Семінар 8

Дискретна випадкова величина

(Ω, U, P)

$\xi(\omega): \Omega \to X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ при цьому $A_k = \{\omega : \xi(\omega) = x_k\} \in U$

$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \chi_{A_k}(\omega)$

Закон розподілу визначається значеннями $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, які приймає ξ, і ймовірностями $P\{\xi = x_k\}$ цих значень. Позначимо $P\{\xi = x_k\} = P(A_k) = p_k$. Тоді закон розподілу $P\{\xi \in B\}$ можна визначити за допомогою таблиці

x_1	x_2	….	x_k	….
p_1	p_2	….	p_k	….

Очевидно, що $p_k \geq 0$ і $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

Сума ряду

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = \mathrm{x}_i)$$

називається ***математичним сподіванням***, якщо ряд збігається абсолютно.

Математичне сподівання $\mathrm{M}\xi^n$ називається ***моментом*** n-го порядку випадкової величини ξ. ***Абсолютним моментом*** n-го порядку будемо називати $\mathrm{M}|\xi|^n$. ***Центральним моментом*** n-го порядку і абсолютним центральним моментом *n-го* порядку називається відповідно $\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^n$ і $\mathrm{M}|\xi - \mathrm{M}\xi|^n$.

Центральний момент другого порядку називається ***дисперсією випадкової величини*** і позначається $D\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2$.

$$D\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 \geq 0 \Rightarrow M\xi^2 \geq \left(M\xi\right)^2$$

<u>Задача 1</u> Довести формулу $D\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2$.

Розв'язок. За визначенням $D\xi = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2\xi M\xi + \left(M\xi\right)^2\right) =$

$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + \left(M\xi\right)^2 = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2$$

<u>Задача 2.</u> Нехай випадкова величина ξ має розподіл Пуассона $\xi \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$, тобто $P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k = 0,1,\ldots$. Знайти $M\xi$ та $D\xi$.

Розв'язок. Згідно з визначенням $M\xi = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} kP(\xi = k) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} k\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} =$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = |k-1=n| = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda .$$

Для підрахунку дисперсії використаємо формулу: $D\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2$.

$$\mathrm{M}\xi^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left\{k(k-1)+k\right\}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Позаяк $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda$, знайдемо

$$\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2 .$$

Отже, $D\xi = \mathrm{M}\xi^2 - (\mathrm{M}\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

<u>Задача 3.</u> Нехай ξ – випадкова величина, яка набуває значень 0, ± 1, ± 2, …, ± n, … з ймовірностями $\dfrac{1}{2n+1}$. Обчислити Mξ і Dξ.

Розв'зок. $M\xi = \sum_{k=-n}^{n} k \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} k = 0$

Якщо $M\xi = 0$, тоді $D\xi = M\xi^2 - \left(M\xi\right)^2 = M\xi^2$

$$D\xi = M\xi^2 = \sum_{k=-n}^{n} k^2 \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} k^2 = \frac{1}{2n+1} 2\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2n+1} 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{3}$$

Завдання для самостійного розгляду

<u>Задача 1</u> Гральний кубик підкидають n раз. Нехай ξ – число появ одиниці. Знайти Mξ.

<u>Задача 2</u> Гральний кубик підкидають до n-ої появи одиниці. Треба знайти математичне сподівання числа підкидань.

<u>Задача 3</u> Випадкові величини ξ і η – незалежні і однаково розподілені за геометричним законом. Довести, що

$$P(\xi = k \mid \xi + \eta = n) = \frac{1}{n+1}, \qquad k = 0,1,\dots,n .$$