§II Розв’язування нелінійних рівнянь

Постановка задачі:

Розглянемо задачу знаходження коренів рівняння

$$f(x)=0, \tag{1}$$

де $f(x)$ – задана функція дійсного змінного.

Розв’язування даної задачі можна розкласти на декілька етапів:

а) дослiджена розташування коренів (в загальному випадку на комплексній площині) та їх кратність;

б) відділення коренів, тобто виділення областей, що містять тільки один корінь;

в) обчислення кореня з заданою точністю за допомогою одного з ітераційних алгоритмів.

Задача а), б)

1. Будуємо графік функції $y = f(x)$ чи якщо функція $f(x)$ є складною, то рівняння (1) можна подати у вигляді $\varphi(x) = \omega(x)$, тоді будуємо графіки функцій $\varphi(x)$, $\omega(x)$ і точка їх перетину і буде коренем рівняння.

   Приклад.

   $xsinx = 1 \;\; \Rightarrow \;\; sinx = \frac{1}{x}$

Для виділення інтервалів, де знаходяться корені рівняння (1) можна використовувати такі твердження:

1) Якщо на кінцях деякого відрізку $[a, b]$ неперервна функція $f(x)$ приймає значення різних знаків $f(a)f(b) < 0$, то на цьому відрізку рівняння (1) має хоча б один корінь. Якщо при цьому $f(x)$ має неперервну першу похідну, що не змінює знак, то корінь єдиний.

2) Нехай $f(x)$ – аналітична функція на $[a, b]$. Якщо $f(a)f(b) < 0$, то між a та b непарна кількість коренів. Якщо ж $f(a)f(b) > 0$ то між a та b чи немає коренів, чи їх парна кількість (враховуючи кратність).

Для дослідження розташування коренів також будують таблиці значень $f(x)$ з деяким кроком та знаходять наближене розташування коренів

Далі розглядаються ітераційні процеси, що дають можливість побудувати числову послідовність x_n, яка збігається до шуканого кореня x_* рівняння (1).

1. Метод ділення проміжку навпіл (метод дихотомії)

Нехай $f \in C[a,b]$, $f(a)f(b) < 0$ і відомо, що рівняння (1) має єдиний корінь $x_* \in [a,b]$. Покладемо $a_0=a$, $b_0=b$, $x_0=(a_0+b_0)/2$. Якщо $f(x_0)=0$, то $x_* = x_0$. Якщо $f(x_0) \neq 0$, то покладемо

$$a_{n+1} = \begin{cases} x_n, \text{ якщо } \operatorname{sign} f(a_n) = \operatorname{sign} f(x_n), \\ a_n, \text{ якщо } \operatorname{sign} f(a_n) \neq \operatorname{sign} f(x_n), \end{cases} \tag{2}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} x_n, \text{ якщо } \operatorname{sign} f(b_n) = \operatorname{sign} f(x_n), \\ b_n, \text{ якщо } \operatorname{sign} f(b_n) \neq \operatorname{sign} f(x_n), \end{cases} \tag{3}$$

$$x_{n+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}, \quad n = 0,1,2,..., \tag{4}$$

і обчислимо $f(x_{n+1})$. Якщо $f(x_{n+1}) \cong 0$, то ітераційний процес зупинимо і будемо вважати, що $x_* \approx x_{n+1}$. Якщо $f(x_{n+1}) \neq 0$, то повторюємо розрахунки за формулами (2)-(4).

Можна перевіряти і іншу умову: ітераційний процес продовжуємо, поки

$$|x_n - x_{n-1}| \leq 2\varepsilon.$$

Середина останнього відрізку і є наближеним значенням кореня з точністю ε.

Визначення. *Ітераційний процес* $x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ *збігається, якщо*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Ітераційний процес методу дихотомії збігається із швидкістю геометричної прогресії із знаменником $\frac{1}{2}$, т.т.

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |x_1 - x_0|$$

Позначимо $n_0(\varepsilon)$ - кількість ітерацій. які необхідно провести для знаходження наближеного кореня рівняння (1) з заданою точністю ε.

$$|x_n - x_{n+1}| \leq \varepsilon$$

$$|x_n - x_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} |x_1 - x_0| \leq \varepsilon$$

$$n_0(\varepsilon) \geq \left[log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}\right] + 1. \tag{6}$$

де $[c]$ – ціла частина числа c.

Серед переваг даного методу слід відзначити простоту реалізації та надійність. Послідовність $\{x_n\}$ збігається до кореня x_* для довільних неперервних функцій $f(x)$. До недоліків можна віднести невисоку швидкість збіжності методу та неможливість узагальнення даного методу для систем нелінійних рівнянь.

Приклад 1. *Розв'язати рівняння*

$$x + \sin x - 1 = 0$$

методом ділення проміжку навпіл з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо проміжок,

$$sinx = 1 - x$$

де рівняння має єдиний корінь. Легко бачити, що $f(0)=-1<0$, а $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$. Отже корінь належить проміжку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Оскільки похідна функції $f(x)=x+\sin x-1$ не змінює знак, то корінь у рівнянні (29) буде один. Виберемо $a_0=0,\quad b_0=\frac{\pi}{2}$. Згідно з формулою (6), отримаємо, що для знаходження кореня з точністю 10^{-4} необхідно провести 13 інтеграцій. Відповідні значення x_n наведені в табл. 1.

Табл.1

n	x_n	$f(x_n)$
0	0785398E+00	0492505E+00
1	0392699E+00	0224617E+00

2	0589049E+00	0144619E+00
3	0490874E+00	0377294E-01
4	0539961E+00	0540639E-01
5	0515418E+00	0831580E-02
6	0503146E+00	0146705E-01
7	0509282E+00	0316819E-02
8	0512350E+00	0257611E-02
9	0510816E+00	0295467E-03
10	0511583E+00	0114046E-02
11	0511199E+00	0422535E-03
12	0511007E+00	0635430E-04
13	0510911E+00	0116016E-03

2. Метод простої ітерації

Перетворимо рівняння (1) до вигляді

$$x = \varphi(x)\,. \tag{7}$$

Перейти від рівняння (1) до рівняння (7) можна багатьма способами, наприклад, вибравши

$$\varphi(x) = x + \psi(x)\,f\,(x)\,, \tag{8}$$

де $\psi(x)$ – довільна знакостала неперервна функція.

Обираємо початкове наближення x_0, наступні наближення знаходяться за формулою

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,2,\dots \tag{9}$$

З принципу стискаючих відображень випливає таке твердження:

Теорема 1. *Нехай для вибраного початкового наближення* x_0 *на проміжку*

$$S = \{x : |x - x_0| \le \delta\} \tag{10}$$

функція $\varphi(x)$ *задовольняє умові Ліпшиця*

$$|\varphi(x') - (x'')| \le q|x' - x''|, \quad x', x'' \in S \tag{11}$$

де $0<q<1$, *і виконується нерівність*

$$|\varphi(x_0) - x_0| \le (1-q)\delta\,. \tag{12}$$

Тоді рівняння (7) має на проміжку S *єдиний корінь* x_*, *до якого збігається послідовність (9), причому швидкість збіжності визначається нерівністю*

$$|x_n - x_*| \le \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0|\,. \tag{13}$$

Зауваження: якщо функція $\varphi(x)$ має на проміжку S неперервну похідну $\varphi'(x)$, яка задовольняє умові

$$\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1, \tag{14}$$

то функція φ(*x*) буде задовольняти умові (11) теореми 1.

Теорема 2 (про оцінку швидкості збіжності МПІ).

Нехай $\varphi(x) \in C^1[a,b]$. *Якщо* $\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)| \le q < 1$ *, то МПІ збігається та має місце оцінка*

$$|x_n - x_*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \le \frac{q^n}{1-q}|b-a|$$

Нехай $x_k, x_{k+1} \in S$.

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\alpha_k)(x_k - x_{k-1})| \le$$

$$\alpha_k = x_k + \theta_k(x_{k+1}x_k), 0 < \theta_k < 1,$$

$$\le |\varphi'(\alpha)||x_k - x_{k-1}| \le q|x_k - x_{k-1}| = \cdots = q^k|x_1 - x_0|,$$

Розглянемо $p \in N$

$$\left|x_{k+p} - x_k\right| = \left|x_{k+p} - x_{k+p-1} + x_{k+p-1} + \cdots + x_{k+1} - x_k\right| \le$$

$$\leq \left|x_{k+p} - x_{k+p-1}\right| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \leq$$

$$\leq (q^{k+p-1} + q^{k+p-2} + \cdots + q^k)|x_1 - x_0| =$$

$$= \frac{q^k - q^{k+p-1}}{1-q}|x_1 - x_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Отже $\{x_k\}$ – фундаментальна послідовність $\Rightarrow$ $\{x_k\}$ – збіжна послідовність.

Якщо $p \to \infty$, то дістанемо шукану нерівність.

З (13) можна отримати оцінку кількості ітерацій $n_0(\varepsilon)$, які потрібно провести для знаходження розв’язку задачі (7) з наперед заданою точністю ε:

$$|x_n - x_*| \leq \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0) - x_0| \leq \varepsilon$$

$$n_0(\varepsilon) \geq \left[\frac{ln\frac{|\varphi(x_0)-x_0|}{(1-q)\cdot\varepsilon}}{ln(1/q)}\right] + 1. \qquad (15)$$

Наведемо ще одну оцінку. що характеризує збіжність методу простої ітерації:

$$\left|x_n - x_*\right| \le \frac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|. \tag{16}$$

Із (16) одержимо $$|x_n - x_*| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Умова закінчення ітераційного процесу.

Переваги та недоліки МПІ.

1) Якщо $q < {}^1\!/_2$, то МПІ швидше, ніж м-д ділення навпіл.
2) Можна застосовувати до систем нелінійних рівнянь
3) Якщо $q > {}^1\!/_2$, то повільніший за метод ділення навпіл
4) Виникають труднощі з вибором ф-ції $\varphi(x)$.

Приклад 2. *Знайти додатні корені рівняння*

$$5)\ x^3-x-1=0 \qquad (30)$$

методом простої ітерації з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Розв'язання. Графічне дослідження рівняння (30)

$$x^3 = x + 1$$

показує, що існує єдиний дійсний додатній корінь цього рівняння і він належить проміжку [1,2].

$$x = \varphi(x), \qquad \varphi(x)\ \text{- ?}$$

$$x = x^3 - 1$$

$$x = \sqrt[3]{x+1}$$

Оскільки на цьому проміжку $x \neq 0$, то рівняння (30) можна подати у вигляді

$$x = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}. \tag{31}$$

Позначимо $\varphi(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^{1/2}$. Перевіримо виконання умов теореми про збіжність методу простої ітерації. Виберемо x_0=1,5, тоді δ=0,5. Розглянемо

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3 + x^4}}; \quad \max_{1 \le x \le 2} |\varphi'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

тобто $$q = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

тоді

$$|\varphi(x_0) - x_0| = \left|\sqrt{\frac{2}{3} + 1} - 1{,}5\right| = 0{,}205, \quad (1-q)\delta = 0{,}5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}3232,$$

а отже умова (12) виконується. З формули (15) маємо, що кількість ітерацій, які необхідно провести для знаходження кореня з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ повинна задовольняти умові $n \geq 8$. Відповідні значення x_n та $x_n - \varphi(x_n)$ наведені в табл.2.

6) Табл.2

n	x_n	$x_n - \varphi(x_n)$
0	0150000E+01	0209006E+00
1)	2) 0129099E+01	3) 0411454E-01
4)	5) 0133214E+01	6) 0901020E-02
7)	8) 0132313E+01	9) 0193024E-02
10)	11) 0132506E+01	12) 0415444E-03
13)	14) 0132464E+01	15) 0892878E-04
16)	17) 0132473E+01	18) 0191927E-04
19)	20) 0132471E+01	21) 0417233E-05

22)	23) 0132472E+01	24) 0953674E-06

Виходячи з нерівності (16) і отриманих результатів видно, що для досягнення заданої точності достатньо було провести 5 ітерацій (n=5). Взагалі слід відзначити, що апостеріорна оцінка (16) є більш точною і її використання може заощадити деяку кількість обчислень.

3. Метод релаксації

Для збіжності ітераційного процесу (9):

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,\ldots$$

суттєве значення має вибір функції $\varphi(x)$. Зокрема, якщо в (8) вибрати $\psi(x) = \tau = \mathrm{const}$, то отримаємо метод релаксації.

$$x_{n+1} = x_n + \tau f(x_n), \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{17}$$

Отже, м-д релаксації – це частинний випадок МПІ.

Застосуємо наведені вище теореми. Знайдемо

$$\varphi'(x) = 1 + \tau f'(x),$$

М-д збігається за умови

$$|\varphi'(x)| = |1 + \tau f'(x)| \le q < 1,$$

Нехай $f^{'}(x) < 0,$ тоді $0 < \tau < \frac{2}{|f'(x)|}$.

Поставимо задачу $q = q(\tau) \rightarrow min$.

Для того, щоб обрати оптимальний параметр розглянемо рівняння похибки

$$z_k = x_k - x^*.$$

Підставимо $x_k = x^* + z_k$ в (17):

$$z_{k+1} = z_k + \tau f(x^* + z_k).$$

Нехай $f(x) \in C^1[a, b]$.

З теореми про середнє:

$$f(x^* + z_k) = f(x^*) + z_k f'(x^* + \theta z_k) = z_k f'(x^* + \theta z_k) = z_k f'(\alpha_k)$$

$$z_{k+1} = z_k + \tau f'(\alpha_k) z_k$$

$$|z_{k+1}| \leq |1 + \tau f'(\alpha_k)| \cdot |z_k| \leq \max_{x \in S} |1 + \tau f'(\alpha_k)| \cdot |z_k|$$

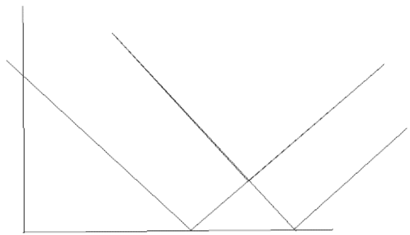
$$|z_{k+1}| \leq \max_{x \in S} \{ |1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1| \} \cdot |z_k|,$$

Де $M_1 = \max\limits_{x \in S} |f'(x)|, \;\; m_1 = \min\limits_{x \in S} |f'(x)|$.

Таким чином, задача вибору оптимального параметру зводиться до знаходження τ, для якого функція

$$q(\tau) = \max_{x \in S} \{|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|\} = \rho(\tau) \to min.$$

З графіків функцій $|1 - \tau M_1|, |1 - \tau m_1|$ бачимо,



що точка мінімуму визначається умовою

$$|1 - \tau M_1| = |1 - \tau m_1|.$$

Отже

$$\tau_0 = \frac{2}{M_1+m_1} < \frac{2}{|f'(x)|}. \tag{20}$$

При цьому значенні τ одержимо

$$q(\tau_0) = \rho_0 = \frac{M_1-m_1}{M_1+m_1}.$$

При такому виборі τ для похибки $z_n = x_n - x_*$ буде мати місце оцінка

$$|z_n| \le q^n |z_0|, \quad n = 0,1,2,..., \tag{21}$$

де $q = (M_1 - m_1)/(M_1 + m_1)$.

Кількість ітерацій, які потрібно провести для знаходження розв’язку з точністю ε визначається нерівністю

$$n \ge \left[\frac{\ln(|z_0|/\varepsilon)}{\ln(1/q)} \right] + 1. \tag{22}$$

Зауваження: якщо виконується умова $f'(x) > 0$, то ітераційний метод (17) потрібно записати у вигляді

$$x_{n+1} = x_n - \tau f(x_n).$$

Приклад 3. *Метод релаксації знайти найменший за модулем від'ємний корінь рівняння*

$$x^3 - 3x^2 - 1 = 0 \tag{32}$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язання. Спочатку виділимо корені рівняння (32) користуючись наступною таблицею

Табл.3

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3
sign$f(x)$	–	–	+	+	–	+	+	+

З даної таблиці видно, що рівняння має три корені розташовані на проміжках [–3;–2], [–1;0], [0;1]. Будемо знаходити корінь на проміжку [–1;0].

Обчисливши значення $f(-0{,}5)=-0{,}375$ можна уточнити проміжок існування кореня [–1;–0,5].

$$x^3 = 3x^2 + 1$$

Позначимо $f(x)=x^3-3x^2-1$. Тоді $f'(x) = 3x^2 + 6x < 0, \quad x \in [-1;-0{,}5]$ і є монотонно зростаючою функцією на [–1;–0,5] (оскільки $f''(x) = 6x + 6 \geq 0$).

Тому $$m_1 = \min_{x\in[-1;-0{,}5]} |f'(x)| = |f'(-0{,}5)| = 2{,}25,$$

$$M_1 = \max_{x\in[-1;-0,5]} \left| f'(x) \right| = \left| f'(-1) \right| = 3\,.$$

Тоді, відповідно до формул (20) і (21), будемо мати вигляд

$$x_{n+1} = x_n + \tau_{\text{опт}}(x_n^3 + 3x_n^2 - 1)\,, \tag{33}$$

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{2{,}25 + 3} \approx 0{,}381$$

Вибравши за початкове наближення точку x_0=–0,5 будемо мати оцінку $\left| z_0 \right| \le 0{,}5$, а кількість ітерацій, які потрібно провести для знаходження розв'язку з точністю $\varepsilon=10^{-4}$ буде дорівнювати 5 (див. (22)). В табл. 4 наведені відповідні дані ітераційної послідовності:

Табл.4

n	x_n	$f(x_n)$

0	0500000E+00	0142857E+00
1	0642857E+00	0985700E-02
2	0652714E+00	0105500E-04
3	0652704E+00	0596046E-07
4	0652704E+00	0000000E+00
5	0652704E+00	0000000E+00

Із наведених даних видно, що необхідна точність досягається раніше 5-ї ітерації. Це досить характерно для апріорних оцінок типу (22).

4. Метод Ньютона

Метод Ньютона застосовується до розв'язування задачі (1), де $f(x) \in C^2[a,b]$. Розглянемо розвинення

$$0 = f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2!}(x^* - x_n)^2 f''(\alpha)$$

З точністю до членів другого порядку малості та замінючи x^* на x_{n+1} дістанемо

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

або

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad f'(x_n) \neq 0. \tag{23}$$

На початку обчислень вибирається початкове наближення x_0. Наступні наближення обчислюються за формулою (23).

З геометричної точки зору x_{n+1} є значенням абсциси точки перетину дотичної до кривої $y=f(x)$ в точці $(x_n, f(x_n))$ з віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також методом дотичних.

Для м-ду Ньютона

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Тоді

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{\left(f'(x)\right)^2 - f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

При цьому $\varphi'(x^*) = 0$. Це означає, що існує окіл x^*, в якому $|\varphi'(x)| < 1$ і якщо початкове наближення взяти з цього околу, то послідовність, що знайдена за методом Ньютона буде збігатися до x^*.

Теорема 2. *Якщо* $f(x) \in C^2[a,b],\ f(a)f(b) < 0,$ а $f''(x)$ *не змінює знака на* [a,b], *то виходячи з початкового наближення* $x_0 \in [a,b]$, *що задовольняє умові* $f(x_0)f''(x_0) > 0$, *можна обчислити методом Ньютона єдиний корінь* x_* *рівняння (1) з будь-якою точності.*

Теорема 3. *Нехай* x_* *– простий дійсний корінь рівняння (1) і* $f(x) \in C^2(S)$, *де* $S = \{x : |x - x_*| \le \delta\}$,

$$0 < m_1 = \min_{x \in S} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in S} |f''(x)|, \tag{24}$$

причому

$$q = \frac{M_2 |x_0 - x_*|}{2m_1} < 1. \tag{25}$$

Тоді для $x_0 \in S$ *метод Ньютона збігається, причому для похибки справедлива оцінка*

$$\left|x_n - x_*\right| \le q^{2^n - 1}\left|x_0 - x_*\right|. \tag{26}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(x_n - x^*)f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{F(x_n)}{f'(x_n)},$$

Де $F(x) = (x - x^*)f'(x) - f(x)$.

1) $F(x^*) = 0$

2) $F'(x) = (x - x^*)f''(x)$

Тоді $$F(x_k) = F(x^*) + \int_{x^*}^{x_k} F'(t)dt = \int_{x^*}^{x_k} (t - x^*)f''(t)dt$$

Оскільки $(t - x^*)$ не змінює знак на відрізку інтегрування, то використовуємо теорему про середнє

$$F(x_k) = f''(\alpha_k)\int_{x^*}^{x_k} (t - x^*)dt = \frac{(x_k - x^*)^2}{2} f''(\alpha_k),$$

$$\alpha_k = x^* + \theta_k(x_k - x^*), \quad 0 < \theta_k < 1.$$

Отже $$x_{k+1} - x^* = \frac{(x_k - x^*)^2}{2f\prime(x_k)} f"(\alpha_k),$$

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{(x_k - x^*)^2}{2m_1} M_2)$$

З останньої оцінки видно, що метод Ньютона має квадратичну збіжність, тобто похибка на (n+1)-й ітерації пропорційна квадрату похибки на n-й ітерації.

Модифікований метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0,1,2,... \tag{27}$$

дозволяє не обчислювати похідну $f'(x)$ на кожній ітерації, а отже і позбутися можливого ділення на нуль. Однак цей алгоритм має тільки лінійну збіжність.

Кількість ітерацій, які потрібно провести для знаходження розв'язку задачі (1) з точністю ε задовольняє нерівності

$$n_0(\varepsilon) = \left[log_2\left(\frac{ln(|x_0-x_*|/\varepsilon)}{ln(1/q)}\right)+1\right]+1. \quad (28)$$

Приклад 4. *Методом Ньютона знайти найменший додатній корінь рівняння*

$$x^3+3x^2-1=0 \quad (34)$$

з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Розв'язання. З табл. 3 видно, що рівняння (34) має єдиний додатній корінь, що належить проміжку [0;1]. обчислимо $f(0,5)=-0,125$. Тепер будемо шукати корінь на проміжку [0,5;1]. Нехай $f(x)=x^3+3x^2-1$. Тоді $f'(x)=3x^2+6x>0, \quad f''(x)=6x+6>0, \quad x\in[0,5;1]$.

$$m_1=\min_{x\in[0,5;1]}|f'(x)|=|f'(0,5)|=3,75,$$

$$M_2 = \max_{x\in[-1;-0,5]} \left|f''(x)\right| = \left|f''(1)\right| = 12 .$$

Виберемо x_0=1, тоді $\left|x_0 - x_*\right| \le 0,5$. З формули (25) маємо

$$q = \frac{12 \cdot 0,5}{2 \cdot 3,75} = 0,8 < 1 .$$

Тобто всі умови теореми про збіжність методу Ньютона виконані. З формули (28) маємо, що для досягнення заданої точності достатньо провести 7 ітерацій. Відповідні обчислення наведені в табл. 5.

Табл.5

n	$\boldsymbol{x_n}$	$\boldsymbol{f(x_n)}$
0	01000000E+01	03000000E+01
1	06666667E+00	06296297E+00
2	05486111E+00	06804019E-01

3	05323902E+00	01218202E-02
4	05320890E+00	04395228E-06
5	05320889E+00	04230802E-07
6	05320889E+00	04230802E-07
7	05320889E+00	04230802E-07

Задачі

Знайти одним з ітераційних методів дійсні корені рівнянь з точністю ε (наприклад $\varepsilon=10^{-4}$*).*

1) $x^3 - 5x^2 + 4x + 0{,}092 = 0$

2) $x^3 - 4x^2 - 7x + 13 = 0$

3) $x^4 + x^3 - 6x^2 + 20x - 16 = 0$

4) $x^3 + \sin x - 12x + 1 = 0$

5) $x^3 - 10x^2 + 44x + 29 = 0$

6) $x + \sin x - 12x = 0{,}25$

7) $3x + \cos x + 1 = 0$

8) $x^3 - 3x^2 - 17x + 22 = 0$

9) $x^4 - 2x^3 - 3{,}74x^3 + 8{,}18x - 3{,}48 = 0$

10) $x^2 + 4\sin x - 1 = 0$

11) $x^3 + 4\sin x = 0$

12) $x^4 - 10x^3 + 48{,}16x^2 + 108{,}08x + 70{,}76 = 0$

13) $x^4 - 3x^3 + 20x^2 + 44x + 54 = 0$

14) $x^3 - 3x^2 - 14x - 8 = 0$

15) $x^3 - x - 1 = 0$

16) $3x - \cos x - 1 = 0$

17) $3x^2 - \cos^2 \pi x = 0$

18) $x^2 + 4\sin x = 0$

19) $(x-1)^3 + 0{,}5e^x = 0$

20) $x^3 + 4x - 6 = 0$

21) $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$

22) $x^2 \lg x - 1 = 0$

23) $x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$

24) $\mathrm{sh}x - 12\mathrm{th}x - 0{,}311 = 0$

25) $e^x - 2(x-1)^2 = 0$

26) $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$

27) $x^4 + 4x - 2 = 0$

28) $x^4 + 2x - 1 = 0$

29) $x^3 - x^2 + x - 3 = 0$

30) $x^5 + x - 3 = 0$

31) $x^7 + x + 4 = 0$

32) $2^x + x^2 - 1{,}15 = 0$

33) $3^{-x} - x^2 + 1 = 0$

34) $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

35) $x^5 - 5x + 2 = 0$

36) $x^7 + 6x - 5 = 0$

37) $x^4 + 2x - 2 = 0$

38) $(x-1)^2 - \sin 2x = 0$

39) $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$

40) $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$

41) $5x^3 + 2x^2 - 15x - 6 = 0$

42) $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$

43) $(x-1)^2 - 0{,}5e^x = 0$

44) $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$

45) $x^2 \cos 2x = 1$

46) $x^2 - 3 + 0{,}5^x = 0$

47) $x^2 - 10\sin x = 0$