1}^{n} |a_n|^q \right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_n|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|_*. \tag{8}$$

Навпаки, нехай $a \in \ell_q$. Функціонал $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ $(x = (x_n) \in \ell_p)$ лінійний та неперервний, оскільки з нерівності Гьольдера випливає

$$|f(x)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}. \tag{9}$$

Порівнюючи (8) та (9), отримуємо $\|f\|_* = \|a\|_{\ell_q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q\right)^{1/q}$.

Спряжений оператор

Нехай E, F — ЛНП.

Для довільних $A \in L(E, F)$ та $y^* \in F^*$ розглянемо функціонал

$$\varphi(x) = y^*(Ax), \quad x \in E.$$

Очевидно, що $\varphi \in E^*$. Введемо позначення $A^*y^* = \varphi$. Тоді

$$A^*y^*(x) = y^*(Ax) \quad \forall x \in E \ \forall y^* \in F^*.$$

Отримали лінійне відображення $A^* : F^* \to E^*$ $(y^* \mapsto A^*y^*)$.

Означення 1. Оператор $A^* : F^* \to E^*$ називають спряженим.

Спряжений оператор

Лема 1. Нехай $A \in L(E, F)$. Тоді $A^* \in L(F^*, E^*)$ та $\|A^*\| = \|A\|$.

Дійсно, для всіх $y^* \in F^*$:

$$\|A^* y^*\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |A^* y^*(x)| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} |y^*(Ax)| \leq \|A\| \|y^*\|_{F^*},$$

що дає $\|A^*\| \leq \|A\|$.

З іншого боку, для $\varepsilon > 0$ існує $x \in E$: $\|x\|_E = 1$ та $\|Ax\|_F > \|A\| - \varepsilon$. За теоремою Хана–Банаха існує $y^* \in F^*$: $\|y^*\|_{F^*} = 1$,

$$|A^* y^*(x)| = |y^*(Ax)| = \|Ax\|_F > \|A\| - \varepsilon,$$

що дає $\|A^*\| \geq \|A\|$.

Для $A, B \in L(E)$ легко встановити (зробіть це!) рівності

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^* A^*.$$

Спряжений оператор

У випадку гільбертового простору H для $A \in L(H)$ задамо спряжений оператор A^* рівністю

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \forall x \in H \;\; \forall y^* \in H. \tag{10}$$

Функціонал $x \mapsto (Ax, y)$ лінійний неперервний. За теоремою Ріса існує єдиний $u = A^* y$, що задовольняє (10). Ясно, що оператор $A^* : H \to H$ лінійний.

Це узгоджено з загальним випадком: ототожнивши функціонал $l : x \mapsto (x, v)$ з вектором v, отримаємо

$$(A^* l)(x) = l(Ax) = (Ax, v) = (x, A^* v).$$

Зауваження 4. У випадку гільбертового простору H маємо $(A^*)^* = A$.

Спряжений оператор

Означення 2. Обмежений лінійний оператор A в гільбертовому просторі H називається самоспряженим, якщо $A = A^*$, тобто

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \forall x, y \in H.$$

1. P — оператор ортогонального проектування на замкнений лінійний підпростір H_0 в гільбертовому просторі H. Маємо

$$(Px, y) = (Px, Py) = (x, Py),$$

оскільки $Px, Py \in H_0$, $x - Px \perp H_0$, $y - Py \perp H_0$.

2. Діагональний оператор в сепарабельному гільбертовому просторі H:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x, e_n) e_n,$$

де $(e_n)_{n \in N}$ — ортонормований базис в H, $\alpha_n = O(1)$.

Спряжений оператор

Є зв'язок між образом оператора A та ядром спряженого оператора A^*.

Лема 2. Нехай $A \in L(E, F)$. Тоді

$$\overline{R(A)} = \{y \in F : f(y) = 0 \ \forall f \in N(A^*)\} = \bigcap_{f \in N(A^*)} N(f).$$

Нехай $y = Ax \in F$ та $f \in N(A^*) \subseteq F^*$. Тоді

$$f(y) = f(Ax) = (A^* f)(x) = 0.$$

Отже, $A(E)$ лежить в правій частині рівності, що доводиться. Але права частина замкнена, тому $\overline{R(A)}$ теж в ній лежить.

Нехай $y \in F$ лежить в правій частині та $y \notin \overline{R(A)}$. Тоді існує $f \in F^*$ з $f(y) \neq 0$ та $f|_{\overline{R(A)}} = 0$. Для кожного $x \in E$ маємо

$$(A^* f)(x) = f(Ax) = 0.$$

Тому $f \in N(A^*)$. Звідки $f(y) = 0$, що дає протиріччя.

Спряжений оператор

Уточнимо лему 2 випадку гільбертового простору H та спряженого оператора у розумінні гільбертових просторів.

Лема 3. Нехай $A \in L(H)$. Тоді

$$\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp}, \quad \overline{R(A^*)} = N(A)^{\perp},$$

причому має місце ортогональний розклад

$$H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = \overline{R(A^*)} \oplus N(A).$$

Якщо A оператор самоспряжений, то $\overline{R(A)} \perp N(A)$ і

$$H = \overline{R(A)} \oplus N(A).$$

З леми 2 ясно, що $\overline{R(A)}$ і $N(A^*)$ ортогональні та $\overline{R(A)} = N(A^*)^{\perp}$, що дає також ортогональний розклад простору H. З $A^{**} = A$ випливає все інше.

Спряжений оператор

Теорема 5 (критерій сюр'єктивності). Нехай E, F — банахові простори та $A \in L(E,F)$. Рівність $A(E) = F$ рівносильна тому, що при деякому $c > 0$ виконується нерівність

$$\|A^*y^*\|_{E^*} \geq c\|y^*\|_{F^*} \quad \forall y^* \in F^*.$$

Нехай $A(E) = F$ та $y^* \in F^*$. Оскільки існує така куля $B_F(0,\varepsilon) \subseteq F$, що $B_F(0,\varepsilon) \subseteq A(B_E(0,1))$[10], то для кожного $y \in F$ існує $x \in E$ з $Ax = y$ і

$$\|x\|_E \leq \frac{\|y\|_F}{\varepsilon}.$$

Беремо $y \in F$: $\|y\|_F = 1$ і $|y^*(y)| \geq \frac{\|y^*\|_{F^*}}{2}$. Отримаємо

$$\|A^*y^*\|_{E^*}\|x\|_E \geq |A^*y^*(x)| = |y^*(Ax)| = |y^*(y)| \geq \frac{\|y^*\|_{F^*}}{2},$$

звідки

$$\|A^*y^*\|_{E^*} \geq \frac{\varepsilon}{2}\|y^*\|_{F^*}.$$

[10] Див. доведення теореми Банаха–Шаудера про відкрите відображення.

Спряжений оператор

Нехай з деяким $c > 0$ виконується

$$\|A^* y^*\|_{E^*} \geq c \|y^*\|_{F^*} \quad \forall y \in F^*. \tag{11}$$

Достатньо показати, що

$$B_F(0, c) \subseteq \overline{A(B_E(0,1))}.$$

Від супротивного. Нехай існує $y \in F$:

$$\|y\|_F < c, \quad y \notin \overline{A(B_E(0,1))}.$$

З наслідку теореми Хана–Банаха випливає існування такого $y^* \in F^*$, що

$$|y^*(y)| > 1, \quad |y^*(Ax)| \leq 1 \ \text{ при } \ \|x\|_E \leq 1.$$

Тоді $|A^* y^*(x)| = |y^*(Ax)| \leq 1$ при $\|x\|_E \leq 1$, тобто $\|A^* y^*\|_{E^*} \leq 1$. З (11) маємо $\|y^*\|_{F^*} \leq \frac{1}{c}$. Оскільки $\|y\|_F < c$, то $|y^*(y)| \leq 1$ — протиріччя.

Спряжений оператор

Теорема 6. Нехай E, F — банахові простори та $A \in L(E, F)$.

1) Множина $A(E)$ замкнена тоді і тільки тоді, коли замкнена множина $A^*(F^*)$.
2) Оператор A бієктивно відображає E на F тоді і тільки тоді, коли A^* бієктивно відображає простір F^* на E^*.

1) Нехай підпростір $Z = A(E) \subseteq F$ замкнений. Позначимо через A_0 оператор A, що розглядаєть як відображення $E \to Z$. З теореми 5 випливає, що з деяким $c > 0$ виконується оцінка

$$\|A_0^* z^*\|_{E^*} \geq c\|z^*\|_{Z^*} \quad \forall z^* \in Z^*.$$

Доведемо замкненість $A^*(F^*)$. Беремо послідовність точок $y_n^* \in F^*$:

$$A^* y_n^* \to x^* \quad \text{в} \quad E^*.$$

Звуження y_n^* на Z позначимо z_n^*. Маємо $A^* y_n^* = A_0^* z_n^*$, оскільки на $x \in E$ ці фукціонали дають значення $y_n^*(Ax)$. Отже, z_n^* збігаються в Z^* до деякого $z^* \in Z^*$ (випливає з оцінки).

Спряжений оператор

Продовжимо z^* на F до елемента $y^* \in F^*$. Тоді

$$A^* y^* = A_0^* z^* = x^*,$$

що доводить замкненість $A^*(F^*)$.

Покладемо $Z = \overline{A(E)} \subseteq F$. Нехай підпростір $A^*(F^*)$ замкнений. Тоді підпростір $A_0^*(Z^*)$ замкнений також. Дійсно, якщо $z_n^* \in Z^*$: $A_0^* z_n^* \to x^*$, то можна продовжити z_n^* до функціоналів $y_n^* \in F^*$. Як і вище, маємо $A^* y_n^* = A_0^* z_n^*$. Оскільки $A^*(F^*)$ замкнена існує $y^* \in F^*$ з $A^* y_n^* \to A^* y^*$. Тоді для $z^* = y^*|_Z$ маємо

$$A_0^* z^* = A^* y^* = \lim_{n\to\infty} A_0^* z_n^*.$$

Оператор $A_0^* : Z^* \to E^*$ має нульове ядро, оскільки $A(E)$ щільна в Z. Оскільки оператор A_0^* має замкнений образ, то обернений до нього є неперервним. Отже, з деяким $c > 0$ виконується оцінка

$$\|A_0^* z^*\|_{E^*} \geq c\|z^*\|_{Z^*} \quad \forall z^* \in Z^*,$$

що дає $A(E) = Z$ та замкненість $A(E)$.

Спряжений оператор

2) Нехай для A існує $A^{-1} \in L(F, E)$. З леми 2 випливає, що $N(A^*) = \{0\}$, оскільки $R(A) = F$. Розглянемо для довільного $x^* \in E^*$ функціонал

$$y^*(y) = x^*(A^{-1}y), \;\; y \in F.$$

Ясно, що $y^* \in F^*$ та $A^*y^* = x^*$. Отже, $R(A^*) = E^*$. Існування $(A^*)^{-1} \in L(E^*, F^*)$ доведено.

З існування $(A^*)^{-1} \in L(E^*, F^*)$ випливає (див. теорему 5) $R(A) = F$. Крім того, ядро $N(A)$ оператора A нульове. Дійсно, якщо $Ax = 0$ і $x \neq 0$, то існує функціонал $x^* \in E^*$ з $x^*(x) = 1$. Для $y^* = (A^*)^{-1}x^*$ отримуємо абсурдну рівність

$$1 = x^*(x) = A^*y^*(x) = y^*(Ax) = 0.$$

14 Слабка та $*$-слабка збіжність

- Слабка та $*$-слабка збіжність
- Критерії слабкої та $*$-слабкої збіжності
- Принципи слабкої та $*$-слабкої секвенційної компактності

Слабка та $*$-слабка збіжність

Нехай E — ЛНП.

Означення 1. Послідовність векторів $x_n \in E$ називається слабко збіжною до $x \in E$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \forall f \in E^*.$$

Позначення: $x_n \xrightarrow{w} x$ або $x = w.\lim_{n\to\infty} x_n$.

Означення 2. Послідовність функціоналів $f_n \in E^*$ називається $*$-слабко збіжною до $f \in E$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E.$$

Позначення: $f_n \xrightarrow{w^*} f$ або $f = w^*.\lim_{n\to\infty} f_n$.

Зауваження 1. Слабка збіжність послідовності елементів $x_n \in E$ до $x \in E$ рівносильна $*$-слабкій збіжності послідовності функціоналів $\pi_{x_n} \in E^{**}$ до функціоналу $\pi_x \in E^{**}$. Дійсно,

$$\forall f \in E^* \quad f(x_n) \to f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_{x_n}(f) \to \pi_x(f).$$

Слабка та $*$-слабка збіжність

Нехай E — ЛНП.

Твердження 1. Якщо послідовність елементів $x_n \in E$ збігається за нормою E до $x \in E$, то вона збігається слабко.

Випливає з нерівності

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|_{E^*} \|x_n - x\|_E \quad \forall f \in E^*.$$

Твердження 2. Якщо послідовність функціоналів $f_n \in E^*$ збігається за нормою E^* до $f \in E^*$, то вона збігається $*$-слабко.

Випливає з нерівності

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{E^*} \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Слабка та $*$-слабка збіжність

Приклад $x_n \xrightarrow{w} x \;\not\Rightarrow\; x_n \to x$: $x_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n}, 0, \ldots) \in \ell_2$.

Приклад $f_n \xrightarrow{w^*} f \;\not\Rightarrow\; f_n \to f$: $f_n(x) = n\int_0^{1/n} x(t)dt$, $x \in C([0,1])$.

У гільбертовому просторі слабку збіжність можна ототожнити з $*$-слабкою (завдяки теоремі Ріса ототожнюється H^* з H).

$$x_n \xrightarrow{w} x \quad \Leftrightarrow \quad (x_n, y) \to (x, y) \quad \forall y \in H$$

Задача. У скінченновимірному лінійному нормованому просторі сильна та слабка збіжності рівносильні.

Теорема (теорема Шура). В ℓ_1 сильна та слабка збіжності послідовностей рівносильні.

Слабка та $*$-слабка збіжність

Теорема 1. Нехай E — банаховий простір. Довільна $*$-слабко збіжна послідовність в E^* обмежена за нормою.

Нехай послідовність (f_n) $(f_n \in E^*)$ $*$-слабко збіжна. Тоді для кожного $x \in E$ множина $\{f_n(x)\}$ обмежена. Тобто,

$$\sup_n f_n(x) < +\infty \quad \forall x \in E.$$

З теореми Банаха–Штейнгауза випливає

$$\sup_n \|f_n\|_{E^*} < +\infty.$$

Слабка та $*$-слабка збіжність

Теорема 2. Довільна слабко збіжна послідовність в лінійному нормованому просторі обмежена за нормою.

Використаємо канонічне вкладення простору E в другий спряжений E^{**}.

Нехай послідовність (x_n) $(x_n \in E)$ слабко збіжна. Тоді для кожного $f \in E^*$ множина $\{f(x_n)\}$ обмежена. Тобто,

$$\sup_n \pi_{x_n}(f) < +\infty \quad \forall f \in E^*.$$

З теореми Банаха–Штейнгауза випливає

$$\sup_n \|x_n\|_E = \sup_n \|\pi_{x_n}\|_{E^{**}} < +\infty.$$

Теорема 3. Нехай E — банаховий простір і послідовність функціоналів $f_n \in E^*$ така, що для кожного $x \in E$ послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна. Тоді існує $f \in E^*$ такий, що $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Іншими словами спряжений простір E^* $*$-слабко повний.

Для кожного $x \in E$ існує границя $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

$f : E \to \mathbb{R}$ — лінійний функціонал. За теоремою Банаха–Штейнгауза маємо

$$\sup_n \|f_n\|_{E^*} \leq C < +\infty.$$

Тоді

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq C\|x\|_E \quad \forall x \in E,$$

тобто $f \in E^*$.

Зауваження 2. А ЛНП E (навіть банаховий) може не бути слабко повним! Приклад в c_0: $x_n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, \ldots)$.

Критерії слабкої та $*$-слабкої збіжності

Теорема 4. Нехай E — ЛНП. Послідовність елементів $x_n \in E$ слабко збігається до $x \in E$ тоді і тільки тоді, коли:

1) послідовність (x_n) обмежена, тобто $\exists C \in \mathbb{R}$: $\|x_n\| \leq C$ для всіх $n \in N$;
2) $f(x_n) \to f(x)$ для всіх $f \in M$, де $M \subseteq E^*$ має властивість з.л.о.$(M) = E^*$.

Необхідність очевидна.

Для доведення достатності, потрібно встановити

$$f(x_n) \to f(x) \quad \forall f \in E^*.$$

Очевидно, що для всіх $g \in$ л.о.(M) маємо $g(x_n) \to g(x)$. Все інше випливає з нерівності ($f \in E^*$, $g \in$ л.о.(M))

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &\leq |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \leq \\ &\leq \|x_n\|_E \|f - g\|_{E^*} + |g(x_n) - g(x)| + \|x\|_E \|g - f\|_{E^*} \leq \\ &\leq (C + \|x\|_E) \|f - g\|_{E^*} + |g(x_n) - g(x)|. \end{aligned}$$

Критерії слабкої та $*$-слабкої збіжності

Теорема 5. Нехай E — банаховий простір. Послідовність функціоналів $f_n \in E^*$ $*$-слабко збігається до $f \in E^*$ тоді і тільки тоді, коли:

1) послідовність (f_n) обмежена, тобто $\exists C \in \mathbb{R}$: $\|f_n\|_* \leq C$ для всіх $n \in N$;
2) $f_n(x) \to f(x)$ для всіх $x \in N$, де $N \subseteq E$ має властивість $\text{з.л.о.}(N) = E$.

Необхідність очевидна.

Для доведення достатності, потрібно встановити

$$f_n(y) \to f(y) \quad \forall y \in E.$$

Очевидно, що для всіх $x \in \text{л.о.}(N)$ маємо $f_n(x) \to f(x)$. Все інше випливає з нерівності ($y \in E$, $x \in \text{л.о.}(N)$)

$$\begin{aligned} |f_n(y) - f(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \leq \\ \leq \|f_n\|_{E^*} \|y - x\|_E + |f_n(x) - f(x)| + \|f\|_{E^*} \|y - x\|_E \leq \\ \leq (C + \|f\|_{E^*}) \|y - x\|_E + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Критерії слабкої та $*$-слабкої збіжності

Теорема 6. Нехай H — сепарабельний гільбертовий простір з ортонормованим базисом $\{e_n\}$. Послідовність елементів $x_n \in H$ слабко збігається до $x \in H$ тоді і тільки тоді, коли:

1) послідовність (x_n) обмежена, тобто $\exists C \in \mathbb{R}$: $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \leq C$;
2) $(x_n, e_k) \to (x, e_k)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Критерії слабкої та $*$-слабкої збіжності

Теорема 7. Послідовність елементів $x_n \in C([0,1])$ слабко збігається до $x \in C([0,1])$ тоді і тільки тоді, коли:

1) послідовність (x_n) обмежена, тобто $\exists C \in \mathbb{R}$: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{C([0,1])} \leq C$;
2) $x_n(t) \to x(t)$ для всіх $t \in [0,1]$.

Без доведення.

Теорема 8. Нехай E, F — ЛНП, $A : E \to F$ — лінійне відображення. Наступні умови рівносильні:

1) $A \in L(E, F)$;
2) якщо $x_n \to 0$ слабко, то $\sup_n \|Ax_n\|_F < +\infty$;
3) якщо $x_n \to 0$ слабко, то послідовність (Ax_n) слабко збігається.

1) $\Rightarrow$ 2) Нехай $\|A\| < +\infty$. Якщо $x_n \xrightarrow{w} 0$, то $\sup_n \|x_n\|_E < +\infty$, звідки

$$\sup_n \|Ax_n\|_F < +\infty.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Якщо $x_n \to 0$, то $x_n \xrightarrow{w} 0$, звідки $\sup_n \|Ax_n\|_F < +\infty$. З критерію неперервності отримуємо $A \in L(E, F)$.

3) $\Rightarrow$ 2) Випливає з обмеженості слабко збіжної послідовності.

1) $\Rightarrow$ 3) Випливає з рівності

$$\forall f \in F^* \ \ f(Ax_n) = A^* f(x_n) \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Теорема 9 (теорема Мазура). Нехай $x_n \xrightarrow{w} x$ в ЛНП E. Тоді існує така послідовність (v_n) елементів опуклої оболонки множини $\{x_n\}$, що

$$v_n \to x, \quad n \to \infty.$$

Доведемо, що x лежить в V — замиканні опуклої оболонки множини $\{x_n\}$. Від супротивного. Нехай $x \notin V$. Тоді існує функціонал $f \in E^*$:

$$f(x) > \sup_{y \in V} f(y)$$

Але $x_n \in V$ та $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Отримали протиріччя.

Теорема 10. Нехай E — сепарабельний ЛНП. Тоді з довільної обмеженої послідовності лінійних неперервних функціоналів на E можна виділити $*$-слабко збіжну підпослідовність.

Зауваження 3. Без умови сепарабельності простору E твердження теореми може не мати місця. Нехай $E = \ell_\infty$. Розглянемо послідовність фнкціоналів

$$f_n(x) = x_n, \;\; x = (x_n) \in \ell_\infty.$$

Ясно, що $f_n \in \ell_\infty^*$, $\|f_n\|_* = 1$. Послідовність (f_n) не має поточково збіжних підпослідовностей, оскільки для довільної підпослідовності (f_{n_k}) існує елемент $x = (x_n) \in \ell_\infty$: не існує $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Принципи слабкої та $*$-слабкої секвенційної компактності

Нехай $f_n \in E^*$ і $\|f_n\|_* \le C$. Беремо в E зліченну щільну множину $\{x_k\}$.

Виділимо з (f_n) підпослідовність $(f_{1,n})$: послідовність $(f_{1,n}(x_1))$ збіжна.

Виділимо з $(f_{1,n})$ підпослідовність $(f_{2,n})$: послідовність $(f_{2,n}(x_2))$ збіжна.

....

Виділимо з $(f_{k-1,n})$ підпослідовність $(f_{k,n})$: послідовність $(f_{k,n}(x_k))$ збіжна.

....

Послідовність $(f_{n,n})$ збігається на кожному x_k. Існування $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n,n}(x)$ для довільного $x \in E$ випливає з нерівності

$$|f_{n,n}(x) - f_{l,l}(x)| \le |f_{n,n}(x) - f_{l,l}(x_k)| + |f_{n,n}(x_k) - f_{l,l}(x_k)| + |f_{n,n}(x_k) - f_{l,l}(x)|.$$

Отже, рівність $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_{n,n}(x)$ задає елемент E^* з $\|f\|_* \le C$.

Теорема 11. З довільної обмеженої послідовності елементів гільбертового простору H можна виділити слабко збіжну підпослідовність.

Нехай $\|x_n\| \leq C$. Лінійний підпростір $H_0 = \text{з.л.о.}\{x_n\}$ є сепарабельним гільбертовим простором. За доведеним в H_0 можна виділити слабко збіжну до деякого $x \in H_0$ підпослідовність (x_{n_k}). Вона буде слабко збігатись і в H, оскільки довільний $y \in H$ однозначно подається у вигляді

$$y = y_0 + y_1,$$

де $y_0 \in H_0$, $y_1 \in H_0^{\perp}$, та

$$(y, x_{n_k}) = (y_0, x_{n_k}) + (y_1, x_{n_k}) = (y_0, x_{n_k}) \to (y_0, x) = (y, x).$$

Теорема 12. З довільної обмеженої послідовності елементів рефлексивного банахового простору можна виділити слабко збіжну підпослідовність.

Без доведення.

Ця теорема характеризує рефлексивні банахові простори.

З обмеженої послідовності елементів $x_n(t) = \sin(\pi nt)$ простору $C([0,1])$ не можна виділити слабко збіжну підпослідовність.

На цьому все!

Питання на модуль «Лінійні нормовані простори», ПС-3, САТР-3

Основні поняття

1. Норма. Лінійний нормований простір.
2. Скалярний добуток. Евклідовий (передгільбертовий) простір.
3. Алгебраїчний базис.
4. Банаховий простір.
5. Гільбертовий простір.
6. Метрична проекція.
7. Ортонормована система та ортонормований базис.
8. Лінійний обмежений оператор.
9. Норма лінійного обмеженого оператора.
10. Лінійний обмежений функціонал.
11. Норма лінійного обмеженого функціонала.
12. Функціонал Мінковського.
13. Спряжений простір.
14. Другий спряжений простір.
15. Рефлексивний простір.
16. Спряжений оператор.
17. Слабка збіжність.
18. $*$-слабка збіжність.

Питання на модуль «Лінійні нормовані простори», ПС-3, САТР-3

Теореми та твердження з доведеннями

1. Нерівність Шварца.
2. Критерій Йордана–фон Неймана.
3. Теорема про еквівалентність норм в скінченновимірних просторах.
4. Теорема про майже перпендикуляр.
5. Теорема про некомпактність куль в нескінченновимірних просторах.
6. Теорема про існування та єдиність найближчого елемента.
7. Критерій метричної проекції.
8. Теорема про ортогональний розклад.
9. Нерівність Бесселя, рівність Парсеваля–Стеклова.
10. Теорема про існування ортонормованого базису.
11. Теорема Ріса–Фішера про ізоморфізм.
12. Теорема про рівносильність обмеженості та неперервності для лінійних операторів.
13. Теорема про повноту простору $L(E, F)$.
14. Теорема Банаха–Штейнгауза.
15. Теорема Банаха–Шаудера про відкрите відображення.
16. Теорема Банаха про неперервність оберненого оператора.
17. Теорема про замкнений графік.
18. Теорема Хана–Банаха.
19. Теореми про віддільність опуклих множин.
20. Теорема Ріса про зображення лінійного неперервного функціонала.
21. Критерій сюр'єктивності $A \in L(E, F)$.
22. Критерії слабкої та $*$-слабкої збіжності.
23. Принципи слабкої та $*$-слабкої секвенційної компактності.

Питання на модуль «Лінійні нормовані простори», ПС-3, САТР-3

Задачі

1. Чи нормується довільний лінійний простір?
2. Покажіть, що норми $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ та $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ не еквівалентні на $C([0,1])$.
3. В просторі послідовностей з скінченною кількістю ненульових координат розглянемо дві норми
$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \quad \|x\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |x_n|,$$
де $\alpha_{2n} = n$ і $\alpha_{2n+1} = n^{-1}$. Покажіть, що ці норми не оцінюються одна через іншу.
4. Доведіть, що в нескінченновимірному банаховому просторі алгебраїчний базис незлічений.
5. Чи є простір ℓ_1 повним відносно норми $\|x\|_\infty = \max_n |\xi_n|$, $x = (\xi_n) \in \ell_1$?
6. Доведіть, що не існує норми на $B([0,1])$, що задає поточкову збіжність.
7. Доведіть, що в $C([0,1])$ неможливо ввести скалярний добуток, породжуючий норму цього простору (рівномірну).
8. Доведіть, що в гільбертовому просторі довільна послідовність непорожніх вкладених опуклих замкнених обмежених множин має непорожній перетин.
9. Доведіть, що для ненульових елементів x, y передгільбертового простору H має місце рівність
$$(x,y) = \left(1 - \frac{1}{2}\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2\right)\|x\|\,\|y\|.$$
10. Доведіть, що довільна ортонормована система у сепарабельному передгільбертовому просторі не більш ніж злічена.

Питання на модуль «Лінійні нормовані простори», ПС-3, САТР-3

Задачі

11. Доведіть, що для підмножини M гільбертового простору H маємо $M^{\perp\perp} = \text{з.л.о.}(M)$.
12. Нехай $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — зліченна ортонормована система елементів гільбертового простору H та $C = \text{з.л.о.}\,\{e_n\}$. Доведіть, що $P_C x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, \quad x \in H$.
13. Доведіть, що для гіперплощини $L = \{y \in H : (x_0, y) = c\}$ $(x_0 \neq 0,\ c \in \mathbb{R})$ проекція $P_L x$ обчислюється за формулою $P_L x = x - ((x_0, x) - c)\frac{x_0}{\|x_0\|^2}$.
14. Для $L = \{x = (x_n) \in \ell_2 : \ x_2 = x_4 = \ldots = 0\}$ знайдіть ортогональне доповнення в гільбертовому просторі ℓ_2.
15. Нехай $L = \left\{x = (x_n) \in \ell_2 : \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\right\}$. Доведіть, що L скрізь щільна в просторі ℓ_2.
16. Наведіть приклад лінійного функціонала, який не є неперервним.
17. Нехай $f, g \in E^*$ та $\ker f = \ker g$. Доведіть, що $f = \lambda g$, де $\lambda \in \mathbb{R}$.
18. Нехай $f \in E^* \setminus \{0\}$ та $L = \{x \in E : \ f(x) = 1\}$. Доведіть, що $\frac{1}{\|f\|} = \inf_{x\in L} \|x\|$.
19. Нехай $f \in E^*$ та $\ker f = \{x \in E : \ f(x) = 0\}$. Доведіть, що $\frac{|f(x)|}{\|f\|} = \inf_{y\in\ker f} \|y - x\|$.
20. Знайдіть норму лінійного функціонала $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - x(1/2)$, заданого на просторі $C([0,1])$, та з'ясуйте, чи досягається вона на замкненій одиничній кулі.
21. Знайдіть норму лінійного функціонала $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n$, заданого на просторі ℓ_1, та з'ясуйте, чи досягається вона на замкненій одиничній кулі.
22. Доведіть, що на скінченновимірному ЛНП всі лінійні функціонали є неперервними.

Питання на модуль «Лінійні нормовані простори», ПС-3, САТР-3

Задачі

23. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ — лінійно незалежні елементи лінійного нормованого простору E, $c_1, c_2, \dots, c_n$ — деякі дійсні числа. Доведіть існування функціонала $f \in E^*$ такого, що $f(x_k) = c_k$, $k = \overline{1, n}$.
24. Нехай V — замкнена опукла множина в ЛНП E та $x \notin V$. Доведіть, що існує $l \in E^*$ з $l(x) > \sup_{y \in V} l(y)$. Якщо V — лінійний підпростір, то можна обрати так, що $l(x) = 1$ і $l|_V = 0$.
25. Нехай L — лінійний підпростір ЛНП E. Доведіть, що $\overline{L} = E$ тоді й тільки тоді, коли для $f \in E^*$ з $L \subseteq \ker f$ випливає $f = 0$.
26. Доведіть рефлексивність гільбертового простору.
27. Нехай E — рефлексивний банаховий простір. Доведіть, що для кожного $f \in E^*$ існує такий $x \in S_E$, що $f(x) = \|f\|_*$.
28. Доведіть, що простір ℓ_1 нерефлексивний.
29. Доведіть, що простір c_0 нерефлексивний.
30. Нехай $1 \leq p \leq \infty$ та послідовність $x = (x_n)$ така, що ряд $\sum_n x_n y_n$ збігається для всіх $y = (y_n) \in \ell_p$. Доведіть, що $x \in \ell_q$, де $1/p + 1/q = 1$.
31. Нехай H — гільбертовий простір, $A \in L(H)$ та існує таке $c > 0$, що $c\|x\|^2 \leq (Ax, x)$ $\forall x \in E$. Доведіть, що для довільного $f \in H$ існує єдиний розв'язок рівняння $Ax = f$.
32. Доведіть, що для довільного сепарабельного банахового простору E існує оператор $A \in L(\ell_1, E)$ з $A(\ell_1) = E$.
33. Доведіть, що рефлексивний банаховий простір є слабко повним.
34. Нехай E — ЛНП, послідовність (x_n) $(x_n \in E)$ слабко збігається до $x \in E$. Доведіть, що

$$\|x\| \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

Питання на модуль «Лінійні нормовані простори», ПС-3, САТР-3

Задачі

35. Нехай H — гільбертовий простір, послідовність (x_n) $(x_n \in H)$ слабко збігається до $x \in H$ та $\|x_n\| \to \|x\|$. Доведіть, що $x_n \to x$.
36. Нехай послідовність (x_n) точок гільбертового простору H слабко збігається до точки $x \in H$. Доведіть, що для довільної точки $y \in H \backslash \{x\}$ має місце нерівність

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n - y\| \, .$$

37. Нехай $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \to y$ в гільбертовому просторі H. Доведіть, що $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$. Побудуйте приклад послідовностей (x_n) і (y_n) таких, що $x_n \xrightarrow{w} x$, $y_n \xrightarrow{w} y$ та $(x_n, y_n) \nrightarrow (x, y)$.
38. Доведіть, що в нескінченновимірному гільбертовому просторі H замикання сфери $S = \{x \in H : \ \|x\| = 1\}$ відносно слабкої збіжності збігається з кулею $B = \{x \in H : \ \|x\| \le 1\}$.
39. Нехай A — лінійний оператор у гільбертовому просторі H, причому

$$\forall x, y \in H \ \ (Ax, y) = (x, Ay).$$

Доведіть, що оператор A неперервний.

40. Нехай E — банаховий простір, $A \in L(E)$ та $\|A\| < 1$. Доведіть, що оператор $(I - A)^{-1}$ існує, обмежений і може бути поданий у вигляді $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$.
41. Нехай E — банаховий простір, $A, B \in L(E)$, існує $A^{-1} \in L(E)$ та $\|B\| < \|A^-1\|^{-1}$. Доведіть, що оператор $(A + B)^{-1}$ існує та обмежений.
42. Нехай E — банаховий простір. Доведіть, що множина операторів $\{A \in L(E) : \ \exists\, A^{-1} \in L(E)\}$ є відкритою в $L(E)$.