Бінарні відношення

У випадку, коли особа, що приймає рішення (ОПР), для деяких пар об'єктів може вказати, який з об'єктів пари кращий за іншого. У цьому випадку вважають, що ці два об'єкти знаходяться у бінарному відношенні.

Означення 1.1. *Бінарним відношенням* R, яке задане на множині Ω, називається довільна підмножина декартового добутку $\Omega\times\Omega$. Будемо говорити, що $x\in\Omega$ знаходиться у відношенні R з $y\in\Omega$ (позначатимемо це xRy), якщо пара $(x, y)\in R$. Якщо $x\in\Omega$ не знаходиться у відношенні R з $y\in\Omega$, тобто $(x, y)\in\Omega\times\Omega \setminus R$, то позначимо це $x\overline{R}y$.

Оскільки у багатьох практичних задачах прийняття рішень (ЗПР) множина альтернатив є скінченною (або стає скінченною після попереднього аналізу інформації), то крім безпосереднього завдання всіх пар, для яких виконується відношення R, використовують ще два основних способи завдання відношень – матрицею і графом.

Нехай множина $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ є скінченною і містить n елементів. Матриця $A(R)$ бінарного відношення R задається її елементами $a_{ij}(R) = 1$, якщо $x_i R x_j$; $a_{ij}(R) = 0$, якщо $x_i \overline{R} x_j$.

Приклад 1.1. Нехай $A = \{2, 8, 12, 18\}$. Наведіть приклади відношень на цій множині.

Розв'язок. Перший приклад, $R_1 = \{(2,12), (8,18)\}$ – множина пар чисел з A, що закінчуються однаковими цифрами, $R_1 \subset A\times A$.

Другий приклад, $R_2 = \{(2,8), (2,12), (2,18)\}$ – множина таких пар чисел з A, що перше без залишку ділить друге.

Функції вибору

Нехай задано скінченну множину альтернатив $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ і ОПР, користуючись своїм особистим уявленням про кращі альтернативи, для кожної множини $X \subseteq \Omega$ вибирає підмножину кращих $C(X)$.

Означення. Функцією вибору *C*, яка задана на множині Ω, називається довільне відображення, яке співставляє кожній підмножині $X \subseteq \Omega$ її частину $C(X)$, $C(\varnothing) = \varnothing$.

Якщо на Ω задане деяке бінарне відношення *R*, то розглядаючи звуження цього бінарного відношення на будь-яку підмножину $X \subseteq \Omega$ можна задати множину мажорант на множині *X*, яка певним чином характеризує вибір ОПР. Ця ідея формалізації вибору приводить до такого означення.

Означення. Функція вибору $C^R(X)$, яка задана на Ω і породжена деяким бінарним відношенням *R* називається нормальною та визначається наступним чином:

$$C^R(X) = \{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Приклад. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задане бінарне відношення R матрицею

$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати функцію вибору $C^R(X)$.

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\bar{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

В другому випадку $X = \{x_2\}$. Тут вже $x = x_2$ та $y = x_2$. Звідси (1.1) прийме вигляд $C^R(\{x_2\}) = \left\{\{x_2\} : x_2\bar{R}x_2\right\}$. Оскільки в матриці $A(R)$ елемент $a_{22}(R) = 1$, то x_2Rx_2. Оскільки умова $x_2\bar{R}x_2$ не виконується, тому одержимо $C^R(\{x_2\}) = \left\{\{x_2\} : x_2\bar{R}x_2\right\} = \varnothing$. Записуємо це значення в другу комірку другого рядка таблиці.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$					

Аналогічно в третьому випадку $X = \{x_3\}$, $x = x_3$ та $y = x_3$. Формула (1.1) прийме вигляд $C^R(\{x_3\}) = \left\{\{x_3\} : x_3\bar{R}x_3\right\} = \{x_3\}$ в силу того, що $a_{33}(R) = 0$ і тому $x_3\bar{R}x_3$.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$				

Приклад. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задане бінарне відношення R матрицею

$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати функцію вибору $C^R(X)$.

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

В другому випадку $X = \{x_2\}$. Тут вже $x = x_2$ та $y = x_2$. Звідси (1.1) прийме вигляд $C^R(\{x_2\}) = \left\{\{x_2\} : x_2\overline{R}x_2\right\}$. Оскільки в матриці $A(R)$ елемент $a_{22}(R) = 1$, то x_2Rx_2. Оскільки умова $x_2\overline{R}x_2$ не виконується, тому одержимо $C^R(\{x_2\}) = \left\{\{x_2\} : x_2\overline{R}x_2\right\} = \varnothing$. Записуємо це значення в другу комірку другого рядка таблиці.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$					

Аналогічно в третьому випадку $X = \{x_3\}$, $x = x_3$ та $y = x_3$. Формула (1.1) прийме вигляд $C^R(\{x_3\}) = \left\{\{x_3\} : x_3\overline{R}x_3\right\} = \{x_3\}$ в силу того, що $a_{33}(R) = 0$ і тому $x_3\overline{R}x_3$.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$				

Приклад. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задане бінарне відношення R матрицею

$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати функцію вибору $C^R(X)$.

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Четвертий випадок відрізняється від попередніх тим, що $X = \{x_1, x_2\}$ є двохелементною множиною. Тому змінні $x \in X$ та $y \in X$ в означенні 1.5 можуть прийняти вже по два значення x_1 або x_2. Напишемо (1.1) у такому вигляді $C^R(\{x_1, x_2\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\}$. Оскільки в матриці $A(R)$ елементи $a_{11}(R) = 0$ та $a_{21}(R) = 0$, то

Приклад. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задане бінарне відношення R матрицею

$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати функцію вибору $C^R(X)$.

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Далі для $X = \{x_1, x_3\}$ (1.1) прийме вигляд

$$C^R(\{x_1, x_3\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\} = \varnothing \cup \{x_3\} = \{x_3\}.$$

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$		

Приклад. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задане бінарне відношення R матрицею

$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати функцію вибору $C^R(X)$.

$$C^R(X) = \left\{ x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X \right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Далі для $X = \{x_1, x_3\}$ (1.1) прийме вигляд

$$C^R(\{x_1, x_3\}) = \left\{ x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1 \right\} \cup \left\{ x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3 \right\} = \varnothing \cup \{x_3\} = \{x_3\}.$$

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$		

Для $X = \{x_2, x_3\}$ одержимо

$$C^R(\{x_2, x_3\}) = \left\{ x_2 : x_2\overline{R}x_2 \wedge x_3\overline{R}x_2 \right\} \cup \left\{ x_3 : x_2\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3 \right\} = \varnothing.$$

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	

Приклад. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задане бінарне відношення R матрицею

$$A(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати функцію вибору $C^R(X)$.

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Далі для $X = \{x_1, x_3\}$ (1.1) прийме вигляд

$$C^R(\{x_1, x_3\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\} = \varnothing \cup \{x_3\} = \{x_3\}.$$

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$		

Для $X = \{x_2, x_3\}$ одержимо

$$C^R(\{x_2, x_3\}) = \left\{x_2 : x_2\overline{R}x_2 \wedge x_3\overline{R}x_2\right\} \cup \left\{x_3 : x_2\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\} = \varnothing.$$

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	

В останньому випадку маємо трьохелементну множину $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Тому змінні $x \in X$ та $y \in X$ в означенні 1.5 приймають по три значення x_1, x_2 та x_3. Формула (1.1) приймає вигляд

$$C^R(\{x_1, x_2, x_3\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2 \wedge x_3\overline{R}x_2\right\} \cup \left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_2\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\} = \varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing = \varnothing.$$

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

Побудову закінчили.

Приклад 2. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C^R(X)$ (табл. 1.2). Перевірити, чи є вона нормальною? Якщо так, то побудувати бінарне відношення R, яке її породжує.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$

$$C^R(X) = \left\{x \in X :\ y\overline{R}x, \forall y \in X\right\},\ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Для випадку двохелементної множини $X = \{x_1, x_2\}$ змінні $x \in X$ та $y \in X$ в означенні 1.5 приймають вже по два значення x_1 або x_2. Маємо (1.1) у такому вигляді $C^R(\{x_1, x_2\}) = \left\{x_1 :\ x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_2 :\ x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\}$. Оскільки за табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_2\}) = \{x_1\}$, то $\left\{x_1 :\ x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} = \{x_1\}$, а $\left\{x_2 :\ x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\} = \varnothing$. З першого виразу випливає $x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{11}(R) = 0$ та $a_{21}(R) = 0$.

Приклад 2. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C^R(X)$ (табл. 1.2). Перевірити, чи є вона нормальною? Якщо так, то побудувати бінарне відношення R, яке її породжує.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Для випадку двохелементної множини $X = \{x_1, x_2\}$ змінні $x \in X$ та $y \in X$ в означенні 1.5 приймають вже по два значення x_1 або x_2. Маємо (1.1) у такому вигляді $C^R(\{x_1, x_2\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\}$. Оскільки за табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_2\}) = \{x_1\}$, то $\left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} = \{x_1\}$, а $\left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\} = \varnothing$. З першого виразу випливає $x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{11}(R) = 0$ та $a_{21}(R) = 0$. З другого виразу одержимо $\overline{x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2} = x_1Rx_2 \vee x_2Rx_2$. Тому елементи $a_{12}(R) = 1$ або $a_{22}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{22}(R) = 1$, то $a_{12}(R)$ може приймати будь-яке значення 0 або 1.

Далі для $X = \{x_1, x_3\}$ (1.1) прийме вигляд

$$C^R(\{x_1, x_3\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\}.$$

За табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_3\}) = \{x_3\}$, тому $\left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} = \varnothing$, а $\left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\} = \{x_3\}$. З першого виразу одержимо $\overline{x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1} = x_1Rx_1 \vee x_3Rx_1$. Тому елементи $a_{11}(R) = 1$ або $a_{31}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{11}(R) = 0$, то $a_{31}(R) = 1$. З другого виразу випливає $x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{13}(R) = 0$ та $a_{33}(R) = 0$.

Для $X = \{x_2, x_3\}$ одержимо

Приклад 2. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C^R(X)$ (табл. 1.2). Перевірити, чи є вона нормальною? Якщо так, то побудувати бінарне відношення R, яке її породжує.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Для випадку двохелементної множини $X = \{x_1, x_2\}$ змінні $x \in X$ та $y \in X$ в означенні 1.5 приймають вже по два значення x_1 або x_2. Маємо (1.1) у такому вигляді $C^R(\{x_1, x_2\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\}$. Оскільки за табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_2\}) = \{x_1\}$, то $\left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} = \{x_1\}$, а $\left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\} = \varnothing$. З першого виразу випливає $x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{11}(R) = 0$ та $a_{21}(R) = 0$. З другого виразу одержимо $\overline{x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2} = x_1Rx_2 \vee x_2Rx_2$. Тому елементи $a_{12}(R) = 1$ або $a_{22}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{22}(R) = 1$, то $a_{12}(R)$ може приймати будь-яке значення 0 або 1.

Далі для $X = \{x_1, x_3\}$ (1.1) прийме вигляд

$$C^R(\{x_1, x_3\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\}.$$

За табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_3\}) = \{x_3\}$, тому $\left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} = \varnothing$, а $\left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\} = \{x_3\}$. З першого виразу одержимо $\overline{x_1\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1} = x_1Rx_1 \vee x_3Rx_1$. Тому елементи $a_{11}(R) = 1$ або $a_{31}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{11}(R) = 0$, то $a_{31}(R) = 1$. З другого виразу випливає $x_1\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{13}(R) = 0$ та $a_{33}(R) = 0$.

Для $X = \{x_2, x_3\}$ одержимо

$$C^R(\{x_2, x_3\}) = \left\{x_2 : x_2\overline{R}x_2 \wedge x_3\overline{R}x_2\right\} \cup \left\{x_3 : x_2\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\}.$$

За табл. 1.2 $C^R(\{x_2, x_3\}) = \varnothing$, тому $\left\{x_2 : x_2\overline{R}x_2 \wedge x_3\overline{R}x_2\right\} = \varnothing$, а $\left\{x_3 : x_2\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\} = \varnothing$. З першого виразу одержимо

Приклад 2. Нехай множина $\Omega=\{x_1,x_2,x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C^R(X)$ (табл. 1.2). Перевірити, чи є вона нормальною? Якщо так, то побудувати бінарне відношення R, яке її породжує.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1,x_2\}$	$\{x_1,x_3\}$	$\{x_2,x_3\}$	$\{x_1,x_2,x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$

$$C^R(X)=\left\{x\in X:\ y\overline{R}x,\forall y\in X\right\},\ \forall X\subseteq\Omega. \qquad (1.1)$$

Для випадку двохелементної множини $X=\{x_1,x_2\}$ змінні $x\in X$ та $y\in X$ в означенні 1.5 приймають вже по два значення x_1 або x_2. Маємо (1.1) у такому вигляді $C^R(\{x_1,x_2\})=\left\{x_1:\ x_1\overline{R}x_1\wedge x_2\overline{R}x_1\right\}\cup\left\{x_2:\ x_1\overline{R}x_2\wedge x_2\overline{R}x_2\right\}$. Оскільки за табл. 1.2 $C^R(\{x_1,x_2\})=\{x_1\}$, то $\left\{x_1:\ x_1\overline{R}x_1\wedge x_2\overline{R}x_1\right\}=\{x_1\}$, а $\left\{x_2:\ x_1\overline{R}x_2\wedge x_2\overline{R}x_2\right\}=\varnothing$. З першого виразу випливає $x_1\overline{R}x_1\wedge x_2\overline{R}x_1$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{11}(R)=0$ та $a_{21}(R)=0$. З другого виразу одержимо $\overline{x_1\overline{R}x_2\wedge x_2\overline{R}x_2}=x_1Rx_2\vee x_2Rx_2$. Тому елементи $a_{12}(R)=1$ або $a_{22}(R)=1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{22}(R)=1$, то $a_{12}(R)$ може приймати будь-яке значення 0 або 1.

Далі для $X=\{x_1,x_3\}$ (1.1) прийме вигляд

$$C^R(\{x_1,x_3\})=\left\{x_1:\ x_1\overline{R}x_1\wedge x_3\overline{R}x_1\right\}\cup\left\{x_3:\ x_1\overline{R}x_3\wedge x_3\overline{R}x_3\right\}.$$

За табл. 1.2 $C^R(\{x_1,x_3\})=\{x_3\}$, тому $\left\{x_1:\ x_1\overline{R}x_1\wedge x_3\overline{R}x_1\right\}=\varnothing$, а $\left\{x_3:\ x_1\overline{R}x_3\wedge x_3\overline{R}x_3\right\}=\{x_3\}$. З першого виразу одержимо $\overline{x_1\overline{R}x_1\wedge x_3\overline{R}x_1}=x_1Rx_1\vee x_3Rx_1$. Тому елементи $a_{11}(R)=1$ або $a_{31}(R)=1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{11}(R)=0$, то $a_{31}(R)=1$. З другого виразу випливає $x_1\overline{R}x_3\wedge x_3\overline{R}x_3$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{13}(R)=0$ та $a_{33}(R)=0$.

Для $X=\{x_2,x_3\}$ одержимо

$$C^R(\{x_2,x_3\})=\left\{x_2:\ x_2\overline{R}x_2\wedge x_3\overline{R}x_2\right\}\cup\left\{x_3:\ x_2\overline{R}x_3\wedge x_3\overline{R}x_3\right\}.$$

За табл. 1.2 $C^R(\{x_2,x_3\})=\varnothing$, тому $\left\{x_2:\ x_2\overline{R}x_2\wedge x_3\overline{R}x_2\right\}=\varnothing$, а $\left\{x_3:\ x_2\overline{R}x_3\wedge x_3\overline{R}x_3\right\}=\varnothing$. З першого виразу одержимо $\overline{x_2\overline{R}x_2\wedge x_3\overline{R}x_2}=x_2Rx_2\vee x_3Rx_2$. Тому елементи $a_{22}(R)=1$ або $a_{32}(R)=1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{22}(R)=1$, то $a_{32}(R)$ може приймати

Приклад 2. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C^R(X)$ (табл. 1.2). Перевірити, чи є вона нормальною? Якщо так, то побудувати бінарне відношення R, яке її породжує.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$

$$C^R(X) = \left\{x \in X :\ y\bar{R}x, \forall y \in X\right\},\ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Для випадку двохелементної множини $X = \{x_1, x_2\}$ змінні $x \in X$ та $y \in X$ в означенні 1.5 приймають вже по два значення x_1 або x_2. Маємо (1.1) у такому вигляді $C^R(\{x_1, x_2\}) = \left\{x_1 :\ x_1\bar{R}x_1 \wedge x_2\bar{R}x_1\right\} \cup \left\{x_2 :\ x_1\bar{R}x_2 \wedge x_2\bar{R}x_2\right\}$. Оскільки за табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_2\}) = \{x_1\}$, то $\left\{x_1 :\ x_1\bar{R}x_1 \wedge x_2\bar{R}x_1\right\} = \{x_1\}$, а $\left\{x_2 :\ x_1\bar{R}x_2 \wedge x_2\bar{R}x_2\right\} = \varnothing$. З першого виразу випливає $x_1\bar{R}x_1 \wedge x_2\bar{R}x_1$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{11}(R) = 0$ та $a_{21}(R) = 0$. З другого виразу одержимо $\overline{x_1\bar{R}x_2 \wedge x_2\bar{R}x_2} = x_1Rx_2 \vee x_2Rx_2$. Тому елементи $a_{12}(R) = 1$ або $a_{22}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{22}(R) = 1$, то $a_{12}(R)$ може приймати будь-яке значення 0 або 1.

Далі для $X = \{x_1, x_3\}$ (1.1) прийме вигляд

$$C^R(\{x_1, x_3\}) = \left\{x_1 :\ x_1\bar{R}x_1 \wedge x_3\bar{R}x_1\right\} \cup \left\{x_3 :\ x_1\bar{R}x_3 \wedge x_3\bar{R}x_3\right\}.$$

За табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_3\}) = \{x_3\}$, тому $\left\{x_1 :\ x_1\bar{R}x_1 \wedge x_3\bar{R}x_1\right\} = \varnothing$, а $\left\{x_3 :\ x_1\bar{R}x_3 \wedge x_3\bar{R}x_3\right\} = \{x_3\}$. З першого виразу одержимо $\overline{x_1\bar{R}x_1 \wedge x_3\bar{R}x_1} = x_1Rx_1 \vee x_3Rx_1$. Тому елементи $a_{11}(R) = 1$ або $a_{31}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{11}(R) = 0$, то $a_{31}(R) = 1$. З другого виразу випливає $x_1\bar{R}x_3 \wedge x_3\bar{R}x_3$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{13}(R) = 0$ та $a_{33}(R) = 0$.

Для $X = \{x_2, x_3\}$ одержимо

$$C^R(\{x_2, x_3\}) = \left\{x_2 :\ x_2\bar{R}x_2 \wedge x_3\bar{R}x_2\right\} \cup \left\{x_3 :\ x_2\bar{R}x_3 \wedge x_3\bar{R}x_3\right\}.$$

За табл. 1.2 $C^R(\{x_2, x_3\}) = \varnothing$, тому $\left\{x_2 :\ x_2\bar{R}x_2 \wedge x_3\bar{R}x_2\right\} = \varnothing$, а $\left\{x_3 :\ x_2\bar{R}x_3 \wedge x_3\bar{R}x_3\right\} = \varnothing$. З першого виразу одержимо $\overline{x_2\bar{R}x_2 \wedge x_3\bar{R}x_2} = x_2Rx_2 \vee x_3Rx_2$. Тому елементи $a_{22}(R) = 1$ або $a_{32}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{22}(R) = 1$, то $a_{32}(R)$ може приймати будь-яке значення 0 або 1. З другого виразу випливає $\overline{x_2\bar{R}x_3 \wedge x_3\bar{R}x_3} = x_2Rx_3 \vee x_3Rx_3$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{23}(R) = 1$ та $a_{33}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{33}(R) = 0$, то $a_{23}(R) = 1$.

Приклад 2. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C^R(X)$ (табл. 1.2). Перевірити, чи є вона нормальною? Якщо так, то побудувати бінарне відношення R, яке її породжує.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

В останньому випадку маємо трьохелементну множину $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. Тому змінні $x \in X$ та $y \in X$ в означенні 1.5 приймають по три значення x_1, x_2 та x_3. Формула (1.1) приймає вигляд $C^R(\{x_1, x_2, x_3\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2 \wedge x_3\overline{R}x_2\right\} \cup \left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_2\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\}$. За Згідно з табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{x_2\}$, тому $\left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1\right\} = \varnothing$, $\left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2 \wedge x_3\overline{R}x_2\right\} = \{x_2\}$ та $\left\{x_3 : x_1\overline{R}x_3 \wedge x_2\overline{R}x_3 \wedge x_3\overline{R}x_3\right\} = \varnothing$. З першого виразу одержимо $\overline{x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1 \wedge x_3\overline{R}x_1} = x_1Rx_1 \vee x_2Rx_1 \vee x_3Rx_1$. Тому елементи $a_{11}(R) = 1$ або $a_{21}(R) = 1$, або $a_{31}(R) = 1$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{11}(R) = 0$ та $a_{21}(R) = 0$, то $a_{31}(R) = 1$. З другого виразу одержимо $x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2 \wedge x_3\overline{R}x_2$. Тому елементи $a_{12}(R) = 0$, $a_{22}(R) = 0$ та $a_{32}(R) = 0$. Оскільки ми вже раніше визначили, що $a_{22}(R) = 1$, то ми получаємо суперечність. Таким чином, бінарного відношення, яке породжує функцію вибору $C^R(X)$ не існує, а $C^R(X)$

Приклад 2. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C^R(X)$ (табл. 1.2). Перевірити, чи є вона нормальною? Якщо так, то побудувати бінарне відношення R, яке її породжує.

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$

$$C^R(X) = \left\{x \in X : y\overline{R}x, \forall y \in X\right\}, \ \forall X \subseteq \Omega. \qquad (1.1)$$

Для випадку двохелементної множини $X = \{x_1, x_2\}$ змінні $x \in X$ та $y \in X$ в означенні 1.5 приймають вже по два значення x_1 або x_2. Маємо (1.1) у такому вигляді $C^R(\{x_1, x_2\}) = \left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} \cup \left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\}$. Оскільки за табл. 1.2 $C^R(\{x_1, x_2\}) = \{x_1\}$, то $\left\{x_1 : x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1\right\} = \{x_1\}$, а $\left\{x_2 : x_1\overline{R}x_2 \wedge x_2\overline{R}x_2\right\} = \varnothing$. З першого виразу випливає $x_1\overline{R}x_1 \wedge x_2\overline{R}x_1$, тому в матриці $A(R)$ елементи $a_{11}(R) = 0$ та $a_{21}(R) = 0$.