Лекція 5

Ф о р м у л а п о в н о ї й м о в і р н о с т і і ф о р м у л а Б а й є с а

Важливу роль в теорії ймовірностей відіграє наступний результат.

Т е о р е м а 1 (формула повної ймовірності). Нехай для події A існує послідовність подій B_i, $i=1,2,...$ таких, що $B_i \cap B_j = \varnothing$ для $i \neq j$, $P(B_i) > 0$ для $i = 1,2,\ldots$, і крім того $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Тоді

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) P(A/B_i)\,. \qquad (5.1)$$

Доведення. З несумісності подій B_i, $i=1,2,\ldots$ і аксіоми про σ - адитивність випливає

$$P(A) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap B_i)\,.$$

Підставляючи в останню формулу $P(A \cap B_i) = P(A/B_i)P(B_i)$, $i=1,2,...$, приходимо до формули повної ймовірності (5.1).

П р и к л а д 1. Є N урн з білими і чорними кулями, причому в кожній урні m_i білих куль і (n_i-m_i) чорних куль. Експеримент полягає у виборі навмання однієї з урн і вилучення з неї однієї кулі. Знайти ймовірність події A, яка полягає у тому, що вилучена біла куля?

Розв'язання: Нехай B_i, $i=1,\ldots,N$ – подія, яка полягає у тому, що на першому кроці була витягнута i-та урна. Тоді $P(B_i)=1/N$, $P(A/B_i)=m_i/n_i$, $i=1,2,\ldots,N$. Використовуючи (2.3) знаходимо $P(A) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\frac{m_i}{n_i}$.

Т е о р е м а 2 (ф о р м у л а Б а й є с а).

Визначення. Будемо говорити, що події $H_1,\ldots,H_n,\ldots$ утворюють повну групу подій, якщо є виконаними наступні умови:

1) $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega$; 2) $H_i \cap H_j = \varnothing$ для $i \neq j$; 3) $P(H_i) > 0, \quad i = 1, 2, ...,$

Зазвичай події $H_i, \quad i = 1, 2, ...$ називають гіпотезами.

Нехай $H_1, ..., H_n, ...$ - повна група подій (гіпотез) і B – деяка подія така, що $P(B) > 0.$ Тоді

$$P(H_i / B) == \frac{P(B / H_i) P(H_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} P(B / H_k) P(H_k)} \ . \tag{5.2}$$

Доведення. З визначення умовної ймовірності маємо $P(H_i / B) = \frac{P(H_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B / H_i) P(H_i)}{P(B)}.$ Застосовуючи до знаменника $P(B)$ формулу повної ймовірності $P(B) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B / H_k) P(H_k)$, приходимо до (5.2). Теорему доведено.

Формулі Байєса можна дати наступну інтерпретацію. Нехай подія B – результат деякого експерименту. Імовірність $P(H_i)$ – це апріорні ймовірності гіпотез, які підраховані до проведення експерименту. Умовні ймовірності $P(H_i / B)$– це апостеріорні ймовірності гіпотез, які підраховані після того, як став відомим результат B. Формула Байєса дозволяє за апріорними ймовірностями і за умовними ймовірностями події B при гіпотезах H_i підраховувати апостеріорні ймовірності.

П р и к л а д 1. Нехай деякий прилад виробляється двома підприємствами, причому обсяг продукції другого підприємства в k разів більший за обсяг продукції першого. Нехай p_1 і p_2 - ймовірності того, що прилад виявився бракованим на першому і другому підприємстві відповідно. Прилади пішли у продаж. Яка ймовірність того, що ви купили прилад з другого підприємства, якщо він виявився бракованим?

Розв'язання: Введемо гіпотези : H_1 - навмання обраний прилад зроблено на першому підприємстві, H_2 – на другому підприємстві. Нехай

x - кількість приладів, які виробив перший пілприємстві, а kx - другий.Тоді $P(H_1)=\frac{x}{x+kx}=\frac{1}{1+k}$; $P(H_2)=\frac{kx}{x+kx}=\frac{k}{k+1}$. Нехай B – навмання обраний прилад виявився бракованим. За формулою Байєса знаходимо

$$P(H_2/B)=\frac{\frac{k}{1+k}\cdot p_2}{\frac{1}{1+k}\cdot p_1+\frac{k}{1+k}\cdot p_2}=\frac{k\cdot p_2}{p_1+k\cdot p_2}.$$