Лекція 1

## Скінченний та зліченний імовірносний простір.
## Геометричне визначення імовірності.

### 1.1. Коротка історична довідка

***Теорія ймовірностей*** – математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ. Корені теорії ймовірностей сягають давніх часів. Відомо, що у стародавніх Китаї, Індії, Єгипті, Греції вже використовувались деякі ймовірносні судження в процесі перепису населення та визначення чисельності військ.

Вважають, що теорія ймовірностей зародилась у листуванні двох великих вчених – Б.Паскаля (1623 – 1662) і П.Ферма (1601 – 1665). Одна з перших імовірносних задач була запропонована Паскалю кавалером де Мере і полягала в наступному. Два гравці почали гру, яка складається з окремих партій. Кожна партія має своїм результатом виграш одного з двох гравців. Той з них, хто виграє раніше іншого $N$ партій, вважається переможцем і забирає обидві ставки, внесені на початку гри. Трапилося так, що гра припинилась у момент, коли одному не вистачало до виграшу „а” партій, а другому –„в” партій. Призовий фонд треба розділити між гравцями так, щоб кожний гравець отримав частину суми, пропорційну ймовірності свого виграшу.

Паскаль знайшов імовірність виграшу для кожного гравця при продовженні гри за нових початкових умов. У подальшому він запропонував цю задачу П.Ферма, який поширив результат Паска ля на більш складний випадок, у грі приймає участь будь-яке число гравців.

Наукову основу теорії ймовірностей заклав математик Яков Бернуллі (1654-1705). Його праця "*Мистецтво припущень*" стала першим ґрунтовним трактатом з теорії ймовірностей. В цьому трактаті він ввів поняття ймовірності як числа, яке лежить між 0 та 1 і дорівнює відношенню числа сприятливих події наслідків до загального числа усіх можливих наслідків. Відкритий ним закон великих чисел дав можливість встановити зв'язок між ймовірністю випадкової події і частотою її появи.

Подальші успіхи теорії ймовірностей пов'язані з іменами А.Муавра (1667-1754), П. Лапласа (1749-1827), К.Гаусса (1777-1855), С.Пуассона (1781-1840) та інших.

## 1.2. Події та операції над подіями

Введемо поняття ***стохастичного експерименту.***
Будемо називати експеримент (випробування) стохастичним, якщо при виконанні певної сукупності умов його можна проводити необмежену кількість разів і результат наперед не можна передбачити.

Можливий результат $\omega$ стохастичного експерименту будемо називати ***елементарною подією.*** Сукупність усіх можливих результатів експерименту, тобто сукупність елементарних подій, будемо називати ***простором елементарних подій*** і позначати літерою $\Omega$. Простір елементарних подій називається ***дискретним,*** якщо множина $\Omega$ скінченна або зліченна.

***Випадкова подія*** може визначатися по-різному:

а) як подія, яка може відбутися чи не відбутися в результаті стохастичного експерименту;

б) як деяка підмножина $\Omega$ (саме таке визначення ми будемо вважати основним і далі будемо уточнювати його);

в) як деяка умова, що визначає підмножину $\Omega$.

У випадку дискретного $\Omega$ усі його підмножини можна вважати ***подіями.*** Сама множина $\Omega$ називається ***достовірною подією,*** а порожня множина $\varnothing$ - ***неможливою подією.***

Будемо говорити, що при здійсненні експерименту відбулася подія $A$, якщо як результат ми отримали $\omega_0$ і $\omega_0 \in A$. При цьому про елементарну подію $\omega_0$ говорять як про таку, що сприяє події $A$ або тягне за собою подію $A$.

***Сумою подій*** $A$ і $B$ називається подія $C$, яка відбувається лише тоді, коли відбувається подія $A$ або подія $B$. Позначення: $C=A\cup B$.

***Добутком подій*** $A$ і $B$ називається подія $C$, яка відбувається лише тоді, коли відбувається і подія $B$, і подія $A$. Позначення: $C=A\cap B$ або $C=AB$.

***Різницею подій*** $A$ і $B$ називається подія $C$, яка відбувається лише тоді, коли відбувається подія $A$, і не відбувається подія $B$. В цьому випадку пишуть $C=A\backslash B$.

Подія $\Omega \setminus A$ називається ***протилежною*** до події $A$ (або доповненням до події $A$) і позначається як $\overline{A}$.

Якщо кожна елементарна подія, яка сприяє події $A$, сприяє і події $B$, то говорять, що подія $B$ випливає з події $A$, або подія $A$ тягне за собою подію $B$. Це відношення між подіями записують у вигляді $A\subset B$ (або $B\supset A$).

Оскільки події можна розглядати як множини (а саме – підмножини з $\Omega$), то для операцій над подіями справедливі ті ж самі правила, що і для операцій над множинами:

1) $A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$ – комутативність суми та добутку;

2) $A\cup (B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap (B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ - асоціативність суми та
добутку;

3) $A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$, $A \cup (B \cap C) = A \cup B \cap A \cup C$ – розподільні закони добутку відносно додавання та додавання відносно добутку;

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – правило де Моргана.

Послідовність подій $A_n$ називається зростаючою, якщо $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$.

Послідовність подій $B_n$ називається спадною, якщо $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$.

**<u>П р и к л а д.</u>** Два клієнти страхової компанії уклали угоди страхування на випадок крадіжки власних авто терміном на один рік. Страхові події з кожним із них можуть статися незалежним чином у будь-який день року.

Описати:

а) простір елементарних подій $\Omega$;

б) подію $A$, яка полягає в тому, що відшкодування клієнтам доведеться сплатити в один день;

в) подію $B$, яка полягає в тому, що термін між сплатою відшкодувань буде не більшим ніж 30 днів.

***Розв'язання:***

а) Припустимо, що мова йде про рік, який не є високосним. Тоді за простір елементарних подій можна обрати множину пар $(i, j)$, де кожна компонента $i$ та $j$ приймає значення від 1 до 365, тобто $\Omega = \{(i,j) : i = \overline{1,365},\ j = \overline{1,365}\}$.

б) В цих позначеннях подія $A$ буде виглядати як множина пар з однаковими компонентами, а саме $A = \{(i,j) : i = j,\ j = \overline{1,365}\}$.

в) Подібним же чином подія $B$ запишеться так: $B = \{(i,j) : |i - j| \le 30,\ \ i = \overline{1,365},\ j = \overline{1,365}\}$.

## 1.3. Скінченний простір елементарних подій

Перед тим, як формально визначити ймовірність, коли множина подій в експерименті скінченна, наведемо емпиричне визначення ймовірності, що базується на понятті частоти.

Розглянемо деякий стохастичний експеримент і подію $A$, яка спостерігається в цьому експерименті. Нехай експеримент незалежним чином повторюється $n$ раз і $n_A$ - число експериментів, в яких настала подія $A$. Відношення

$$h_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

будемо називати частотою події $A$ в серії експериментів, що проведені.

Частота $h_n(A)$ має наступні властивості:

1) $0 \le h_n(A) \le 1$;

2) $h_n(\Omega) = 1$ , $\Omega$ - вірогідна подія, що настає при кожному здійсненні експерименту;

3) $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B), \quad A, B$ - несумісні події, тобто відбутися одночасно вони не можуть.

Частота змінюється, якщо буде проведена інша серія з $n$ експериментів , або якщо змінюється $n$. Однак, як показують статистичні дані, при достатньо великих $n$ для більшості серій експериментів частота зберігає майже сталу величину. Причому великі відхилення спостерігаються тим рідше, чим більше $n$.

У зв'язку з цим дамо таке ***визначення.*** Якщо при великих $n$ частота $h_n(A)$ події $A$ мало відрізняється від деякого фіксованого значення $p$, то говорять, що подія $A$ стохастично стійка, а число $p$ представляє собою ймовірність події $A$ .

Коли буде побудована формальна математична модель стохастичного експерименту, то в рамках цієї моделі можна буде строго довести стійкість частоти. Відзначимо також, що при моделюванні стохастичного експерименту необхідно для ймовірності зберігти властивості 1)-3), яким задовольняє частота події.

Розглянемо тепер стохастичний експеримент, у якому ми можемо спостерігати скінченне число подій. Будемо розрізняти *елементарні* (неділимі) події і *складені* події (або просто події). Наприклад, при підкиданні грального кубика випадіння парного числа очок еквівалентне випадінню 2,4 або 6. У даному випадку складена подія $A=\{2, 4, 6\}$.

Сукупність усіх елементарних подій $\Omega$ будемо називати ***простором елементарних подій.*** Для скінченних $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ подією будемо називати довільну підмножину $\Omega$.

Для того, щоб для події $A$ визначити її ймовірність, візьмемо $n$ чисел $p_1, p_2, ..., p_n$, які задовольняють умовам

$$p_i \ge 0,\ i = 1,2,...,n, \qquad \text{і} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

На множині усіх подій імовірність $\boldsymbol{P}(\cdot)$ визначимо за формулою

$$P(A) \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}, \quad \text{якщо} \quad A = \{\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_k}\} \subset \Omega \quad \text{і} \quad P(\varnothing) \overset{def}{=} 0.$$

Символ $\boldsymbol{P}(\cdot)$ походить від латинського слова probabilitas, що означає імовірність.

З визначення випливають такі ***властивості ймовірності:***

1. $P(\Omega) = 1$ - ймовірність достовірної події дорівнює одиниці.

2. Для будь-якого $A \subset \Omega : 0 \le P(A) \le 1$ - ймовірність завжди в межах відрізка [0,1].

3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, якщо $A \cap B = \varnothing$ - адитивність ймовірності для об'єднання несумісних подій.

Властивості 1)-3) відповідають властивостям частоти.

4. $P(\{\omega_i\}) = p_i, \quad i = 1,2,...,n$ - ймовірність елементарної події дорівнює параметру $p_i$ .

Будемо називати визначення ймовірності у скінченній ймовірносній схемі ***класичним,*** якщо

$$p_1 = p_2 = ... = p_n = \frac{1}{n} \qquad \text{і} \qquad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \ ,$$

де $|A|$ – кількість елементів множини $A$.

При застосуванні останньої формули використовується такий розділ математики як комбінаторика. Нижче наведені деякі формули та позначення з цього розділу, які найчастіше зустрічаються при підрахунках:

1) n! – число різних можливих перестановок з n елементів;

2) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число комбінацій з $n$ елементів по $k$, в яких порядок елементів не враховується;

3) $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ – число комбінацій з $n$ елементів по $k$, в яких враховується порядок елементів;

4) $\overline{C}_n^k = C_{k+n-1}^{n-1} = \dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$ – число комбінацій (без урахування порядку) з $n$ типів елементів по $k$ з повтореннями.

**П р и к л а д 1.** Серед 10 угод страхування авто 5 укладено на випадок крадіжки, 3 – на випадок ушкоджень з вини автовласника та 2 – на випадок ушкоджень не з вини автовласника. Всі страхові випадки рівноможливі. Знайти ймовірність того, що з трьох страхових випадків:

а) будуть рівно два, що мають одну і ту саму причину;

б) всі випадки будуть мати різні причини.

***Розв'язання:*** Нехай $A$ , $B$ означають події: $A$ = {з трьох страхових випадків будуть рівно два, що мають одну і ту саму причину}, $B$ = {всі випадки мають різні причини}. Тоді

$$P(A)=\frac{C_5^2C_5^1+C_3^2C_7^1+C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{79}{120},\quad P(B)=\frac{5\cdot3\cdot2}{C_{10}^3}=\frac{1}{4}.$$