Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

О.М.Іксанов, В.І.Шевченко

Транспортна задача, її властивості та методи розв'язування

(курс "Дослідження операцій")

Навчальний посібник

Київ
2010

УДК 519.8

Рецензенти:
д-р фіз.-мат.наук С.І.Ляшко;
канд. фіз.-мат.наук С.О.Мащенко

Затверджено вченою радою факультету кібернетики
25 жовтня 2010 року

О.М. Іксанов, В.І. Шевченко
Транспортна задача, її властивості та методи розв'язування (курс "Дослідження операцій"): Навчальний посібник. – К.: Наукове видавництво "ТВіМС", 2010. – 84с**.**

Розглянуто питання як обгрунтування, так і практичного застосування основних методів розв'язування транспортних задач, які є складовими курсів математичних методів дослідження операцій та методів оптимізації. Запропоновано приклади для самостійного розв'язування.

Матеріал, викладений у посібнику, відповідає програмі курсу дослідження операцій для спеціальностей "прикладна математика" та "інформатика".

1. Вступ.

Матеріали посібника можуть використовуватись, як викладачем так і студентом при опрацюванні тем, пов'язаних з вивченням оптимізаційних моделей транспортного типу.

В ньому розглянуто питання як обгрунтування, так і практичного застосування основних методів розв'язування транспортних задач, які є складовими курсів математичних методів дослідження операцій та методів оптимізації, зокрема, побудова транспортних моделей в матричній постановці (збалансованих, незбалансованих, з обмеженнями пропускних спроможностей комунікацій), властивості збалансованих транспортних задач та умови їх розв'язності, методи побудови початкових опорних планів збалансованих транспортних задач, метод потенціалів розв'язування збалансованих транспортних задач та його зв'язок з модифікованим симплекс-методом, зведення незбалансованих моделей до збалансованих, особливості застосування методу потенціалів до розв'язування транспортних задач з обмеженнями пропускних спроможностей комунікацій.

Теоретичні твердження та методи проілюстровані прикладами, пропонуються завдання для самостійного опрацювання та відповідні лабораторні роботи.

У додатку наведена програма відповідного розділу курсу "Дослідження операцій".

2. Збалансована транспортна задача.

2.1. Змістовна та математична постановка транспортної задачі.

Змістовно транспортна задача полягає у відшуканні найбільш дешевого плану перевезень деякого однорідного продукту з пунктів із заданими запасами цього продукту у пункти з відомими потребами у ньому за умови, що перевезення продукту можливе з кожного пункту зберігання у кожний пункт використання та відома вартість перевезення одиниці продукту за кожним таким маршрутом.

Побудуємо математичну модель транспортної задачі.

Нехай в m пунктах $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_m$ зберігається або виробляється деякий однорідний продукт відповідно в кількостях $a_1, a_2, ..., a_m$ одиниць. Цей продукт використовується або споживається в пунктах $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, ..., \boldsymbol{B}_n$ в об'ємах, відповідно, $b_1, b_2, ..., b_n$ одиниць. Транспортування продукту можливе з кожного пункту відправки $\boldsymbol{A}_i \ (i = \overline{1,m})$ в кожний пункт призначення $\boldsymbol{B}_j \ (j = \overline{1,n})$. Вартість перевезення одиниці продукту із пункту $\boldsymbol{A}_i \ (i = \overline{1,m})$ в пункт $\boldsymbol{B}_j \ (j=\overline{1,n})$ позначимо через $c_{ij} \ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$. Матрицю $\boldsymbol{C}=\left\|c_{ij}\right\|_{i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}}$ називають матрицею транспортних витрат.

Введемо змінні задачі, а саме, позначимо через

$$x_{ij}\geq 0 \ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}) \qquad (2.1)$$

кількість одиниць продукту, що перевозяться із $\boldsymbol{A}_i \ (i=\overline{1,m})$ у $\boldsymbol{B}_j \ (j=\overline{1,n})$. Тоді загальна вартість всіх перевезень буде рівна значенню функції

$$L(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}, \qquad (2.2)$$

де $x_{ij}\geq 0$ є елементами матриці $\boldsymbol{X}=\left\|x_{ij}\right\|_{i=\overline{1m},\ j=\overline{1,n}}$, яку називають планом перевезень.

У найпростішому випадку потрібно вивезти весь продукт із всіх пунктів зберігання, тобто повинні виконуватись умови

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (2.3)$$

а також завезти його всім споживачам рівно за потребами, що означає виконання умов

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=\overline{1,n}. \qquad (2.4)$$

Зауважимо, що система (2.3), (2.4) буде мати допустимі розв'язки (ми доведемо це нижче) тоді і тільки тоді, коли буде виконуватись умова, яку називають *умовою балансу транспортної задачі*

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j. \qquad (2.5)$$

Саму транспортну задачу у цьому випадку називають *збалансованою* або *закритою*.

Отже, з математичної точки зору збалансована транспортна задача полягає у відшуканні такої матриці $\boldsymbol{X}=\left\|x_{ij}\right\|_{i=\overline{1m},\ j=\overline{1,n}}$*, елементи якої за виконання умови балансу (2.5) задовольняють умови (2.1), (2.3), (2.4) і на якій досягається мінімум лінійної функції (2.2)*.

Надалі збалансовану транспортну задачу будемо називати Т-задачею.

Умови Т-задачі зручно подавати у вигляді так званої транспортної таблиці

b_j / a_i	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Запишемо обмеження Т-задачі (2.3), (2.4) у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} = a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} \quad \ldots \quad + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} \quad \ldots \quad + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} \quad \ldots \quad + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

(2.6)

З вигляду (2.6) непрямих обмежень Т-задачі випливає, що вона є задачею лінійного програмування ***з числом змінних*** $m \times n$ ***і числом рівнянь*** $m+n$ **.**

Позначимо через $\boldsymbol{T}$ матрицю коефіцієнтів при невідомих системи лінійних рівнянь (2.6).

Вектори-стовпці матриці $\boldsymbol{T}$ будемо називати *векторами комунікацій* і позначати як $\boldsymbol{P}_{ij}$:

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \underbrace{(0,0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0,\underset{m+j}{1},0,\ldots,0)}_{m+n}{}^T .$$

$$
\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 11...1 & 00...0...00...0 \\ 00...0 & 11...1...00...0 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 00...0 & 00...0...11...1 \\ 10...0 & 10...0...10...0 \\ 01...0 & 01...0...01...0 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 00...1 & 00...1...00...1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} n \end{matrix} . \qquad (2.7)
$$

$$
\underbrace{\qquad}_{n} \quad \underbrace{\qquad}_{n} \dots \underbrace{\qquad}_{n}
$$

Якщо ввести до розгляду вектор запасів-потреб $\boldsymbol{P_0} = (a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_n)^T$, то непрямі обмеження (2.6) Т-задачі можна переписати у векторному вигляді

$$
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \boldsymbol{P}_{ij} = \boldsymbol{P}_0 , \qquad (2.8)
$$

який нам буде корисним при обгрунтуванні методу потенціалів для розв'язування Т-задачі.

2.2. Основні властивості Т-задачі.

Теорема (критерій існування допустимих розв'язків Т-задачі).

Умова балансу (2.5) є необхідною і достатньою умовою існування допустимих розв'язків Т-задачі.

Доведення. Необхідність. Нехай Т-задача має допустимі розв'язки. Це означає, що існує матриця $\boldsymbol{X} = \left\| x_{ij} \right\|_{i=\overline{1m},\, j=\overline{1,n}}$, елементи x_{ij} якої задовольняють умови

$$
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \; i = \overline{1,m} , \qquad (2.9)
$$

$$
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \; j = \overline{1,n} . \qquad (2.10)
$$

Підсумувавши рівності (2.9) по всіх $i = \overline{1,m}$, а (2.10) – по всіх $j = \overline{1,n}$, отримаємо

$$
\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j ,
$$

що і треба було довести.

Достатність. Нехай виконується умова балансу (2.5). Позначимо

$$d = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

і покладемо

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}, i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n} \ .$$

За побудовою $x_{ij} \ge 0 \ (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$. Далі маємо:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=i}^{n} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^{m} b_j = a_i, \ i = \overline{1,m} \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{b_j}{d} \sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \ j = \overline{1,n} \ ,$$

тобто матриця $\boldsymbol{X} = \left\| x_{ij} \right\|_{i=\overline{1m}, \ j=\overline{1,n}}$ є допустимим планом перевезень Т-задачі.

Теорема доведена.

Теорема (про ранг матриці $\boldsymbol{T}$).

Ранг матриці $\boldsymbol{T}$ *дорівнює* $m+n-1$.

Доведення. Оскільки число обмежень Т-задачі рівне $m+n$, то $rang\boldsymbol{T} \le m+n$. Доведемо, що $rang\boldsymbol{T} \le m+n-1$.

Нехай деякий план перевезень $\boldsymbol{X} = \left\| x_{ij} \right\|_{i=\overline{1m}, \ j=\overline{1,n}}$ задовольняє всі обмеження (2.6) крім першого. Покажемо, що він буде задовольняти і перше рівняння.

Складемо почленно рівняння (2.3) з $2-$го по $m-$те, а (2.4) $-$ з $1-$го по $n-$те:

$$\sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=2}^{m} a_i \ , \tag{2.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \ . \tag{2.12}$$

Віднімаючи почленно від рівності (2.12) рівність (2.11), отримаємо з урахуванням умови балансу (2.5):

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=2}^{m} x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{i=2}^{m} a_i$$

або

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = a_1 .$$

Отже, план перевезень $X = \left\| x_{ij} \right\|_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$ задовольняє і перше рівняння системи обмежень (2.6) Т-задачі. Тому ранг матриці $\boldsymbol{T}$ не може бути більшим, ніж $m+n-1$:

$$rang\boldsymbol{T} \le m+n-1 . \qquad (2.13)$$

Покажемо, що ранг матриці $\boldsymbol{T}$ не може бути меншим числа $m+n-1$.

Побудуємо матрицю $\boldsymbol{T}'$ з перших $(m+n-1)$-ої компонент векторів $\boldsymbol{P_{1n}}, \boldsymbol{P_{2n}}, \ldots, \boldsymbol{P_{mn}}, \boldsymbol{P_{11}}, \boldsymbol{P_{12}}, \ldots, \boldsymbol{P_{1,n-1}}$:

$$\begin{array}{c} \qquad \boldsymbol{P}_{1n}\boldsymbol{P}_{2n} \ldots \boldsymbol{P}_{mn}\boldsymbol{P}_{11}\boldsymbol{P}_{12} \ldots \boldsymbol{P}_{1,n-1} \\ \boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\ \ldots\\0\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\0\\ \ldots\\0\end{matrix}}\right\} n-1 \end{array} \end{array}$$

Матриця $\boldsymbol{T}'$ зводиться до одиничної розміру $(m+n-1)\times(m+n-1)$ шляхом віднімання від першого рядка суми останніх $(n-1)-$ го рядків. Тому $rang\boldsymbol{T}' = m+n-1$. Оскільки $\boldsymbol{T}'$ є підматрицею $\boldsymbol{T}$, то

$$rang\boldsymbol{T} \ge m+n-1 . \qquad (2.14)$$

З нерівностей (2.13), (2.14) випливає рівність

$$rang\boldsymbol{T} = m+n-1 .$$

Теорема доведена.

Теорема (про розв'язність Т-задачі).

Збалансована транспортна задача завжди має оптимальний розв'язок.

Доведення. Оскільки кожна змінна x_{ij} $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ Т-задачі задовольняє умову

$$0 \le x_{ij} \le \min\left(a_i, b_j\right),$$

то її допустима область обмежена і є багатовимірним паралелепіпедом. На такій області лінійна функція (2.2) як неперервна досягає свого найменшого значення, тобто Т-задача завжди розв'язна.
Теорема доведена.

2.3. Опорні плани Т-задачі, їх властивості.

Оскільки транспортна задача є задачею лінійного програмування, то для неї залишається в силі означення опорного плану як базисного допустимого розв'язку задачі лінійного програмування.

Назвемо додатні перевезення x_{ij} плану перевезень $\boldsymbol{X}$ основними (клітини транспортної таблиці, в яких вони знаходяться, також будемо називати основними). Тоді план $\boldsymbol{X}$ буде опорним планом Т-задачі, якщо вектори комунікацій, що відповідають його основним перевезенням, утворюють лінійно незалежну систему.

Для детального з'ясування властивостей опорних планів Т-задачі скористаємось її графічною інтерпретацією. Поставимо у відповідність Т-задачі неорієнтований граф, в якому кожна вершина $\boldsymbol{A}_i\ (i=\overline{1,m})$ сполучена з кожною вершиною $\boldsymbol{B}_j\ (j=\overline{1,n})$ відповідним ребром, яке надалі будемо називати комунікацією і позначати як $\overline{\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_j}$. Зауважимо, що кожній комунікації $\overline{\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_j}$ відповідає тільки один вектор комунікацій $\boldsymbol{P}_{ij}$ і тільки одна клітина транспортної таблиці, яка стоїть на перетині її $i-$го рядка і $j-$го стовпчика, а також єдине перевезення x_{ij} плану перевезень $\boldsymbol{X}$, що занесене у цю клітину.

Означення (ланцюга та цикла комунікацій). *Послідовність комунікацій*

$$\overline{\boldsymbol{A}_{i_1}\boldsymbol{B}_{j_1}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_2}\boldsymbol{B}_{j_1}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_2}\boldsymbol{B}_{j_2}},\ldots,\overline{\boldsymbol{A}_{i_s}\boldsymbol{B}_{j_{s-1}}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_s}\boldsymbol{B}_{j_s}}, \qquad (2.15)$$

де серед номерів $i_k\ (k=\overline{1,s})$ немає однакових і серед номерів $j_l\ (l=\overline{1,s})$ також немає однакових (тобто $i_k \neq i_l$ при всіх $k \neq l, k \in \{1,2,\ldots,s\}, l \in \{1,2,\ldots,s\}$ і $j_k \neq j_l$ при всіх $k \neq l, k \in \{1,2,\ldots,s\}, l \in \{1,2,\ldots,s\}$), називають ланцюгом, що сполучає пункти $\boldsymbol{A}_{i_1}$ і $\boldsymbol{B}_{j_s}$. Ланцюг комунікацій (2.15), до якого приєднана комунікація $\overline{\boldsymbol{A}_{i_1}\boldsymbol{B}_{j_s}}$, називається циклом.

Якщо в означеннях ланцюга та цикла комунікацій замінити комунікації відповідними клітинами транспортної таблиці, то отримаємо означення ланцюга та цикла клітин транспортної таблиці.

За означенням цикла кожні його дві клітини, що відповідають його суміжним комунікаціям, лежать або в одному рядку, або в одному стовпці, і жодних інших клітин, що належать циклу, в цьому рядку або стовчику немає. Тому число клітин довільного цикла завжди парне. Оскільки кожна вершина, через яку проходить цикл (не важливо яка A_i чи B_j), є спільною тільки для двох комунікацій циклу, то в кожному циклі число A_j пунктів відправлення дорівнює числу B_j пунктів призначення.

Теорема (критерій лінійної незалежності векторів-комунікацій).

Нехай $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}}$ *– довільна система векторів-комунікацій,* $\boldsymbol{E}$ *– множина відповідних їм клітин транспортної таблиці. Система* $\boldsymbol{R}$ *є лінійно незалежною тоді і тільки тоді, коли із комунікацій, відповідних векторам системи* $\boldsymbol{R}$ *неможливо утворити цик*л.

Доведення. Необхідність. Нехай вектори системи $\boldsymbol{R}$ є лінійно незалежними. Від супротивного припустимо, що існує підмножина $\boldsymbol{E}'\subset \boldsymbol{E}$ така, що відповідні клітинам $\boldsymbol{E}'$ комунікаціїї утворюють цикл

$$\overline{\boldsymbol{A}_{i_1}\boldsymbol{B}_{j_1}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_2}\boldsymbol{B}_{j_1}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_2}\boldsymbol{B}_{j_2}},\ldots,\overline{\boldsymbol{A}_{i_s}\boldsymbol{B}_{j_{s-1}}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_s}\boldsymbol{B}_{j_s}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_1}\boldsymbol{B}_{j_s}},$$

тобто

$$\boldsymbol{E}'=\{(i_1,j_1),(i_2,j_1),(i_2,j_2),\ldots,(i_s,j_{s-1}),(i_s,j_s),(i_1,j_s)\}.$$

Розглянемо лінійну комбінацію векторів системи $\boldsymbol{R}'=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}'}$ такого вигляду:

$$\boldsymbol{P}_{i_1j_1}-\boldsymbol{P}_{i_2j_1}+\boldsymbol{P}_{i_2j_2}-\boldsymbol{P}_{i_3j_2}+\ldots-\boldsymbol{P}_{i_sj_{s-1}}+\boldsymbol{P}_{i_sj_s}-\boldsymbol{P}_{i_1j_s}=\boldsymbol{P}. \qquad (2.16)$$

Кожен номер $i_k \ (k=\overline{1,s})$ зустрічається у лівій частині (2.16) тільки у двох векторів системи $\boldsymbol{R}'=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}'}$, при цьому один раз вектор має знак “+”, а другий раз – знак “–”, тому координата вектора $\boldsymbol{P}$ з номером $i_k \ (k=\overline{1,s})$ у правій частині (2.16) буде дорівнювати нулю як різниця двох одиниць. Аналогічно, кожен номер $j_l \ (l=\overline{1,s})$ зустрічається у лівій частині (2.16) також тільки у двох векторів системи $\boldsymbol{R}'=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}'}$, що мають різні знаки, тому координата вектора $\boldsymbol{P}$ з номером $m+j_l \ (l=\overline{1,s})$ також дорівнює нулеві. Всі інші координати вектора $\boldsymbol{P}$ у правій частині (2.16) дорівнюють нулю, оскільки вони дорівнюють нулю у всіх векторів у лівій частині (2.16). Тому $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}$, тобто вектори системи $\boldsymbol{R}'=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}'}$ є лінійно залежними. Оскільки $\boldsymbol{R}'\subset \boldsymbol{R}$, то лінійно залежною буде і система $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}}$, що суперечить умовам необхідності. Отже, припущення було хибним і комунікації, що відповідають векторам системи $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}}$, циклів не утворюють.

Достатність. Нехай із комунікацій, що відповідають векторам системи $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}}$, неможливо утворити цикл. Покажемо, що $\boldsymbol{R}$ – лінійно незалежна система векторів.

Від супротивного, припустимо, що вектори системи $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}}$ лінійно залежні. Це означає, що існують числа $a_{ij},\ (i,j)\in \boldsymbol{E}$, серед яких є відмінні від нуля і такі, що

$$\sum_{(i,j)\in \boldsymbol{E}} a_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{0} \tag{2.17}$$

Нехай для визначеності $a_{i_1 j_1}\neq 0,((i_1,j_1)\in \boldsymbol{E})$. Тоді

$$-a_{i_1 j_1}\boldsymbol{P}_{i_1 j_1}=\sum_{(i,j)\in \boldsymbol{E}_1} a_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}\ , \tag{2.18}$$

де $\boldsymbol{E_1}=\boldsymbol{E}\setminus\{(i_1,j_1)\}$. Координата з номером i_1 вектора $a_{i_1 j_1}\boldsymbol{P}_{i_1 j_1}$ у лівій частині (2.18) відмінна від нуля. Тоді і права частина (2.18) має відмінну від нуля координату з номером i_1. Це означає, що серед векторів $\boldsymbol{P}_{ij},(i,j)\in \boldsymbol{E_1}$ знайдеться принаймні один вектор, для визначенності нехай це буде $\boldsymbol{P}_{i_1 j_2}$, з відмінним від нуля коефіцієнтом $a_{i_1 j_2}\neq 0$. Перенесемо цей вектор у ліву частину рівності (2.18). Отримаємо

$$-a_{i_1 j_1}\boldsymbol{P}_{i_1 j_1}-a_{i_1 j_2}\boldsymbol{P}_{i_1 j_2}=\sum_{(i,j)\in \boldsymbol{E}_2} a_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}\ , \tag{2.19}$$

де $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}_1\setminus\{(i_1,j_2)\}$. Тепер знову, оскільки $j_2\neq j_1$, координата з номером $m+j_2$ лівої частини векторної рівності (2.19) буде відмінною від нуля (вона дорівнює $-a_{i_1 j_2}\neq 0$). Тому серед векторів правої частини (2.19) обов'язково знайдеться принаймні один вектор $\boldsymbol{P}_{i_2 j_2}$, для якого коефіцієнт $a_{i_2 j_2}\neq 0$. Перенісши його у ліву частину (2.19) матимемо

$$-a_{i_1 j_1}\boldsymbol{P}_{i_1 j_1}-a_{i_1 j_2}\boldsymbol{P}_{i_1 j_2}-a_{i_2 j_2}\boldsymbol{P}_{i_2 j_2}=\sum_{(i,j)\in \boldsymbol{E}_3} a_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}\ , \tag{2.20}$$

де $\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_2\setminus\{(i_2,j_2)\}$.

Процес переносу векторів у ліву частину рівності (2.20) може бути продовжений і далі.

Припустимо, що вже здійснено $2s-1$ кроків (для визначенності число кроків переносу вибране непарним). Тоді має місце співвідношення

$$-\sum_{k=1}^{s} a_{i_k j_k} \boldsymbol{P}_{i_k j_k} - \sum_{k=1}^{s-1} a_{i_k j_{k+1}} \boldsymbol{P}_{i_k j_{k+1}} = \sum_{(i,j)\in \boldsymbol{E}_{2s-1}} a_{ij} \boldsymbol{P}_{ij} \;, \qquad (2.21)$$

де $\boldsymbol{E}_{2s-1} = \boldsymbol{E}_{2s-2} \setminus \{(i_s, j_s)\}$.

Далі можливі два випадки (якщо останнім перенесеним є вектор $\boldsymbol{P}_{i_s j_s}$ з індексом j_s): або $i_s = i_t$, або $i_s \neq i_t$, де $t \in \{1,2,...,s-1\}$.

Якщо $i_s = i_t, t \in \{1,2,...,s-1\}$, то процес переносу закінчується, при цьому із комунікацій, що відповідають векторам

$$\boldsymbol{P}_{i_t j_{t+1}}, \boldsymbol{P}_{i_{t+1} j_{t+1}}, \boldsymbol{P}_{i_{t+1} j_{t+2}}, ..., \boldsymbol{P}_{i_{s-1} j_s}, \boldsymbol{P}_{i_t j_s} \; (i_s = i_t \Rightarrow \boldsymbol{P}_{i_s j_s} = \boldsymbol{P}_{i_t j_s})$$

лівої частини рівності (2.21), можна утворити цикл

$$\overline{\boldsymbol{A}_{i_t} \boldsymbol{B}_{j_{t+1}}}, \overline{\boldsymbol{A}_{i_{t+1}} \boldsymbol{B}_{j_{t+1}}}, \overline{\boldsymbol{A}_{i_{t+1}} \boldsymbol{B}_{j_{t+2}}}, ..., \overline{\boldsymbol{A}_{i_{s-1}} \boldsymbol{B}_{j_s}}, \overline{\boldsymbol{A}_{i_t} \boldsymbol{B}_{j_s}} \;\; (i_s = i_t) \; .$$

Якщо ж $i_s \neq i_t, t \in \{1,2,...,s-1\}$, то серед векторів $\boldsymbol{P}_{ij}, (i,j) \in \boldsymbol{E}_{2s-1}$ у правій частині (2.20) обов'язково знайдеться вектор $\boldsymbol{P}_{i_s j_{s+1}}$ з ненульовим коефіцієнтом, який можна перенести в ліву частину рівності і т.д.

Однак процес переносу не може продовжуватись нескінченно, оскільки довільний вектор $\boldsymbol{P}_{ij}$ має в точності $m+n$ координат, і кожний раз справа наліво переноситься вектор, який відмінний від векторів лівої частини рівності (2.20) тим, що має ненульову координату, яка у всіх векторів лівої частини рівна нулю. Тому через скінченне число кроків, число яких не перевищує $m+n$ необхідно трапиться випадок, коли буде перенесений вектор $\boldsymbol{P}_{ij}$, ненульові координати якого будуть порізно збігатися з однією із ненульових координат двох різних векторів лівої частини (2.20), що приводить до появи циклу серед комунікацій, відповідних векторам лівої частини (2.20).

Отже, система комунікацій, відповідних векторам системи $\boldsymbol{R}$, за припущення про лінійну залежність цих векторів, завжди містить цикл, що суперечить умовам достатності.
Теорема доведена.

На основі цієї теореми можна дати ще одне еквівалентне означення опорного плану Т-задачі.
Означення. *План Т-задачі називається опорним, якщо із його основних комунікацій неможливо утворити цикл*.

Розгляд обгрунтування методів розв'язування Т-задачі приводить до необхідності відшукання розкладів вибраних векторів-комунікацій за лінійно незалежними системами, утвореними з векторів-комунікацій.

Теорема (про розклад векторів-комунікацій).

Нехай $\boldsymbol{R}=\{\boldsymbol{P}_{ij}\}_{(i,j)\in \boldsymbol{E}}$ *– деяка лінійно незалежна система векторів-комунікацій,* $\boldsymbol{E}$ *– множина відповідних їм клітин транспортної таблиці.*

Вектор $\boldsymbol{P}_{kl}$ *є лінійною комбінацією векторів системи* $\boldsymbol{R}$ *тоді і тільки тоді, коли із комунікацій, відповідних векторам системи* $\boldsymbol{R}$*, можна утворити ланцюг , що сполучає пункти* $\boldsymbol{A}_k$ *і* $\boldsymbol{B}_l$ *.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\boldsymbol{P}_{kl}$ може бути поданий у вигляді лінійної комбінації векторів системи $\boldsymbol{R}$. Тоді, приєднавши $\boldsymbol{P}_{kl}$ до системи $\boldsymbol{R}$, отримаємо лінійно залежну систему векторів $\boldsymbol{R}\cup\{\boldsymbol{P}_{kl}\}$. Як випливає з доведення критерія лінійної незалежності векторів комунікацій (достатність), це призведе до появи циклу у множині комунікацій, що відповідають векторам системи $\boldsymbol{R}\cup\{\boldsymbol{P}_{kl}\}$. Цей цикл повинен містити в собі комунікацію $\overline{\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_l}$ обов'язково, оскільки в іншому випадку він складався б тільки з комунікацій, які відповідають векторам системи $\boldsymbol{R}$, що суперечить лінійній незалежності векторів системи $\boldsymbol{R}$ за тим же критерієм лінійної незалежності векторів комунікацій. Тоді всі комунікації цього циклу, за вийнятком $\overline{\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_l}$, і утворюють шуканий ланцюг.

Достатність. Нехай існує ланцюг із комунікацій, відповідних векторам системи $\boldsymbol{R}$, який сполучає пункти $\boldsymbol{A}_k$ і $\boldsymbol{B}_l$**.** Для визначеності нехай він має вигляд

$$\overline{\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{B}_{j_1}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_1}\boldsymbol{B}_{j_1}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_1}\boldsymbol{B}_{j_2}},\ldots,\overline{\boldsymbol{A}_{i_{s-1}}\boldsymbol{B}_{j_s}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_s}\boldsymbol{B}_{j_s}},\overline{\boldsymbol{A}_{i_s}\boldsymbol{B}_l}\,. \qquad (2.22)$$

Для векторів, які відповідають комунікаціям ланцюга (2.22), маємо:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}_{kj_1}-\boldsymbol{P}_{i_1j_1}+\boldsymbol{P}_{i_1j_2}=\boldsymbol{P}_{kj_2},\\
&\boldsymbol{P}_{kj_2}-\boldsymbol{P}_{i_2j_2}+\boldsymbol{P}_{i_2j_3}=\boldsymbol{P}_{kj_3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\boldsymbol{P}_{kj_s}-\boldsymbol{P}_{i_sj_s}+\boldsymbol{P}_{i_sj_l}=\boldsymbol{P}_{kl}.
\end{aligned} \qquad (2.23)$$

Додавши почленно рівності (2.23) та скоротивши у отриманому виразі справа і зліва від знака рівності однакові члени, остаточно отримаємо такий розклад вектора $\boldsymbol{P}_{kl}$ за системою $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{P}_{kl}=\boldsymbol{P}_{kj_1}-\boldsymbol{P}_{i_1j_1}+\boldsymbol{P}_{i_1j_2}-\boldsymbol{P}_{i_2j_2}+\ldots+\boldsymbol{P}_{i_{s-1}j_s}-\boldsymbol{P}_{i_sj_s}+\boldsymbol{P}_{i_sj_l}\,. \qquad (2.24)$$

Теорема доведена.

Зважаючи на зв'язок між комунікацією $\overline{A_i B_j}$, відповідним їй вектором P_{ij} та клітиною транспортної таблиці (i, j), результати доведених теорем можна переформулювати у вигляді таких двох практичних правил:

1) для лінійної незалежності системи векторів-комунікацій $R = \{P_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ *необхідно і достатньо, щоб із клітин транспортної таблиці* $(i, j) \in E$ *неможливо було б утворити цикл;*

2) щоб знайти розклад вектора P_{kl} *за системою лінійно незалежних векторів--комунікацій* $R = \{P_{ij}\}_{(i,j)\in E}$, *достатньо приєднати клітину* (k,l), *відповідну вектору* P_{kl}, *до множини клітин транспортної таблиці* E, *знайти цикл на множині клітин* $\{(k,l)\} \cup E$, *відкинути з нього клітину* (k,l) *і записати розклад (2.24), використовуючи отриманий при цьому ланцюг із клітин* $(i, j) \in E$, *відповідний ланцюгу із комунікацій (2.22). Якщо такого циклу не існує, то не існує і розкладу вектора* P_{kl} *по системі* $R = \{P_{ij}\}_{(i,j)\in E}$.

Нагадаємо, що ранг матриці коефіцієнтів при невідомих системи обмежень Т-задачі дорівнює $m + n - 1$. Тому довільний базис системи векторів умов $\{P_{ij}\}_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$ Т-задачі завжди містить $m + n - 1$ вектор. Клітини транспортної таблиці, які відповідають векторам базису, називають базисними. При занесенні опорного плану Т-задачі у транспортну таблицю заповнюють лише базисні клітини. При цьому всі базисні клітини будуть заповнені додатними перевезеннями, якщо опорний план невироджений, і частина з них міститиме базисні нулі, якщо опорний план буде виродженим. Небазисні перевезення (вони за означенням дорівнюють нулю) в транспортну таблицю не заносять взагалі.

Зауважимо, що система базисних клітин довільного опорного плану Т-задачі ациклічна (тобто не містить циклів) внаслідок лінійної незалежності векторів базису. Однак, приєднання до системи базисних клітин довільної клітини транспортної таблиці породжує єдиний цикл внаслідок теореми про єдиність розкладу вектора по базису**.**

Оскільки відшукання розкладу довільного вектора комунікацій по базису відомого опорного плану Т-задачі, а також перевірка опорності деякого її плану перевезень, зводяться до пошуку циклів на підмножині виділених клітин транспортної таблиці, то виникає питання про процедуру такого пошуку.

Розглянемо метод викреслювання, який дозволяє знайти такі цикли, якщо вони існують. Нехай S – підмножина клітин транспортної таблиці, виділених за якоюсь ознакою (наприклад, $\boldsymbol{S}$ утворюють клітини з додатними перевезеннями).

Алгоритм методу викреслювання.

1. Проглядають рядки транспортної таблиці і викреслюють ті з них, які містять не більше однієї виділеної клітини. Викреслені рядки транспортної таблиці з подальшого розгляду виключаються.

2. Проглядають стовпчики транспортної таблиці і викреслюють ті з них, які містять не більше однієї виділеної клітини. Викреслені стовпчики транспортної таблиці з подальшого розгляду виключаються.

3. Дії пунктів 1 і 2 здійснюють доти, поки не трапиться один з двох випадків: а) всі клітини транспортної таблиці викреслені; б) процес викреслювання продовжувати неможливо, оскільки в невикреслених рядках і стовпчиках транспортної таблиці є принаймні по дві виділені клітини із $\boldsymbol{S}$.

Якщо трапився випадок а), то із клітин множини $\boldsymbol{S}$ неможливо утворити цикл. Дійсно, припустимо від супротивного, що такий цикл існує. Тоді кожна його викреслена клітина за правилами методу викреслювання не може бути викресленою раніше, ніж сусідня їй клітина циклу по рядку або по стовпчику. Тоді клітина циклу, яка викреслена першою, взагалі не може бути викресленою, що суперечить умові випадку. Отже, припущення невірне, і $\boldsymbol{S}-$ ациклічна множина.

Зокрема, якщо $\boldsymbol{S}$ утворюють клітини з додатними перевезеннями деякого плану перевезень Т-задачі, то такий план є опорним.

Якщо трапився випадок б), то підмножина невикреслених клітин із $\boldsymbol{S}$ містить цикли. Дійсно, припустимо супротивне, тобто, що невикреслені клітини із $\boldsymbol{S}$ циклів не утворюють. Тоді підмножина невикреслених клітин із $\boldsymbol{S}$ буде складатися з скінченно елементних ланцюгів. Але за правилами методу викреслювання кінцеві клітини ланцюгів повинні бути викреслені, оскільки вони єдині або в рядку, або у стовпчику. Отже, процес викреслювання повинен продовжуватися, що суперечить умові випадку.

Зокрема, якщо за $\boldsymbol{S}$ прийняти сукупність всіх базисних клітин деякого опорного плану Т-задачі і однієї небазисної (i_0, j_0), то $\boldsymbol{S}$ буде містити єдиний цикл, який завжди можна знайти методом викреслювання, і тим самим завжди можна знайти розклад довільного вектора $\boldsymbol{P}_{i_0 j_0}$ за базисом відомого опорного плану.

2.3.1. Приклади.

Приклад 1. З’ясувати, чи є цикли на множині ***S*** виділених клітин транспортної таблиці.
Розв’язування. Нехай елементами множини ***S*** є відтоновані сірим клітини таблиці. Для з’ясування ациклічності множини ***S*** застосуємо метод викреслювання, числа знизу та збоку таблиці вказують послідовність закреслювань.

	(1,2)			(1,5)
(2,1)	(2,2)		(2,4)	
	(3,2)	(3,3)		
(4,1)			(4,4)	
	(5,2)		(5,4)	

	(1,2)			(1,5)
(2,1)	(2,2)		(2,4)	
	(3,2)	(3,3)		
(4,1)			(4,4)	
	(5,2)		(5,4)	
		1		

	(1,2)			(1,5)
(2,1)	(2,2)		(2,4)	
	(3,2)	(3,3)		
(4,1)			(4,4)	
	(5,2)		(5,4)	
		1		2

	(1,2)			(1,5)	3
(2,1)	(2,2)		(2,4)		
	(3,2)	(3,3)			
(4,1)			(4,4)		
	(5,2)		(5,4)		
		1		2	

	(1,2)			(1,5)	3
(2,1)	(2,2)		(2,4)		
	(3,2)	(3,3)			4
(4,1)			(4,4)		
	(5,2)		(5,4)		
		1		2	

Множина невикреслених тонованих клітин містить цикли. Наприклад, цикл, який ми позначимо як C_1 , утворюють клітини (2,1), (2,4), (4,4), (4,1); інший цикл C_2 утворюють клітини (2,2), (2,4), (5,4), (5,2).

Приклад 2. З'ясувати, чи буде лінійно незалежною система векторів-комунікацій, яка відповідає позначеним клітинам транспортної таблиці.

(1,1)				
(2,1)	(2,2)	(2,3)		
		(3,3)		
		(4,3)	(4,4)	
			(5,4)	(5,5)

Розв'язування. За критерієм лінійної незалежності векторів-комунікацій вказана система векторів-комунікацій буде лінійно незалежною тоді і тільки тоді, коли множина позначених клітин не міститиме циклів. Ациклічність цієї множини перевіряємо методом викреслювання (як і у попередньому прикладі числа знизу та збоку таблиці вказують послідовність закреслювань).

(1,1)					1
(2,1)	(2,2)	(2,3)			
		(3,3)			2
		(4,3)	(4,4)		
			(5,4)	(5,5)	

(1,1)					1
(2,1)	(2,2)	(2,3)			
		(3,3)			2
		(4,3)	(4,4)		
			(5,4)	(5,5)	
3	4			5	

(1,1)					1
(2,1)	(2,2)	(2,3)			6
		(3,3)			2
		(4,3)	(4,4)		
			(5,4)	(5,5)	7
3	4			5	

(1,1)					1
(2,1)	(2,2)	(2,3)			6
		(3,3)			2
		(4,3)	(4,4)		
			(5,4)	(5,5)	7
3	4	8	9	5	

Оскільки всі позначені клітини викреслені, то їх множина циклів не містить, а тому відповідні позначеним клітинам вектори-комунікацій утворюють лінійно незалежну систему. Більше того, ця система векторів-комунікацій утворює базис $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{P}_{11},\boldsymbol{P}_{21},\boldsymbol{P}_{22},\boldsymbol{P}_{23},\boldsymbol{P}_{33},\boldsymbol{P}_{43},\boldsymbol{P}_{44},\boldsymbol{P}_{54},\boldsymbol{P}_{55}\}$ всієї системи векторів-комунікацій $\boldsymbol{P}_{ij}\ (i=\overline{1,5};\ j=\overline{1,5})$, оскільки їх число рівне $m+n-1=5+5-1=9$.

Приклад 3. Знайти розклад вектора $\boldsymbol{P}_{15}$ за базисом $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{P}_{11},\boldsymbol{P}_{21},\boldsymbol{P}_{22},\boldsymbol{P}_{23},\boldsymbol{P}_{33},\boldsymbol{P}_{43},\boldsymbol{P}_{44},\boldsymbol{P}_{54},\boldsymbol{P}_{55}\}$ системи векторів-комунікацій, знайденому у **прикладі 2**.

Розв’язування. Позначаємо в умовах **прикладу 2** клітину (1,5). Отримаємо таблицю

(1,1)				(1,5)
(2,1)	(2,2)	(2,3)		
		(3,3)		
		(4,3)	(4,4)	
			(5,4)	(5,5)

Приєднання до множини базисних клітин небазисної клітини (1,5) породжує єдиний цикл $\boldsymbol{C}$, який знаходимо методом викреслювання.

(1,1)				(1,5)	
(2,1)	(2,2)	(2,3)			
		(3,3)			1
		(4,3)	(4,4)		
			(5,4)	(5,5)	
	2				

Оскільки $\boldsymbol{C} = \{(1,5),(1,1),(2,1),(2,3),(4,3),(4,4),(5,4),(5,5)\}$, то для розкладу $\boldsymbol{P}_{15}$ за базисом $\boldsymbol{B}$ маємо $\boldsymbol{P}_{15} = \boldsymbol{P}_{11} - \boldsymbol{P}_{21} + \boldsymbol{P}_{23} - \boldsymbol{P}_{43} + \boldsymbol{P}_{44} - \boldsymbol{P}_{54} + \boldsymbol{P}_{55}$.

2.4. Методи відшукання початкових опорних планів Т-задачі.

Всі методи побудови початкових опорних планів відрізняються лише порядком заповнення базисних клітин. Спосіб їх заповнення залишається одним і тим же, а саме, порівнюється залишок запасу із залишком потреби для вибраної клітини і мінімальна з цих двох величин заноситься у клітину. Після цього, якщо мінімум досягається на рядку, то викреслюють з таблиці рядок, якщо мінімум досягається на стовпці, то викреслюють стовпець; якщо – і на рядку і на стовпчику одночасно, то викреслюють і рядок і стовпчик, але при цьому заносять базисне нульове перевезення в одну із невикреслених клітин рядка або стовчика, що повинні бути викреслені. Такий спосіб гарантує заповнення в точності $m+n-1$ клітини, при цьому їх множина буде ациклічною, оскільки вона будується з використанням методу викреслювання. Отже, побудований таким способом план перевезень буде допустимим і ациклічним, тобто опорним.

2.4.1. Метод північно-західного кута.

Метод має таку назву, оскільки на кожному його кроці заповнюється верхня ліва (північно-західна) невикреслена клітина транспортної таблиці. На першому кроці заповнюється клітина (1,1). Покладають $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Можливі три випадки:

1) $a_1 < b_1$, тоді $x_{11} = a_1$, і залишки запасу у пункті $\boldsymbol{A}_1$ і потреби у пункті $\boldsymbol{B}_1$ будуть відповідно рівні $a_1^{(1)} = a_1 - x_{11} = 0$, $b_1^{(1)} = b_1 - x_{11} > 0$. Оскільки об’єм запасу пункта $\boldsymbol{A}_1$ вичерпаний, то перший рядок транспортної таблиці викреслюють;

2) $a_1 > b_1$, тоді $x_{11} = b_1$, $a_1^{(1)} = a_1 - x_{11} > 0$, $b_1^{(1)} = b_1 - x_{11} = 0$ і, оскільки, об’єм потреби у пункті $\boldsymbol{B}_1$ вичерпаний, то викреслюють перший стовпчик транспортної таблиці;

3) $a_1 = b_1$, тоді $x_{11} = a_1 = b_1$, $a_1^{(1)} = a_1 - x_{11} = 0$, $b_1^{(1)} = b_1 - x_{11} = 0$, і викреслюванню підлягають і перший рядок, і перший стовпчик транспортної таблиці. Щоб зберегти відповідність між заповненням клітини і викреслюванням, у цьому випадку в одну з вільних клітин першого рядка або стовпчика заноситься базисний нуль.

Після цього переходять до наступного кроку методу, знову вибираючи для заповнення невикреслену північно-західну клітину. Процес заповнення клітин і викреслювань рядків або стовчиків продовжують доти, поки не будуть викреслені всі клітини транспортної таблиці. Таких викреслювань, як і заповнених клітин, буде в точності $m + n - 1$. За побудовою план буде допустимим і ациклічним, тобто опорним.

Недоліком методу північно-західного кута є те, що він не враховує специфіку матриці транспортних витрат $\boldsymbol{C}$.

2.4.1.1. Приклади.

Приклад 1. Знайти початковий опорний план даної транспортної задачі методом північно-західного кута (див. Таблицю 1).

Розв'язування. Перевіряємо умову балансу: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 12 + 5 + 18 = 35$,

$\sum_{j=1}^{4} b_j = 10 + 11 + 8 + 6 = 35$. Задача збалансована.

Таблиця 1

a_i \ b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3	5	8	
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	
$b_j - x_{ij}$					

1крок. Обчислюємо

$$x_{11} = \min(12,10) = 10,\ a_1 - x_{11} = 12 - 10 = 2,\ b_1 - x_{11} = 10 - 10 = 0,$$

заносимо дані у таблицю 2 і викреслюємо перший стовпчик.

2 крок. Обчислюємо

$$x_{12} = \min(2,11) = 2,\ a_1^{(1)} - x_{12} = 2 - 2 = 0,\ b_2 - x_{12} = 11 - 2 = 9,$$

заносимо дані у таблицю 3 і викреслюємо перший рядок

Таблиця 2

a_i \ b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	^{10} 10	^{3}	^{5}	^{8}	2
5	^{5}	^{7}	^{6}	^{4}	
18	^{1}	^{4}	^{3}	^{7}	
$b_j - x_{ij}$	0				

Таблиця 3

a_i \ b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	^{10} 10	^{3} 2	^{5}	^{8}	0
5	^{5}	^{7}	^{6}	^{4}	
18	^{1}	^{4}	^{3}	^{7}	
$b_j - x_{ij}$	0	9			

3 крок. Обчислюємо

$$x_{22} = \min(5,9) = 5\ ,\ \ a_2 - x_{22} = 5 - 5 = 0\ ,\ \ b_2^{(1)} - x_{22} = 9 - 5 = 4\ ,$$

Таблиця 4

a_i \ b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	^{10} 10	^{3} 2	^{5}	^{8}	0
5	^{5}	^{7} 5	^{6}	^{4}	0
18	^{1}	^{4}	^{3}	^{7}	
$b_j - x_{ij}$	0	4			

заносимо дані у таблицю 4 і викреслюємо другий рядок.

4 крок. Обчислюємо

$$x_{32} = \min(18,4) = 4\ ,\ a_3 - x_{32} = 18 - 4 = 14\ ,\ b_2^{(2)} - x_{32} = 4 - 4 = 0\ ,$$

заносимо дані у таблицю 5 і викреслюємо другий стовпчик.

Таблиця 5

b_j / a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 / 10	3 / 2	5	8	0
5	5	7 / 5	6	4	0
18	1	4 / 4	3	7	14
$b_j - x_{ij}$	0	0			

5 крок. Обчислюємо

$$x_{33} = \min(14,8) = 8\ ,\ a_3^{(1)} - x_{33} = 14 - 8 = 6\ ,\ b_3 - x_{33} = 8 - 8 = 0\ ,$$

заносимо дані у таблицю 6 і викреслюємо третій стовпчик.

Таблиця 6

b_j / a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 / 10	3 / 2	5	8	0
5	5	7 / 5	6	4	0
18	1	4 / 4	3 / 8	7	6
$b_j - x_{ij}$	0	0	0		

6 крок. Обчислюємо

$$x_{34} = \min(6,6) = 6\ ,\ a_3^{(2)} - x_{34} = 6 - 6 = 0\ ,\ b_4 - x_{34} = 6 - 6 = 0\ ,$$

заносимо дані у таблицю 7 і викреслюємо або третій рядок, або четвертий стовпчик.

Таблиця 7

a_i \ b_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 10	3 2	5	8	0
5	5	7 5	6	4	0
18	1	4 4	3 8	7 6	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	0	

Остаточно маємо такий початковий опорний план

$$\boldsymbol{X}_{МПЗК} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

якому відповідає значення цільової функції задачі

$$L(\boldsymbol{X}_{МПЗК}) = 10 \cdot 10 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 7 \cdot 6 = 223 .$$

2.4.2. Метод мінімального елемента.

Цей метод *відрізняється від методу північно-західного кута тільки порядком заповнення клітин транспортної таблиці. На кожному кроці методу заповнюється невикреслена клітина, якій відповідає найменше значення транспортних витрат* (спосіб заповнення клітин залишається тим самим). Тому слід очікувати, що в більшості випадків метод мінімального елемента дасть більш економічний опорний план у порівнянні з методом північно-західного кута.

2.4.2.2. Приклади.

Приклад 2. Знайти початковий опорний план транспортної задачі прикладу 1 (див. 2.4.1.1) методом мінімального елемента. Розв'язки порівняти за значеннями цільової функції.

Розв'язування. **1 крок.** Вибираємо клітину (3,1) з найменшим значенням транспортних витрат $c_{31} = 1$. Обчислюємо

$$x_{31} = \min(18,10) = 10\,,\ a_3^{(1)} - x_{31} = 18 - 10 = 8\,,\ b_1 - x_{31} = 10 - 10 = 0\,,$$

заносимо дані у таблицю 8 і викреслюємо перший стовпчик.

Таблиця 8

b_j / a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3	5	8	
5	5	7	6	4	
18	1 10	4	3	7	8
$b_j - x_{ij}$	0				

2 крок. Серед невикреслених клітин дві клітини (1,2) і (3,3) мають найменші транспортні витрати $c_{12} = c_{33} = 3$. Спочатку заповнимо клітину з меншим номером рядка (1,2). Обчислюємо

$$x_{12} = \min(12,11) = 11 \ , \ a_3^{(1)} - x_{12} = 12 - 11 = 1 \ , \ b_1 - x_{13} = 11 - 11 = 0 \ ,$$

заносимо дані у таблицю 9 і викреслюємо другий стовпчик.

Таблиця 9

b_j / a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3 11	5	8	1
5	5	7	6	4	
18	1 10	4	3	7	8
$b_j - x_{ij}$	0	0			

3 крок. Заповнюємо клітину (3,3). Обчислюємо

$$x_{33} = \min(8,8) = 8 \ , \ a_3^{(2)} - x_{33} = 8 - 8 = 0 \ , \ b_3 - x_{33} = 8 - 8 = 0 \ ,$$

заносимо дані у таблицю 10 і викреслюємо третій рядок і третій стовпчик. При цьому заносимо базисний нуль в одну з клітин (1,3), (2,3), (3,4), наприклад, у клітину (1,3): $x_{13} = 0$.

Таблиця 10

b_j / a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3 11	5 0	8	1
5	5	7	6	4	
18	1 10	4	3 8	7	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0		

4 крок. Заповнюємо клітину (2,4). Обчислюємо

$$x_{24} = \min(5,6) = 5\ ,\ \ a_2 - x_{24} = 5 - 5 = 0\ ,\ \ b_4 - x_{24} = 6 - 5 = 1\ ,$$

заносимо дані у таблицю 11 і викреслюємо другий рядок.

Таблиця 11

b_j / a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3 11	5 0	8	1
5	5	7	6	4 5	0
18	1 10	4	3 8	7	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	1	

Таблиця 12

b_j / a_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3 11	5 0	8 1	0
5	5	7	6	4 5	0
18	1 10	4	3 8	7	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	0	

5 крок. Обчислюємо

$$x_{14} = \min(1,1) = 1\,,\ a_1^{(2)} - x_{14} = 1 - 1 = 0\,,\ b_4^2 - x_{14} = 1 - 1 = 0\,,$$

заносимо дані у таблицю 12 і викреслюємо або перший рядок, або четвертий стовпчик.

Маємо такий вироджений початковий опорний план

$$\boldsymbol{X}_{MME} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

на якому цільова функція задачі набуває значення

$$L(\boldsymbol{X}_{MME}) = 3\cdot 11 + 8\cdot 1 + 4\cdot 5 + 1\cdot 10 + 3\cdot 8 = 95\,.$$

Оскільки $L(\boldsymbol{X_{MME}}) < L(\boldsymbol{X_{МПЗК}})$, то метод мінімального елемента дав більш економічний початковий опорний план.

Нарешті зауважимо, що існують і інші методи побудови початкових опорних планів, наприклад, метод подвійної переваги та метод апроксимації Фогеля. Однак вони значно складніші від розглянутих, а результат дають близький до результату методу мінімального елемента.

2.5. Двоїста задача до Т-задачі.

Побудуємо двоїсту задачу до збалансованої транспортної задачі. З цією метою знову розглянемо її обмеження у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m, \\ x_{11} + x_{21} \ \ldots\ + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} \ \ldots\ + x_{m2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{1n} + x_{2n} \ \ldots\ + x_{mn} = b_n \end{cases} \qquad (2.25)$$

Зауважимо, що перші m рівнянь цієї системи відносяться до рядків транспортної таблиці, наступні n – до її стовпчиків. Поставимо у відповідність кожному рівнянню системи (2.25) двоїсту змінну. Двоїсті змінні вільні за знаком, оскільки вони відповідають рівнянням-обмеженням (2.25) прямої задачі. При цьому двоїсту змінну, яка відповідає рядку транспортної таблиці з номером $i\,(i = \overline{1,m})$, позначимо як u_i і назвемо потенціалом цього рядка, а двоїсту змінну, яка відповідає стовпчику транспортної таблиці з номером $j\,(j=\overline{1,n})$ позначимо як v_j і назвемо потенціалом цього стовпчика. Вектор потенціалів позначимо через $\boldsymbol{Y}=(u_1,u_2,...,u_m,v_1,v_2,...,v_n)^T$.

Т-задача має стандартну форму

$$L(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{P}_0\,, \tag{2.26}$$

$$x_{ij}\ge 0\ (i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})\,,$$

де $\boldsymbol{P}_{ij}=\underbrace{(0,0,...,0,\underset{i}{1},0,...,0,\underset{m+j}{1},0,...,0)}_{m+n}{}^T$ – вектор-комунікацій, а

$\boldsymbol{P}_0=(a_1,a_2,...,a_m,b_1,b_2,...,b_n)^T$ – вектор запасів-потреб. Тому двоїста для неї запишеться так

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}_0^T\boldsymbol{Y}\to\max,\\&\boldsymbol{P}_{ij}^T\boldsymbol{Y}\le \boldsymbol{c_{ij}},\end{aligned} \tag{2.27}$$

або у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\to\max,\\&u_i+v_j\le c_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.28}$$

Оскільки обмеження на знак двоїстих змінних відсутні, то вектор потенціалів завжди можна вибрати у вигляді $\boldsymbol{Y}=(-u_1,-u_2,...,-u_m,v_1,v_2,...,v_n)^T$. Тоді двоїста задача до Т-задачі матиме вигляд

$$\begin{aligned}&-\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j\to\max,\\&v_j-u_i\le c_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Надалі ми будемо використовувати саме таку форму запису двоїстої задачі до збалансованої транспортної задачі.

2.6. Метод потенціалів розв’язування Т-задачі.

Метод потенціалів базується на застосуванні модифікованого симплекс-методу до Т-задачі як задачі лінійного програмування.

2.6.1. Обгрунтування методу потенціалів.

Згідно з модифікованим симплекс-методом на кожній ітерації обчислюють вектор симплекс-множників

$$\boldsymbol{Y}^T = \boldsymbol{c}_б^T \boldsymbol{B}^{-1}, \tag{2.30}$$

що зручно робити саме так, оскільки відома обернена до поточної базисної матриця $\boldsymbol{B}^{-1}$. Т-задача має стандартну форму і для неї доцільніше використовувати для обчислення вектора $\boldsymbol{Y}$ базисну матрицю $\boldsymbol{B}$, яку завжди можна легко знайти за відомим опорним планом. Тому помножимо (2.30) справа на матрицю $\boldsymbol{B}$, транспонуємо обидві частини отриманої рівності $\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}_б^T$ і отримаємо лінійну систему, розв'язком якої є вектор $\boldsymbol{Y}$,

$$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{c}_б. \tag{2.31}$$

У випадку Т-задачі матриця $\boldsymbol{B}$ складається із векторів $\boldsymbol{P}_{ij}$ базису відомого її опорного плану, а вектор $\boldsymbol{Y}$ є вектором потенціалів.

Отже, нехай $\boldsymbol{X}$ – відомий опорний план Т-задачі, $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}} = \left[\boldsymbol{P}_{i_1j_1}, \boldsymbol{P}_{i_2j_2}, ..., \boldsymbol{P}_{i_{m+n-1}j_{m+n-1}}\right]$ – відповідна йому базисна матриця. Тоді систему (2.31) можна записати так

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_{i_1j_1}^T\boldsymbol{Y} = c_{i_1j_1}, \\ \boldsymbol{P}_{i_2j_2}^T\boldsymbol{Y} = c_{i_2j_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{P}_{i_{m+n-1}j_{m+n-1}}^T\boldsymbol{Y} = c_{i_{m+n-1}j_{m+n-1}}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Оскільки $\boldsymbol{P}_{ij} = (\underbrace{0,0,...,0,\underset{i}{1},0,...,0,\underset{m+j}{1},0,...,0}_{m+n})^T$ і $\boldsymbol{Y} = (-u_1, -u_2, ..., -u_m, v_1, v_2, ..., v_n)^T$, то система (2.32) набуває вигляду

$$\begin{cases} v_{j_1} - u_{i_1} = c_{i_1j_1}, \\ v_{j_2} - u_{i_2} = c_{i_2j_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{j_{m+n-1}} - u_{i_{m+n-1}} = c_{i_{m+n-1}j_{m+n-1}}. \end{cases} \tag{2.33}$$

Система (2.33) має $m+n$ невідомих і $m+n-1$ рівняння. Матриця $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{X}}$ її коефіцієнтів при невідомих неособлива як базисна, тому, прийнявши за довільну сталу одну із невідомих, завжди можна знайти загальний розв'язок цієї системи з точністю до сталої. Однак у цьому немає необхідності, оскільки можна взяти довільний розв'язок системи (2.33). А тому вибирають найпростіший її частинний розв'язок, який завжди можна отримати, поклавши значення довільної сталої у загальному розв'язку рівним нулю. Отже, поклавши один з потенціалів, несуттєво який $u_i\ (i \in \{1,2,...,m\})$ чи $v_j\ (j \in \{1,2,...,n\})$, рівним нулю у (2.33), отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з неособливою матрицею, яка має $m+n-1$ рівнянь і стільки ж невідомих, і яка завжди має єдиний розв'язок. Зауважимо, що ця система досить просто розв'язується послідовним або рекурентним способом, а саме, поклавши один з потенціалів рівним нулю у (2.33), ми отримаємо одне або кілька рівнянь, які мають тільки по одному невідомому потенціалу. Розв'язавши ці рівняння відносно невідомих потенціалів і підставивши їх значення в інші рівняння, які їх містять, ми знову отримаємо рівняння, які мають тільки по одному невідомому потенціалу. Знову розв'язуємо ці рівняння відносно невідомих потенціалів і підставляємо їх значення в інші рівняння і т.д. Оскільки система має єдиний розв'язок, то ця процедура розв'язування обов'язково зупиниться, коли будуть обчислені всі потенціали.

Після розв'язування системи (2.33), тобто обчислення вектора потенціалів $\boldsymbol{Y}$, який відповідає опорному плану $\boldsymbol{X}$, за алгоритмом модифікованого симплекс-методу неважко обчислити оцінки Δ_{ij} небазисних векторів $\boldsymbol{P_{ij}}$ (Т-задача є задачею мінімізації):

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - \boldsymbol{Y^T P_{ij}} = c_{ij} - v_j + u_i \ .$$

Оцінки базисних векторів $\boldsymbol{P_{ij}}$ рівні нулю:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i = 0 \ , \tag{2.34}$$

тобто (або в силу системи (2.33)) $v_j - u_i = c_{ij}$ ((i, j) – базисна клітина транспортної таблиці). За ознакою оптимальності симплекс-методу опорний план Т-задачі є оптимальним, якщо оцінки Δ_{ij} всіх небазисних векторів $\boldsymbol{P_{ij}}$, а, значить, і відповідних їм клітин транспортної таблиці, будуть невід'ємними:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i \geq 0 \ , \tag{2.35}$$

тобто $v_j - u_i \leq c_{ij}$ ((i, j) – небазисна клітина транспортної таблиці).

Зауважимо, що наведені умови оптимальності збігаються (достатність) з двоїстим критерієм оптимальності лінійного програмування для Т-задачі та критерієм оптимальності Канторовича опорного плану Т-задачі:

для оптимальності опорного плану $\boldsymbol{X}$ *Т-задачі необхідно і достатньо існування чисел-потенціалів* $u_i\ (i = \overline{1,m})$ *і* $v_j\ (j = \overline{1,n})$ *таких, що*

$$v_j - u_i = c_{ij} \ \textit{при} \ x_{ij} > 0 \ ,$$

$$v_j - u_i \le c_{ij} \quad \textit{при} \quad x_{ij} = 0 .$$

Якщо для опорного плану $\boldsymbol{X}$ Т-задачі умови оптимальності не виконуються, тобто існують небазисні клітини (i, j), для яких $\Delta_{ij} < 0$, то як і у модифікованому симплекс-методі переходять до нового опорного плану шляхом заміни одного вектора у його базисі.

Отже, нехай $\boldsymbol{X}$ – опорний план Т-задачі, який не задовольняє ознаку оптимальності (2.34), (2.35); $\boldsymbol{B_X}$ – множина його базисних векторів $\boldsymbol{P_{ij}}$, $\boldsymbol{E_X}$ – множина відповідних їм базисних клітин транспортної таблиці, $\Delta_{i_k j_k} < 0$ – найменша від'ємна оцінка серед оцінок небазисних векторів. Тоді вектор $\boldsymbol{P_{i_k j_k}}$ має бути введеним у базис $\boldsymbol{B_X}$. Приєднаємо клітину (i_k, j_k) до множини $\boldsymbol{E_X}$ та знайдемо єдиний цикл, який породжує таке приєднання. Нехай для визначеності цей цикл має вигляд

$$C = \{(i_k, j_k), (i_k, j_1), (i_1, j_1), (i_1, j_2), ..., (i_{s-1}, j_s), (i_s, j_s), (i_s, j_k)\}.$$

Тоді за теоремою про розклад вектора-комунікацій отримаємо

$$\boldsymbol{P}_{i_k j_k} = \boldsymbol{P}_{i_k j_1} - \boldsymbol{P}_{i_1 j_1} + \boldsymbol{P}_{i_1 j_2} - \boldsymbol{P}_{i_2 j_2} + ... + \boldsymbol{P}_{i_{s-1} j_s} - \boldsymbol{P}_{i_s j_s} + \boldsymbol{P}_{i_s j_k} . \qquad (2.36)$$

Рівність (2.36) перепишемо у вигляді

$$\boldsymbol{P}_{i_k j_k} - \boldsymbol{P}_{i_k j_1} + \boldsymbol{P}_{i_1 j_1} - \boldsymbol{P}_{i_1 j_2} + \boldsymbol{P}_{i_2 j_2} - ... - \boldsymbol{P}_{i_{s-1} j_s} + \boldsymbol{P}_{i_s j_s} - \boldsymbol{P}_{i_s j_k} = 0 \qquad (2.37)$$

та розіб'ємо цикл C у відповідності із знаками коефіцієнтів рівності (2.37) на два так звані півцикли – додатний C^+ і від'ємний C^-:

$$C^+ = \{(i_k, j_k), (i_1, j_1), ..., (i_{s-1}, j_{s-1}), (i_s, j_s)\},$$

$$C^- = \{(i_k, j_1), (i_1, j_2), ..., (i_{s-1}, j_s), (i_s, j_k)\}.$$

Позначимо коефіцієнти розкладу (2.36) вектора $\boldsymbol{P_{i_k j_k}}$ за базисом $\boldsymbol{B_X}$ через α_{ij}. Тоді з (2.36)

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in C^-, \\ -1, & (i, j) \in C^+. \end{cases} \qquad (2.38)$$

Оскільки

$$\sum_{(i,j) \in \boldsymbol{E_X}} x_{\boldsymbol{ij}} \boldsymbol{P_{ij}} = \boldsymbol{P_0} , \qquad (2.39)$$

то коефіцієнтами розкладу вектора $\boldsymbol{P_0}$ за базисом $\boldsymbol{B_X}$ є компоненти опорного плану $\boldsymbol{X}$, який відомий. Тоді за алгоритмом симплекс-методу

$$\theta_0 = \min_{\{(i,j) \in C^-\}} \frac{x_{ij}}{\alpha_{ij}} = \min_{\{(i,j) \in C^-\}} x_{ij} \qquad (2.40)$$

і з базису $\boldsymbol{B_X}$ повинен бути виведений вектор $\boldsymbol{P_{i_l j_l}}$, який відповідає клітині (i_l, j_l), на якій досягається θ_0, тобто

$$(i_l, j_l) = \underset{\{(i,j)\in C^-\}}{\arg\min} \frac{x_{ij}}{\alpha_{ij}} = \underset{\{(i,j)\in C^-\}}{\arg\min}\, x_{ij} \,. \qquad (2.41)$$

Компоненти нового опорного плану $\boldsymbol{X}'$ Т-задачі обчислюються за формулами симплекс-перетворення

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - \theta_0 \alpha_{ij}, \ (i,j) \in C, \\ x_{ij}, \ (i,j) \notin C. \end{cases} \qquad (2.42)$$

При цьому виведення вектора $\boldsymbol{P_{i_l j_l}}$ з базису $\boldsymbol{B_X}$ здійснюється шляхом розриву циклу C на клітині (i_l, j_l), тобто відкидання її з множини $\boldsymbol{E_X}$. Остаточно отримаємо новий ациклічний, тому опорний, план $\boldsymbol{X}'$, для якого

$$\boldsymbol{B_{X'}} = (\boldsymbol{B_X} \setminus \{\boldsymbol{P_{i_l j_l}}\}) \bigcup \{\boldsymbol{P_{i_k j_k}}\} \,,$$

$$\boldsymbol{E}_{X'} = (\boldsymbol{E_X} \setminus \{(i_l, j_l)\}) \bigcup \{(i_k, j_k)\} \,.$$

2.6.2. Алгоритм методу потенціалів для Т-задачі.

1. Одним з відомих методів знайти початковий опорний план $\boldsymbol{X}^{(0)}$. Нехай уже здійснено t кроків методу потенціалів і обчислений опорний план $\boldsymbol{X}^{(t)}$. Перейти до наступного пункту.

2. Обчислити потенціали рядків $u_i^{(t)} \ (i = \overline{1,m})$ та стовпчиків $v_j^{(t)} \ (j = \overline{1,n})$ транспортної таблиці, поклавши один з потенціалів рівним нулю та розв'язавши на множині $\boldsymbol{E}_{X^{(t)}}$ базисних клітин плану $\boldsymbol{X}^{(t)}$ систему

$$v_j^{(t)} - u_i^{(t)} = c_{ij}, \ (i,j) \in \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}^{(t)}} \,.$$

Перейти до наступного пункту.

3. Обчислити оцінки $\Delta_{ij}^{(t)} = c_{ij} - v_j^{(t)} + u_i^{(t)}$ небазисних клітин $(i,j) \notin \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}^{(t)}}$ транспортної таблиці та перевірити умову $\Delta_{ij}^{(t)} \geq 0, \ (i,j) \notin \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{X}^{(t)}}$. Якщо умова виконується, то – кінець обчислень – поточний опорний план $\boldsymbol{X}^{(t)}$ оптимальний. В іншому випадку – перейти до наступного пункту.

4. Визначити клітину (i_k, j_k) з найменшою від'ємною оцінкою $\Delta_{i_k j_k} < 0$, приєднати її до множини $\boldsymbol{E}_{X^{(t)}}$ базисних клітин плану $\boldsymbol{X}^{(t)}$ та

знайти цикл C (наприклад, методом викреслювання), який породжує це приєднання. Перейти до наступного пункту.

5. Розбити цикл C на додатний C^+ та від'ємний C^- півцикли (практично таке розбиття здійснюють за допомогою обходу циклу за годинниковою стрілкою чи проти, це не суттєво, і першою відносячи до додатного півциклу C^+ клітину (i_k, j_k), наступну за нею по циклу – до від'ємного півциклу C^-, наступну за цією клітиною – знову до додатного півциклу C^+, далі – знову до від'ємного C^- і т.д., поки, обійшовши цикл C за вибраним напрямком і чергуючи віднесення клітин циклу C до півциклів, не повернуться до клітини (i_k, j_k)).

Знайти клітину $(i_l, j_l) \in C^-$, яка має найменше перевезення серед клітин від'ємного півциклу C^- (формула (2.41); якщо таких клітин кілька, то вибирають будь-яку з них, але тільки одну) та покласти $\theta_0 = x_{i_l j_l}$ (формула (2.40)). Перейти до наступного пункту.

6. Обчислити новий опорний план $\boldsymbol{X}^{(t+1)}$, додаючи θ_0 до перевезень додатного півциклу C^+ та віднімаючи θ_0 від перевезень від'ємного півциклу C^-. Розірвати цикл C на клітині (i_l, j_l). Перейти до пункту 2.

Зауваження до методу потенціалів. Хоча зациклювання методу потенціалів малоймовірне, все ж завжди при визначенні клітини для введення у множину базисних, а також при визначенні клітини, яка повинна бути виведена із множини базисних, потрібно застосовувати правило, що гарантує однозначність вказаних виборів. Наприклад, якщо кілька клітин мають найменшу від'ємну оцінку, то для введення у множину базисних вибирається клітина з найменшим номером рядка. Якщо у вибраному рядку кілька таких клітин, то серед них вибирають клітину з найменшим номером стовпчика. Те ж саме правило застосовують і до вибору клітини, яка повинна бути виведена з множини базисних.

2.6.3. Приклади.

Приклад. Розв'язати методом потенціалів збалансовану транспортну задачу з відомим опорним планом (див. 2.4.1.1. Приклади, приклад 1). Умови задачі занесені в таблицю 13.

Розв'язування. 1 крок. Покладемо потенціал $u_3 = 0$. Далі обчислюємо потенціали рядків та стовпчиків транспортної таблиці, розв'язуючи на базисних клітинах рівняння $v_j - u_i = c_{ij}$. При цьому послідовно шукаємо базисні клітини, для яких відомий тільки один потенціал.

Таблиця 13

$a_i \backslash b_j$	10	11	8	6	u_i
12	10 10	3 2	5	8	
5	5	7 5	6	4	
18	1	4 4	3 8	7 6	
v_j					

Якщо відомий потенціал u_i, то знаходимо v_j: $v_j = c_{ij} + u_i$. Якщо відомий потенціал v_j, то знаходимо u_i: $u_i = v_j - c_{ij}$.

Оскільки $u_3 = 0$, то на базисній клітині $(3,2)$ маємо

$$v_2 = c_{32} + u_3 = 4 + 0 = 4 .$$

Аналогічно на базисних клітинах $(3,3)$ і $(3,4)$ відповідно отримаємо

$$v_3 = c_{33} + u_3 = 3 + 0 = 3 \text{ і } v_4 = c_{34} + u_3 = 7 + 0 = 7 .$$

Таблиця 14

$a_i \backslash b_j$	10	11	8	6	u_i
12	10 10	3 2	5	8	
5	5	7 5	6	4	
18	1	4 4	3 8	7 6	0
v_j		4	3	7	

Знайдені потенціали заносимо у таблицю 14.

Для базисних клітин $(1,2)$ і $(2,2)$ відомий тільки один потенціал $v_2 = 4$. Тому використовуємо їх для обчислення потенціалів u_1 і u_2:

$$u_1 = v_2 - c_{12} = 4 - 3 = 1 , \quad u_2 = v_2 - c_{22} = 4 - 7 = -3 .$$

Знайдені потенціали заносимо в таблицю 15.

Таблиця 15

b_j / a_i	10	11	8	6	u_i
12	10 / 10	3 / 2	5	8	1
5	5	7 / 5	6	4	-3
18	1	4 / 4	3 / 8	7 / 6	0
v_j		4	3	7	

Для базисної клітини $(1,1)$ відомий лише один потенціал $u_1 = 1$. Обчислюємо

$$v_1 = c_{11} + u_1 = 10 + 1 = 11$$

і заносимо у таблицю 16

Таблиця 16

b_j / a_i	10	11	8	6	u_i
12	10 / 10	3 / 2	5	8	1
5	5	7 / 5	6	4	-3
18	1	4 / 4	3 / 8	7 / 6	0
v_j	11	4	3	7	

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i,j): $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 17 (верхній лівий кут клітини) лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності:

$$\Delta_{21} = 5 + (-3) - 11 = -9\ ,\quad \Delta_{24} = 4 + (-3) - 7 = -6\ ,\quad \Delta_{31} = 1 + 0 - 11 = -10\ .$$

Таблиця 17

a_i \ b_j	10	11	8	6	u_i
12	10 10	3 2	5	8	1
5	-9 5	7 5	6	-6 4	-3
18	-10 1	4 4	3 8	7 6	0
v_j	11	4	3	7	

Найменшу від'ємну оцінку має клітина $(3,1)$, приєднуємо її до множини базисних, знаходимо цикл, який породжує таке приєднання (див. таблицю 18, клітини циклу виділені сірим), розбиваємо його на додатний $C^+ = \{(3,1),(1,2)\}$ та від'ємний $C^- = \{(3,2),(1,1)\}$ півцикли, починаючи з клітини $(3,2)$ і обходячи цикл за напрямком, вказаним стрілками, (у клітинах додатного півциклу до перевезення додається θ, а у клітинах від'ємного півциклу від перевезень віднімається θ) та визначаємо $\theta = 4$ по клітині $(3,2)$ від'ємного півциклу

Таблиця 18

a_i \ b_j	10	11	8	6	u_i
12	10 $10-\theta \Downarrow$	3 $2+\theta \Leftarrow$	5	8	1
5	-9 5	7 5	6	-6 4	-3
18	-10 1 $+\theta \Rightarrow$	4 $4-\theta \Uparrow$	3 8	7 6	0
v_j	11	4	3	7	$\theta = 4$

Переходимо до нового опорного плану, додаючи θ до перевезень додатного півциклу і віднімаючи θ від перевезень від'ємного півциклу. Цикл розриваємо на клітині $(3,2)$, по якій визначали θ. Заносимо новий план у транспортну таблицю 19 та переходимо до кроку 2.

2 крок. Обчислюємо потенціали, поклавши $u_3 = 0$. Оскільки $u_3 = 0$, то на базисних клітинах $(3,1)$, $(3,3)$, $(3,4)$ відповідно маємо

$$v_1 = c_{31} + u_3 = 1 + 0 = 1,\ v_3 = c_{33} + u_3 = 3 + 0 = 3,\ v_4 = c_{34} + u_3 = 7 + 0 = 7 .$$

Далі, по базисній клітині $(1,1)$ визначаємо

$$u_1 = v_1 - c_{11} = 1 - 10 = -9 .$$

Потім, маючи $u_1 = -9$, по базисній клітині $(1,2)$ знаходимо

$$v_2 = c_{12} + u_1 = 3 - 9 = -6 ,$$

і, накінець, маючи $v_2 = -6$, на клітині $(2,2)$ обчислюємо

$$u_2 = v_2 - c_{22} = -6 - 7 = -13 .$$

Заносимо потенціали у таблицю 19,

Таблиця 19

a_i \ b_j	10	11	8	6	u_i
12	10 6	3 6	5	8	-9
5	5	7 5	6	4	-13
18	1 4	4	3 8	7 6	0
v_j	1	-6	3	7	

обчислюємо оцінки небазисних клітин $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 20 лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності:

$$\Delta_{13} = 5 + (-9) - 3 = -7 ,\ \Delta_{14} = 8 + (-9) - 7 = -8 ,\ \Delta_{21} = 5 + (-13) - 1 = -9 ,$$

$$\Delta_{23} = 6 + (-13) - 3 = -10 ,\ \Delta_{23} = 4 + (-13) - 7 = -16$$

Таблиця 20

a_i \ b_j	10	11	8	6	u_i
12	10 6	3 6	-7 5	-8 8	-9
5	-9 5	7 5	-10 6	-16 4	-13
18	1 4	4	3 8	7 6	0
v_j	1	-6	3	7	

Приєднуємо клітину $(2,4)$, яка має найменшу від'ємну оцінку, до множини базисних, знаходимо цикл, який породжує таке приєднання, розбиваємо його на додатний $C^+ = \{(2,4),(1,2),(3,1)\}$ та від'ємний $C^- = \{(2,2),(1,1),(3,4)\}$

півцикли, починаючи з клітини $(2,4)$ і обходячи цикл за напрямком, вказаним стрілками, (у клітинах додатного півциклу до перевезення додається θ, а у клітинах від'ємного півциклу від перевезень віднімається θ) та визначаємо $\theta = 5$ по клітині $(2,2)$ від'ємного півциклу (див. таблицю 21).

Таблиця 21

a_i \ b_j	10	11	8	6	u_i
12	10 $6-\theta \Downarrow$	3 $6+\theta \Leftarrow$	-7 5	-8 8	-9
5	-9 5	7 $5-\theta \Uparrow$	-10 6	-16 4 $+\theta \Leftarrow$	-13
18	1 $4+\theta \Rightarrow$	4	3 8	7 $6-\theta \Uparrow$	0
v_j	1	-6	3	7	$\theta = 5$

Переходимо до нового опорного плану, додаючи θ до перевезень додатного півциклу і віднімаючи θ від перевезень від'ємного півциклу. Цикл розриваємо на клітині $(2,2)$, по якій визначали θ. Заносимо новий план у транспортну таблицю 22 та переходимо до кроку 3.

Таблиця 22

a_i \ b_j	10	11	8	6	u_i
12	10 1	3 11	5	8	-9
5	5	7	6	4 5	3
18	1 9	4	3 8	7 1	0
v_j	1	-6	3	7	

3 крок. Обчислюємо потенціали, поклавши $u_3 = 0$. Оскільки $u_3 = 0$, то на базисних клітинах $(3,1)$, $(3,3)$, $(3,4)$ відповідно маємо

$$v_1 = c_{31} + u_3 = 1 + 0 = 1,\ v_3 = c_{33} + u_3 = 3 + 0 = 3,\ v_4 = c_{34} + u_3 = 7 + 0 = 7.$$

Далі, по базисній клітині $(1,1)$ визначаємо

$$u_1 = v_1 - c_{11} = 1 - 10 = -9.$$

Маючи $u_1 = -9$, по базисній клітині $(1,2)$ знаходимо

$$v_2 = c_{12} + u_1 = 3 - 9 = -6 \text{ ,}$$

і, накінець, маючи $v_4 = 7$, по базисній клітині $(2,4)$ обчислюємо

$$u_2 = v_4 - c_{24} = 7 - 4 = 3 \text{ .}$$

Заносимо потенціали у таблицю 22.

Таблиця 22

b_j a_i	10	11	8	6	u_i
12	10 1	3 11	5	8	-9
5	5	7	6	4 5	3
18	1 9	4	3 8	7 1	0
v_j	1	-6	3	7	

Обчислюємо оцінки небазисних клітин $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 23 лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності:

$\Delta_{13} = 5 + (-9) - 3 = -7$, $\Delta_{14} = 8 + (-9) - 7 = -8$.

Таблиця 23

b_j a_i	10	11	8	6	u_i
12	10 1	3 11	-7 5	-8 8	-9
5	5	7	6	4 5	3
18	1 9	4	3 8	7 1	0
v_j	1	-6	3	7	

Приєднуємо клітину $(1,4)$, яка має найменшу від'ємну оцінку, до множини базисних, знаходимо цикл, який породжує таке приєднання, розбиваємо його на додатний $C^+ = \{(1,4),(3,1)\}$ та від'ємний $C^- = \{(1,1),(3,4)\}$ півцикли, починаючи з клітини $(1,4)$ і обходячи цикл за напрямком, вказаним стрілками, та визначаємо $\theta = 1$ по клітині $(1,1)$ від'ємного півциклу (див. таблицю 24).

Таблиця 24

b_j / a_i	10	11	8	6	u_i
12	10 $1-\theta \Downarrow$	3 11	-7 5	-8 8 $+\theta \Leftarrow$	-9
5	5	7	6	4 5	3
18	1 $9+\theta \Rightarrow$	4	3 8	7 $1-\theta \Uparrow$	0
v_j	1	-6	3	7	$\theta = 1$

Переходимо до нового опорного плану, додаючи θ до перевезень додатного півциклу і віднімаючи θ від перевезень від'ємного півциклу. Цикл розриваємо на клітині $(1,1)$, по якій визначалось θ. Заносимо новий план у транспортну таблицю 25 та переходимо до кроку 4.

Таблиця 25

b_j / a_i	10	11	8	6	u_i
12	10	3 11	5	8 1	
5	5	7	6	4 5	
18	1 10	4	3 8	7 0	
v_j					

4 крок. Обчислюємо потенціали, поклавши $u_3 = 0$. Оскільки $u_3 = 0$, то з рівнянь на базисних клітинах $(3,1)$, $(3,3)$, $(3,4)$ відповідно маємо

$$v_1 = c_{31} + u_3 = 1 + 0 = 1,\ v_3 = c_{33} + u_3 = 3 + 0 = 3,\ v_4 = c_{34} + u_3 = 7 + 0 = 7.$$

Далі, маючи $v_4 = 7$, по базисних клітинах $(1,4)$, $(2,4)$ відповідно обчислюємо

$$u_2 = v_4 - c_{24} = 7 - 4 = 3 \text{ і } u_1 = v_4 - c_{14} = 7 - 8 = -1.$$

Нарешті, оскільки $u_1 = -1$, то з рівняння на базисній клітині $(1,2)$ знаходимо

$$v_2 = c_{12} + u_1 = 3 - 1 = 2.$$

Заносимо потенціали у таблицю 26 та обчислюємо оцінки небазисних клітин $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$. Всі оцінки невід'ємні, тому поточний опорний план $X^{(4)}$ оптимальний.

Таблиця 26

a_i \ b_j	10	11	8	6	u_i
12	10	3 11	5	8 1	-1
5	5	7	6	4 5	3
18	1 10	4	3 8	7 0	0
v_j	1	2	3	7	

Отже, оптимальним розв'язком даної задачі є план перевезень

$$X^* = X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

який збігається з початковим опорним планом цієї задачі, знайденим методом мінімального елемента (див. 2.4.2.2) і на якому цільова функція задачі набуває значення

$$L(X^*) = 3 \cdot 11 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 8 = 95 .$$

2.6.4. Завдання для самостійного розв'язування.

Лабораторна робота. Розв'язування збалансованої транспортної задачі методом потенціалів. – 2год.

1. Для даної в індивідуальному завданні Т-задачі побудувати двоїсту задачу.

2. Знайти початковий опорний план Т-задачі методом мінімального елемента та розв'язати її методом потенціалів.

3. Знайти початковий опорний план Т-задачі методом північно-західного кута та розв'язати її методом потенціалів.

4. Порівняти знайдені оптимальні розв'язки за складом та за кількістю ітерацій методу потенціалів, необхідних для їх отримання.

Індивідуальні завдання ([4], ст.118–121):

2.6.4.1.

a_i \ b_j	7	7	7	7	2
4	16	30	17	10	16
6	30	27	26	9	23
10	13	4	22	3	1
10	3	1	5	4	24

2.6.4.2.

a_i \ b_j	19	19	19	19	4
20	15	1	22	19	1
20	21	18	11	14	3
20	26	29	23	26	24
20	20	10	3	19	27

2.6.4.3.

a_i \ b_j	11	11	11	11	16
15	17	20	29	26	25
15	3	4	5	15	24
15	19	2	22	4	13
15	220	27	1	17	19

2.6.4.4.

a_i \ b_j	12	12	12	12	12
13	20	26	24	26	29
17	15	20	29	26	23
17	4	10	27	30	7
13	9	16	29	20	3

2.6.4.5.

a_i \ b_j	8	8	8	8	28
18	21	22	2	13	7
12	27	10	4	24	9
17	3	16	25	5	4
13	28	11	17	10	29

2.6.4.6.

a_i \ b_j	9	24	9	9	9
15	10	17	9	20	30
15	13	4	24	26	26
19	22	24	30	27	29
11	25	12	11	24	23

2.6.4.7.

a_i \ b_j	15	15	15	15	20
21	30	24	11	12	25
19	26	4	29	20	24
15	27	14	14	10	18
25	6	14	28	8	2

2.6.4.8.

a_i \ b_j	8	9	13	8	12
9	5	15	3	6	10
11	23	8	13	27	12
14	30	1	5	24	25
16	8	25	7	28	9

2.6.4.9.

a_i \ b_j	7	7	7	7	42
22	9	17	29	28	8
13	13	21	27	16	29
17	20	30	24	7	26
18	11	19	30	6	2

2.6.4.10.

a_i \ b_j	8	8	13	20	15
16	30	2	5	6	15
15	5	29	5	7	
14	16	24	14	6	26
15	13	28	4	25	8

2.6.4.11.

a_i \ b_j	19	22	23	17	14
17	12	11	25	17	21
14	22	18	14	8	1
21	9	13	2	28	15
43	26	21	3	4	27

2.6.4.12.

a_i \ b_j	27	16	25	11	7
28	2	24	4	2	3
13	20	10	15	27	7
15	15	15	12	25	19
30	2	6	3	5	5

2.6.4.13.

a_i \ b_j	11	22	31	6	6
9	15	6	25	11	12
18	13	14	20	27	30
23	18	7	19	10	21
26	1	29	23	25	18

2.6.4.14.

a_i \ b_j	22	9	12	13	18
24	22	24	25	23	29
14	1	21	10	7	19
19	2	26	18	30	27
17	22	10	29	26	23

2.6.4.15.

a_i \ b_j	10	8	12	14	16
12	6	11	20	17	8
17	1	25	3	18	17
8	9	39	16	30	31
13	23	15	4	3	28

2.6.4.16.

a_i \ b_j	5	15	11	9	20
17	7	10	16	27	19
19	30	18	8	29	15
11	3	18	28	19	1
13	9	12	2	25	21

2.6.4.17.

b_j / a_i	22	22	22	11	11
21	4	21	12	8	1
21	20	8	25	15	23
23	17	1	11	5	3
23	23	10	24	6	5

2.6.4.18.

b_j / a_i	12	13	14	31	9
24	5	3	24	10	25
15	30	2	22	16	7
16	30	24	27	29	10
24	15	17	21	2	3

2.6.4.19.

b_j / a_i	11	13	26	10	10
24	21	19	11	12	12
12	26	29	14	1	26
18	39	1	22	8	25
16	53	23	40	26	28

2.6.4.20.

b_j / a_i	7	8	4	11	30
16	25	28	20	15	7
12	27	5	11	23	10
14	1	25	14	16	16
18	8	6	4	16	18

2.6.4.21.

b_j / a_i	33	11	11	11	34
33	14	25	18	19	23
25	2	17	16	24	2
25	29	3	7	15	22
17	5	20	17	23	10

2.6.4.22.

b_j / a_i	21	21	9	9	20
18	8	1	19	1	15
23	8	27	30	7	7
17	10	20	19	26	20
22	18	28	25	7	22

2.6.4.23.

b_j / a_i	22	22	22	22	22
33	30	20	27	15	26
33	25	6	28	20	5
33	19	24	11	29	23
11	1	4	6	6	8

2.6.4.24.

b_j / a_i	15	15	15	15	10
16	11	10	15	8	7
15	12	14	29	20	20
24	18	7	5	25	28
15	24	4	30	24	26

2.6.4.25.

b_j / a_i	20	20	20	20	20
33	29	53	39	29	22
18	15	33	16	3	3
32	16	27	16	3	5
17	35	50	39	20	23

2.6.4.26.

b_j / a_i	14	14	14	14	14
13	12	6	29	19	21
27	14	3	30	10	10
16	15	27	28	11	24
14	1	23	25	15	13

2.6.4.27.

b_j / a_i	16	16	16	16	16
24	28	26	12	22	11
27	20	23	25	22	9
16	23	15	11	22	7
13	1	26	10	11	19

2.6.4.28.

b_j / a_i	12	12	12	12	12
14	29	4	7	6	16
14	21	13	25	21	7
14	20	10	12	6	2
18	17	7	4	6	19

2.6.4.29.

b_j / a_i	7	8	13	12	20
15	20	5	27	10	26
25	7	17	18	21	28
5	27	21	9	23	26
15	1	13	17	23	7

2.6.4.30.

b_j / a_i	15	15	15	15	20
32	17	29	2	8	18
8	14	8	25	15	21
13	29	11	15	13	20
27	27	15	19	8	14

2.6.4.31.

b_j / a_i	8	11	11	9	21
18	14	5	27	29	23
14	17	7	16	19	2
16	20	12	15	29	5
12	14	24	18	7	13

2.6.4.32.

b_j / a_i	11	11	11	11	16
24	30	17	26	14	3
8	18	14	27	6	20
12	8	24	17	17	26
16	1	18	21	16	12

2.6.4.33.

b_j / a_i	10	10	10	10	30
34	17	10	7	5	13
18	12	28	25	9	10
6	14	15	18	9	28
12	25	16	21	12	8

2.6.4.34.

b_j / a_i	9	9	9	9	24
17	19	9	14	17	9
17	4	21	27	8	29
16	22	30	4	1	24
10	10	22	8	5	27

2.6.4.35.

b_j / a_i	13	13	13	13	28
38	25	16	26	43	23
13	30	23	28	48	27
9	37	23	25	40	28
20	22	1	4	25	10

2.6.4.36.

b_j / a_i	22	22	22	22	4
23	12	21	19	29	4
23	27	13	22	19	4
23	20	27	18	2	23
23	30	12	3	20	24

2.6.4.37.

b_j / a_i	11	11	11	8	15
14	10	15	14	28	1
14	16	7	30	8	29
12	1	21	22	19	12
16	8	25	28	5	19

2.6.4.38.

b_j / a_i	16	16	16	16	16
25	17	16	15	29	9
25	6	27	20	25	20
15	6	15	12	8	14
15	10	24	23	5	22

2.6.4.39.

b_j / a_i	25	25	25	25	30
33	24	19	5	9	23
31	15	16	3	13	6
33	7	5	24	11	23
33	4	28	29	21	20

2.6.4.40.

b_j / a_i	20	20	15	15	30
34	24	23	6	29	3
35	20	8	13	2	27
21	30	17	10	23	28
10	4	7	23	27	26

2.6.4.41.

b_j / a_i	18	18	18	18	18
23	3	25	11	22	12
25	9	15	4	26	12
12	13	22	15	12	27
30	6	19	8	11	8

2.6.4.42.

b_j / a_i	17	17	17	17	17
37	23	2	1	10	3
11	20	19	4	16	14
12	7	3	12	21	10
25	9	9	29	8	18

2.6.4.43.

b_j / a_i	13	13	13	13	16
17	30	9	29	6	13
17	23	13	3	28	7
17	4	3	11	6	9
17	3	10	11	10	28

2.6.4.44.

b_j / a_i	15	15	16	15	15
19	21	17	12	24	30
19	6	1	9	5	9
19	7	5	24	6	13
19	29	22	21	5	7

2.6.4.45.

b_j / a_i	14	14	14	18	10
16	33	22	14	34	19
17	26	16	7	29	16
21	28	18	17	23	30
16	35	25	11	22	9

2.6.4.46.

b_j / a_i	11	16	11	11	11
24	25	18	14	3	16
7	29	15	27	16	17
16	21	2	29	2	22
13	5	13	1	5	17

2.6.4.47.

b_j / a_i	19	16	16	16	16
23	8	28	17	19	11
24	27	5	10	6	19
21	29	11	3	7	8
15	25	16	19	24	13

2.6.4.48.

b_j / a_i	14	15	15	15	15
28	27	6	8	12	23
15	1	25	19	11	12
17	28	19	15	17	29
14	16	22	18	5	13

2.6.4.49.

a_i \ b_j	12	18	10	10	10
15	13	7	19	18	27
19	1	21	8	20	12
15	5	17	14	23	21
11	7	4	29	18	22

2.6.4.50.

a_i \ b_j	13	13	13	21	20
33	39	28	37	27	46
17	21	4	20	3	14
15	25	27	25	24	29
15	12	26	10	5	22

2.6.4.51.

a_i \ b_j	13	5	13	12	13
14	16	26	12	24	3
14	5	2	19	27	2
14	29	23	25	16	8
14	2	25	14	15	21

2.6.4.52.

a_i \ b_j	11	12	13	14	12
15	29	4	8	11	5
16	10	19	26	1	27
15	16	7	4	29	23
16	9	10	24	25	17

2.6.4.53.

a_i \ b_j	18	20	19	19	9
21	14	27	6	16	8
22	2	4	19	4	27
22	26	23	1	20	3
20	24	5	12	30	5

2.6.4.54.

a_i \ b_j	22	43	20	17	35
33	23	2	1	4	12
33	24	17	27	2	5
35	26	2	19	22	11
36	7	1	2	14	9

2.6.4.55.

a_i \ b_j	19	25	20	13	13
24	14	27	5	18	19
21	17	20	1	24	3
21	11	7	28	23	9
24	8	26	19	2	24

2.6.4.56.

a_i \ b_j	15	15	18	17	16
31	14	6	1	12	19
16	28	13	22	18	4
20	21	27	30	10	14
14	2	5	6	25	7

2.6.4.57.

a_i \ b_j	24	25	30	20	21
36	6	30	25	7	15
40	5	29	21	4	13
25	18	22	5	28	1
19	19	23	8	3	29

2.6.4.58.

a_i \ b_j	17	17	17	17	8
19	22	23	16	12	14
19	17	30	1	8	25
19	27	15	13	23	22
19	3	12	21	20	7

2.6.4.59.

a_i \ b_j	14	11	17	15	14
18	9	21	22	14	10
12	30	34	42	23	26
22	8	17	30	27	9
19	11	20	24	7	25

2.6.4.60.

a_i \ b_j	34	39	24	8	8
41	12	15	9	19	22
33	20	15	11	2	19
25	21	26	23	7	16
14	11	24	8	3	29

3. Відкриті транспортні задачі.

Як було доведено при вивченні властивостей транспортної задачі (див. с.6) умова балансу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3.1)$$

є критерієм допустимості Т-задачі. Якщо умова балансу порушена, то транспортна задача називається відкритою або незбалансованою.

Можливі два випадки незбалансованості:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, 2) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Розглянемо перший випадок. Повне задоволення попиту у цьому випадку неможливе. Позначимо через $r_j \ (j = \overline{1,n})$ величину штрафу за недопоставку одиниці продукту в пункт $\boldsymbol{B_j} \ (j = \overline{1,n})$, а через $y_j \ (j = \overline{1,n})$ величину об'єму незадоволеного попиту в пункті $\boldsymbol{B_j} \ (j = \overline{1,n})$. Тоді транспортна задача зводиться до мінімізації сумарних витрат (транспортних і штрафних)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} r_j y_j \to \min \tag{3.2}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{3.4}$$

$$y_j = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij},\ j = \overline{1,n}, \tag{3.5}$$

$$x_{ij} \ge 0\ (i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}), \tag{3.6}$$

$$y_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{3.7}$$

Введенням фіктивного пункту зберігання продукту $\boldsymbol{A_{m+1}}$ з фіктивним об’ємом запасу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ і питомими транспортними витратами $c_{m+1,j} = r_j\ \ j = (\overline{1,n})$ ця задача зводиться до збалансованої транспортної задачі такого виду

$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{3.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m+1}, \tag{3.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \tag{3.10}$$

$$x_{ij} \ge 0\ (i = \overline{1,m+1},\ j = \overline{1,n}). \tag{3.11}$$

Зауважимо, що всі додатні перевезення $x_{m+1,j}$ оптимального плану перевезень цієї задачі є фіктивними і являють собою незадоволений попит відповідного пункту використання продукту.

У другому випадку запас продукту перевищує попит, повне вивезення продукту із всіх пунктів зберігання неможливе. Зведення такої задачі до збалансованої транспортної задачі здійснюють шляхом введення фіктивного пункту споживання продукту $\boldsymbol{B_{n+1}}$ з об’ємом попиту

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

і питомими транспортними витратами $c_{i,n+1}\,(i = \overline{1,n})$, що дорівнюють штрафам за одиницю невивезеного продукту з відповідного пункту $\boldsymbol{A_i}\,(i = \overline{1,m})$. Значення невідомих $x_{i,n+1}$ дорівнюють залишкам продукту у відповідних пунктах $\boldsymbol{A_i}\,(i = \overline{1,m})$.

За таких умов вихідна задача набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij} \to \min\,, \tag{3.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i,\, i = \overline{1,m}\,, \tag{3.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\, j = \overline{1,n+1}\,, \tag{3.14}$$

$$x_{ij} \ge 0\,(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n+1})\,. \tag{3.11}$$

3.1. Приклади.

Приклад. Розв’язати незбалансовану транспортну задачу (див. таблицю 27) з додатковою умовою – потреби пункту $\boldsymbol{B_1}$ повинні бути задоволені повністю.

Розв’язування. Обчислюємо сумарний запас продукту та сумарний попит на продукт.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 45 + 35 + 40 = 120\,,\quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 35 + 30 + 45 = 150\,.$$

Задача незбалансована, попит перевищує пропозицію на $\sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 150 - 120 = 30$ одиниць продукту. Вводимо фіктивного постачальника $\boldsymbol{A_4}$ з об’ємом запасу $a_4 = 30$. Оскільки перший споживач $\boldsymbol{B_1}$ не повинен отримувати фіктивний продукт, то клітину $(4,1)$ блокуємо нескінченним штрафом $\boldsymbol{M > 0}$ за перевезення одиниці продукту; іншим споживачам, оскільки для них не задані додаткові умови, питомі транспортні витрати, що дорівнюють штрафам за невивезення одиниці продукту, покладаємо рівними нулю. Дані заносимо у таблицю 27.

Таблиця 27

b_j / a_i	40	35	30	45	$a_i - x_{ij}$
45	4	3	2	7	
35	1	1	6	4	
40	3	5	9	4	
30	M	0	0	0	
$b_j - x_{ij}$					

Початковий опорний план знаходимо методом мінімального елемента. Першою заповнюємо клітину $(4,1)$:

$$x_{42} = \min(30,35) = 30\ ,\ a_4 - x_{42} = 30 - 30 = 0\ ,\ b_2 - x_{42} = 35 - 30 = 5\ .$$

Викреслюємо четвертий рядок у таблиці 28.

Наступною заповнюємо клітину $(2,1)$:

$$x_{21} = \min(35,40) = 35\ ,\ a_2 - x_{21} = 35 - 35 = 0\ ,\ b_1 - x_{21} = 40 - 35 = 5\ .$$

Викреслюємо другий рядок (див.таблицю 28). Далі заповнюємо клітину $(1,3)$:

$$x_{13} = \min(45,30) = 30\ \ a_1 - x_{13} = 45 - 30 = 15\ ,\ b_3 - x_{13} = 30 - 30 = 0\ .$$

Викреслюємо третій стовпчик (див.таблицю 28).

Таблиця 28

b_j / a_i	40	35	30	45	$a_i - x_{ij}$
45	4	3	2 30	7	15
35	1 35	1	6	4	0
40	3	5	9	4	
30	M	0 30	0	0	0
$b_j - x_{ij}$	5	5	0		

Наступною заповнюємо клітину $(1,2)$:

$$x_{12} = \min(15,5) = 5\ ,\ a_1^{(1)} - x_{12} = 15 - 5 = 10\ ,\ b_2^{(1)} - x_{12} = 5 - 5 = 0\ .$$

Таблиця 29

a_i \ b_j	40	35	30	45	$a_i - x_{ij}$
45	4	3 5	2 30	7 10	0
35	1 35	1	6	4	0
40	3 5	5	9	4 35	0
30	M	0 30	0	0	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	0	

Викреслюємо другий стовпчик (див.таблицю 29).

Далі заповнюємо клітину $(3,1)$:

$$x_{31} = \min(40,5) = 5\ ,\ a_3 - x_{31} = 40 - 5 = 35\ ,\ b_1^{(1)} - x_{31} = 5 - 5 = 0\ .$$

Викреслюємо перший стовпчик (див.таблицю 29).

Наступною заповнюємо клітину $(3,4)$:

$$x_{34} = \min(35,45) = 35\ ,\ a_3^{(1)} - x_{34} = 35 - 35 = 0\ ,\ b_4 - x_{34} = 45 - 35 = 10\ .$$

Викреслюємо третій рядок (див.таблицю 29).

І, накінець, заповнюємо останню невикреслену клітину $(1,4)$:

$$x_{14} = \min(10,10) = 10\quad a_1^{(2)} - x_{14} = 10 - 10 = 0\ ,\ b_4^{(1)} - x_{14} = 10 - 10 = 0\ .$$

Викреслюємо четвертий стовпчик (див.таблицю 29).

Отримали таблицю 30 з початковим опорним планом задачі.

Таблиця 30

a_i \ b_j	40	35	30	45	u_i
45	4	3 5	2 30	7 10	
35	1 35	1	6	4	
40	3 5	5	9	4 35	
30	M	0 30	0	0	
v_j					

Далі задачу розв’язуємо методом потенціалів. Обчислюємо потенціали, поклавши $u_1 = 0$. З рівнянь для потенціалів на базисних клітинах $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$ відповідно маємо

$$v_2 = c_{12} + u_1 = 3 + 0 = 3,\ v_3 = c_{13} + u_1 = 2 + 0 = 2,\ v_4 = c_{14} + u_1 = 7 + 0 = 7.$$

Потенціали заносимо у таблицю 31.

Таблиця 31

a_i \ b_j	40	35	30	45	u_i
45	-2 4	3 / 5	2 / 30	7 / 10	0
35	1 / 35	1	6	4	5
40	3 / 5	5	9	4 / 35	3
30	M	0 / 30	0	-4 0	3
v_j	6	3	2	7	

Далі, з рівнянь на базисних клітинах $(4,2)$ і $(3,4)$ отримаємо

$$u_4 = v_2 - c_{42} = 3 - 0 = 3,\ u_3 = v_4 - c_{34} = 7 - 4 = 3.$$

Потенціали заносимо в таблицю 31.

З рівняння на базисній клітині $(3,1)$ обчислюємо

$$v_1 = c_{31} + u_3 = 3 + 3 = 6 \text{ і}$$

заносимо $v_1 = 6$ в таблицю 31. І, нарешті, по базисній клітині $(2,2)$ знаходимо

$$u_2 = v_1 - c_{21} = 6 - 1 = 5$$

і заносимо його у таблицю 31.

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i, j): $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 31 (верхній лівий кут клітини) лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності:

$$\Delta_{11} = 4 + 0 - 6 = -2,\quad \Delta_{44} = 3 + 0 - 7 = -4.$$

Найменшу від’ємну оцінку $\Delta_{44} = -4$ має клітина $(4,4)$, приєднуємо її до множини базисних, знаходимо цикл, який породжує таке приєднання (клітини циклу виділені сірим), розбиваємо його на додатний $C^+ = \{(4,4),(1,2)\}$ та від’ємний $C^- = \{(1,4),(4,2)\}$ півцикли, починаючи з клітини

$(4,4)$ і обходячи цикл за напрямком, вказаним стрілками, та визначаємо $\theta = 10$ за клітиною $(1,4)$ від'ємного півциклу (див. таблицю 32).

Таблиця 32

a_i \ b_j	40	35	30	45	u_i
45	-2 4	3 $5+\theta \Downarrow$	2 30	7 $10-\theta \Leftarrow$	0
35	1 35	1	6	4	5
40	3 5	5	9	4 35	3
30	M	0 $30-\theta \Rightarrow$	0	-4 0 $+\theta \Uparrow$	3
v_j	6	3	2	7	$\theta = 10$

Переходимо до нового опорного плану, додаючи θ до перевезень додатного півциклу і віднімаючи θ від перевезень від'ємного півциклу. Цикл розриваємо на клітині $(1,4)$, за якою визначалося θ. Заносимо новий план у транспортну таблицю 33 та переходимо до наступного кроку методу потенціалів.

Таблиця 33

a_i \ b_j	40	35	30	45	u_i
45	4	3 15	2 30	7	0
35	1 35	-1 1	6	4	1
40	3 5	5	9	4 35	-1
30	M	0 20	0	0 10	3
v_j	2	3	2	3	

Обчислюємо потенціали, поклавши $u_1 = 0$. З рівнянь для потенціалів на базисних клітинах $(1,2)$, $(1,3)$ відповідно маємо

$$v_2 = c_{12} + u_1 = 3 + 0 = 3,\quad v_3 = c_{13} + u_1 = 2 + 0 = 2 .$$

Далі, послідовно використовуючи базисні клітини $(4,2)$, $(4,4)$, $(3,4)$, $(3,1)$, $(2,1)$, отримаємо:

$u_4 = v_2 - c_{42} = 3 - 0 = 3$, $v_4 = c_{44} + u_4 = 0 + 3 = 3$, $u_3 = v_4 - c_{34} = 3 - 4 = -1$,

$v_1 = c_{31} + u_3 = 3 + (-1) = 2$, $u_2 = v_1 - c_{21} = 2 - 1 = 1$.

Потенціали заносимо у таблицю 33.

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i,j): $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 33 (верхній лівий кут клітини) лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності. Така оцінка тільки одна: $\Delta_{22} = 1 + 1 - 3 = -1$.

Приєднуємо клітину $(2,2)$ до множини базисних, знаходимо цикл, який породжує таке приєднання (клітини циклу відтоновані), розбиваємо його на додатний $C^+ = \{(2,2),(3,1)(4,4)\}$ та від'ємний $C^- = \{(2,1),(3,4),(4,2)\}$ півцикли, починаючи з клітини $(2,2)$ і обходячи цикл за напрямком, вказаним стрілками, та визначаємо $\theta = 20$ по клітині $(4,2)$ від'ємного півциклу (див. таблицю 34).

Таблиця 34

a_i \ b_j	40	35	30	45	u_i
45	4	3 15	2 30	7	0
35	1 $35-\theta\Downarrow$	-1 1 $+\theta\Leftarrow$	6	4	1
40	3 $5+\theta\Rightarrow$	5	9	4 $35-\theta\Downarrow$	-1
30	M	0 $20-\theta\Uparrow$	0	0 $10+\theta\Leftarrow$	3
v_j	2	3	2	3	$\theta = 20$

Переходимо до нового опорного плану, додаючи θ до перевезень додатного півциклу і віднімаючи θ від перевезень від'ємного півциклу. Цикл розриваємо на клітині $(4,2)$, за якою визначалося θ. Заносимо новий план у транспортну таблицю 35 та переходимо до наступного кроку методу потенціалів.

Обчислюємо потенціали, поклавши $u_1 = 0$. Послідовно використовуючи базисні клітини $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(3,4)$, $(4,4)$, отримаємо:

Таблиця 35

a_i \ b_j	40	35	30	45	u_i
45	4	3 15	2 30	7	0
35	1 15	1 20	6	4	2
40	3 25	5	9	4 15	0
30	M	0	0	0 30	4
v_j	3	3	2	4	

$v_2 = c_{12} + u_1 = 3 + 0 = 3$, $v_3 = c_{13} + u_1 = 2 + 0 = 2$, $u_2 = v_2 - c_{22} = 3 - 1 = 2$, $v_1 = c_{21} + u_2 = 1 + 2 = 3$, $u_3 = v_1 - c_{31} = 3 - 3 = 0$, $v_4 = c_{34} + u_3 = 4 + 0 = 4$, $u_4 = v_4 - c_{44} = 4 - 0 = 4$.

Оцінки всіх небазисних клітин (i, j) $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ невід'ємні, тому опорний план в таблиці 35 оптимальний. Відкидаючи фіктивний четвертий рядок, отримаємо оптимальний розв'язок вихідної задачі

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 30 & 0 \\ 15 & 20 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix},$$

$$L(\boldsymbol{X}^*) = 3 \cdot 15 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 15 = 275 .$$

При цьому 30 одиниць продукту недоотримає споживач $\boldsymbol{B_4}$.

4. Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій. Матрична постановка.

Розглянемо збалансовану транспортну задачу (Т-задачу), в якій додатково по кожній комунікації $\overline{\boldsymbol{A_i B_j}}$ задана умова, що обмежує її пропускну спроможність зверху,

$$L(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min , \qquad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \ i = \overline{1, m} , \qquad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{4.5}$$

Матрицю $\boldsymbol{D} = \left\| \boldsymbol{d_{ij}} \right\|_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$ називають матрицею пропускних спроможностей комунікацій. Надалі задачу (4.1) – (4.5) будемо називати $\mathrm{T_d}$ - задачею.

До розв'язування $\mathrm{T_d}$ - задачі може бути пристосований довільний з методів, які розв'язують Т-задачу, зокрема і метод потенціалів. Однак при цьому змінюються:

1) умови розв'язності;
2) побудова початкового опорного плану;
3) умови оптимальності опорного плану;
4) перехід до нового опорного плану.

Розглянемо ці зміни детально.

4.1. Умови розв'язності $\mathrm{T_d}$ - задачі.

На відміну від Т-задачі, де умова балансу (4.5) є необхідною і достатньою умовою розв'язності, в $\mathrm{T_d}$ - задачі умова балансу є лише необхідною умовою розв'язності. Дійсно, якщо за виконання умови балансу (4.5) знайдеться номер i, для якого

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} < a_i, \tag{4.6}$$

або номер j, для якого

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} < b_j, \tag{4.7}$$

то така $\mathrm{T_d}$ - задача не матиме допустимих розв'язків, тобто умова балансу (4.5) не є достатньою умовою розв'язності $\mathrm{T_d}$ - задачі.

4.2. Побудова початкового опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Означення опорного плану в Т-задачі грунтувалось на понятті основної комунікації. Введемо аналогічне поняття для $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Означення. *Комунікацію* $\overline{A_i B_j}$ *назвемо основною комунікацією допустимого плану перевезень* $\boldsymbol{X}$ $\mathrm{T_d}$ *- задачі, якщо перевезення* x_{ij} *задовольняє умову*

$$0 < x_{ij} < d_{ij} \ . \qquad (4.8)$$

За такого означення основної комунікації на $\mathrm{T_d}$ - задачу можна без змін перенести з Т-задачі означення опорного плану, яке грунтувалось на її геометричній інтерпретації, а також результати теорем про лінійну незалежність векторів-комунікацій та про розклад вектора-комунікацій.

Початковий опорний план $\mathrm{T_d}$ - задачі будується значно складніше у порівнянні з Т-задачею. В загальному випадку він складається з двох етапів, на другому з яких використовується метод потенціалів для $\mathrm{T_d}$ - задачі, в чому проглядається аналогія з М-методом відшукання початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

На першому етапі будується допустимий план перевезень за правилами методу мінімального елемента, але з урахуванням пропускних спроможностей комунікацій. При цьому, якщо величина перевезення x_{ij}, що заноситься у клітину (i, j) транспортної таблиці, визначається об'ємом залишків ресурсів або попиту, то як і в Т-задачі після заповнення клітини (i, j) викреслюється з таблиці або рядок, або стовпчик (або і рядок, і стовпчик, якщо залишки нульові, і клітина (i, j) виділяється. Якщо ж величина перевезення x_{ij} визначається тільки пропускною спроможністю d_{ij} (тобто обидва залишки і запасу, і попиту після заповнення клітини (i, j) залишаються додатними), то викреслюється з таблиці тільки така клітина (i, j), і вона не виділяється.

Після викреслення всіх клітин транспортної таблиці може виявитись, що всі ресурси розподілені і весь попит задоволений, тобто, що виконуються умови

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \ i = \overline{1,m} \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = \overline{1,n} \ .$$

В цьому випадку побудований допустимий план перевезень приймається за початковий опорний план $\mathrm{T_d}$ - задачі, а множина виділених клітин транспортної таблиці приймається за множину базисних клітин цього плану.

Якщо число виділених клітин менше, ніж $m+n-1$, то множина виділених клітин доповнюється до числа $m+n-1$ довільними клітинами транспортної таблиці, але так, щоб вона залишалась ациклічною (перевіряється, наприклад, методом викреслювання після приєднання кожної клітини). Якщо ж після викреслення всіх клітин транспортної таблиці в деякому рядку, а, значить, і у деякому стовпчику, залишились нерозподілені залишки ресурсів і попиту, тобто знайдуться i та j такі, що $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i$ і $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j$, то переходять до другого етапу побудови початкового опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Нехай

$$\delta = \sum_{i=1}^{m}(a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij})$$

суми нерозподілених залишків по ресурсах і по попиту (вони рівні в силу збалансованості задачі). Скористаємось ідеєю методу штучного базису і введемо в таблицю додаткові $(m+1)-$й рядок з ресурсом $a_{m+1} = \delta$ і $(n+1)-$й стовпчик з попитом $b_{n+1} = \delta$ та покладемо:

$$c_{i,n+1} = M,\ d_{i,n+1} = \infty\ \ (i = \overline{1,m}),$$

$$c_{m+1,j} = M,\ d_{m+1,j} = \infty\ \ (j = \overline{1,n}),$$

$$c_{m+1,n+1} = 0,\ d_{m+1,n+1} = \infty,$$

де $M >> 0$ – нескінченно великий штраф за перевезення продукту по відповідній комунікації.

Нерозподілені залишки розподіляємо так: незадоволений попит задовольняємо ресурсом від фіктивного пункту $\boldsymbol{A_{m+1}}$, невивезений продукт направляємо фіктивному споживачу $\boldsymbol{B_{n+1}}$. Клітини з додатними перевезеннями у додаткових рядку і стовпчику виділяються.

Якщо загальна кількість виділених клітин розширеної задачі виявиться меншою, ніж $(m+1)+(n+1)-1 = m+n+1$, то множину виділених клітин доповнюють до цього числа довільними клітинами таблиці розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі, але так, щоб ця множина залишалась ациклічною. Тоді множину виділених клітин побудованого допустимого плану розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі можна прийняти за множину його базисних клітин. За таких умов цей план буде початковим опорним планом розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Далі побудовану збалансовану розширену $\mathrm{T_d}$ - задачу розв’язують методом потенціалів. Якщо в процесі розв’язування всі перевезення додаткового рядка і стовпчика стануть рівними нулю (за вийнятком перевезення $x_{m+1,n+1} = \delta$), тобто весь фіктивний запас буде вивезений фіктивному споживачу, то ці рядок і стовпчик відкидають з таблиці. На основній частині таблиці в цьому випадку залишиться початковий опорний план вихідної $\mathrm{T_d}$ - задачі. Якщо ж буде отриманий оптимальний розв’язок розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі, в якому принаймні одне фіктивне перевезення додатне, то вихідна $\mathrm{T_d}$ - задача допустимих розв’язків не має.

4.3. Умови оптимальності опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Обчислення системи потенціалів для опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі нічим не відрізняється від обчислення системи потенціалів для опорного плану Т-задачі. Ознака оптимальності опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі для базисних та незаповнених клітин транспортної таблиці також нічим не відрізняється від відповідної ознаки для опорного плану Т-задачі. Вона лише доповнюється для клітин, що заповнені за пропускною спроможністю відповідних комунікацій.

Отже, нехай $\boldsymbol{X}$ – деякий опорний план $\mathrm{T_d}$ - задачі, $\boldsymbol{E_X}$ – множина базисних клітин цього плану. Введемо до розгляду дві множини:

$$\Gamma_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{0}} = \{(i,j) \notin \boldsymbol{E_X},\ x_{ij} = 0\},$$

$$\Gamma_{\boldsymbol{X}}^{d} = \{(i,j) \notin \boldsymbol{E_X},\ x_{ij} = d_{ij}\}.$$

Ознака оптимальності опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі. *Опорний план $\boldsymbol{X}$ є оптимальним планом $\mathrm{T_d}$ - задачі, якщо виконуються умови*:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j = 0,\ (i,j) \in \boldsymbol{E_X}, \quad (4.9)$$

$$\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j \ge 0,\ (i,j) \in \Gamma_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{0}}, \quad (4.10)$$

$$\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j \le 0,\ (i,j) \in \Gamma_{\boldsymbol{X}}^{d}. \quad (4.11)$$

4.4. Перехід до нового опорного плану.

Нехай опорний план $\boldsymbol{X}$ $\mathrm{T_d}$ - задачі не задовольняє умови оптимальності (4.9) – (4.11). Якщо в Т-задачі клітина (i_k, j_k) транспортної таблиці для введення у множину базисних визначалась за правилом

$$(i_k, j_k) = \underset{\{(i,j)\in\Gamma_X^0 : \Delta_{ij}<0\}}{\arg\min} \Delta_{ij} \text{ (або } (i_k, j_k) = \underset{\{(i,j)\in\Gamma_X^0 : \Delta_{ij}<0\}}{\arg\max} \left|\Delta_{ij}\right| \text{)}$$

то в $\mathrm{T_d}$ - задачі її потрібно визначати, враховуючи і клітини множини Γ_X^d, на яких порушені умови (4.11), тобто

$$(i_k, j_k) = \arg\max(\max_{\{(i,j)\in\Gamma_X^0 : \Delta_{ij}<0\}} \left|\Delta_{ij}\right|, \max_{\{(i,j)\in\Gamma_X^d : \Delta_{ij}>0\}} \Delta_{ij}) .$$

Пошук циклу C на множині клітин $\boldsymbol{E_X} \cup \{(i_k, j_k)\}$ для $\mathrm{T_d}$ - задачі і для Т-задачі здійснюється однаково. Розбиття циклу C на додатний C^+ та від'ємний C^- півцикли відбувається складніше і залежить від того, до якої множини Γ_X^d чи Γ_X^0 належить клітина (i_k, j_k).

Якщо $(i_k, j_k) \in \Gamma_X^0$, то таке розбиття нічим не відрізняється від аналогічної процедури для Т-задачі. Практично його здійснюють так: першою до додатного півциклу C^+ відносять клітину (i_k, j_k), наступну за нею клітину по циклу відносять до від'ємного півциклу C^-, наступну клітину по циклу за цією знову відносять до додатного півциклу C^+, наступну – знову до від'ємного C^-, і т.д., поки, чергуючи віднесення клітин до півциклів, не обійдуть цикл і не повернуться до клітини (i_k, j_k). Напрямок обходу циклу C при цьому не суттєвий. У випадку, коли $(i_k, j_k) \in \Gamma_X^d$, процедура розбиття здійснюється аналогічно, тільки клітину (i_k, j_k) першою відносять до від'ємного півциклу C^-.

Визначення сталої θ перерозподілу плану перевезень у $\mathrm{T_d}$ - задачі теж відбувається.складніше. Нагадаємо, що процедура визначення θ у Т-задачі гарантує невід'ємність компонент нового опорного плану. Якщо застосувати її в незмінному вигляді до $\mathrm{T_d}$ - задачі, то можливе переповнення пропускних спроможностей комунікацій на клітинах додатного півциклу. Тому θ обчислюється у два етапи. Спочатку знаходять $\theta^- = \min_{\{(i,j)\in C^-\}} x_{ij}$ і $\theta^+ = \min_{\{(i,j)\in C^+\}} (d_{ij} - x_{ij})$, а потім вже визначають $\theta = \min\{\theta^-, \theta^+\}$.

Перехід до нового опорного плану в $\mathrm{T_d}$ - задачі нічим не відрізняється від аналогічного переходу в Т-задачі і практично здійснюється додаванням θ до перевезень у клітинах додатного півциклу C^+ і відніманням θ від перевезень у клітинах від'ємного півциклу C^-, після чого цикл C розривають на клітині (i_l, j_l), за якою визначалось θ і яка стає небазисною. Перевезення у всіх інших клітинах $\mathrm{T_d}$ - таблиці залишаються незмінними.

І, нарешті, зауважимо, що викладений вище метод потенціалів для розв'язування Т-задачі розв'язуватиме і $\mathrm{T_d}$ - задачу, якщо в його алгоритм внести зміни у відповідності з викладеними особливостями $\mathrm{T_d}$ - задачі.

4.5. Приклади.

Приклад. Розв'язати транспортну задачу з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій, задану транспортною таблицею 35 (питомі транспортні витрати вказані у верхньому правому, а пропускні спроможності комунікацій – у нижньому лівому кутах кожної клітини).

Таблиця 35

a_i \ b_j	70	30	50
45	5 30	2 25	3 25
65	7 40	9 15	6 20
40	4 25	7 20	5 15

Розв'язування. Перевіряємо умову балансу. Задача збалансована, оскільки

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 45 + 65 + 40 = 150, \quad \sum_{j=1}^{3} b_j = 70 + 30 + 50 = 150 .$$

Знаходимо початковий опорний план задачі. Першою заповнюємо клітину $(1,2)$:

$$x_{12} = \min(a_1, b_2, d_{12}) = \min(45,30,25) = 25 ,$$

$$a_1^{(1)} = a_1 - x_{12} = 45 - 25 = 20 , \; b_2^{(1)} = b_2 - x_{12} = 30 - 25 = 5 .$$

Клітина заповнюється за пропускною спроможністю, яка менша і ресурсу, і попиту. Після занесення у клітину $(1,2)$ перевезення її викреслюємо з таблиці (див. таблицю 36).

Наступною заповнюємо клітину $(1,3)$:

$$x_{13} = \min(a_1^{(1)}, b_3, d_{13}) = \min(20,50,25) = 20 ,$$

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} - x_{13} = 20 - 20 = 0 , \; b_3^{(1)} = b_1 - x_{13} = 50 - 20 = 30 .$$

Таблиця 36

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 $\cancel{25}$ 25	3 25	20
65	7 40	9 15	6 20	
40	4 25	7 20	5 15	
$b_j - x_{ij}$		5		

Клітину $(1,3)$ виділяємо (підкреслюємо перевезення) і викреслюємо перший рядок, оскільки ресурс пункту $\boldsymbol{A_1}$ вичерпаний (див. таблицю 37).

Таблица 37

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 $\cancel{25}$ 25	3 **<u>20</u>** 25	0
65	7 40	9 15	6 20	
40	4 25	7 20	5 15	
$b_j - x_{ij}$		5	30	

Далі заповнюємо клітину $(3,1)$:

$x_{31} = \min(a_3, b_1, d_{31}) = \min(40,70,25) = 25$,

$a_3^{(1)} = a_3 - x_{31} = 40 - 25 = 15$, $b_1^{(1)} = b_1 - x_{31} = 70 - 25 = 45$.

Клітина заповнюється за пропускною спроможністю, яка менша і ресурсу, і попиту. Клітину $(3,1)$ викреслюємо після занесення до неї перевезення (див. таблицю 38).

Наступною заповнюємо клітину $(3,3)$:

$x_{33} = \min(a_3^{(1)}, b_3^{(1)}, d_{33}) = \min(15,30,15) = 15$,

$a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - x_{33} = 15 - 15 = 0$, $b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - x_{33} = 30 - 15 = 15$.

Таблиця 38

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5; 30	2; $\cancel{25}$; 25	3; **<u>20</u>**; 25	0
65	7; 40	9; 15	6; 20	
40	4; $\cancel{25}$; 25	7; 20	5; 15	15
$b_j - x_{ij}$	45	5	30	

Клітину $(3,3)$ виділяємо (підкреслюємо перевезення), не дивлячись на те, що $x_{33} = d_{33}$, і викреслюємо третій рядок, оскільки ресурс пункту $\boldsymbol{A_3}$ вичерпаний (див. таблицю 39).

Таблиця 39

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5; 30	2; $\cancel{25}$; 25	3; **<u>20</u>**; 25	0
65	7; 40	9; 15	6; 20	
40	4; $\cancel{25}$; 25	7; 20	5; **<u>15</u>**; 15	0
$b_j - x_{ij}$	45	5	15	

Далі заповнюємо клітину $(2,3)$:

$x_{23} = \min(a_2, b_3^{(2)}, d_{23}) = \min(65,15,20) = 15$,

$a_2^{(1)} = a_2 - x_{23} = 65 - 15 = 50$, $b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - x_{23} = 15 - 15 = 0$.

Клітину $(2,3)$ виділяємо (підкреслюємо перевезення) і викреслюємо третій стовпчик, оскільки попит пункту $\boldsymbol{B_3}$ задоволений (див. таблицю 40).

Таблиця 40

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 / / 30	2 / $\cancel{25}$ / 25	3 / **<u>20</u>** / 25	0
65	7 / / 40	9 / / 15	6 / **<u>15</u>** / 20	50
40	4 / $\cancel{25}$ / 25	7 / / 20	5 / **<u>15</u>** / 15	0
$b_j - x_{ij}$	45	5	0	

Наступною заповнюємо клітину $(2,1)$:

$$x_{21} = \min(a_2^{(1)}, b_1^{(1)}, d_{21}) = \min(50,45,40) = 40 ,$$

$$a_2^{(2)} = a_2^{(1)} - x_{21} = 50 - 40 = 10 , \; b_1^{(2)} = b_1^{(1)} - x_{21} = 45 - 40 = 5 .$$

Клітина заповнюється за пропускною спроможністю, яка менша і ресурсу, і попиту. Клітину $(2,1)$ викреслюємо після занесення до неї перевезення (див. таблицю 41).

Таблиця 41

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 / / 30	2 / $\cancel{25}$ / 25	3 / **<u>20</u>** / 25	0
65	7 / $\cancel{40}$ / 40	9 / / 15	6 / **<u>15</u>** / 20	10
40	4 / $\cancel{25}$ / 25	7 / / 20	5 / **<u>15</u>** / 15	0
$b_j - x_{ij}$	5	5	0	

Останньою заповнюємо клітину $(2,2)$:

$$x_{22} = \min(a_2^{(2)}, b_2^{(1)}, d_{22}) = \min(10,5,15) = 5 ,$$

$$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} - x_{22} = 10 - 5 = 5 , \; b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - x_{22} = 5 - 5 = 0$$

Клітину $(2,2)$ виділяємо (підкреслюємо перевезення) і викреслюємо другий стовпчик, оскільки попит пункту $\boldsymbol{B_2}$ задоволений (див. таблицю 42).

Таблиця 42

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 ~~25~~ 25	3 **20** 25	0
65	7 ~~40~~ 40	9 **5** 15	6 **15** 20	5
40	4 ~~25~~ 25	7 20	5 **15** 15	0
$b_j - x_{ij}$	5	0	0	

Оскільки існують нерозподілені залишки з ресурсів $\delta = a_2^{(3)} = 5$ та з попиту $\delta = b_1^{(2)} = 5$, то переходимо до другого етапу побудови початкового опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі. Будуємо розширену $\mathrm{T_d}$ - задачу, яку записуємо в таблицю 43.

Таблиця 43

a_i \ b_j	70	30	50	5	u_i
45	5 30	2 25 25	3 **20** 25	M	
65	7 40 40	9 **5** 15	6 **15** 20	M **5**	
40	4 25 25	7 20	5 **15** 15	M	
5	M **5**	M	M	0 **0**	
v_j					

Фіктивними в цій таблиці є пункт $\boldsymbol{A_4}$ з ресурсом $a_4 = \delta = 5$ і пункт $\boldsymbol{B_4}$ з попитом $b_4 = \delta = 5$. Незадоволений попит $\delta = b_1^{(2)} = 5$ пункту $\boldsymbol{B_1}$

задовольняємо за рахунок фіктивного виробника $\boldsymbol{A_4}$, покладаємо $x_{41} = 5$ і виділяємо клітину $(4,1)$; нерозподілений ресурс $\delta = a_2^{(3)} = 5$ пункту $\boldsymbol{A_2}$ розподіляємо фіктивному споживачу $\boldsymbol{B_4}$, покладаємо $x_{24} = 5$ і клітину $(2,4)$ також виділяємо. Оскільки для розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі число базисних клітин дорівнює 7, а виділених клітин є тільки 6, потрібно доповнити множину виділених клітин однією клітиною, але так, щоб ця множина залишилась ациклічною. Якщо діяти за принципом мінімального елемента, то першою потрібно перевірити клітину $(4,4)$. Занесемо в неї виділений нуль і методом викреслювання перевіримо отриману множину виділених клітин на ациклічність. Послідовність викреслювань буде такою: 1 рядок, 3 рядок, 1, 2, 3 стовпчики, 2 рядок, 4 рядок. Всі клітини таблиці викреслені, тому множину виділених клітин приймаємо за множину базисних клітин початкового опорного плану розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі (див. таблицю 43).

Розширену $\mathrm{T_d}$ - задачу розв'язуємо методом потенціалів. Покладемо $u_2 = 0$ і з рівнянь на базисних клітинах $(2,2), (2,3), (2,4)$ знаходимо:

$$v_2 = c_{22} + u_2 = 9 + 0 = 9,\ v_3 = c_{23} + u_2 = 6 + 0 = 6,\ v_4 = c_{24} + u_2 = \mathrm{M} + 0 = \mathrm{M}.$$

Знайдені потенціали заносимо у таблицю 44.

Таблиця 44

a_i \ b_j	70	30	50	5	u_i
45	5 30	2 25 25	3 **20** 25	M	
65	7 40 40	9 **5** 15	6 **15** 20	M **5**	0
40	4 25 25	7 20	5 **15** 15	M	
5	M **5**	M	M	0 **0**	
v_j		9	6	M	

Далі, послідовно використовуючи базисні клітини $(1,3), (3,3), (4,4), (4,1)$, обчислюємо:

$$u_1 = v_3 - c_{13} = 6 - 3 = 3,\ u_3 = v_3 - c_{33} = 6 - 5 = 1,$$

$u_4 = v_4 - c_{44} = \text{M} - 0 = \text{M},\ v_1 = c_{41} - u_4 = \text{M} + \text{M} = 2\text{M}$.

Потенціали заносимо у таблицю 45.

Таблиця 45

a_i \ b_j	70	30	50	5	u_i
45	8-2M 5 30	2 25 25	3 **20** 25	M	3
65	7 40 40	9 **5** 15	6 **15** 20	M **5**	0
40	4 25 25	-1 7 20	5 **15** 15	M	1
5	M **5**	M	M	0 **0**	M
v_j	2M	9	6	M	

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i, j): $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 45 (верхній лівий кут клітини) лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності:

$$\Delta_{11} = 5 + 3 - 2\text{M} = 8 - 2\text{M},\ \Delta_{32} = 7 + 1 - 9 = -1.$$

Клітини $(1,1), (3,2)$ з порушенням ознаки оптимальності належать до множини Γ_X^0. Тому для введення у множину базисних вибираємо клітину $(1,1)$ з найбільшим модулем від'ємної оцінки. Приєднуємо цю клітину до множини базисних клітин і методом викреслювання (всього буде два викреслювання: 3 рядок, 2 стовпчик) знаходимо цикл

$$C = \{(1,1),(4,1),(4,4),(2,4),(2,3),(1,3)\},$$

який розбиваємо на додатний $C^+ = \{(1,1),(4,4),(2,3)\}$ та від'ємний $C^- = \{(4,1),(2,4),(1,3)\}$ півцикли, першою відносячи до додатного півциклу клітину $(1,1)$, оскільки вона належить множині Γ_X^0. Цикл обходимо за напрямом проти годинникової стрілки, починаючи з клітини $(1,1)$ і почергово відносячи клітини циклу до додатного і від'ємного півциклів (див. таблицю 46).

За від'ємним півциклом $C^- = \{(4,1),(2,4),(1,3)\}$ знаходимо

$\theta^{-} = \min(x_{41}, x_{24}, x_{13}) = \min(5, 5, 20) = 5$,

Таблица 46

a_i \ b_j	70	30	50	5	u_i
45	8-2M 5 $+\theta \Downarrow$ 30	2 25 25	3 **<u>20</u>** $-\theta \Leftarrow$ 25	M	3
65	7 40 40	9 **<u>5</u>** 15	6 **<u>15</u>** $+\theta \Uparrow$ 20	M **<u>5</u>** $-\theta \Leftarrow$	0
40	4 25 25	-1 7 20	5 **<u>15</u>** 15	M	1
5	M **<u>5</u>** $-\theta \Rightarrow$	M	M	0 **<u>0</u>** $+\theta \Uparrow$	M
v_j	2M	9	6	M	$\theta = 5$

За додатним півциклом $C^{+} = \{(1,1),(4,4),(2,3)\}$ знаходимо

$\theta^{+} = \min(d_{11} - x_{11}, d_{44} - x_{44}, d_{23} - x_{23}) = \min(30 - 0, \infty - 0, 20 - 15) = 5.$

Отже, $\theta = \min(\theta^{-}, \theta^{+}) = \min(5,5) = 5$, і це значення досягається на трьох клітинах $(4,1)$, $(2,4)$, $(1,3)$.

Після переходу до нового опорного плану цикл C можна розривати на будь-якій з цих клітин, але у відповідності з ідеєю методу штучного базису потрібно розривати цикл на одній із фіктивних базисних клітин, звичайно, якщо це можливо зробити. Переходимо до нового опорного плану розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі, додаючи θ до перевезень додатного півциклу $C^{+} = \{(1,1),(4,4),(2,3)\}$ і віднімаючи θ від перевезень від'ємного півциклу $C^{-} = \{(4,1),(2,4),(1,3)\}$. Цикл розриваємо на фіктивній клітині $(4,1)$ (див. таблицю 47).

Всі блоковані М-методом фіктивні клітини розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі звільнились від додатних перевезень, обмін фіктивним продуктом відбувається тільки між фіктивними пунктами $\boldsymbol{A_4}$ і $\boldsymbol{B_4}$, тому з таблиці 47 можна видалити відповідні їм рядок і стовпчик (див. таблицю 48).

Таблиця 47

a_i \ b_j	70	30	50	5	u_i
45	5 **5** 30	2 25 25	3 **15** 25	M	
65	7 40 40	9 **5** 15	6 **20** 20	M **0**	
40	4 25 25	7 20	5 **15** 15	M	
5	M	M	M	0 **5**	
v_j					

Ми отримали початковий опорний план вихідної $\mathrm{T_d}$ - задачі (таблиця 48), продовжуємо її розв’язувати методом потенціалів.

Таблиця 48

a_i \ b_j	70	30	50	u_i
45	5 **5** 30	2 25 25	3 **15** 25	0
65	7 40 40	9 **5** $-\theta \Downarrow$ 15	6 **20** $+\theta \Leftarrow$ 20	-3
40	4 25 25	-1 7 $+\theta \Rightarrow$ 20	5 **15** $-\theta \Uparrow$ 15	-2
v_j	5	6	3	$\theta = 0$

Покладемо $u_1 = 0$ і послідовно використовуючи базисні клітини $(1,1)$,
$(1,3)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,2)$, обчислимо:

$$v_1 = c_{11} + u_1 = 5 + 0 = 5,\ v_3 = c_{13} + u_1 = 3 + 0 = 3,\ u_2 = v_3 - c_{23} = 3 - 6 = -3,$$

$$u_3 = v_3 - c_{33} = 3 - 5 = -2,\ v_2 = c_{22} + u_2 = 9 - 3 = 6\ .$$

Заносимо потенціали в таблицю 48.

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i,j): $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 48 (верхній лівий кут клітини) лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності. Така оцінка лише одна:

$$\Delta_{32} = 7 - 2 - 6 = -1 .$$

Клітина $(3,2) \in \Gamma_X^0$. Приєднуємо цю клітину до множини базисних клітин і знаходимо цикл

$$C = \{(3,2),(3,3),(2,3),(2,2)\} ,$$

який розбиваємо на додатний $C^+ = \{(3,2),(2,3)\}$ та від'ємний $C^- = \{(3,3),(2,2)\}$ півцикли, першою відносячи до додатного півциклу клітину $(3,2)$, оскільки вона належить множині Γ_X^0 (див. таблицю 48).

За від'ємним півциклом $C^- = \{(3,3),(2,2)\}$ знаходимо

$$\theta^- = \min(x_{22}, x_{33}) = \min(5, 15,) = 5 ,$$

по додатному півциклу $C^+ = \{(1,1),(4,4),(2,3)\}$ знаходимо

$$\theta^+ = \min(d_{32} - x_{32}, d_{23} - x_{23}) = \min(20 - 0, 20 - 20) = \min(20,0) = 0 .$$

Отже, $\theta = \min(\theta^-, \theta^+) = \min(5,0) = 0$, і це значення досягається на клітині $(2,3)$.

Оскільки $\theta = 0$, то опорний план залишається незмінним, а змінюється лише його базис. Розриваючи цикл C на клітині $(2,3)$, за якою визначалося θ, ми, тим самим, виводимо її із множини базисних і вводимо замість неї у множину базисних клітин клітину $(3,2)$ (див. таблицю 49).

Таблица 49

a_i \ b_j	70	30	50	u_i
45	5 / **5** / 30	2 / 25 / 25	3 / **15** / 25	0
65	7 / 40 / 40	9 / **5** / 15	6 / 20 / 20	-4
40	4 / 25 / 25	7 / **0** / 20	5 / **15** / 15	-2
v_j	5	5	3	

Обчислюємо потенціали, покладаючи $u_1 = 0$ і послідовно використовуючи рівняння на базисних клітинах $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,3)$, $(3,2)$, $(2,2)$:

$$v_1 = c_{11} + u_1 = 5 + 0 = 5,\ v_3 = c_{13} + u_1 = 3 + 0 = 3,$$

$$u_3 = v_3 - c_{33} = 3 - 5 = -2,\ v_2 = c_{32} + u_3 = 7 - 2 = 5,\ u_2 = v_2 - c_{22} = 5 - 9 = -4.$$

Потенціали заносимо у таблицю 49.

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i, j) $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ та перевіряємо умови оптимальності. Оцінки всіх небазисних клітин (вони заповнені за пропускними спроможностями комунікацій) недодатні. Ознака оптимальності опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі виконується.

Отже, поточний опорний план $\boldsymbol{X}^*$ в таблиці 15 – оптимальний. Остаточно маємо:

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 15 \\ 40 & 5 & 20 \\ 25 & 0 & 15 \end{pmatrix},$$

$$L(\boldsymbol{X}^*) = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 7 \cdot 40 + 9 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 25 + 7 \cdot 0 + 5 \cdot 15 =$$
$$= 25 + 50 + 45 + 280 + 45 + 120 + 100 + 75 = 740$$

4.6. Завдання для самостійного розв'язування.

Лабораторна робота. Розв'язування транспортної задачі з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій методом потенціалів. – 2год.

1. Розв'язати дану в індивідуальному завданні T_d – задачу методом потенціалів.

Індивідуальні завдання ([4], ст.123–130):

4.6.1.

b_j / a_i	15	30	65	20	10
50	14 15	10 35	2 14	5 10	10 5
20	11 8	5 4	4 20	11 12	3 18
30	9 10	8 7	12 32	1 20	18 14
40	1 8	4 4	9 16	17 20	18 17

4.6.2.

b_j / a_i	40	40	60	25	5
10	16 3	1 5	10 6	16 4	12 8
70	12 29	13 12	7 15	10 16	14 16
60	1 12	19 20	14 21	13 10	3 2
30	13 1	8 6	15 21	8 4	19 3

4.6.3.

b_j a_i	17	33	38	21	22
10	5 9	3 1	20 16	7 5	25 11
48	8 20	12 19	6 17	12 3	5 6
27	3 10	1 14	12 30	2 18	19 7
46	6 18	3 16	3 11	1 13	18 17

4.6.4.

b_j a_i	75	10	20	40	30
80	7 20	19 6	7 15	12 22	18 25
12	17 2	11 5	7 2	13 3	11 4
38	1 20	13 1	19 3	18 15	12 8
45	18 40	4 5	11 6	3 2	11 10

4.6.5.

b_j a_i	40	40	20	10	30
14	10 8	16 2	3 3	8 2	15 2
25	3 15	4 3	12 3	9 4	1 5
56	2 10	20 20	4 15	11 5	5 10
45	7 11	17 20	13 7	8 4	15 21

4.6.6.

b_j a_i	30	27	16	33	24
15	16 5	12 3	3 5	9 4	10 10
17	4 7	16 5	1 5	11 10	10 4
23	19 12	10 7	18 6	20 4	19 3
75	12 10	4 17	11 15	18 35	19 20

4.6.7.

b_j a_i	35	30	35	45	25
30	10 10	9 4	12 15	7 8	1 10
70	16 20	4 21	9 23	19 16	10 15
50	20 5	17 10	11 8	1 25	12 12
20	13 4	14 5	15 6	7 7	8 10

4.6.8.

b_j a_i	5	15	35	15	40
50	5 2	19 6	12 18	5 5	9 25
20	17 3	20 4	11 1	10 7	9 8
10	2 9	15 5	12 3	13 3	6 7
30	18 15	3 7	8 21	5 22	14 6

4.6.9.

b_j a_i	10	50	40	50	20
60	5 5	4 20	20 14	6 25	14 13
80	19 19	20 22	2 15	4 4	5 12
40	9 6	6 8	8 15	19 5	1 10
20	7 14	15 7	20 2	6 23	11 20

4.6.10.

b_j a_i	11	10	14	16	17
10	17 7	18 10	7 4	20 5	2 8
13	5 5	16 4	3 6	9 5	19 9
28	15 11	14 6	17 12	7 8	5 7
17	11 3	15 2	9 1	8 6	16 10

4.6.11.

b_j a_i	37	26	91	24	13
20	14 7	13 6	6 5	12 5	1 3
30	18 10	20 8	4 11	2 2	3 4
70	17 20	5 15	15 38	10 9	8 7
71	4 11	12 13	18 41	13 20	16 14

4.6.12.

b_j a_i	45	38	40	28	34
20	3 5	17 7	6 6	19 5	2 4
40	1 20	15 3	7 20	6 4	1 2
52	5 24	13 13	8 7	11 11	17 8
73	18 9	13 21	17 16	1 13	8 25

4.6.13.

b_j a_i	25	13	60	15	25
29	14 15	20 14	7 20	17 7	8 3
39	18 12	4 8	14 16	9 15	7 4
28	17 15	15 10	16 13	12 11	20 5
42	19 3	2 5	1 17	11 4	7 20

4.6.14.

b_j a_i	30	50	13	70	17
62	5 20	8 25	13 10	14 20	9 2
26	11 4	20 7	18 6	19 10	17 15
27	1 5	15 6	2 12	8 20	3 30
65	9 10	16 30	15 15	11 25	17 5

4.6.15.

b_j a_i	50	30	25	80	45
71	2 30	8 11	17 10	13 25	11 10
69	5 4	2 19	3 20	16 20	1 17
58	5 15	9 13	7 10	14 20	18 25
32	4 10	11 11	2 2	14 20	15 12

4.6.16.

b_j a_i	20	36	50	40	10
33	17 7	1 13	3 12	5 7	2 7
44	4 12	7 10	20 14	19 10	13 4
24	8 6	18 19	3 10	11 1	12 3
55	15 10	16 8	17 22	11 24	10 5

4.6.17.

b_j a_i	21	30	75	10	15
53	1 10	3 26	18 23	7 8	2 9
45	9 6	4 18	15 30	20 5	8 5
38	19 4	17 2	12 25	8 3	15 10
15	4 5	3 4	20 11	2 2	14 1

4.6.18.

b_j a_i	3	46	25	49	55
26	9 14	1 10	8 15	7 20	8 18
38	8 19	1 8	6 15	9 18	5 13
39	20 11	8 23	15 18	14 30	19 16
75	12 9	6 10	10 11	10 24	12 32

4.6.19.

b_j / a_i	55	30	20	33	47
11	10 / 6	18 / 5	12 / 7	8 / 3	13 / 2
64	17 / 20	2 / 4	18 / 10	13 / 30	7 / 4
35	4 / 8	3 / 15	1 / 2	6 / 41	12 / 22
75	12 / 32	16 / 12	8 / 10	14 / 3	15 / 23

4.6.20.

b_j / a_i	55	30	11	30	19
15	5 / 5	13 / 5	10 / 4	5 / 6	19 / 7
40	1 / 20	10 / 10	16 / 9	15 / 13	7 / 8
14	13 / 4	17 / 12	20 / 4	18 / 11	9 / 3
76	16 / 30	10 / 15	5 / 8	6 / 13	16 / 19

4.6.21.

b_j / a_i	20	40	17	10	33
19	18 / 10	12 / 9	7 / 10	15 / 6	12 / 8
52	14 / 4	17 / 31	11 / 5	2 / 5	7 / 17
34	19 / 11	6 / 3	11 / 8	12 / 15	6 / 16
15	10 / 5	8 / 10	20 / 3	1 / 6	13 / 4

4.6.22.

b_j / a_i	19	20	66	18	22
50	5 / 10	16 / 10	3 / 16	7 / 17	10 / 9
42	6 / 5	4 / 11	20 / 30	1 / 7	11 / 4
17	19 / 5	6 / 2	12 / 10	19 / 3	7 / 2
36	15 / 10	10 / 5	18 / 16	17 / 1	8 / 11

4.6.23.

b_j / a_i	55	30	77	20	23
27	16 / 17	9 / 7	2 / 12	3 / 10	17 / 4
35	12 / 3	4 / 15	19 / 10	10 / 10	5 / 5
49	6 / 10	12 / 3	11 / 27	13 / 4	2 / 11
94	5 / 30	19 / 14	10 / 30	4 / 10	1 / 12

4.6.24.

b_j / a_i	65	24	50	30	26
72	18 / 12	14 / 20	6 / 30	8 / 20	7 / 10
29	8 / 20	19 / 4	9 / 3	16 / 2	17 / 8
68	18 / 13	10 / 10	14 / 30	7 / 10	19 / 15
26	1 / 23	6 / 5	10 / 6	5 / 4	13 / 6

4.6.25.

b_j / a_i	36	40	50	35	36
13	11 / 11	12 / 12	17 / 17	15 / 12	13 / 15
44	1 / 4	4 / 13	6 / 17	2 / 13	5 / 6
77	7 / 15	11 / 27	9 / 13	16 / 41	19 / 22
62	2 / 20	10 / 3	5 / 25	18 / 20	6 / 12

4.6.26.

b_j / a_i	67	30	37	23	40
37	14 / 27	19 / 17	17 / 4	12 / 8	20 / 10
61	16 / 20	1 / 5	4 / 12	7 / 11	5 / 20
72	11 / 20	3 / 4	9 / 20	7 / 12	19 / 22
27	12 / 7	16 / 20	11 / 7	5 / 5	13 / 10

4.6.27.

b_j a_i	44	50	40	23	37
29	14 14	8 15	10 9	6 10	11 6
66	17	1	19	16	17
17	12 4	11 20	15 15	8 4	16 32
82	10 10	1 4	5 3	14 7	17 10

4.6.28.

b_j a_i	56	30	40	15	45
77	6 16	1 30	19 21	20 9	3 30
24	10 8	12 4	19 5	4 10	17 11
69	3 30	2 4	20 29	19 5	6 15
16	18 14	17 6	9 3	12 7	4 2

4.6.29.

b_j a_i	37	60	30	40	70
78	5 17	16 20	10 7	3 21	7 27
37	6 5	14 6	17 7	2 8	4 32
53	18 5	8 20	3 25	7 10	4 10
69	19 27	10 20	17 3	15 19	5 10

4.6.30.

b_j a_i	68	40	30	30	30
33	8 13	18 18	11 10	17 7	7 8
42	16 10	14 5	18 15	15 12	4 10
99	2 45	8 20	3 21	12 19	16 20
24	1 8	17 20	12 12	18 4	4 1

4.6.31.

b_j a_i	33	57	33	44	26
35	13 13	2 12	9 15	14 14	6 5
64	15 10	19 15	15 10	6 34	1 7
75	17 15	8 21	10 23	19 10	12 11
19	8 8	5 11	19 15	20 4	6 10

4.6.32.

b_j a_i	35	50	40	10	33
14	16 13	16 12	14 15	15 4	11 8
38	13 10	20 16	10 10	12 4	11 3
90	14 15	6 24	3 20	2 1	5 33
26	19 8	9 11	2 10	20 7	11 4

4.6.33.

b_j a_i	22	41	40	50	19
66	11 13	5 6	2 20	4 30	13 10
79	18 12	2 20	14 20	20 16	5 19
11	20 4	7 5	6 8	11 6	5 3
16	18 9	10 15	12 2	3 1	4 5

4.6.34.

b_j a_i	43	50	82	27	21
92	10 23	2 20	18 30	3 13	14 12
16	20 14	6 7	12 12	15 5	19 5
77	5 23	7 10	13 42	6 5	17 2
38	15 4	6 14	1 13	5 8	4 4

4.6.35.

b_j / a_i	43	54	62	46	18
56	3 10	6 15	15 5	11 28	4 10
83	3 13	2 25	5 15	12 16	11 17
35	1 12	8 17	17 16	14 1	20 4
49	5 22	16 30	2 26	17 3	13 1

4.6.36.

b_j / a_i	39	40	35	30	35
15	3 11	2 5	6 4	20 8	13 20
76	14 15	6 10	17 16	16 15	6 24
19	13 5	18 10	4 4	3 2	5 3
69	18 9	17 16	8 19	19 15	11 15

4.6.37.

b_j / a_i	99	53	21	47	29
72	6 32	20 15	8 7	14 20	5 10
84	6 27	19 15	7 19	12 17	13 9
15	10 13	19 3	5 5	8 2	14 4
78	18 30	10 28	13 20	4 10	19 15

4.6.38.

b_j / a_i	19	40	30	52	28
20	3 7	15 4	1 12	2 5	17 5
76	8 6	15 20	11 10	8 37	17 10
19	3 8	20 4	19 13	7 13	10 3
54	1 6	2 25	16 10	18 7	7 15

4.6.39.

b_j / a_i	24	50	30	25	45
22	5 12	16 7	15 10	3 3	12 5
47	17 28	13 30	4 5	19 10	8 4
36	1 17	7 12	17 10	18 5	14 14
69	8 3	6 22	13 10	14 13	12 24

4.6.40.

b_j / a_i	44	36	29	35	44
22	15 12	8 6	10 5	11 10	14 4
76	5 16	1 10	3 20	16 22	14 32
64	2 18	13 12	16 19	4 5	5 14
26	19 5	18 16	14 10	5 5	12 3

4.6.41.

b_j / a_i	40	40	40	40	40
35	20 16	8 7	10 10	13 11	15 5
55	17 5	1 25	11 10	19 5	14 13
28	3 11	13 3	18 10	6 18	10 10
82	4 12	7 10	2 20	13 27	4 16

4.6.42.

b_j / a_i	41	27	32	53	38
15	20 5	15 7	5 10	1 3	8 5
76	19 10	3 10	14 11	7 30	9 20
12	1 5	4 6	11 14	14 8	7 6
88	13 25	15 12	5 15	16 23	5 15

4.6.43.

a_i \ b_j	49	30	22	23	25
13	3 / 5	6 / 18	16 / 6	2 / 7	14 / 4
79	3 / 19	16 / 24	2 / 5	7 / 23	6 / 17
23	20 / 10	19 / 5	13 / 8	5 / 3	15 / 6
34	11 / 20	14 / 5	10 / 10	9 / 14	17 / 6

4.6.44.

a_i \ b_j	34	21	19	64	30
25	19 / 19	4 / 20	18 / 4	2 / 8	14 / 5
36	19 / 5	6 / 9	10 / 6	11 / 15	8 / 6
41	5 / 3	11 / 11	1 / 4	16 / 30	13 / 18
66	3 / 13	6 / 5	2 / 13	12 / 20	17 / 23

4.6.45.

a_i \ b_j	33	40	43	35	25
63	12 / 13	11 / 10	5 / 11	15 / 15	8 / 16
72	2 / 20	3 / 21	7 / 7	4 / 22	18 / 7
17	19 / 19	5 / 6	17 / 15	11 / 8	7 / 4
24	11 / 10	8 / 11	1 / 13	12 / 2	16 / 1

4.6.46.

a_i \ b_j	35	40	60	45	15
37	16 / 12	17 / 15	16 / 8	12 / 10	8 / 5
40	3 / 5	6 / 11	5 / 15	14 / 7	15 / 5
55	9 / 6	8 / 16	18 / 20	2 / 15	19 / 13
63	16 / 15	5 / 4	6 / 20	18 / 25	7 / 8

4.6.47.

a_i \ b_j	28	70	15	13	42
74	6 / 16	12 / 32	5 / 5	3 / 9	11 / 14
33	13 / 13	16 / 17	9 / 2	7 / 4	12 / 12
19	17 / 17	1 / 15	16 / 2	15 / 4	5 / 4
42	20 / 14	19 / 8	18 / 6	7 / 7	18 / 16

4.6.48.

a_i \ b_j	71	20	50	23	27
54	4 / 21	2 / 22	9 / 13	16 / 10	5 / 12
73	4 / 25	10 / 12	18 / 15	15 / 10	3 / 13
13	14 / 10	11 / 5	18 / 5	12 / 5	2 / 4
51	15 / 27	7 / 5	17 / 17	13 / 8	20 / 4

Додаток.

Тема: “Транспортна задача”.

Лекція 13. Транспортна задача, постановка, та основні властивості. – 2год.

Змістовна постановка транспортної задачі. Математична модель збалансованої транспортної задачі (T – задачі). Транспортна таблиця. План перевезень. Вектори-комунікацій. Властивості T – задачі. Критерій допустимості T – задачі. Теорема про ранг матриці T коефіцієнтів системи обмежень T – задачі. Теорема про розв’язність T – задачі. Графова інтерпретація T – задачі. Опорні плани T – задачі. Критерій лінійної незалежності векторів-комунікацій.

Завдання для самостійної роботи. – 4год.

Змістовна постановка транспортної задачі. Математична модель збалансованої транспортної задачі (T – задачі). Транспортна таблиця. План перевезень. Вектори комунікацій. Властивості T – задачі. Критерій допустимості T – задачі. Теорема про ранг матриці T коефіцієнтів системи обмежень T – задачі. Теорема про розв’язність T – задачі. Графова інтерпретація T – задачі. Опорні плани T – задачі. Критерій лінійної незалежності векторів-комунікацій.

Лекція 14. Властивості опорних планів T – задачі. – 2год.

Теорема про розклад вектора-комунікацій. Властивості опорних планів T – задачі: допустимість, узгодженість з рангом матриці T, ациклічність. Метод викреслювання. Методи побудови початкових опорних планів Т-задачі: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента.

Завдання для самостійної роботи. – 4год.

Теорема про розклад вектора-комунікацій. Властивості опорних планів T – задачі: допустимість, узгодженість з рангом матриці T, ациклічність. Метод викреслювання. Методи побудови початкових опорних планів T – задачі: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента.

Лекція 15. Двоїста задача до транспортної. Метод потенціалів.– 2год.

Двоїста задача до транспортної, потенціали рядків та стовпчиків транспортної таблиці. Обґрунтування методу потенціалів. Базисна матриця опорного плану T – задачі. Обчислення потенціалів. Перевірка оптимальності опорного плану. Правило побудови циклу для перерозподілу перевезень та розбиття циклу на додатний і від’ємний *півцикли. Перехід до нового опорного плану. Алгоритм методу потенціалів.*

Лабораторна робота. Розв’язування збалансованої транспортної задачі методом потенціалів. – 2год.

1. Для даної в індивідуальному завданні $\boldsymbol{T}$ – задачі побудувати двоїсту задачу.

2. Знайти початковий опорний план $\boldsymbol{T}$ – задачі методом мінімального елемента та розв’язати її методом потенціалів.

3. Знайти початковий опорний план $\boldsymbol{T}$ – задачі методом північно-західного кута та розв’язати її методом потенціалів.

4. Порівняти знайдені оптимальні розв’язки за складом та за кількістю ітерацій методу потенціалів, необхідних для їх отримання.

Завдання для самостійної роботи. – 4год.

Двоїста задача до транспортної, потенціали рядків та стовпчиків транспортної таблиці. Обгрунтування методу потенціалів. Базисна матриця опорного плану $\boldsymbol{T}$ – задачі. Обчислення потенціалів. Перевірка оптимальності опорного плану. Правило побудови циклу для перерозподілу перевезень та розбиття циклу на додатний і від’ємний півцикли. Перехід до нового опорного плану. Алгоритм методу потенціалів.

Лекція 16. Відкриті транспортні задачі. Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій. – 2год.

Відкриті або незбалансовані транспортні задачі, зведення їх до збалансованих. Врахування додаткових умов з вивезення та попиту на продукт. Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій, матрична постановка ($\boldsymbol{T}_d$ – задача). Умови розв’язності. Побудова початкового опорного плану, ознака недопустимості $\boldsymbol{T}_d$ – задачі. Ознака оптимальності опорного плану. Правило побудови циклу для перерозподілу перевезень та розбиття циклу на додатний і від’ємний півцикли. Перехід до нового опорного плану.

Лабораторна робота. Розв’язування транспортної задачі з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій методом потенціалів. – 2год.

1. Розв’язати дану в індивідуальному завданні $\boldsymbol{T}_d$ – задачу методом потенціалів.

Завдання для самостійної роботи. – 4год.

Відкриті або незбалансовані транспортні задачі, зведення їх до збалансованих. Врахування додаткових умов з вивезення та попиту на продукт. Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій, матрична постановка ($\boldsymbol{T}_d$ – задача). Умови розв'язності. Побудова початкового опорного плану, ознака недопустимості $\boldsymbol{T}_d$ – задачі. Ознака оптимальності опорного плану. Правило побудови циклу для перерозподілу перевезень та розбиття циклу на додатний і від'ємний півцикли. Перехід до нового опорного плану.

Контрольні запитання до теми "Транспортна задача".

1. Змістовна постановка транспортної задачі.
2. Математична модель збалансованої транспортної задачі ($\boldsymbol{T}$ – задачі).
3. Транспортна таблиця. План перевезень. Вектори комунікацій.
4. Властивості $\boldsymbol{T}$ – задачі. Критерій допустимості $\boldsymbol{T}$ – задачі.
5. Теорема про ранг матриці $\boldsymbol{T}$ коефіцієнтів системи обмежень $\boldsymbol{T}$ – задачі.
6. Теорема про розв'язність $\boldsymbol{T}$ – задачі.
7. Графова інтерпретація $\boldsymbol{T}$ – задачі.
8. Опорні плани $\boldsymbol{T}$ – задачі.
9. Критерій лінійної незалежності векторів комунікацій.
10. Теорема про розклад вектора комунікацій.
11. Властивості опорних планів $\boldsymbol{T}$ – задачі: допустимість, узгодженість з рангом матриці $\boldsymbol{T}$, ациклічність.
12. Метод викреслювання.
13. Методи побудови початкових опорних планів $\boldsymbol{T}$ – задачі: метод північно-західного кута, метод мінімального елемента.
14. Двоїста задача до транспортної, потенціали рядків та стовпчиків транспортної таблиці.
15. Обгрунтування методу потенціалів. Базисна матриця опорного плану $\boldsymbol{T}$ – задачі.
16. Обчислення потенціалів.
17. Перевірка оптимальності опорного плану.
18. Правило побудови циклу для перерозподілу перевезень та розбиття циклу на додатний і від'ємний півцикли.
19. Перехід до нового опорного плану.
20. Алгоритм методу потенціалів.
21. Відкриті або незбалансовані транспортні задачі, зведення їх до збалансованих. Врахування додаткових умов з вивезення та попиту на продукт.
22. Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій, матрична постановка ($\boldsymbol{T}_d$ – задача). Умови розв'язності.

23. Побудова початкового опорного плану, ознака недопустимості $\boldsymbol{T}_d$ – задачі.
24. Ознака оптимальності опорного плану.
25. Правило побудови циклу для перерозподілу перевезень та розбиття циклу на додатний і від'ємний півцикли.
26. Перехід до нового опорного плану.

Список літератури.

(основна література – 1–4, додаткова – 5, 6)

1. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. – М.: Наука, 1968.– 384 с.

2. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник. – К.: Слово., 2006. – 816 с.

3. Попов Ю.Д., Тюптя В.І., Шевченко В.І. Методи оптимізації. Навчальний посібник для студентів спеціальностей «Прикладна математика», «Інформатика», «Соціальна інформатика». – К.: Абрис, 1999. – 217 с.

4. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 192 с.

5. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.

6. Зайченко Ю.П., Шумилова С.А. Исследование операций. Сборник задач.– К.: Вища шк., 1990. – 239 с.

Зміст

Навчальний посібник

ОЛЕКСАНДР МАРАТОВИЧ ІКСАНОВ
ВІТАЛІЙ ІВАНОВИЧ ШЕВЧЕНКО

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ (КУРС “ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ”)

84 с

Підписано до друку 1.11.2010. Формат 60 Х 84/16
Папір офсетний. Друк високий. Умов. друк. арк. 4,13
Умов, видав, арк. 4,25. Тираж; 300 прим. Замовлення 12-288

Наукове видавництво "ТВіМС"
Свідоцтво ДК110 від 05.07.2000 р.
Київ 03127, пр. Глушкова, 6
відділ замовлень tbimc@online.ua