Лекція 9

Мультиплікативні властивості математичного сподівання і дисперсії

Т е о р е м а 1. Нехай ξ і η- сумовні і незалежні випадкові величини. Тоді $\xi \cdot \eta$ - сумовна випадкова величина і

$$\mathrm{M}(\xi \cdot \eta) = \mathrm{M}\xi \cdot \mathrm{M}\eta . \qquad (1)$$

Доведення. Нехай $\xi \in X = \{x_i\}_1^\infty, \quad \eta \in \mathrm{Y} = \{y_j\}_1^\infty,$

$$A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}, \quad B_j = \{\omega : \eta(\omega) = y_j\}, \quad i, j = 1,2,\dots .$$

Позначимо через $z_k, \quad k = 1,2,\dots$ усі різні значення $x_i \cdot y_i$ і $I_k = \{(i,j) : x_i \cdot y_j = z_k\}$

Почнемо з правої частини (1) і шляхом еквівалентних перетворень отримаємо ліву частину.

$$\mathrm{M}\xi \cdot \mathrm{M}\eta = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(A_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j P(B_j)\right) = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i y_j P(A_i) \cdot P(B_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(i,j)\in I_k} x_i y_j P\left(A_i \cap B_j\right) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k P\left(\bigcup_{(i,j)\in I_k} A_i \cap B_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} z_k P\left(\xi \cdot \eta = z_k\right) = M\xi \cdot \eta .$$

Теорему доведено.

Співвідношення (1) називається ***мультиплікативною властивістю*** математичного сподівання. Методом математичної індукції цю властивість можна поширити на випадок *n* випадкових величин:

якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ сумовні і незалежні, то випадкова величина $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n$ сумовна і

$$\mathrm{M}(\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n) = \mathrm{M}\xi_1 \cdot \ldots \cdot \mathrm{M}\xi_n .$$

Т е о р е м а 2. Якщо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$- незалежні і $\mathrm{M}\xi_i^2 < \infty, \quad i = 1,2,\dots,n,$ то

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + \ldots + D\xi_n . \qquad (2)$$

Доведення. З адитивної і мультиплікативної властивості математичного сподівання випливає

$$D(\xi_1+...+\xi_n)=\mathrm{M}\{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mathrm{M}\xi_i)\}^2=\mathrm{M}\{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mathrm{M}\xi_i^2)+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(\xi_i-\mathrm{M}\xi_i)(\xi_j-\mathrm{M}\xi_j)\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\mathrm{M}(\xi_i-\mathrm{M}\xi_i)\mathrm{M}(\xi_j-\mathrm{M}\xi_j)=\sum_{i=1}^{n}D\xi_i .$$

Теорему доведено.

Властивість (2) називають адитивною властивістю для дисперсії.

Коваріація та коефіцієнт кореляції

Коваріацією $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ величин ξ і η називають

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=\mathrm{M}(\xi-\mathrm{M}\xi)(\eta-\mathrm{M}\eta).$$

Коефіцієнтом кореляції величин ξ і η називають величину

$$r_{\xi,\eta}=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}.$$

Випадкові величини ξ і η ***некорельовані***, якщо $r_{\xi,\eta}=0$.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) $-1\le r_{\xi,\eta}\le 1$.

Підрахуємо

$$D(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}+\frac{\eta}{\sqrt{D\eta}})=\mathrm{M}\left[(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}+\frac{\eta}{\sqrt{D\eta}})-(\frac{\mathrm{M}\xi}{\sqrt{D\xi}}+\frac{\mathrm{M}\eta}{\sqrt{D\eta}})\right]^2=$$

$$=\mathrm{M}\left[\frac{1}{D\xi}(\xi-\mathrm{M}\xi)^2+2\frac{1}{\sqrt{D\xi D\eta}}(\xi-\mathrm{M}\xi)(\eta-\mathrm{M}\eta)+\frac{1}{D\eta}(\eta-\mathrm{M}\eta)^2\right]=1+2r_{\xi,\eta}+1=2(1+r_{\xi,\eta}).$$

Аналогічно встановлюється, що

$$D(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}}-\frac{\eta}{\sqrt{D\eta}})=2(1-r_{\xi,\eta}).$$

Таким чином маємо

$D(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\mu}{\sqrt{D\mu}}) = 2(1 \pm r_{\xi,\eta}) \geq 0$, а це і означає, що $-1 \leq r_{\xi,\eta} \leq 1$.

2) Якщо $|r_{\xi,\eta}| = 1$, то з ймовірністю 1 виконується співвідношення

$$\xi = a\eta + b.$$

Дійсно, нехай $r_{\xi,\eta} = 1$. Це можливо тоді і тільки тоді, коли

$$D(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}}) = 0,$$

що в свою чергу можливо тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}} = \frac{\mathrm{M}\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\mathrm{M}\eta}{\sqrt{D\eta}} \text{ з імовірністю 1.}$$

Звідси випливає, що

$$\xi = a\eta + b, \text{ де } a = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}, \quad b = \mathrm{M}\xi - \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}}\mathrm{M}\eta.$$

Аналогічно розбирається випадок $r_{\xi,\eta} = -1$.

3) Якщо випадкові величини незалежні, то $r_{\xi,\eta} = 0$.

Для коваріації величин ξ і η знаходимо

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)(\eta - \mathrm{M}\eta) = \mathrm{M}(\xi\eta - \eta\mathrm{M}\xi - \xi\mathrm{M}\eta + \mathrm{M}\xi \cdot \mathrm{M}\eta) = \mathrm{M}\xi\eta - \mathrm{M}\xi \cdot \mathrm{M}\eta.$$

Таким чином, якщо ξ і η - незалежні, то $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$ і $r_{\xi,\eta} = 0$.

Обернене твердження невірно. Наведемо ідею, на основі якої можна будувати конкретні приклади пар залежних випадкових величин, що некорельовані.

Нехай ξ, η - незалежні і $\mathrm{M}\xi = \mathrm{M}\eta = 0$. Покладемо $\zeta = \xi \cdot \eta$. Тоді випадкові величини ξ, ζ взагалі кажучи залежні. Однак

$$\mathrm{M}\xi \cdot \zeta = \mathrm{M}\xi^2 \cdot \eta = \mathrm{M}\xi^2 \cdot \mathrm{M}\eta = 0 = \mathrm{M}\xi \cdot \mathrm{M}\zeta$$

і вони некорельовані.

Нерівність Чебишова і закон великих чисел

Перший варіант закону великих чисел – це відомий результат Я.Бернуллі про зближення ймовірності події з її частотою. Цей результат був узагальнений у 1837 році Пуассоном у роботі „Дослідження про ймовірності при розв'язку судових справ – карних та цивільних" на випадок неоднорідної схеми незалежних випробувань. Вагомий внесок у цей напрямок досліджень зробив П.Л.Чебишов. У роботі „Про середні величини" він розглядав не події, а випадкові величини і саме для них довів ***закон великих чисел.***

У подальшому теорема Чебишова служила джерелом багатьох узагальнень. У цьому плані відзначимо результати О.Я. Хінчина, Б.В. Гнеденка, В.І. Глівенка.

Т е о р е м а 3 (нерівність Чебишова). Якщо $D\xi < \infty$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\xi - \mathrm{M}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Доведення. Нехай $\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq \varepsilon \\ 0, & |x| < \varepsilon \end{cases}$. Тоді

$$P\{|\xi - \mathrm{M}\xi| \geq \varepsilon\} = \mathrm{M}\chi_\varepsilon(\xi - \mathrm{M}\xi) = \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{M}\varepsilon^2\chi_\varepsilon(\xi - \mathrm{M}\xi) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2\chi_\varepsilon(\xi - \mathrm{M}\xi) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

і нерівність (3) доведено.

Т е о р е м а 4 (П.Л. Чебишов). Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежні і існує така константа c>0, що $D\xi_n < c, \quad n = 1,2,\ldots,$ то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{\mathrm{M}\xi_1 + \ldots + \mathrm{M}\xi_n}{n}| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Доведення. Позначимо $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тоді за нерівністю Чебишова маємо

$$P\{|S_n - \mathrm{M}S_n| \geq n\varepsilon\} \leq \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D\xi_i}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{c}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теорему доведено.

Н а с л і д о к 1. Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежні, однаково розподілені і $M\xi_1 = a,\ D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Доведемо закон великих чисел в схемі Бернуллі.

Н а с л і д о к 2. Нехай μ_n - число успіхів у n випробуваннях Бернуллі з ймовірністю успіху *p*, 0<*p*<1, у кожному випробуванні. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{\mu_n}{n} - p| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Доведення. Нехай $\xi_i,\ \ 1 \leq i \leq n$ - незалежні випадкові величини,

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо у } i\text{-ому випробуванні настав успіх,} \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Тоді $\mu_n = \xi_1, + \ldots + \xi_n$, $M\xi_i = p,\ \ D\xi_i = p(1-p)$. Таким чином твердження наслідку 3.2 випливає з наслідку 3.1.

Із законом великих чисел пов’язане важливе поняття збіжності за ймовірністю. Нехай на одному ймовірносному просторі задано послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}_1^\infty$ і випадкову величину ξ_0. Будемо говорити, що послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}_1^\infty$ ***збігається за ймовірністю*** до ξ_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n - \xi_0| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Факт збіжності будемо позначати через

$$\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\Rightarrow}} \xi_0 \quad \text{або} \quad P - \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0.$$

В термінах збіжності за імовірністю зручно записувати варіанти законів великих чисел. Наприклад, при виконанні умов наслідку 1

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\Rightarrow}} a.$$