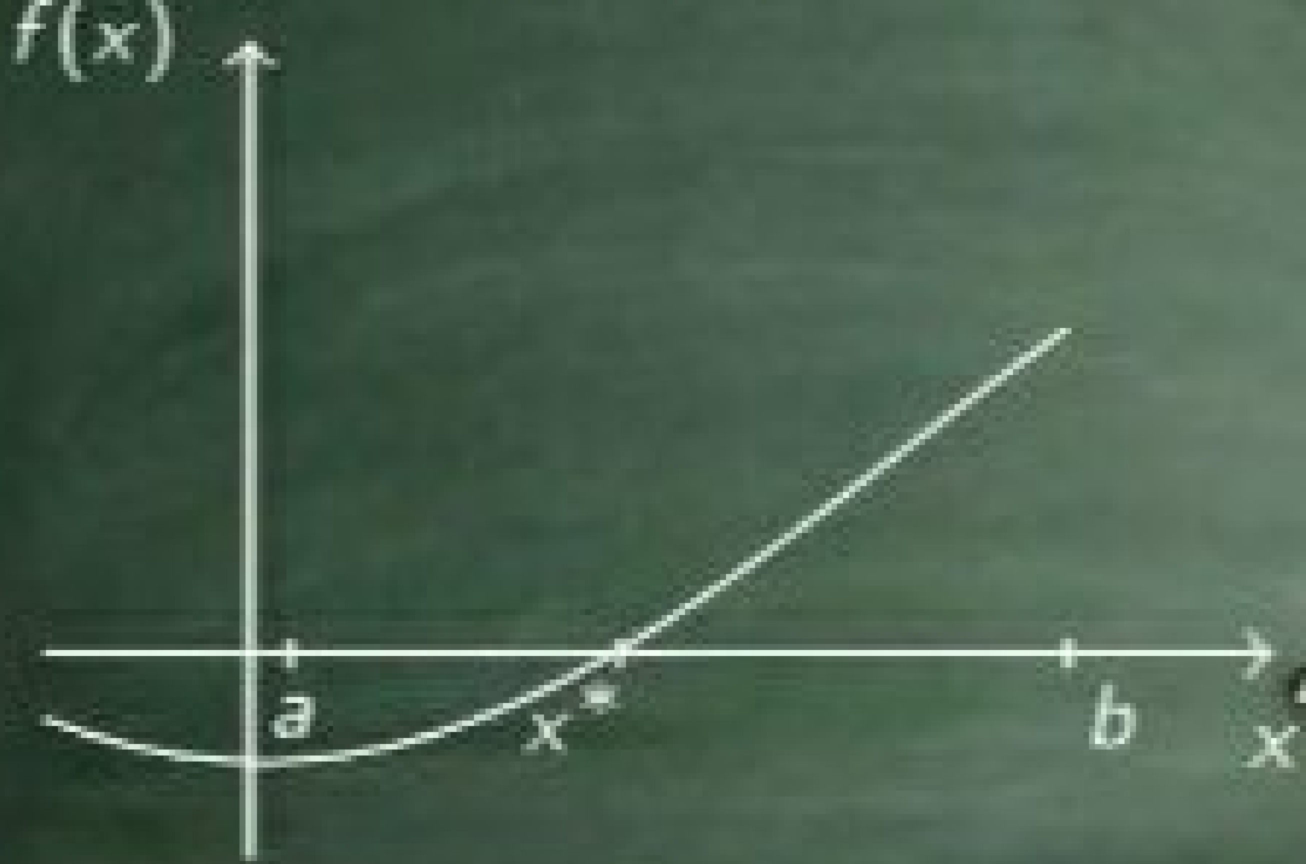
Метод дотичних (Ньютона)

Геометрична інтерпретація

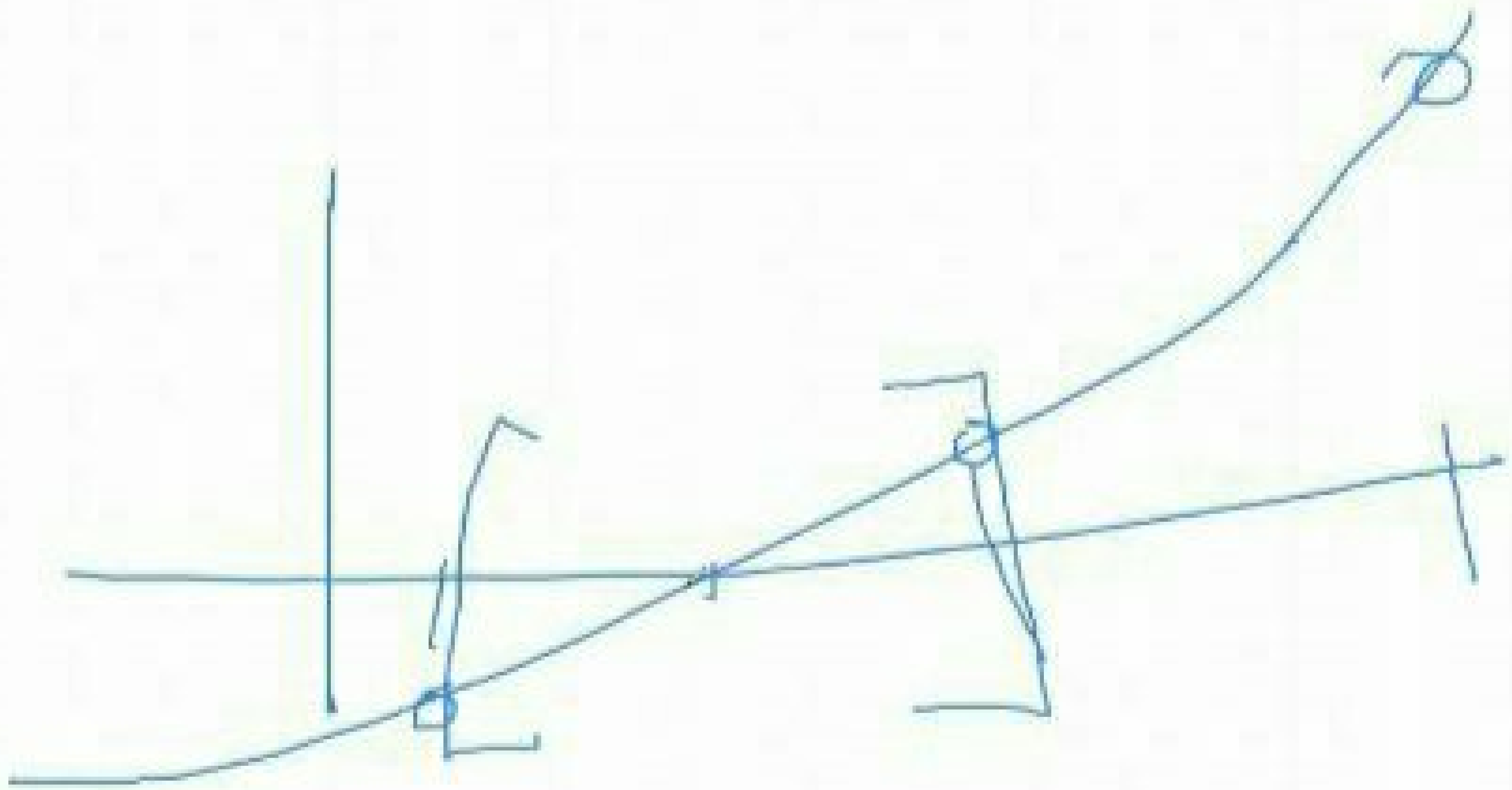


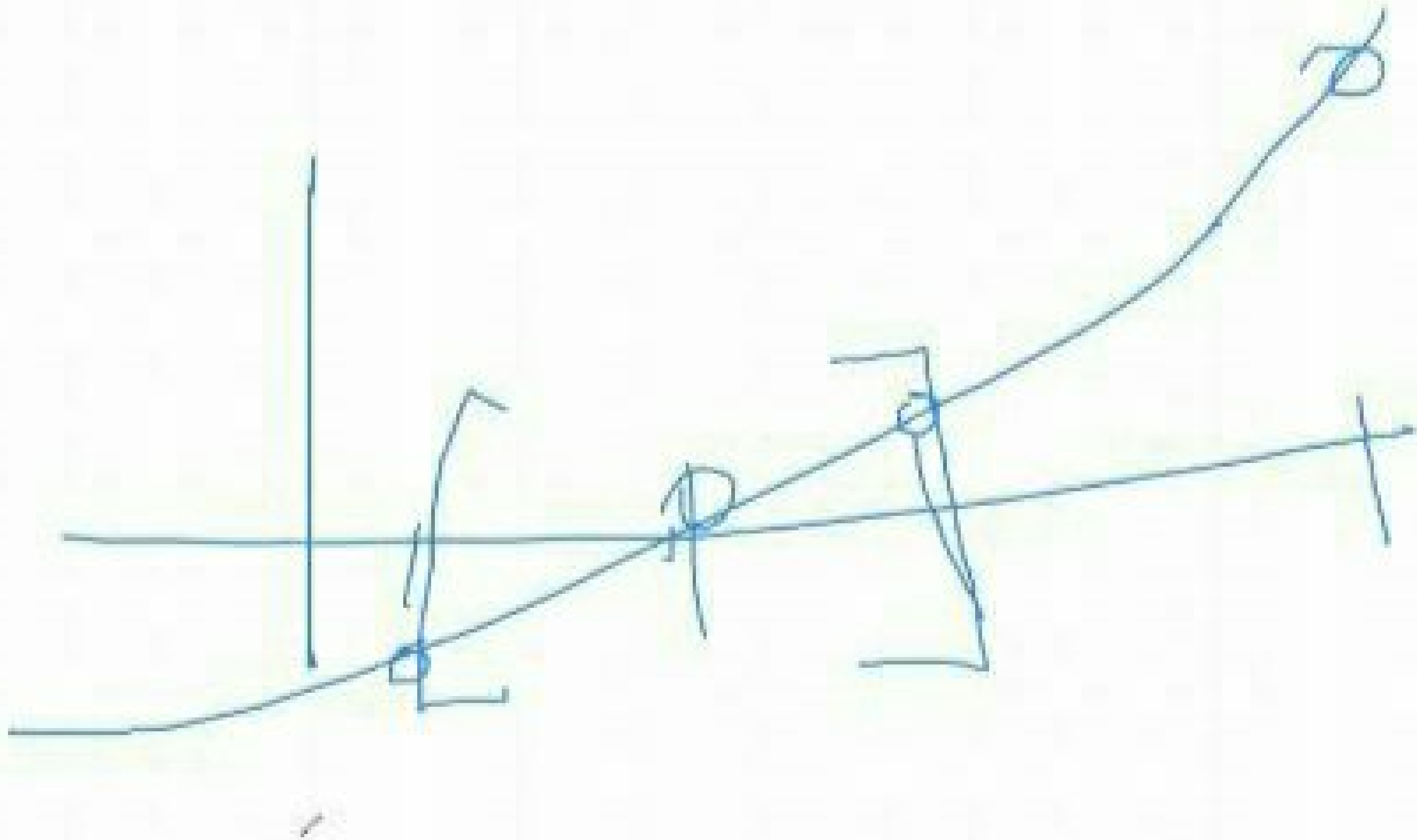
$$f(x) = 0$$

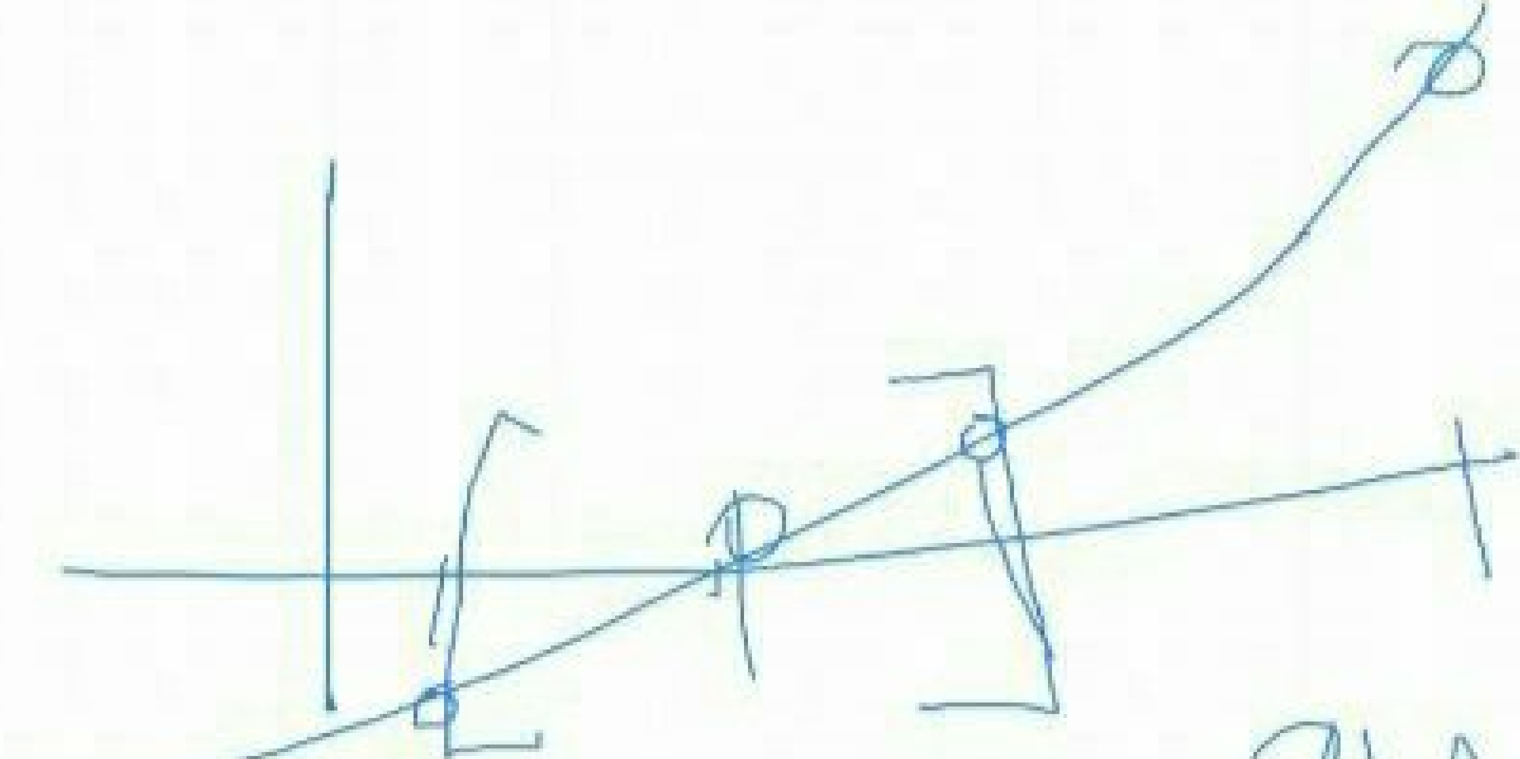
I досп

II $y^* \in [a;b]$

III вел пр







$f \in C[a,b]$

$f(a)f(b) < 0$

$$y(x) = x + \psi(w^T f(x)) \quad MP$$

$$L = \text{conv} + \text{pen}$$

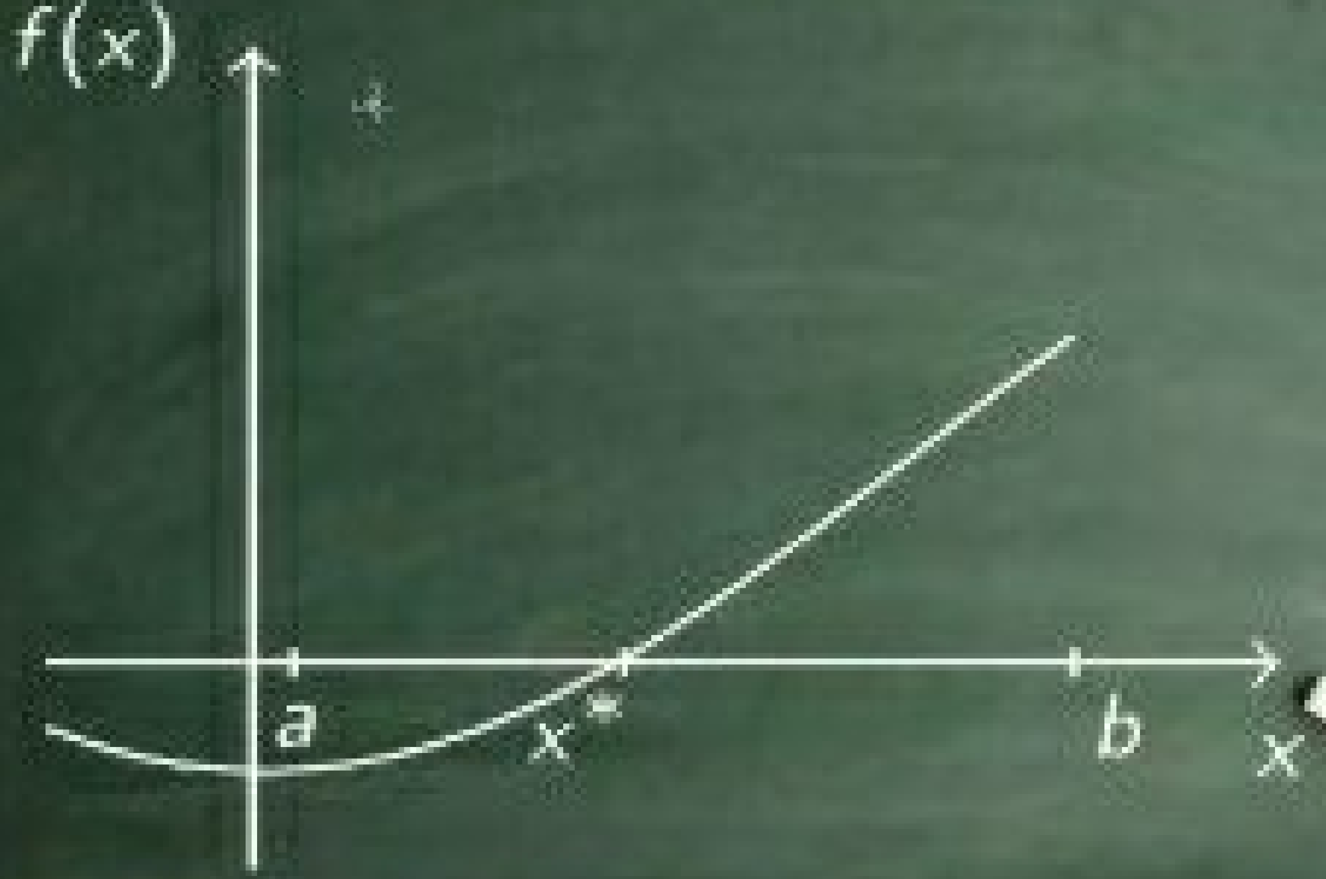
$y(x) = x + \psi^T(x) f(x)$ MP

Σ = conv + pen

$(\omega ; \frac{z}{M})$

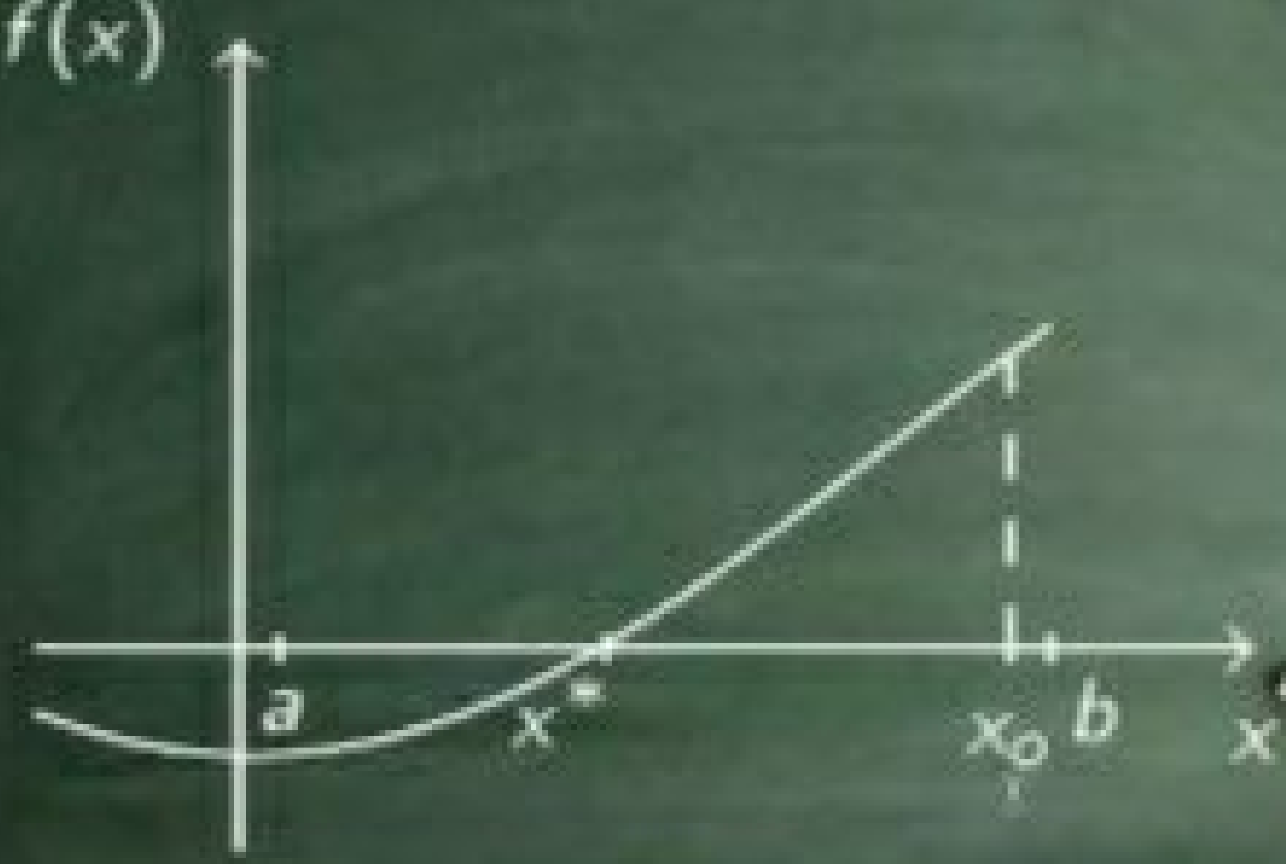
Метод дотичних (Ньютона)

Геометрична інтерпретація



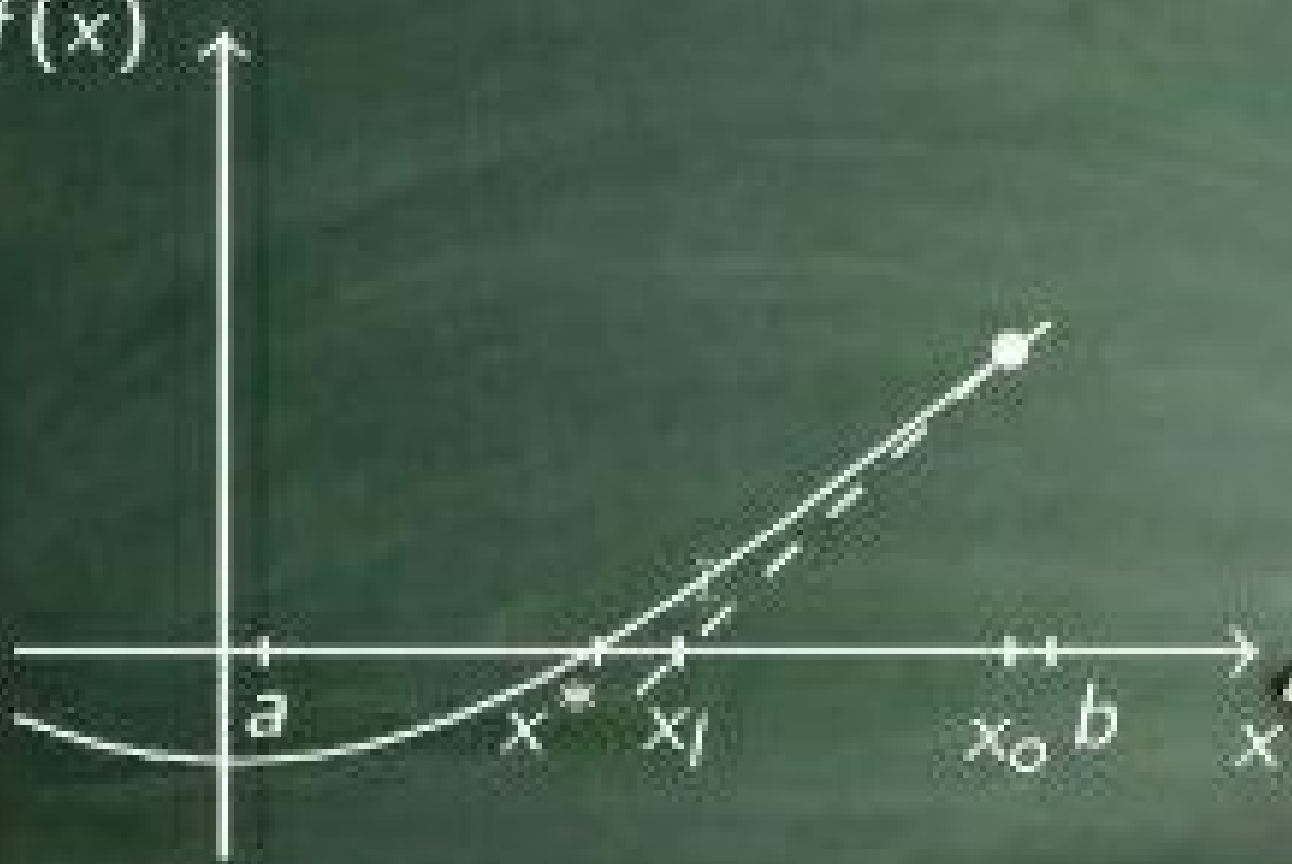
Метод дотичних (Ньютона)

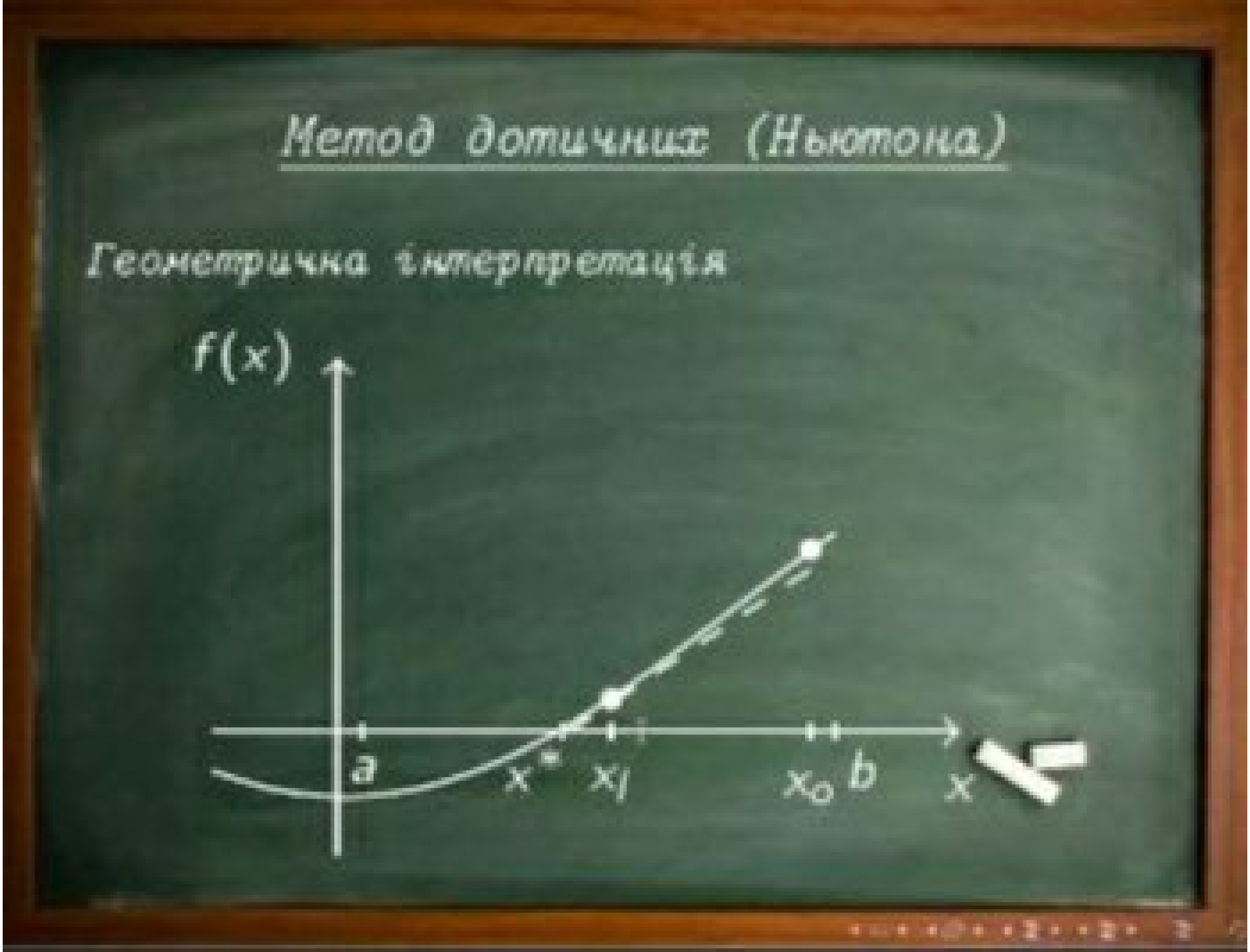
Геометрична інтерпретація



Метод дотичних (Ньютона)

Геометрична інтерпретація




Метод дотичних (Ньютона)
Геометрична інтерпретація
f(x)
a
x*
x1
x0
b
x

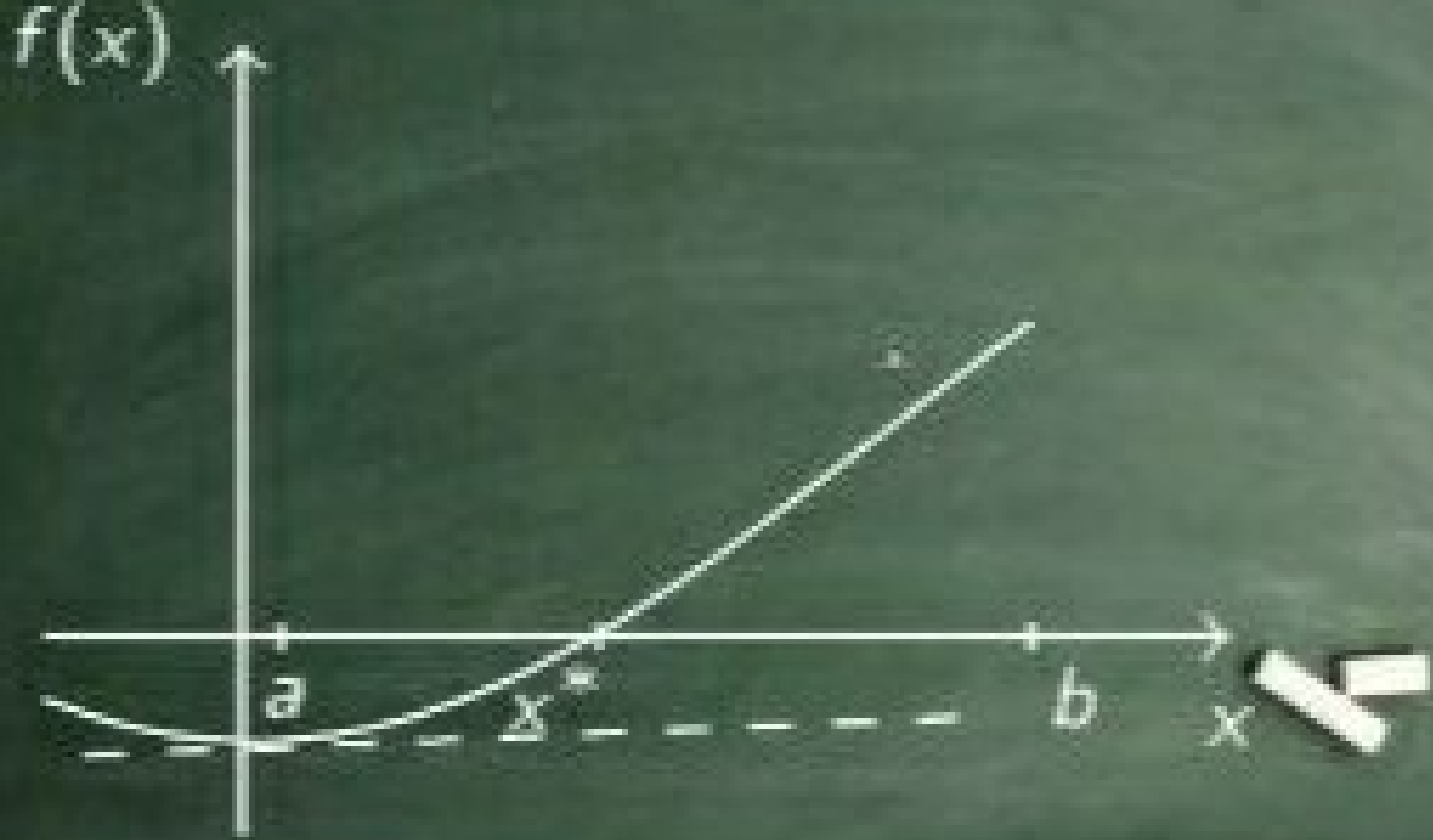
Метод дотичних (Ньютона)

Ітераційний процес:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

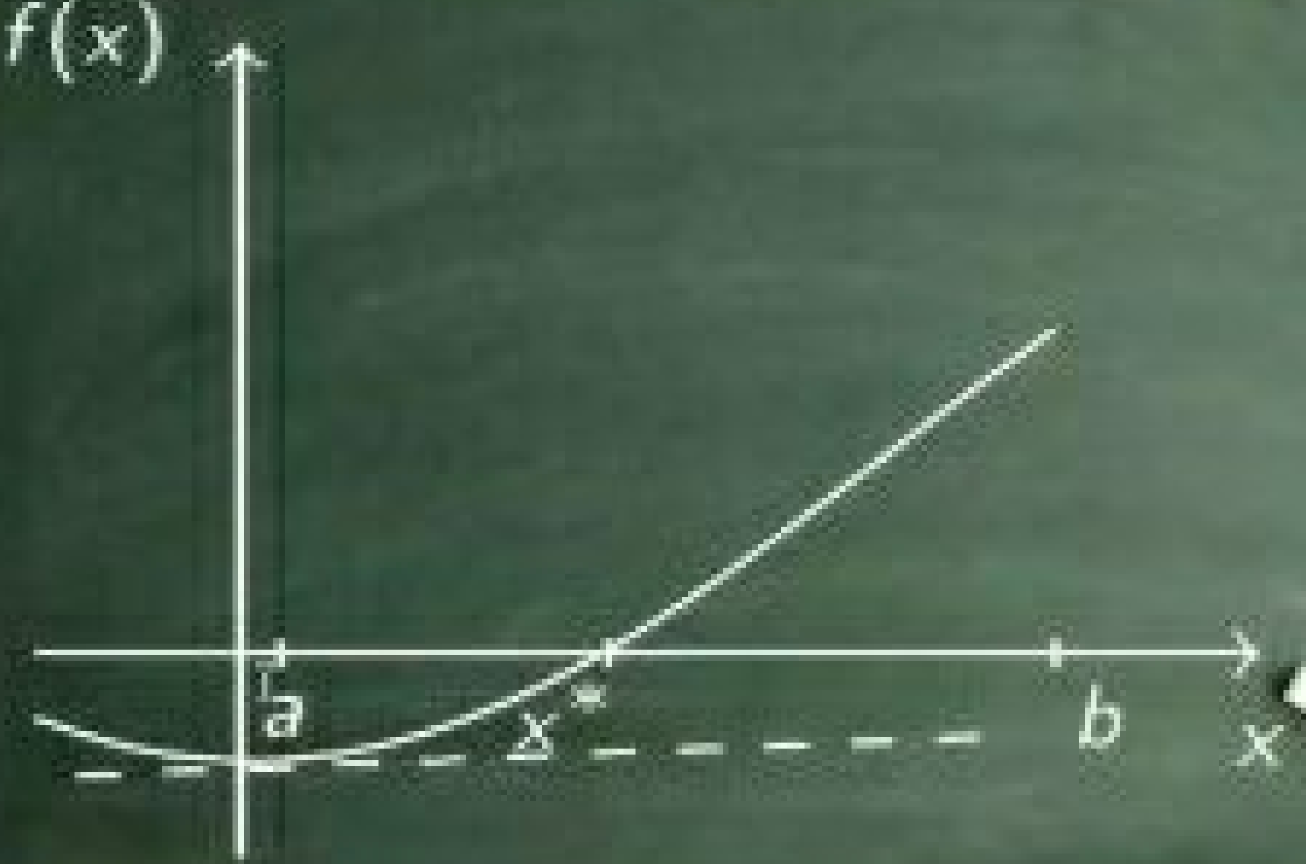
Метод дотичних (Ньютона)

Геометрична інтерпретація



Метод дотичних (Ньютона)

Геометрична інтерпретація



Метод дотичних (Ньютона)

Достатні умови збіжності:

Нехай $f(x) \in C^2_S$; $S - x : |x - x^*| \leqslant \delta$; $f''(x)$ - знакостала на S; $f(a)f(b) < 0$; $f'(x) \neq 0$ та

$$1)\ x_0 \in S:\ f(x_0)f''(x_0) > 0$$

$$2)\ q = \frac{M_2|x_0 - x^*|}{2m_1} < 1 \quad \Rightarrow$$

$\exists x^* : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ та швидкість збіжності:

$$|x_n - x^*| \leqslant q^{2^n - 1}|x_0 - x^*|$$

Метод дотичних (Ньютона)

Порядок швидкості збіжності: квадратична

Апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\log_2 \left(\frac{\ln \frac{x_0 - x^*}{\varepsilon}}{\ln(1/q)} + 1 \right) \right] + 1$$

Метод дотичних (Ньютона)

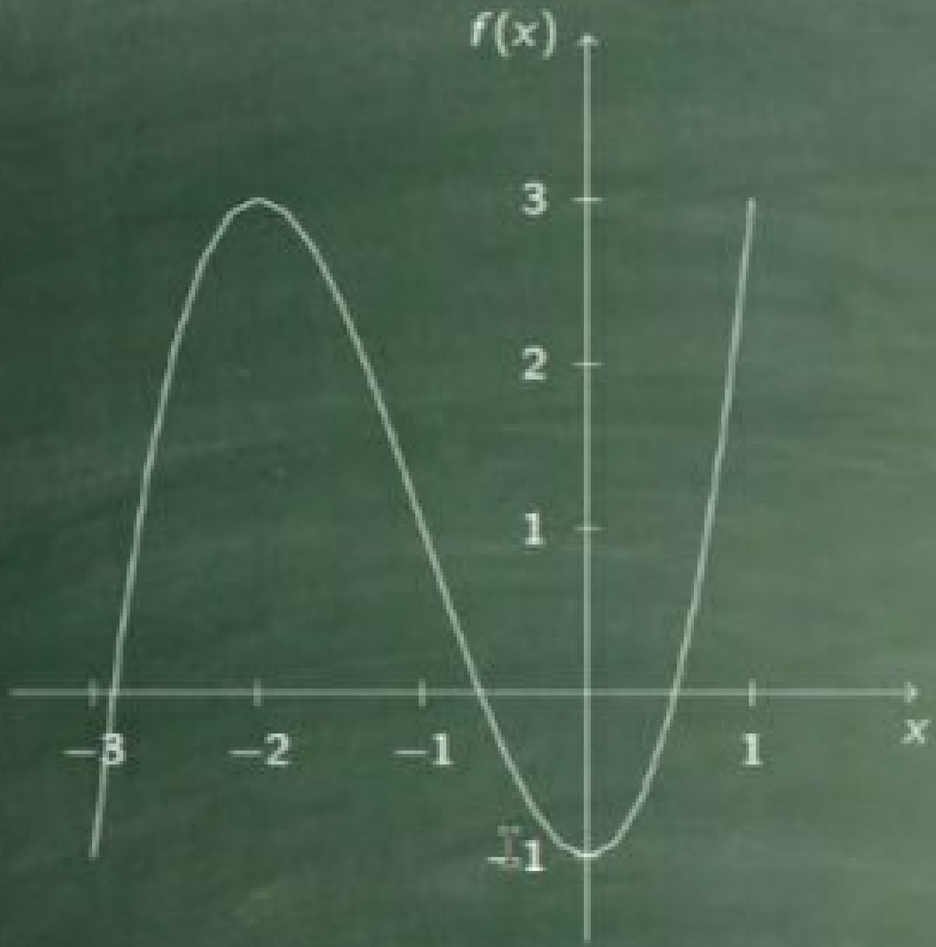
Приклад. Знайти найменший додатній корінь рівняння

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 0,1$.

Знайти апріорну та апостеріорну оцінки кількості кроків.

Eman 1.



Eman 2.

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0^3 + 3\cdot 0^2 - 1 = -1 \\ f(1) &= 1^3 + 3\cdot 1^2 - 1 = 3 \end{aligned}\right\}$$

Етап 3.

Достатні умови збіжності:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1; \qquad f'(x) = 3x^2 + 6x;$$

$$f''(x) = 6x + 6 > 0 \text{ на } [0; 1]$$

Етап 3.

Достатні умови збіжності:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1; \qquad f'(x) = 3x^2 + 6x;$$

$$f''(x) = 6x + 6 > 0 \text{ на } [0,5; 1]$$

$$f'(0) \neq 0$$

Виберемо початкове наближення:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,5) = 0,5^3 + 3 \cdot 0,5^2 - 1 = -0,125 \\ f''(0,5) = 6 \cdot 0,5 + 6 = 9 \end{array}\right\}$$

$$f(0,5)f''(0,5) < 0$$

Достатні умови збіжності:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 = 3 \\ f''(1) = 6 \cdot 1 + 6 = 12 \end{array}\right\}$$

$$f(1)f''(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1$$

$$m_1 = \min_{x \in [0,5;1]} |3x^2 + 6x| = 3,75$$

$$M_2 = \max_{x \in [0,5;1]} |6x + 6| = 12$$

$$\begin{array}{l} x^* \in [0,5;1] \\ x_0 = 1 \end{array} \Rightarrow |x_0 - x^*| = |1 - x^*| \leqslant 0,5$$

Достатні умови збіжності:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 1 = 3 \\ f''(1) = 6\cdot 1 + 6 = 12 \end{array}\right\}$$

$$f(1)f''(1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1$$

$$m_1 = \min_{x\in[0,5;1]} |3x^2 + 6x| = 3,75$$

$$M_2 = \max_{x\in[0,5;1]} |6x + 6| = 12$$

$$\left.\begin{array}{l} x^* \in [0,5;1] \\ x_0 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow |x_0 - x^*| = |1 - x^*| \leqslant 0,5$$

$$q = \frac{M_2|x_0 - x^*|}{2m_1} \leqslant \frac{12\cdot 0,5}{2\cdot 3,75} \approx 0,8 < 1$$

Достатні умови збіжності виконуються.

ітерація 1:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1}{3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1} \approx 0,667$$

$$|x_1 - x_0| = |0,667 - 1| \approx 0,3 \geqslant \varepsilon$$

ітерація 2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,667 - \frac{0,667^3 + 3 \cdot 0,667^2 - 1}{3 \cdot 0,667^2 + 6 \cdot 0,667} \approx$$

$$\approx 0,548$$

$$|x_2 - x_1| = |0,548 - 0,667| \approx 0,1 \leqslant \varepsilon$$

$x^* \approx x_2 \approx 0,548$

апостеріорна оцінка кількості кроків: 2

апріорна оцінка кількості кроків:

$$n \geqslant \left[\log_2 \left(\frac{\ln \frac{x_0 - x^*}{\varepsilon}}{\ln(1/q)} + 1 \right) \right] + 1 \geqslant$$

$$\geqslant \left[\log_2 \left(\frac{\ln(0,5/0,1)}{\ln(1/0,8)} + 1 \right) \right] + 1 = [3.038] + 1 = 4$$

Модифікований метод Ньютона

Ітераційний процес:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

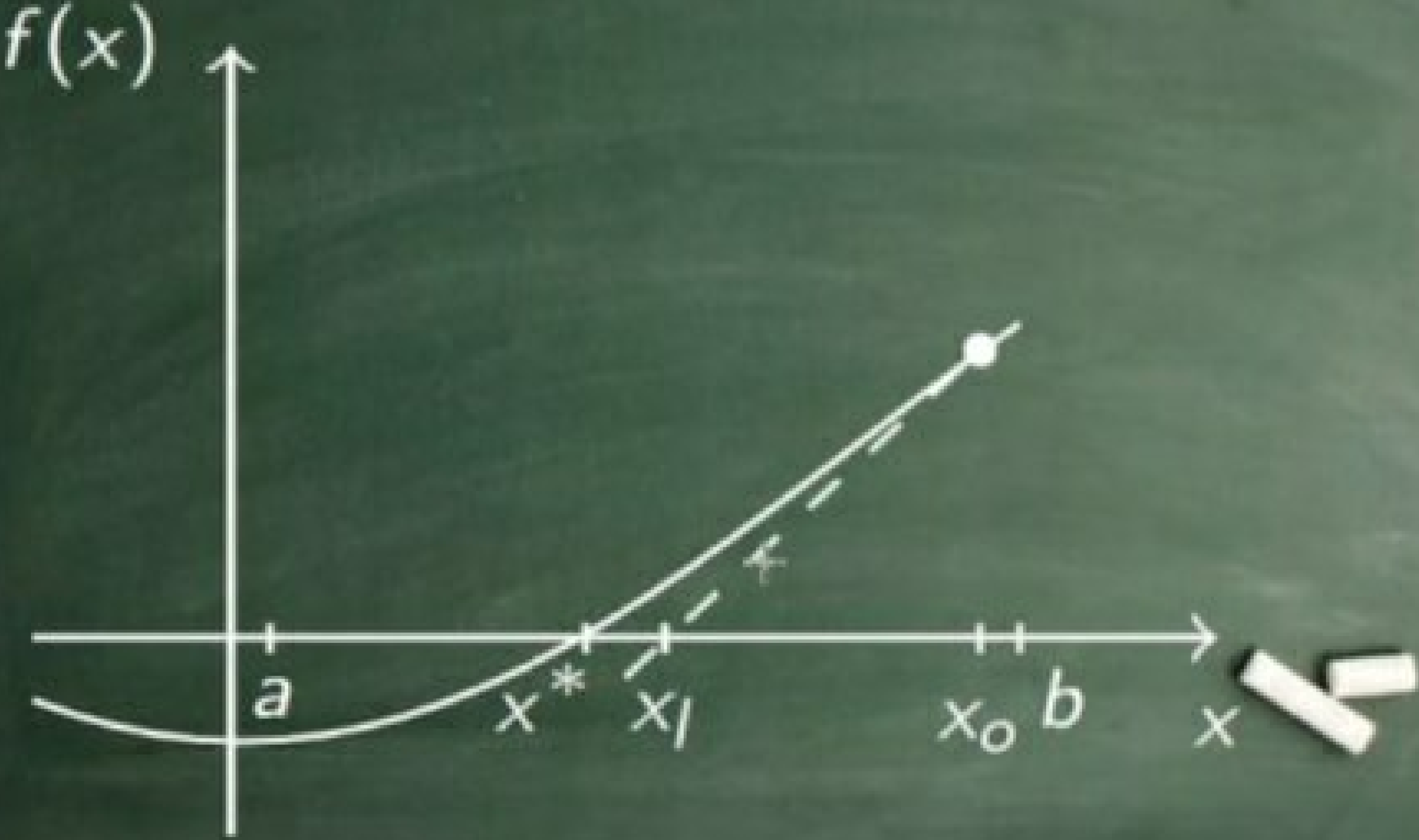
Порядок швидкості збіжності: лінійна

Достатні умови збіжності:

$f(x) \in C^2_{[a;b]}$; $f'(x), f''(x)$ - знакосталі на $[a;b]$;
$f'(x) \neq 0$

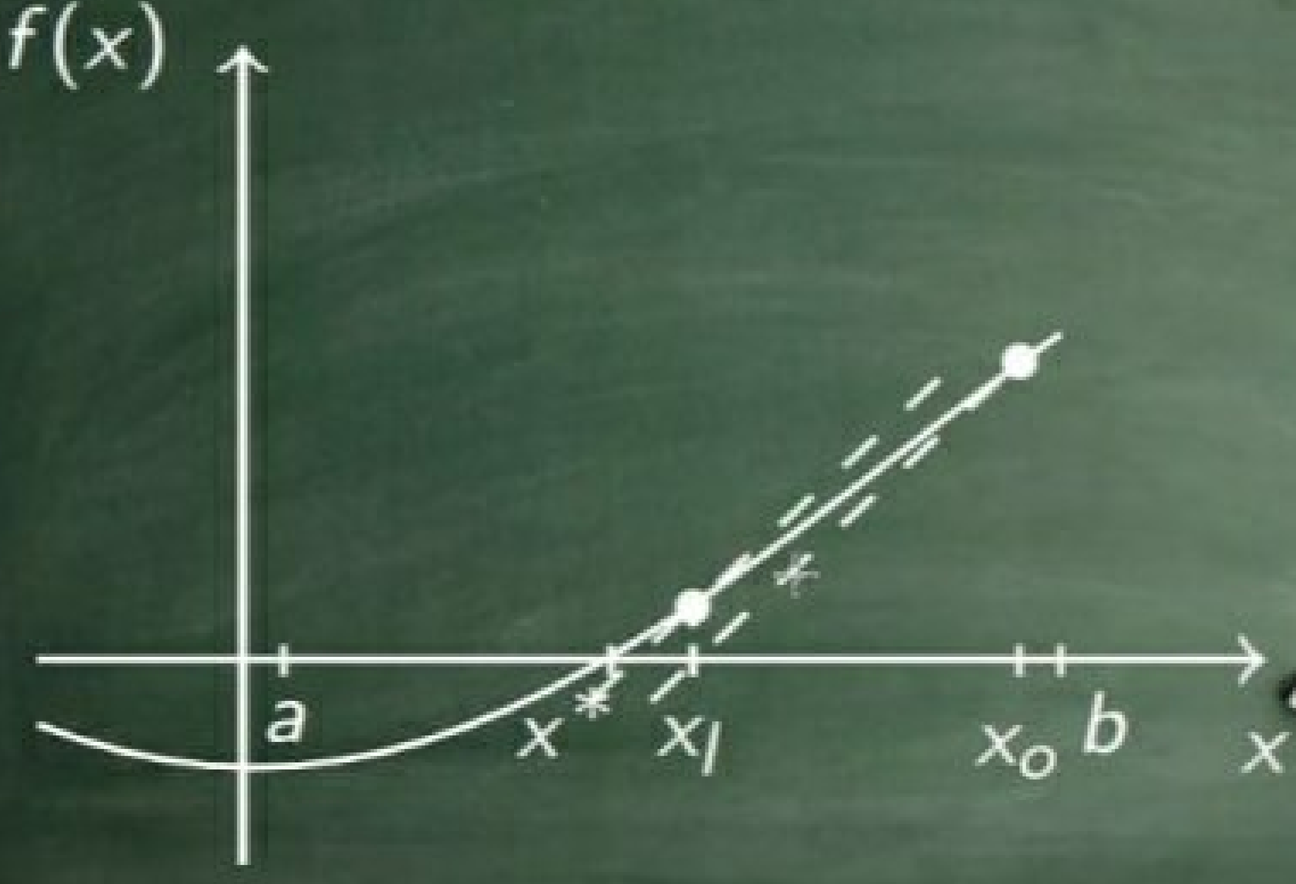
Модифікований метод Ньютона

Геометрична інтерпретація



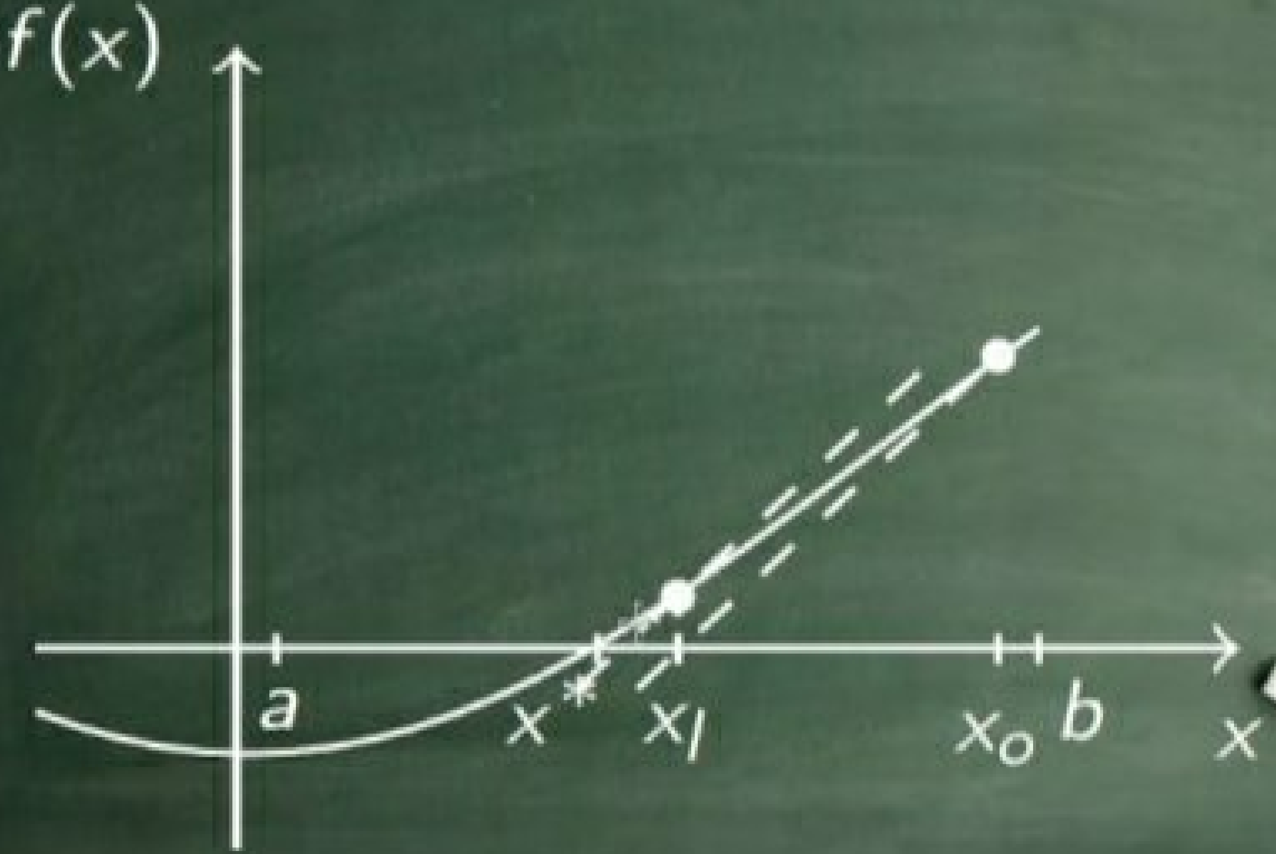
Модифікований метод Ньютона

Геометрична інтерпретація



Модифікований метод Ньютона

Геометрична інтерпретація



Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Постановка задачі

$$Ax = b$$

A - $n \times n$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$

$detA \neq 0$

Прямі методи

Метод Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1(n+1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2(n+1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n(n+1)} \end{cases}$$

$$a_{i(n+1)} = b_i\,, \qquad i = \overline{1, n}$$

$$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}\,,\ \ k = \overline{1, n}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}\,,\ \ j = \overline{k+1, n+1}$$

Метод Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1(n+1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2(n+1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n(n+1)} \end{cases}$$

$$a_{i(n+1)} = b_i, \qquad i = \overline{1, n}$$

$$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \; k = \overline{1, n}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}, \; j = \overline{k+1, n+1}$$

Метод Гауса

$$
\begin{cases}
x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1(n+1)}^{(1)} \\
\qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = a_{2(n+1)}^{(1)} \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad a_{n2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)} x_n = a_{n(n+1)}^{(1)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = a_{1(n+1)}^{(1)} \\
\qquad x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = a_{2(n+1)}^{(2)} \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad x_n = a_{n(n+1)}^{(n)}
\end{cases}
$$

Метод Гауса

$$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \; k = \overline{1, n}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)},$$

$$j = \overline{k+1, n+1}, \quad i = \overline{k+1, n}$$

$$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$$

$$x_n = a^{n}_{n(n+1)}$$

$$x_i = a^{(i)}_{i(n+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}, \; i = \overline{n-1, 1}$$

Метод Гауса з вибором головного

1) $|a_{kj_0}^{(k-1)}| = \max\limits_{j} |a_{kj}^{(k-1)}|, \qquad j = \overline{k, n}$

2) $|a_{i_0 k}^{(k-1)}| = \max\limits_{i} |a_{ik}^{(k-1)}|, \qquad i = \overline{k, n}$

3)

P_{kl}

Метод Гауса з вибором головного

1) $|a_{kj_0}^{(k-1)}| = \max\limits_{j} |a_{kj}^{(k-1)}|, \qquad j = \overline{k, n}$

2) $|a_{i_0 k}^{(k-1)}| = \max\limits_{i} |a_{ik}^{(k-1)}|, \qquad i = \overline{k, n}$

3)

P_{kl}

1) AP_{kl}

2) $P_{kl}A$

Метод Гауса з вибором головного

$$A_k = M_k A_{k-1} \qquad i = \overline{k+1, n}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & m_{(k+1)k} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{nk} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{kk} = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$m_{ik} = \frac{-a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Метод Гауса (по стовпцях)

$$Ax = b$$

$$P_1Ax = P_1b$$

$$M_1P_1Ax = M_1P_1b$$

$$P_2M_1P_1Ax = P_2M_1P_1b$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_nP_n \ldots M_2P_2M_1P_1Ax = M_nP_n \ldots M_2P_2M_1P_1b$$

Визначник

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1(n+1)} \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2(n+1)}^{(1)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = a_{n(n+1)}^{(n-1)}
\end{cases}
$$

$$
detA = (-1)^l a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} \ldots a_{nn}^{(n-1)}
$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом Гауса з вибором головного по стовпцях. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок

$$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1\overline{A_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок

$$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1\overline{A_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Розв'язок

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_1} = M_1 P_1 \overline{A_0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Розв'язок

$$\overline{A_2} = M_2 P_2 \overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4/5} & 0 \end{array}\right)$$

Розв'язок

$$\overline{A_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = 0 - 3/5x_3 = 0$$

$$x_1 = 1 - 5/3x_2 - 2x_3 = 1$$

Розв'язок

$$\overline{A_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = 0 - 3/5x_3 = 0$$

$$x_1 = 1 - 5/3x_2 - 2x_3 = 1$$

Метод квадратного кореня

$$A = A^T \quad \Rightarrow \quad A = S^T D S$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Визначник

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$detA = Det(S^T AS) = DetS^T \cdot DetA \cdot DetS \quad \Rightarrow$$

$$detA = \prod_{k=1}^{n} d_{kk} \prod_{k=1}^{n} s_{kk}^2$$

Розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Метод квадратного кореня

$$d_{ii} = \operatorname{sgn}\left| a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp} \right| \qquad i = \overline{1, n}$$

Розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A = A^T \Rightarrow$

можна м.кв.к.

$$d_{11} = \operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(1) = 1$$

$$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1$$

$$s_{12} = \frac{a_{12}}{d_{11}s_{11}} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$$

Розв'язок

$$d_{22} = \operatorname{sgn}\left(a_{22} - s_{12}^2 d_{11}\right) = \operatorname{sgn}\left(5 - 2^2 \cdot 1\right) = \operatorname{sgn} 1 = 1$$

$$s_{22} = \sqrt{\left|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}\right|} = \sqrt{|1|} = 1$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - s_{12} d_{11} s_{13}}{d_{22} s_{22}} = \frac{5 - 2 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 1} = -1$$

$$d_{33} = \operatorname{sgn}\left(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}\right) =$$

$$= \operatorname{sgn}\left(6 - 3^2 \cdot 1 - (-1)^2 \cdot 1\right) = \operatorname{sgn}(-4) = -1$$

$$s_{33} = \sqrt{\left|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}\right|} = \sqrt{|-4|} = 2$$

Розв'язок

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^T D y = b$$

$$S^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$S^T D y = b$

$$S^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок

$$S^T D y = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 2 - 2y_1 = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(3 - 3y_1 + y_2) = -\frac{1}{2}(3 - 3 \cdot 1 + 0) = 0$$

Розв'язок

$Sx = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$2x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \qquad \Rightarrow x_1 = 1$$

Розв'язок

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$DetA = \prod_{i=1}^{3} d_{ii} s_{ii}^2 = -1 \cdot 2^2 = -4$$

Метод прогонки

A - тридіагональна

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i = \overline{1, n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n y_{n-1} - c_n y_n = -f_n \end{cases}$$

Метод прогонки

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} \qquad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i} \qquad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{z_i}$$

$$i = \overline{1, n-1}$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

$$y_n = \frac{f_n + a_n\beta_n}{z_n} \qquad y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

$$i = \overline{n-1, 0}$$

Теорема про стійкість прогонки

$a_i, b_i, c_i \neq 0; \; i = \overline{1, n-1}; \; a_0, b_0 = 0; \; c_0, c_n \neq 0$

1) $|c_i| \geqslant |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{0, n}$

2) $\exists \; i : \; |c_i| > |a_i| + |b_i| \qquad \Rightarrow$

$|\alpha_i| \leqslant 1, \quad |z_i| > 1, \quad i = \overline{1, n}$

Метод прогонки

A - тридіагональна

$$
\begin{cases}
-c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i, \quad i = \overline{1, n-1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_n y_{n-1} - c_n y_n = -f_n
\end{cases}
$$

Визначник

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n \end{pmatrix} \sim$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i}$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 + (-z_1)\frac{a_2}{z_1} & -c_2 + b_1\frac{a_2}{z_1} & b_2 + 0\frac{a_2}{z_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n \end{pmatrix} \sim$$

Визначник

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -z_2 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -z_2 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -z_n \end{pmatrix}$$

$$detA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot \ldots \cdot (-z_n)$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом прогонки.

Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A - тридіаг. $\Rightarrow$ *можна м. прог.*

$$\left.\begin{array}{l} |1| \geqslant |1| \\ |3| \geqslant |1| + |2| \\ |2| \geqslant |1| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{метод стійкий}$$

Розв'язок

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\beta_1 = \frac{f_0}{c_0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z_1 = c_1 - \alpha_1 a_1 = -3 - (-1) \cdot 1 = -2$$

$$\alpha_2 = \frac{b_1}{z_1} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\beta_2 = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{z_1} = \frac{-1 + 1 \cdot 1}{-2} = 0$$

$$z_2 = c_2 - \alpha_2 a_2 = -2 - (-1) \cdot 1 = -1$$

Розв'язок

$$y_2 = \frac{f_2 + a_2\beta_2}{z_2} = \frac{-1 + 1\cdot 0}{-1} = 1$$

$$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 = -1\cdot 1 + 0 = -1$$

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 = -1\cdot(-1) + 1 = 2$$

Розв'язок

$$y_2 = \frac{f_2 + a_2\beta_2}{z_2} = \frac{-1 + 1 \cdot 0}{-1} = 1$$

$$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 = -1 \cdot 1 + 0 = -1$$

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 = -1 \cdot (-1) + 1 = 2$$

$$y = (2; -1; 1)^T$$

$$DetA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot (-z_2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$