Ланцюги Маркова.

Розглянемо послідовність випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, \ldots; X_n \in \{0,1,...\} = Z_+$

Послідовність X_n будемо називати *ланцюгом Маркова*, якщо для будь-якої сукупності індексів $n_1 < n_2 < ... < n_k$ має місце властивість:

$$P\{X_{n_k} = i_k / \underbrace{X_{n_1} = i_1, ..., X_{n_{k-2}} = i_{k-2}}_{k-2}, X_{n_{k-1}} = i_{k-1}\} = P\{X_{n_k} = i_k / X_{n_{k-1}} = i_{k-1}\} = P_{i_{k-1} i_k}\{n_{k-1}, n_k\},$$

$P_{i_{k-1} i_k}(n_{k-1}, n_k)$ - *перехідна ймовірність ланцюга маркова*.

Марківська властивість фактично означає, що майбутнє не залежить від минулого, а залежить тільки від теперішнього.

Ланцюг Маркова називається *однорідним*, якщо $P_{ij}(m,n) = P_{ij}(n-m)$.

$P_{ij}(n, n+1) = p_{ij}, \forall n$ - для однорідного ланцюга маркова.

В подальшому розглядаємо лише однорідні ланцюги.

$P = \left\| p_{ij} \right\|_{i,j=0}^{\infty}$ - *матриця перехідних ймовірностей* ланцюга Маркова.

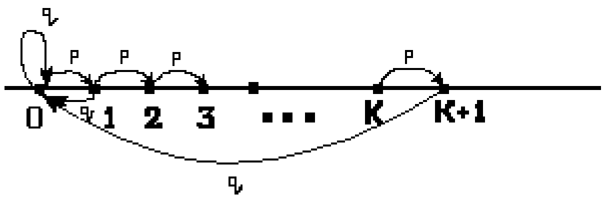
Приклад. (ланцюга Маркова)

Розглянемо схему випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху p. Нехай "У"-успіх, "Н" – неуспіх: *P("У")=p, P("Н")=q*; $p + q = 1$. Розглянемо послідовність: $"H", \underbrace{"Ó", \ldots, "Ó"}_{i}$.

Нехай випадкова величина X_n приймає значення : $X_n = i$, якщо на n-му випробуванні реалізувалася серія успіхів довжиною i, та $X_n = 0$, якщо сталася реалізація неуспіху .

$\{X_n\}$ –ланцюг Маркова з можливими станами $\{0,1,2,\ldots\}$.

Графічно це можна показати так :



$\left\| p_{ij} \right\|_{i,j=1}^{\infty}$ - матриця перехідних ймовірностей ланцюга Маркова для 1-го кроку.

Запишемо матрицю переходів за один крок.

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & ... & . \\ q & 0 & p & 0 & ... & . \\ q & 0 & 0 & p & ... & . \\ ... & ... & ... & ... & ... & . \\ q & 0 & 0 & ... & 0 & p \end{pmatrix}$$

- де p_{ij} ймовірність знаходження на i-му кроці в j-му стані.

$p_{ij}(n) = P\{X_n = j / X_0 = i\}$ називається ймовірністю переходу за n кроків.

Теорема (рівняння Чепмена-Колмогорова).

Перехідні ймовірності $p_{ij}(n)$ ланцюга Маркова $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняють рівняння Чепмена-Колмогорова: $p_{ij}(n)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}(r)p_{kj}(s)$, де (r,s)- невід'ємні цілі числа такі, що: $r+s=n$

◄ Запишемо $p_{ij}(n)$ за визначенням і додамо в чисельник подію ймовірності 1

$$p_{ij}(n)=P\{X_n=j/X_0=i\}=\frac{P\{X_n=j,X_0=i\}}{P\{X_0=i\}}=\frac{P\{X_n=j,\Omega,X_0=i\}}{P\{X_0=i\}}=$$

$$=\frac{P\{X_n=j,\bigcup_{k=0}^{\infty}\{X_r=k\},X_0=i\}}{P\{X_0=i\}}=(r<n)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}P\{X_n=j,X_r=k,X_0=i\}}{P\{X_0=i\}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X_n=j/X_r=k,X_0=i\}\frac{P\{X_r=k,X_0=i\}}{P\{X_0=i\}}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}(r)p_{kj}(n-r)$$ ►

Наслідок В матричній формі рівняння записується так: $P(n)=P(r)P(s)$, де $s=n-r$

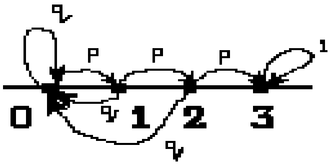
Звідси отримуємо таку властивість матриці перехідних ймовірностей
$P(n)=P(n-1)P(n)=...=P^n(1)=P^n$

Розглянемо ймовірності: $p_k(0)=P\{X_0=k\}$. Розподіл $\{p_k(0)\}_{k=0}^{\infty}$ називають початковим розподілом ланцюга Маркова

Ймовірності $\{p_k(n)\}_{k=0}^{\infty}$, де $p_k(n)=P\{X_n=k\}$, називають *безумовним розподілом ланцюга Маркова на n-му кроці*. Його можна обчислити користуючись формулою повної імовірності (з гіпотезами $P(H_k)=p_k(0)$): $p_k(n)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i(0)p_{ik}(n)$

Класифікація станів дискретного ланцюга Маркова.

Стан i ланцюга Маркова $\{X_n\}_{n=0}^{+\infty}$ називається *неістотним (несуттєвим)*, якщо існують таке число переходів m і стан j такі, що $p_{ij}(m)>0$, але для $\forall n: p_{ji}(n)=0$



Нехай $E=\{0,1,2,...\}$ –множина станів з відокремленою від неї множиною неістотних станів. Тоді цю множину називають *множиною істотних станів*. Вона характеризується тим , що потрапивши в неї ланцюг ніколи з неї більш не вийде.

Розглянемо клас істотних станів.

Стан j називається *досяжним* з стану i, якщо існує таке число переходів $m\ge 0$, що $p_{ij}(m)>0$. За домовленістю будемо вважати, що $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$. Будемо позначати $i\to j$, якщо стан j є досяжним зі стану i. Стани називаються такими, що сполучаються $i\leftrightarrow j$, якщо $i\to j$ і $j\to i$: $(i\leftrightarrow j)\Leftrightarrow(i\to j\wedge j\to i)$

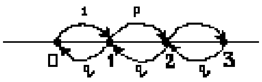
Відношення сполучення $(i\leftrightarrow j)$ "$\leftrightarrow$" – є рефлексивним, симетричним, транзитивним. Отже, множину всіх істотних станів можна представити , як скінчену або зліченну сукупність класів $E_1,\ldots,E_n,\ldots$, які $E_i \cap E_j = \varnothing$, а в об'єднанні вони дають множину всіх істотних станів $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E$ й характеризуються тим, що стани з яких вони складаються сполучаються між собою, а переходи між класами істотних станів $E_1,\ldots,E_n,\ldots$ є неможливими.

Отже, множина всіх станів ланцюга Маркова $Z_+ = \{0,\ldots,n,\ldots\}$ складається з E^* (клас неістотних станів) і з $E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots$(класи істотних станів), $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E$.

Ланцюг Маркова, який складається лише з одного класу істотних станів: $E = E_1$ називається *незвідним ланцюгом.*

Число $d(i)$ називається *періодом* стану "i" ланцюга Маркова , якщо $d(i)$ - найменший спільний дільник(НСД) таких n, що $p_{ij}(n) > 0$. Якщо $d(i) = 1$, то стан "i" називається *неперіодичним*.

Приклади періодичного ЛМ:



$d(i) = 2$, тобто лише за парне число кроків можна потрапити в будь-який стан.

Розглянемо довільний стан "i".

Для $\forall n \geq 1$ визначимо ймовірність $f_{ii}(n) = P\{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i / X_0 = i\}$, яка є ймовірністю того, що почавши своє функціонування зі стану "i", ланцюг Маркова вперше повернеться в цей стан за n кроків. За домовленістю вважаємо $f_{ii}(0) = 0$, $f_{ii}(1) = p_{ii}$. Для $n \geq 1$ можна легко отримати співвідношення $p_{ii}(n) = \sum_{k=0}^{n} f_{ii}(k) p_{ii}(n-k)$, $n \geq 1$. Позначимо через $P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n p_{ii}(n)$ та $F_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n f_{ii}(n)$ генератриси послідовностей $p_{ii}(n)$ та $f_{ii}(n)$.

Тоді $P_{ii}(s) - p_{ii}(0) = P_{ii}(s) - 1 = F_{ii}(s) P_{ii}(s) \Rightarrow P_{ii}(s) = \dfrac{1}{1 - F_{ii}(s)}$

Стан i називається *рекурентним*, якщо: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}(n) = 1$.

Стан i називається *нерекурентним*, якщо: $\sum_{n=0}^{+\infty} f_{ii}(n) < 1$.

Теорема (критерій рекурентності)

Стан i є рекурентним тоді і тільки тоді, коли $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n) = \infty$.

◄ Згадаємо лему Абеля з мат. аналізу , вона стверджує, якщо

а) $\sum_{n=0}^{+\infty} \grave{a}_n = a < \infty$, тоді $\lim_{s\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} s^n a_n = a$;

б) якщо $a_n \geq 0$ та $\lim_{s\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} s^n a_n = a < \infty$, тоді ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \grave{a}_n$ збігається і $\sum_{n=0}^{+\infty} \grave{a}_n = a$.

Доведення теореми.

Необхідність:

Нехай стан “ i ” є рекурентним. Покажемо, що $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty$. За визначенням, якщо стан “ i ” є рекурентним, тоді $\sum_{n=0}^{+\infty} f_{ii}(n) = 1 \overset{\text{ё.Àáåëÿ}}{\Rightarrow} \lim_{s\to 1-} F_{ii}(s) = 1 \Rightarrow \lim_{s\to 1-} P_{ii}(s) = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n) = \infty$.

Достатність:

Нехай $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n) = \infty$, а стан ” i ” є нерекурентним.

Тоді, за визначенням $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}(n) < 1 \overset{\text{ё.Àáåëÿ}}{\Rightarrow} \lim_{s\uparrow 1} F_{ii}(s) < 1 \Rightarrow \lim_{s\uparrow 1} P_{ii}(s) = \infty$. Звідки випливає, що $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n) < \infty$. Це протиріччя й доводить достатність.

Стан i називається *нульовим*, якщо $\lim_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$. У протилежному випадку стан i називається *ненульовим.*

Наслідок: Нерекурентний стан завжди є нульовим. Ненульовий стан завжди рекурентний.

Нульовий стан може бути рекурентним або нерекурентним .
Ненульовий стан може бути лише рекурентним .