1. Нехай $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ – канонічний розклад натурального додатного числа n на прості множники. Довести, що кількість чисел з $\overline{1,n}$, що взаємно прості з числом n, дорівнює $n \cdot \prod_{i=1}^{r} (1 - \frac{1}{p_i})$.

2. Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_r$ – всі прості числа, що не перевищують $\sqrt{n}$, де $n \geq 2$. Знайти кількість простих чисел p таких, що $p \leq n$.

3. Знайти кількість підстановок nелементної множини, в яких рівно m елементів відповідають самі собі, $0 \leq m \leq n$.

4. n осіб здають свої капелюхи до гардеробу, а потім отримують їх навмання.

а) У скількох випадках жоден не отримає свій капелюх?

б) У скількох випадках точно m осіб отримають власний капелюх?

в) У скількох випадках хоча б m осіб отримають власний капелюх?

5. Довести, що для $m \geq 1$ виконується рівність $S_m = \sum_{k=m}^{n} C_{k-1}^{m-1} M_k$.

6. По пустелі ланцюгом йде караван з n верблюдів. Подорож триває багато днів і, нарешті, усім набридає бачити перед собою того самого верблюда. Скількома способами можна переставити верблюдів так, щоб перед кожним верблюдом йшов інший верблюд, ніж раніш?

7. Скільки існує способів розміщення p пасажирів у n вагонах поїзда, за яких рівно m вагонів виявиться порожніми? Вагони та пасажирів вважати розрізнюваними; місця пасажирів до уваги не брати. Місткість кожного вагону не менша за p.

8. Нехай n і m фіксовані натуральні числа, $N(U) = n$. Скільки існує послідовностей $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ підмножин множини U таких, що:

а) $\varnothing \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_m \subset U$;

9. Скількома способами можна запровадити прямі авіарейси між n ($n \geq 2$) населеними пунктами так, щоб у кожному населеному пункті був хоча б один авіарейс? Вважаємо, що кожен авіарейс працює в двох напрямках: прямому та оберненому.

10. На іспит було винесено M питань з різними відповідями. При підготовці до іспиту Марійка підготувала письмові відповіді на всі M питань, але за браком часу не вказувала питання, на які відповідала. Екзаменаційний білет складається з m різних питань. В екзаменаційній роботі в якості відповідей вона навмання переписала m різних підготованих раніше відповідей. У скількох випадках Марійка дала правильні відповіді рівно на k питань свого білету?

11. Знайти кількість nмісних булевих функцій, жодна змінна яких не є фіктивною.

12. Скількома способами у виразі $c_0 \cdot c_1 \cdot \ldots \cdot c_n$ можна розставити дужки, щоб однозначно задати результат його обчислення?

13. В опуклому nкутнику проведено всі діагоналі. Виявилось, що жодні три діагоналі не перетинаються в одній точці. На скільки частин вони розбивають nкутник?

14. Знайти кількість двійкових векторів довжини n:

а) серед сусідніх координат яких немає двох одиниць поспіль;

б) серед сусідніх координат яких немає трьох одиниць поспіль.

15. На колі розташовано n точок. Скількома способами їх можна розфарбувати в білий та чорний кольори так, щоб жодні дві білі точки не були сусідніми?

16. На колі розташовано n, $n \geq 3$, точок. Скількома способами їх можна розфарбувати в m, $m \geq 2$, кольорів так, щоб сусідні точки мали різний колір? Використання усіх m кольорів не обов'язково.

17. На колі розташовано $2n$ точок. Скількома способами можна попарно сполучити ці точки хордами так, щоб жодні дві хорди не мали спільних точок?

18. Скількома способами опуклий nкутник ($n \geq 3$) можна розбити на трикутники діагоналями, жодні дві з яких не перетинаються всередині nкутника?

19. Скількома способами на трикутній шаховій дошці зі стороною q можна розставити k тур, щоб жодна тура не била іншу?

20. Знайти кількість розв'язків рівняння відносно булівських змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$

а) $(\ldots((x_1 \mid x_2) \mid x_3) \mid \ldots x_{n1}) \mid x_n = 0$;

б) $(\ldots((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3) \rightarrow \ldots x_{n1}) \rightarrow x_n = 1$;

в) $(\ldots((x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3) \downarrow \ldots x_{n1}) \downarrow x_n = 0$.