Тема 3. Означення, класифікація та представлення лінійних і нелінійних динамічних систем.

3.1. Означення динамічної системи за Р. Калманом.

Формалізація динамічної (процесної) точки зору на систему приводить до математичного визначення її предмету, яке ввів Р.Калман. Наведемо цитату із філософії: «Причинність загальна, так як немає явищ, які не мали би своїх причин, як немає явищ, які не породжували б тих чи інших наслідків». В теорії систем причинний процес називають *входом (керуванням)*, а процес-наслідок – *виходом (реакцією системи)*. Іншим фундаментальним поняттям ТС являється поняття стану. *Стан в момент* t – це певні об’єкти, які зв’язують всю передісторію входів-причин до моменту t і вихід в цей момент. Конкретною причиною явища в процесі-виході, основою реалізації якраз цього явища, є деякий стан (детермінізм). Отже, в кожний момент часу t система характеризується деяким станом – елементом із її множини станів, який однозначно визначає значення виходу в цей момент t, і це одна із аксіом ТС. Вплив входу на вихід зводиться до залежності стану в кожний момент t від процесу-входу, який реалізувався до цього моменту t, тобто в стані накопичуються всі причини , що реалізувалися в минулому, і які визначають сучасність. Треба звернути увагу на наступне. Якщо в конструкції поняття системи використання процесів входу і виходу було визвано фізичними уявленнями про функціонування системи, то поняття стану має відношення до закону формування виходу. Об’єкт, який взаємодіє із системою, може здійснювати цю взаємодію тільки через вхід і вихід системи, а встановити безпосередній зв'язок з процесом в просторі станів неможливо. Знання, в якому стані знаходиться система в деякий момент часу, може бути отримане лише в результаті розв’язування деякої теоретико-системної задачі.

Крім входу, стану і виходу є ще два поняття, які необхідні при побудові поняття системи: <u>відображення виходу і перехідні відображення.</u> Оскільки вихід однозначно визначається станом, то існує зв'язок між ними, який виражається відображенням із множини значень станів в множину значень, які приймає вихід. Це відображення називається *відображенням виходу.* Аналогічно, існує зв'язок між входом і станом. Якщо в момент t_0 система характеризувалась станом x^0 , а в момент $t_1,\ t_1 > t_0$ – станом x^1 , причому в момент часу $\tau,\ t_0 < \tau < t_1$, вхід приймав певні значення $u(\tau)$, то зміна стану якраз в x^1 , а не в який-небудь інший, визивається дією певного закону поведінки системи. Іншими словами, існує іще одна характеристика – закон, якому підпорядковується поведінка системи в просторі станів. В процесі формалізації цей закон можна описати у вигляді відображення, яке кожному стану і кожному входу ставить у відповідність певний стан, причому це відображення залежить від двох моментів часу як від параметрів. Воно називається *перехідним відображенням.*

Таким чином, конструкція поняття динамічної системи включає первісні поняття входу, стану, виходу а також відношення між цими поняттями, що виражаються відображеннями виходу і перехідним. Знання множини станів, перехідного відображення і відображення виходу дозволяє відповісти на такі питання: яку поведінку може мати система, як потрібно підійти до розв'язування задачі про передбачення поведінки системи і як розв'язати задачу забезпечення заданої поведінки?

А тепер переходимо до строгих математичних викладок. Для математичного визначення процесу необхідно виділити множину його значень і впорядковану множину, яка фіксує, в якій послідовності ці значення реалізуються. В основному в якості впорядкованої множини розглядають множину дійсних чисел (чи якусь підмножину множини дійсних чисел). Часто упорядковану множину трактують як час, і тоді кажуть про процеси, що протікають у часі (динамічні процеси). Упорядковану множину для трьох процесів (входу, стану, виходу) будемо вважати однією і тією ж, і позначати через T і називати *множиною моментів часу.* Через U, Y, X позначимо *множину значень входу, виходу і станів,* відповідно.

Елементи множини $U^T, U^T : T \to U,$ тобто множини всіх відображень із T в U, позначимо через $u(\cdot)$ і назвемо *входами*. Елементи $y(\cdot)$ множини $Y^T, Y^T : T \to Y,$ назвемо *виходами*, і елементи $x(\cdot)$ множини $X^T, X^T : T \to X,$ назвемо *процесами в просторі станів*. Значення вхідного процесу $u(\cdot)$, наприклад, в деякий момент t, є $u(t) \in U,$ (аналогічно $x(t) \in X, y(t) \in Y$).

Кожна конкретна система характеризується своєю множиною входів, яку називають *допустимою* і позначають $U(\cdot) \subset U^T$. Через $u[t_1, t_2]$ позначимо звуження відображення $u(\cdot)$ на інтервал $[t_1, t_2]$. Відносно множини $U(\cdot)$ будемо припускати, що вона не порожня, тобто система не ізольована від інших систем. Також будемо припускати, що якщо $u^1(\cdot) \in U(\cdot)$ і $u^2(\cdot) \in U(\cdot)$, то для довільних $t_1 < t_2 < t_3$ можна вибрати такий допустимий вхід $u(\cdot) \in U(\cdot),$ що $u[t_1, t_2] = u^1[t_1, t_2]$ і $u[t_2, t_3] = u^2[t_2, t_3]$.

Множина всіх реакцій системи, тобто множина виходів, також являється характеристикою системи. Позначимо її через $Y(\cdot) \subset Y^T$. Як відмічалось вище, конкретний вихід $y(\cdot) \in Y(\cdot)$ в кожний момент t повністю визначається станом і тільки станом системи в цей момент t. Позначимо цей стан через $x(t)$. Тоді існує відображення $\eta : T \times X \to Y$ таке, що виконується співвідношення:

$$y(t)=\eta(t,x(t)),\ t\in T.$$

Тут залежність відображення η від t означає, що характер залежності виходу від стану з часом може змінюватися. Відображення η називається *відображенням виходу чи функцією спостереження.*

Вище обговорювалась аксіома, яка полягає в тому, що в кожний момент t система знаходиться в певному стані, причому стан в момент $t\ge\tau$ однозначно визначається станом x в момент τ і відрізком входу $u[\tau,t]$. В цьому відображається принцип детермінізму (визначеності) в поведінці систем. При формалізації цієї обставини встановлюється існування сімейства відображень $\mu_{\tau t}:X\times U(\cdot)\to X,$ заданих для всіх значень параметрів $\tau\in T,\ t\in T,\ \tau\le t.$ Конкретне відображення, яке відповідає фіксованим τ і t, дозволяє для довільних x і довільних $u(\cdot)$ визначити стан в момент t , якщо в момент τ система знаходилась в стані x і використовувався вхід $u(\cdot)$, за формулою:

$$x(t)=\mu_{\tau t}(x,u(\cdot)). \qquad (1)$$

Аксіома однозначної визначеності стану в момент $t>\tau$ за станом в момент τ і входом $u(\cdot)$ накладає обмеження на сімейство відображень $\{\mu_{\tau t}\}$. Запишемо формальний вираз цієї аксіоми. Для цього фіксуємо $u(\cdot)$ і моменти $t_0,t_1,t_2,$ де $t_0\le t_1\le t_2$. Умова детермінізму сімейства відображень $\{\mu_{\tau t}\}$ така:

$$\mu_{t_0t_2}\left(x^0,u(\cdot)\right)=\mu_{t_1t_2}\left(\mu_{t_0t_1}\left(x^0,u(\cdot)\right),u(\cdot)\right), \qquad (2)$$

яка повинна виконуватись для всіх $t_0\le t_1\le t_2$, всіх $x^0=x(t_0)$ і всіх $u(\cdot)$.

Позначимо через $(T\times T)^+$ множину $\{(t,\tau),\ \tau\le t\}$. Визначимо *перехідне відображення* $\sigma:(T\times T)^+\times X\times U(\cdot)\to X$ за формулою:

$$\sigma(t;\tau,x,u(\cdot))=\mu_{\tau t}(x,u(\cdot)).$$

Із (1) маємо $x(t)=\sigma(t;\tau,x,u(\cdot))$, причому із (2) випливає:

$$\sigma(t_2;t_0,x,u(\cdot))=\sigma(t_2;t_1,\sigma(t_1;t_0,x,u(\cdot)),u(\cdot)).$$

Наступна вимога, якій повинно задовольняти перехідне відображення, полягає в тому, щоб рівність

$$\sigma(t;t,x,u(\cdot))=x$$

виконувалась тотожно при всіх $t,x,u(\cdot)$, (це означає, що в один і той же момент часу t система не може знаходитися в двох різних станах).

Також відображення σ повинно бути таким, щоб стан в момент t не залежав від значень входу , які поступають в моменти часу більші моменту t .

Тепер наведемо всі аксіоми, яким задовольняє перехідне відображення σ:

1. *Аксіома узгодженості.* Для довільних $t \in T,\ x \in X,\ u(\cdot) \in U(\cdot)$ виконується рівність:

$$\sigma\big(t;t,x,u(\cdot)\big) = x.$$

2. *Аксіома детермінізму.* Для довільних $t_0 \le t_1 \le t_2,\ x \in X,\ u(\cdot) \in U(\cdot)$ виконується рівність:

$$\sigma\big(t_2;t_0,x,u(\cdot)\big) = \sigma\big(t_2;t_1,\sigma\big(t_1;t_0,x,u(\cdot)\big),u(\cdot)\big).$$

Цю аксіому також називають *асоціативною чи наполовину груповою.*

3. *Аксіома причинності.* Для довільних $x \in X,\ (t,t_0) \in (T \times T)^+$ і будь-яких $u(\cdot) \in U(\cdot),\ \bar{u}(\cdot) \in U(\cdot),$ таких, що $u[t_0,t] = \bar{u}[t_0,t],$ виконується рівність:

$$\sigma\big(t;t_0,x,u(\cdot)\big) = \sigma\big(t;t_0,x,\bar{u}(\cdot)\big).$$

Означення (Р.Калман). Кажуть, що деяка система Ξ визначена, якщо задані впорядкована множина T , множина значень входів U , виходів Y і станів X , допустимі множини входів $U(\cdot)$ і виходів $Y(\cdot)$, перехідне відображення σ , яке задовольняє аксіомам узгодженості, детермінізму і причинності, і відображення виходу η такі, що для довільного $y(\cdot) \in Y(\cdot)$ існує $x(\cdot): T \to X$ і $u(\cdot) \in U(\cdot),$ для яких при довільних $\tau, t \in T,$ де $\tau \le t$ виконується співвідношення:

$$y(t) = \eta\big(t,\sigma\big(t;\tau,x(\tau),u(\cdot)\big)\big), \tag{3}$$

і навпаки, довільний процес $y(t), t \ge \tau,$ який отримується із (3), належить допустимій множині виходів $Y(\cdot).$