Властивості функцій вибору. Розглянемо основні властивості функцій вибору. Функція вибору C називається:

1) рефлексивною, якщо $C(\{x\}) = \varnothing$ для $\forall x \in \Omega$ ($f_i(0,\dots,0) = 0,\ i = \overline{1,n}$);

2) антирефлексивною, якщо $C(\{x\}) = \{x\}$ для $\forall x \in \Omega$ ($f_i(0,\dots,0) = 1,\ i = \overline{1,n}$);

3) повною, якщо $C(X) \neq \varnothing$ для $\forall X \subseteq \Omega,\ X \neq \varnothing$ ($\bigvee_{i=1}^{n} \beta_i f_i(\beta) = 1,\ \forall \beta$);

4) транзитивною, якщо

$$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \neq \varnothing,\ C(X_2 \cup X_3) = C(X_2) \neq \varnothing \Rightarrow$$

$$C(X_1 \cup X_3) = C(X_1) \text{ для } \forall X_1, X_2, X_3 \subseteq \Omega.$$

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n}(\beta_i^1 f_i(\beta^1)) = \bigvee_{i=1}^{n}(\beta_i^2 f_i(\beta^2)) = 1 \Rightarrow (\beta_i^1 \vee \beta_i^3) f_i(\beta^1 \vee \beta^3) = \beta_i^1 f_i(\beta^1), i = \overline{1,n}.\right)$$

Приклад. Нехай за результатами сесії серед студентів групи A і B кращими виявились два студенти групи A, кращими серед студентів B і C – 3 студенти з групи B. Тоді кращими серед студентів групи A і C будуть вказані студенти з групи A, при цьому вони будуть кращими і серед усіх трьох груп.

Властивості функцій вибору. Розглянемо основні властивості функцій вибору. Функція вибору C називається:

1) рефлексивною, якщо $C(\{x\}) = \varnothing$ для $\forall x \in \Omega$ ($f_i(0,...,0) = 0,\ i = \overline{1,n}$);

2) антирефлексивною, якщо $C(\{x\}) = \{x\}$ для $\forall x \in \Omega$ ($f_i(0,...,0) = 1,\ i = \overline{1,n}$);

3) повною, якщо $C(X) \neq \varnothing$ для $\forall X \subseteq \Omega,\ X \neq \varnothing$ ($\bigvee_{i=1}^{n} \beta_i f_i(\beta) = 1,\ \forall \beta$);

4) транзитивною, якщо

$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \neq \varnothing,\ C(X_2 \cup X_3) = C(X_2) \neq \varnothing \Rightarrow$

$C(X_1 \cup X_3) = C(X_1)$ для $\forall X_1, X_2, X_3 \subseteq \Omega$.

$(\bigvee_{i=1}^{n}(\beta_i^1 f_i(\beta^1)) = \bigvee_{i=1}^{n}(\beta_i^2 f_i(\beta^2)) = 1 \Rightarrow (\beta_i^1 \vee \beta_i^3) f_i(\beta^1 \vee \beta^3) = \beta_i^1 f_i(\beta^1), i = \overline{1,n}.)$

Операції над функціями вибору. Виділимо об'єднання, перетин, доповнення, добуток (для $\forall X \subseteq \Omega$):

1) $C = C_1 \cup C_2 \Leftrightarrow C(X) = C_1(X) \cup C_2(X)$ ($f_i^C = f_i^{C_1} \vee f_i^{C_2}$);

2) $C = C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow C(X) = C_1(X) \cap C_2(X)$ ($f_i^C = f_i^{C_1} \wedge f_i^{C_2}$);

3) $\overline{C}$: $\overline{C} = X \setminus C(X)$ ($f_i^{\overline{C}} = \overline{f}_i^{C}$);

4) $C = C_1 \cdot C_2$: $C(X) = C_2(C_1(X))$

$f_i^{C_1 \cdot C_2} = f_i^{C_1}(\beta_1,...,\beta_{i-1},\beta_{i+1},...,\beta_n) f_i^{C_2}(\beta_1 f_1^{C_1}(\beta_2,...,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},...,\beta_n),...,$

$\beta_{i-1} f_{i-1}^{C_1}(\beta_1,...,\beta_{i-2},1,\beta_{i+1},...,\beta_n), \beta_{i+1} f_{i+1}^{C_1}(\beta_1,...,\beta_{i-1},1,\beta_{i+2},...,\beta_n),...,\beta_n f_n^{C_1}(\beta_1,...,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},...,\beta_{n-1}))$.

Класи функцій вибору. Функції, котрі задовольняють певним властивостям «вибору», утворюють відповідний "клас функцій". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору:

1) Умова спадковості (СП)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' \subseteq C(X'),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \leq \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \geq f_i(\beta^2);$$

Приклад. Якщо проводиться міжнародний конкурс проєктів, то умова СП означає: «Якщо переможцем став проєкт з України, то він повинен бути переможцем конкурсу в Україні».

Класи функцій вибору. Функції, котрі задовольняють певним властивостям «вибору», утворюють відповідний "клас функцій". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору:

1) Умова спадковості (СП)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' \subseteq C(X'),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \ge f_i(\beta^2);$$

2) Умова незалежності від відкинутих альтернатив (Н)

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X); \beta_i^2 f_i(\beta^2) \le \beta_i^1 \le \beta_i^2 \Rightarrow \beta_i^1 f_i(\beta^1) = \beta_i^2 f_i(\beta^2);$$

3) Умова згоди (З)

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcap_i X_i),\ \forall X_i \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) \le f_i(\beta^1 \vee \beta^2);$$

Класи функцій вибору. Функції, котрі задовольняють певним властивостям «вибору», утворюють відповідний "клас функцій". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору:

1) Умова спадковості (СП)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' \subseteq C(X'),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \ge f_i(\beta^2);$$

2) Умова незалежності від відкинутих альтернатив (Н)

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X);\ \beta_i^2 f_i(\beta^2) \le \beta_i^1 \le \beta_i^2 \Rightarrow \beta_i^1 f_i(\beta^1) = \beta_i^2 f_i(\beta^2);$$

3) Умова згоди (З)

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcap_i X_i),\ \forall X_i \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) \le f_i(\beta^1 \vee \beta^2);$$

4) Умова квазісуматорності (незалежності вибору від шляху) (КС)

$$C(X_1 \bigcup X_2) = C(C(X_1) \bigcup C(X_2)),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega;$$

$$(\beta^1 \vee \beta^2) f_i(\beta^1 \vee \beta^2) = (\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2)) f_i(\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2), \ldots, \beta_n^1 f_n(\beta^1) \vee \beta_n^2 f_n(\beta^2));$$

Приклад. Якщо проводиться міжнародний конкурс проєктів, то можна спочатку вибрати переможців національних конкурсів, а потім проводити конкурс серед них.

Класи функцій вибору. Функції, котрі задовольняють певним властивостям «вибору», утворюють відповідний "клас функцій". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору:

1) Умова спадковості (СП)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' \subseteq C(X'),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \ge f_i(\beta^2);$$

2) Умова незалежності від відкинутих альтернатив (Н)

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X);\ \beta_i^2 f_i(\beta^2) \le \beta_i^1 \le \beta_i^2 \Rightarrow \beta_i^1 f_i(\beta^1) = \beta_i^2 f_i(\beta^2);$$

3) Умова згоди (З)

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcap_i X_i),\ \forall X_i \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) \le f_i(\beta^1 \vee \beta^2);$$

4) Умова квазісуматорності (незалежності вибору від шляху) (КС)

$$C(X_1 \cup X_2) = C(C(X_1) \cup C(X_2)),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega;$$

$$(\beta^1 \vee \beta^2) f_i(\beta^1 \vee \beta^2) = (\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2)) f_i(\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2), \dots, \beta_n^1 f_n(\beta^1) \vee \beta_n^2 f_n(\beta^2));$$

5) Умова суматорності (СМ)

$$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \cup C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta) \equiv 0 \vee f_i(\beta) \equiv 1;$$

Приклад. На дошці пошани Університету представлені співробітники, які були обрані на факультетах.

Класи функцій вибору. Функції, котрі задовольняють певним властивостям «вибору», утворюють відповідний "клас функцій". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору:

1) Умова спадковості (СП)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' \subseteq C(X'),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \ge f_i(\beta^2);$$

2) Умова незалежності від відкинутих альтернатив (Н)

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X);\ \beta_i^2 f_i(\beta^2) \le \beta_i^1 \le \beta_i^2 \Rightarrow \beta_i^1 f_i(\beta^1) = \beta_i^2 f_i(\beta^2);$$

3) Умова згоди (З)

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcap_i X_i),\ \forall X_i \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) \le f_i(\beta^1 \vee \beta^2);$$

4) Умова квазісуматорності (незалежності вибору від шляху) (КС)

$$C(X_1 \bigcup X_2) = C(C(X_1) \bigcup C(X_2)),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega;$$

$$(\beta^1 \vee \beta^2) f_i(\beta^1 \vee \beta^2) = (\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2)) f_i(\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2), \ldots, \beta_n^1 f_n(\beta^1) \vee \beta_n^2 f_n(\beta^2));$$

5) Умова суматорності (СМ)

$$C(X_1 \bigcup X_2) = C(X_1) \bigcup C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta) \equiv 0 \vee f_i(\beta) \equiv 1;$$

6) Умова мультиплікаторності (МП)

$$C(X_1 \bigcap X_2) = C(X_1) \bigcap C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) = f_i(\beta^1 \wedge \beta^2);$$

Класи функцій вибору. Функції, котрі задовольняють певним властивостям «вибору», утворюють відповідний "клас функцій". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору:

1) Умова спадковості (СП)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' \subseteq C(X'),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \ge f_i(\beta^2);$$

2) Умова незалежності від відкинутих альтернатив (Н)

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X); \quad \beta_i^2 f_i(\beta^2) \le \beta_i^1 \le \beta_i^2 \Rightarrow \beta_i^1 f_i(\beta^1) = \beta_i^2 f_i(\beta^2);$$

3) Умова згоди (З)

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcap_i X_i),\ \forall X_i \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) \le f_i(\beta^1 \vee \beta^2);$$

4) Умова квазісуматорності (незалежності вибору від шляху) (КС)

$$C(X_1 \cup X_2) = C(C(X_1) \cup C(X_2)),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega;$$

$$(\beta^1 \vee \beta^2) f_i(\beta^1 \vee \beta^2) = (\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2)) f_i(\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2), \dots, \beta_n^1 f_n(\beta^1) \vee \beta_n^2 f_n(\beta^2));$$

5) Умова суматорності (СМ)

$$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \cup C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta) \equiv 0 \vee f_i(\beta) \equiv 1;$$

6) Умова мультиплікаторності (МП)

$$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) = f_i(\beta^1 \wedge \beta^2);$$

7) Умова монотонності (М)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X') \subseteq C(X),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \le f_i(\beta^2).$$

Класи функцій вибору. Функції, котрі задовольняють певним властивостям «вибору», утворюють відповідний "клас функцій". Розглянемо деякі найбільш уживані у теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору:

1) Умова спадковості (СП)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' \subseteq C(X'),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \ge f_i(\beta^2);$$

2) Умова незалежності від відкинутих альтернатив (Н)

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X); \quad \beta_i^2 f_i(\beta^2) \le \beta_i^1 \le \beta_i^2 \Rightarrow \beta_i^1 f_i(\beta^1) = \beta_i^2 f_i(\beta^2);$$

3) Умова згоди (З)

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcap_i X_i),\ \forall X_i \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) \le f_i(\beta^1 \vee \beta^2);$$

4) Умова квазісуматорності (незалежності вибору від шляху) (КС)

$$C(X_1 \cup X_2) = C(C(X_1) \cup C(X_2)),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega;$$

$$(\beta^1 \vee \beta^2) f_i(\beta^1 \vee \beta^2) = (\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2)) f_i(\beta_i^1 f_i(\beta^1) \vee \beta_i^2 f_i(\beta^2), \ldots, \beta_n^1 f_n(\beta^1) \vee \beta_n^2 f_n(\beta^2));$$

5) Умова суматорності (СМ)

$$C(X_1 \cup X_2) = C(X_1) \cup C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta) \equiv 0 \vee f_i(\beta) \equiv 1;$$

6) Умова мультиплікаторності (МП)

$$C(X_1 \cap X_2) = C(X_1) \cap C(X_2),\ \forall X_1, X_2 \subseteq \Omega; \qquad f_i(\beta^1) \wedge f_i(\beta^2) = f_i(\beta^1 \wedge \beta^2);$$

7) Умова монотонності (М)

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X') \subseteq C(X),\ \forall X, X' \subseteq \Omega; \qquad \beta^1 \le \beta^2 \Rightarrow f_i(\beta^1) \le f_i(\beta^2).$$

Приклад. Нехай множина $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C(X)$ (табл 1.11) з логічною формою $f_1(\beta_2, \beta_3) = \beta_2$, $f_2(\beta_1, \beta_3) = \beta_3$, $f_3(\beta_1, \beta_2) \equiv 0$. Перевірити властивості рефлексивності і монотонності за ЛФФВ.

Таблиця 1.11.

Функція вибору $C^R(X)$

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$	$\{x_1, x_2\}$

Розв'язання. В термінах ЛФФВ властивість рефлективності має вигляд $f_i(0,\dots,0) = 0,\ i = \overline{1,n}$.

В нашому випадку $f_1(0,0) = 0$, $f_2(0,0) = 0$ та оскільки $f_3(\beta_1, \beta_2) \equiv 0$, то також $f_3(0,0) = 0$.

Таким чином, функція вибору $C(X)$ (табл 1.11) є рефлективною.

Властивість монотонності в термінах ЛФФВ має вигляд $\beta' \le \beta'' \Rightarrow f_i(\beta') \le f_i(\beta'')$.

Це означає, що в нашому випадку треба довести або спростувати твердження

$$\begin{cases} \beta_1' \le \beta_1'', \\ \beta_2' \le \beta_2'', \\ \beta_3' \le \beta_3'', \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2' \le \beta_2'', \\ \beta_3' \le \beta_3'', \\ 0 \le 0. \end{cases}$$

Очевидно воно виконується.

11:03 84%

Zoom

Leave

Приклад. Нехай множина $\Omega=\{x_1,x_2,x_3\}$. На Ω задана функція вибору $C(X)$ (табл 1.11) з логічною формою $f_1(\beta_2,\beta_3)=\beta_2$, $f_2(\beta_1,\beta_3)=\beta_3$, $f_3(\beta_1,\beta_2)\equiv 0$. Перевірити властивості рефлексивності і монотонності за ЛФФВ.

Таблиця 1.11.

Функція вибору $C^R(X)$

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1,x_2\}$	$\{x_1,x_3\}$	$\{x_2,x_3\}$	$\{x_1,x_2,x_3\}$
$C^R(X)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{x_1\}$	$\varnothing$	$\{x_2\}$	$\{x_1,x_2\}$

Розв'язання. В термінах ЛФФВ властивість рефлективності має вигляд $f_i(0,\ldots,0)=0,\ i=\overline{1,n}$.

В нашому випадку $f_1(0,0)=0$, $f_2(0,0)=0$ та оскільки $f_3(\beta_1,\beta_2)\equiv 0$, то також $f_3(0,0)=0$.

Таким чином, функція вибору $C(X)$ (табл 1.11) є рефлективною.

Властивість монотонності в термінах ЛФФВ має вигляд $\beta'\le\beta''\Rightarrow f_i(\beta')\le f_i(\beta'')$.

Це означає, що в нашому випадку треба довести або спростувати твердження

$$\begin{cases}\beta_1'\le\beta_1'',\\ \beta_2'\le\beta_2'',\\ \beta_3'\le\beta_3'',\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta_2'\le\beta_2'',\\ \beta_3'\le\beta_3'',\\ 0\le 0.\end{cases}$$

Очевидно воно виконується. Приклад розв'язано.

Unmute Start Video Share Participants 11 More

Заняття 3. Багатокритеріальна оптимізація

Задача багатокритеріальної оптимізації:

$$\begin{aligned} &f_i(x) \to \max,\ i \in M, \\ &x \in X. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Інколи задачу БКО зручно розглядати у так званому просторі оцінок і тоді вона має вигляд:

$$\begin{aligned} &y_i \to \max,\ i \in M, \\ &y = (y_1, \dots y_m) \in Y, \end{aligned} \qquad (2.2)$$

де $y = (y_1, \dots y_m)$ – вектор оцінки, а $Y = \{y = (y_1, \dots y_m) \mid\ y_i = f_i(x),\ i \in M;\ x \in X\}$ – множина оцінок.

Абсолютно-оптимальні оцінки і альтернативи.

Означення 2.1. Будемо говорити, що оцінка $y=(y_1,...y_m)$ переважає (нестрого) оцінку $y'=(y'_1,...y'_m)$ і позначимо це $y \succeq y'$, якщо $y_i \geq y'_i$, $i \in M$.

Означення 2.2. Оцінка y^* називається абсолютно-оптимальною, якщо вона переважає будь-яку іншу оцінку, тобто $y^* \succeq y$ для $\forall y \in Y$. Позначимо множину абсолютно-оптимальних оцінок через $Q(Y)$.

Означення 2.3. Альтернатива x^* називається абсолютно-оптимальною, якщо їй відповідає абсолютно-оптимальна оцінка $y^*=(y_1^*,...,y_m^*) \in Q(Y)$, де $y_i^*=f_i(x^*)$, $i \in M$. Очевидно, що $f_i(x^*) \geq f_i(x)$ $\forall i \in M$, для $\forall x \in X$.

Позначимо множину абсолютно-оптимальних альтернатив через $Q(X)$.

Ефективні оцінки і альтернативи.

Означення 2.4. Будемо говорити, що оцінка $y=(y_1,...y_m)$ строго переважає (домінує) оцінку $y'=(y'_1,...y'_m)$ і позначимо це $y \succ y'$, якщо $y_i \geq y'_i \quad \forall i \in M$ і хоча б одна нерівність є строгою, тобто $y \neq y'$.

Означення 2.5. Оцінка y^* називається ефективною (оптимальною за Парето), якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y \succ y^*$. Позначимо множину ефективних оцінок через $P(Y)$.

Означення 2.6. Альтернатива x^* називається ефективною (оптимальною за Парето), якщо їй відповідає ефективна оцінка $y^*=(y_1^*,...,y_m^*) \in P(Y)$, де $y_i^* = f_i(x^*)$, $i \in M$.

Очевидно, що $\nexists x \in X$, для якого $f_i(x) \geq f_i(x^*)$ $\forall i \in M$, та хоча б одна нерівність була строгою, тобто $\exists i \in M : f_i(x) > f_i(x^*)$.

Позначимо множину ефективних альтернатив через $P(X)$.

Слабко-ефективні оцінки і альтернативи.

Означення 2.7. Будемо говорити, що оцінка $y = (y_1, \ldots y_m)$ сильно переважає (строго домінує) оцінку $y' = (y'_1, \ldots y'_m)$ і позначимо це $y \succ\succ y'$, якщо $y_i > y'_i$. Таке відношення переваги буде асиметричним та транзитивним (називається строгим частковим порядком).

Означення 2.8. Оцінка y^* називається слабко ефективною (оптимальною за Слейтером), якщо не існує оцінки $y \in Y$ такої, що $y \succ\succ y^*$. Позначимо множину слабко ефективних (оптимальних за Слейтером) оцінок через $S(Y)$.

Означення 2.9. Альтернатива x^* називається слабко ефективною (оптимальною за Слейтером), якщо їй відповідає слабко ефективна оцінка, тобто $y_i^* = f_i(x^*)$, $i \in M$. Очевидно, що $\nexists x \in X : f_i(x) > f_i(x^*) \ \ \forall i \in M$.

Позначимо множину ефективних альтернатив через $S(X)$.

Приклад 2.1. Побудувати множину ефективних альтернатив в задачі (купівля телевізора (51 см по діагоналі)):

		Якість зображення	Якість звуку	Ціна
1	Grundic	5	3	400
2	Samsung	4	3	400
3	Thompson	3	3	390
4	Philips	4	2	420
5	Hitachi	3	4	345
6	Panasonic	3	5	460
7	Sony	5	3	440

Відповідь: Множина ефективних альтернатив P={1,5,6}.

11:21 100%

Zoom

Leave

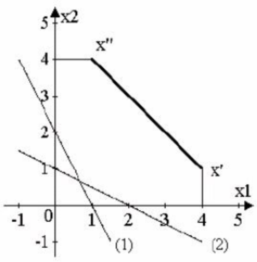
Приклад 2.2. Для наступної двох-критеріальної задачі:

$$y_1 = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$y_2 = x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

графічно побудувати: а) множину альтернатив; б) лінії рівня критеріїв;

в) множину ефективних альтернатив;

Відповідь. На малюнку 6 зображена множина альтернатив X; лінії рівней першого і другого критеріїв, відповідно (1), (2); x', x'' - найкращі відповідно за першим і другим критерієм задачі альтернативи. За визначенням можна встановити, що множиною слабко ефективних альтернатив буде відрізок $[x', x'']$.



Мал. 6.

Unmute

Start Video

Share

11

Participants

More

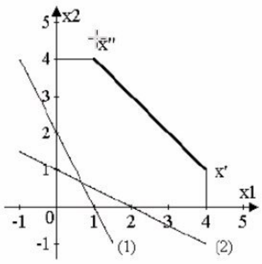
11:28 100%

Приклад 2.2. Для наступної двох-критеріальної задачі:

$$y_1 = 3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$y_2 = x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

графічно побудувати: а) множину альтернатив; б) лінії рівня критеріїв;
в) множину ефективних альтернатив;

Відповідь. На малюнку 6 зображена множина альтернатив *X*; лінії рівней першого і другого критеріїв, відповідно (1), (2); x', x'' - найкращі відповідно за першим і другим критерієм задачі альтернативи. За визначенням можна встановити, що множиною слабко ефективних альтернатив буде відрізок $[x', x'']$.



Мал. 6.

cyb2 zoom's screen

Методи багатокритеріальної оптимізації

Метод ідеальної точки.

Означення 2.10. Точка $a=(a_1,\dots,a_m)$ називається ідеальною для задачі БКО (1), якщо її координати $a_i=\max_{x\in X} f_i(x),\ \ i\in M$.

Ідея методу полягає у знаходженні альтернативи, яка має оцінку, що є найближчою до ідеальної точки.

Визначимо відстань $\rho_s(f(x),a)=(\sum_{i=1}^{m}|f_i(x)-a_i|^s)^{\frac{1}{s}}$ між точками $f(x)$ і a у метричному m - вимірному метричному просторі R_s^m оцінок з показником метрики $s\ge 1$.

Тоді, згідно з методом ідеальної точки, шукана альтернатива x^* буде розв'язом, так званої, скаляризованої задачі $x^*\in \operatorname{Arg}\min_{x\in X}(\sum_{i=1}^{m}|f_i(x)-a_i|^s)^{1/s}$.

Значення показника метрики s вибирається в залежності від предметної області. На практиці в основному використовують значення $s=1,2$ та $s\to\infty$.

При $s=1$ скаляризована задача приймає вигляд:

$$\sum_{i\in M} f_i(x)\to\max_{x\in X}. \qquad (3.1)$$

Відповідно при $s=2$ (Евклідів простір):

$$\sum_{i\in M}(f_i(x)-a_i)^2\to\min_{x\in X}, \qquad (3.2)$$

та при $s\to\infty$

$$\min_{i\in M}(f_i(x)-a_i)\to\max_{x\in X}. \qquad (3.3)$$

11:33 100%

Приклад 2.3. Методом ідеальної точки розв'язати наступну задачу:

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + x_2 \to \max,\\
&x_1 + 2x_2 \to \max,\\
&x_1 + x_2 \le 5,\\
&0 \le x_{1,2} \le 4.
\end{aligned}
$$

Визначимо ідеальну точку: $a = (a_1, a_2)$ $a_i = \max\limits_{x \in X} f_i(x)$, $i = 1,2$. На рис. 2.8 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2); найкращі відповідно за першим й другим критерієм задачі альтернативи $x' = (4,1)$, $x'' = (1,4)$, (максимуми 1-го та 2-го критеріїв) $a_1 = 13$, $a_2 = 9$. Таким чином, $a = (13,9)$.

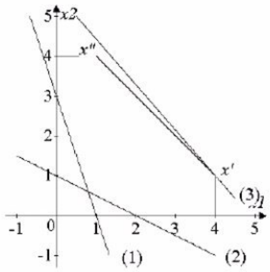


Рис. 2.8.

Приклад 2.3. Методом ідеальної точки розв'язати наступну задачу:

$$3x_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

Визначимо ідеальну точку: $a = (a_1, a_2)$ $a_i = \max_{x \in X} f_i(x)$, $i = 1,2$. На рис. 2.8 зображена множина альтернатив X; лінії рівнів першого й другого критеріїв, відповідно (1), (2); найкращі відповідно за першим й другим критерієм задачі альтернативи $x' = (4,1)$, $x'' = (1,4)$, (максимуми 1-го та 2-го критеріїв) $a_1 = 13$, $a_2 = 9$. Таким чином, $a = (13,9)$.

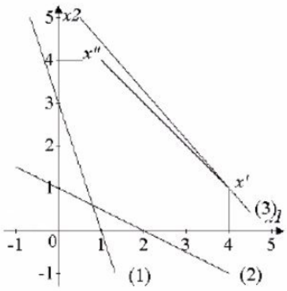


Рис. 2.8.

Розглянемо випадки що пов'язані з вибором різних метрик.
Випадок 1. При $s=1$ скаляризована задача приймає вигляд:

$$\sum_{i\in M} f_i(x) \to \max_{x\in X}.$$

тобто має вигляд задачі лінійного програмування:

$$4x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

З рис. 2.8 неважко бачити, що оптимальним розв'язком скаляризованої задачі (лінія рівня (3) цільової функції скаляризованої задачі) буде точка $x' = (4,1)$, яка і вважається шуканою ефективною альтернативою вихідної задачі.

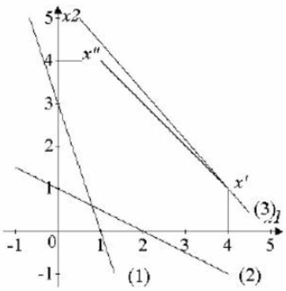


Рис. 2.8.

Випадок 2. При $s=2$ скаляризована задача приймає вигляд:

$$\sum_{i\in M}(f_i(x)-a_i)^2 \to \min_{x\in X},$$

тобто має вигляд задачі квадратичного опуклого програмування:

$$(3x_1+x_2-13)^2+(x_1+2x_2-9)^2 \to \min,$$
$$x_1+x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

Розв'яжемо цю задачу аналітично. На рис. 2.9 зображені лінії рівня цільової функції скаляризованої задачі, які мають вигляд концентричних еліпсів з центром в точці $O=(17/5, 14/5)$, яка є точкою безумовного мінімуму цієї функції і знаходиться як розв'язок системи рівнянь: $\begin{cases} 3x_1+x_2=13, \\ x_1+2x_2=9. \end{cases}$

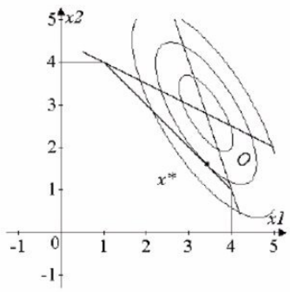


Рис. 2.9.

Скористаємося методом множників Лагранжа. Функція Лагранжа для цієї задачі буде мати наступний вигляд:

$$L(x,y)=(3x_1+x_2+3)^2+(x_1+2x_2-9)^2+\lambda(x_1+x_2-5).$$

За теоремою Куна-Таккера будемо шукати x^* як відповідну компоненту сідлової точки $(x^*,\lambda^*)=\operatorname{Arg}\min\limits_{x\in R^2}\max\limits_{\lambda\in R^1}L(x,\lambda)$ функції Лагранжа. Запишемо необхідні умови екстремуму функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=6(3x_1+x_2-13)+2(x_1+2x_2-9)+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2(3x_1+x_2-13)+4(x_1+2x_2-9)+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+x_2-5=0,$$

які будуть і достатніми умовами існування сідлової точки, оскільки у нашому випадку $L(x,\lambda)$є строго опуклою за змінними x. Отже, остаточно одержимо $x^*=(17/5,8/5)$.

11:44 100%

Скористаємося методом множників Лагранжа. Функція Лагранжа для цієї задачі буде мати наступний вигляд:

$$L(x,y)=(3x_1+x_2+3)^2+(x_1+2x_2-9)^2+\lambda(x_1+x_2-5).$$

За теоремою Куна-Таккера будемо шукати x^* як відповідну компоненту сідлової точки $(x^*,\lambda^*)=\operatorname{Arg}\min\limits_{x\in R^2}\max\limits_{\lambda\in R^1} L(x,\lambda)$ функції Лагранжа. Запишемо необхідні умови екстремуму функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=6(3x_1+x_2-13)+2(x_1+2x_2-9)+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2(3x_1+x_2-13)+4(x_1+2x_2-9)+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+x_2-5=0,$$

які будуть і достатніми умовами існування сідлової точки, оскільки у нашому випадку $L(x,\lambda)$є строго опуклою за змінними x. Отже, остаточно одержимо $x^*=(17/5,8/5)$.

Випадок 3. При $s \to \infty$ скаляризована задача приймає вигляд:

$$\min_{i \in M} \left(f_i(x) - a_i \right) \to \max_{x \in X}.$$

тобто має вигляд:

$$\min \{ 3x_1 + x_2 - 13, x_1 + 2x_2 - 9 \} \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 5,$$
$$0 \le x_{1,2} \le 4.$$

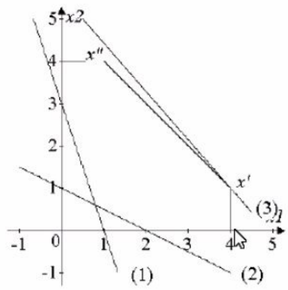


Рис. 2.8.

Побудуємо лінію рівня цільової функції. Наприклад, сталому значенню функції -7 буде відповідати множина векторів $x = (x_1, x_2)$, задана рівнянням: $\min\{3x_1 + x_2 - 13, x_1 + 2x_2 - 9\} = -7$.

Для побудови цієї множини розглянемо такі випадки:

1) якщо $3x_1 + x_2 - 13 \le x_1 + 2x_2 - 9 \;\Rightarrow\; 2x_1 - x_2 \le 4$ (півплощина, що знаходиться над прямою $2x_1 - x_2 = 4$), то рівняння прийме вигляд: $3x_1 + x_2 = 6$;

2) якщо $3x_1 + x_2 - 13 \ge x_1 + 2x_2 - 9 \;\Rightarrow\; 2x_1 - x_2 \ge 4$ (півплощина, що знаходиться під прямою $2x_1 - x_2 = 4$), то рівняння прийме вигляд: $x_1 + 2x_2 = 2$.

На рисунку можна побачити лінію рівня цільової функції параметричної задачі, яка має вигляд кута, вершина якого знаходиться в точці x на прямій $2x_1 - x_2 = 4$, що задається умовою рівності аргументів функції $\min\{3x_1 + x_2 - 13, x_1 + 2x_2 - 9\}$, а бокові сторони цього кута паралельні лініям рівня відповідних критеріїв.

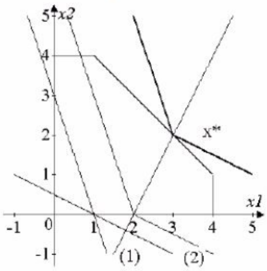


Рис. 2.10.

Для того, щоб побачити, куди є спрямованим субградієнт функції (використовуємо поняття субградієнта, оскільки $\min\{3x_1 + x_2 - 13, x_1 + 2x_2 - 9\}$ є недиференційованою функцією), візьмемо більший її рівень, наприклад, -4, і побудуємо лінію цього рівня. В цьому випадку отримаємо: якщо $2x_1 - x_2 \le 4$, то $3x_1 + x_2 = 9$; а якщо $2x_1 - x_2 \ge 4$, то $x_1 + 2x_2 = 5$.

Максимум досягається в точці $x^* = (3,\ 2)$.