**Київський університет імені Тараса Шевченка**

**Мащенко С.О.**

# КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
# З ТЕОРІЇ ІГОР

**Частина 1 «Некооперативні ігри»**

**для студентів третього курсу**
**спеціальності 124 – «Системний аналіз»**

**2020**

**Зміст**

## Лекція 1. Постановка ігрової задачі

**Гра у нормальній формі.** Нехай $N = \{1, 2, ..., n\}$ – множина гравців (агентів, осіб, що приймають рішення), $n$ – їхня кількість, $n \geq 2$.

Кожен гравець $i \in N$ має можливість вибрати свою стратегію (рішення, дію), яку ми будемо позначати $x_i$. Усі стратегії гравця $i \in N$ утворюють множину $X_i$.

Коли всі гравці вибрали свої стратегії $x_i$, $i \in N$, утворюється так звана ситуація гри, яка описується вектором $x = (x_1, ..., x_n)$. Множину всіх ситуацій будемо позначати $X$. Очевидно, що $X = \prod_{i \in N} X_i$.

В теорії ігор ситуацію гри позначають різними способами:

$x = (x_1, ..., x_n) = (x_i)_{i \in N}$ – для скорочення запису;

$x = (x_1, ..., x_n) = (x_i, x_{N \setminus i})$ – коли хочуть виділити стратегію деякого гравця $i \in N$, у цьому записі використовується позначення $x_{N \setminus i} = (x_j)_{j \in N \setminus \{i\}} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$;

$x = (x_1, ..., x_n) = (x_T, x_{N \setminus T})$ – коли хочуть виділити набір стратегій деякої коаліції (підмножини) $T \subset N$ гравців $i \in T$, у цьому записі використовуються позначення $x_T = (x_j)_{j \in T}$, $x_{N \setminus T} = (x_j)_{j \in N \setminus T}$.

На множині ситуацій гри $X$ для кожного гравця $i \in N$ визначена його функція виграшу (корисності) $u_i : X \to R^1$, яка за замовченням максимізується. Таким чином, виникає наступна задача: «Яку стратегію треба вибрати кожному гравцю, щоб утворилася ситуація, яка максимізувала б його функцію виграшу»?

Якщо задана: $N$ – множина гравців, $X_i$ – множина стратегій гравця $i \in N$, $u_i(x)$ – функція виграшу гравця $i \in N$, то сукупність $(X_i, u_i; i \in N)$ називають грою у нормальній формі. Відомі й інші форми гри: розгорнута і характеристична.

Якщо множини стратегій гравців скінчені, то можна вважати, що множиною стратегій гравця $i \in N$ є $X_i = \{1, ..., m_i\}$. За означенням гри для кожної ситуації гри $(j_1, ..., j_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i$ визначене число $u_i(j_1, ..., j_n)$ – виграш гравця $i \in N$. Тому якщо гравців двоє ($n = 2$), то можна визначити матриці виграшів гравців $U^i = \{u^i_{j_1 j_2}\}_{j_1 \in X_1, j_2 \in X_2}$, $i = 1, 2$. У цьому випадку гра називається біматричною.

Якщо в грі двох осіб сума функцій виграшу гравців дорівнює нулю, то гра називається антагоністичною. В цьому випадку її нормальна форма задається сукупністю $G = (X_1, X_i, u)$, де $u(x)$ є функцією виграшу першого гравця. Якщо ж множини стратегій гравців є скінченими, то ця гра називається матричною антагоністичною грою.

**Класифікація ігор.** Загальне визначення гри та класифікація ігор вперше були досліджені Н.Воробйовим. У теорії ігор були виділені два основних напрямки дослідження та розв’язування конфліктів.

1. *Кооперативні ігри* досліджують прийняття рішень у випадках, коли існує той чи інший механізм покарання або заохочення гравців, який забезпечує виконання спільно обраної ситуації гри. Основна задача теорії кооперативних ігор полягає у виборі такої ситуації гри, для якої можна побудувати сценарій взаємодії гравців, який забезпечить стабільність цієї ситуації для будь-якої коаліції гравців (зокрема для кожного гравця окремо та всієї спільноти гравців). Суттєвим обмеженням таких відомих принципів оптимальності кооперативних ігор, як $\alpha, \beta, \gamma$-ядра, є вимога достатньо великої кількості реалізацій гри. Ядро, $N$-ядро гри та вектор Шеплі обґрунтовані лише  у тих іграх, де гравці можуть обмінюватися своїми виграшами (так звані, трансферабельні виграші).

2. *Некооперативні* (бескоаліційні) ігри досліджують прийняття рішень в умовах конфлікту у припущенні, що гравці діють незалежно один від іншого. Угоди між гравцями хоча в принципі можливі, але мають обмежений і необов’язковий характер. Кожен може порушити угоду без покарання.

Застосування того чи іншого принципу оптимальності в некооперативних іграх суттєво залежить від інформованості гравців.

1. В умовах *повної неінформованості* гравців (кожен гравець знає лише свою функцію виграшу, гра відбувається лише один раз) відомі: недоміновані та домінуючі стратегії; обережні стратегії.

2. В умовах *“несиметричної” інформованості* гравців (деякі гравці повністю інформовані, а інші неінформовані) використовують принцип рівноваги за Штакельбергом та його узагальнення.

3. Для випадку *повної інформованості* гравців (кожен гравець знає не лише свою функцію виграшу, а й функції виграшу інших гравців, гра може відбувається будь-яку кількість разів) відомі основні принципи оптимальності: рівновага у домінуючих стратегіях, складна рівновага; рівновага за Нешем; коаліційна рівновага; рівновага за Бержем.

**Приклад.** «Гра де Монмора». В кінці XVIII-го сторіччя французький математик Рене де Монмор розглянув таку ситуацію. Для того щоб зробити подарунок своєму сину, батько пропонує: "Я візьму золоту монету у праву (*П*) або ліву (*Л*) руку, а ти назвеш одну з них. Якщо монета у мене у правій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш одну золоту монету. Якщо ж монета у мене у лівій руці і твій здогад правильний, то ти отримаєш дві монети; інакше ти не отримаєш нічого".

*Розв’язання*. У кожного з гравців є дві стратегії вибрати праву (*П*) або ліву (*Л*) руку. Тому $X_1 = \{П, Л\}$, $X_2 = \{П, Л\}$. В такій грі можуть утворюватися чотири ситуації. Тому $X = \{(П, П), (П, Л), (Л, П), (Л, Л)\}$. Виграші першого гравця (сина) мають такі значення: $u_1(П, П) = 1$,

$u_1(П,Л)=0$, $u_1(Л,П)=0$, $u_1(Л,Л)=2$. Виграші другого гравця (батька) відповідно дорівнюють: $u_2(П,П)=-1$, $u_2(П,Л)=0$, $u_2(Л,П)=0$, $u_2(Л,Л)=-2$.

**Приклад.** «Шумна дуель». Кожному з двох дуелянтів дозволяють вистрілити один раз. Вони мають шумні пістолі, тобто кожен знає, коли вистрілить інший. В момент $t=0$ відстань між дуелянтами дорівнює $d$, в момент $t=1$ вони сходяться впритул. Задана дійсна функція $p_i(t)$ на відрізку [0,1], яка вимірює цілкість гравця $i=1,2$. Значення $p_i(t)$ є ймовірністю того, що гравець $i$ влучить у суперника, якщо буде стріляти в момент $t$. Вважається, що функції $p_i(y)$, $i=1,2$, монотонно не зменшуються, неперервні та задовольняють граничним умовам $p_i(0)=1$, $p_i(1)=0$, $i=1,2$. Якщо один гравець влучить у іншого, то виграш переможця дорівнює 1, а того, що програв, дорівнює 1. В усіх інших випадках, виграш нульовий.

*Розв'язання*. Стратегія $x_i$ гравця $i$ означає: « Я буду стріляти у момент часу $t=x_i$, якщо суперник не вистрілить раніше. Якщо він вистрілить, але промахнеться, то я для надійності буду стріляти у момент часу $t=1$. Множини стратегій гравців $X_1=X_2=[0,1]$. Множина ситуацій гри $X=[0,1]\times[0,1]$. Функція виграшу першого гравця буде математичним сподіванням його виграшу. Для її побудови слід розглянути наступні випадки.

Нехай перший гравець стріляє раніше, ніж другий, тобто $x_1<x_2$. При цьому можливі такі події:

- він влучить, ймовірність дорівнює $p_1(x_1)$, його виграш буде 1;
- він промахнеться, ймовірність дорівнює $1-p_1(x_1)$, оскільки його суперник в цьому випадку підійде для надійності впритул до нього і буде стріляти в притул, то його виграш буде -1.

Таким чином, математичне сподівання виграшу першого гравця буде дорівнювати $1\cdot p_1(x_1)+(-1)\cdot(1-p_1(x_1))=2p_1(x_1)-1$.

Нехай другий гравець стріляє раніше, ніж перший, тобто $x_2<x_1$. При цьому можливі такі події:

- він влучить, ймовірність дорівнює $p_2(x_2)$, виграш першого гравця буде -1;
- він промахнеться, ймовірність дорівнює $1-p_2(x_2)$, оскільки перший гравець в цьому випадку підійде для надійності впритул до нього і буде стріляти в притул, то виграш першого гравця буде 1.

Таким чином, математичне сподівання виграшу першого гравця буде дорівнювати $(-1)\cdot p_2(x_2)+1\cdot(1-p_2(x_2))=1-2p_2(x_2)$.

Нехай гравці стріляють одночасно, тобто $x_1=x_2$. Можливі такі події:

- перший гравець влучить, а другий промахнеться, ймовірність дорівнює $p_1(x_1)(1-p_2(x_1))$, виграш першого гравця буде 1;
- перший гравець промахнеться, а другий влучить, ймовірність

дорівнює $(1-p_1(x_1))p_2(x_1)$, виграш першого гравця буде $-1$;

- обидва гравці влучать один в іншого, ймовірність дорівнює $p_1(x_1)p_2(x_1)$, виграш першого гравця буде 0;
- обидва гравці промахнуться, ймовірність дорівнює $(1-p_1(x_1))(1-p_2(x_1))$, виграш першого гравця буде 0;

Таким чином, математичне сподівання виграшу першого гравця дорівнюватиме
$1\cdot p_1(x_1)(1-p_2(x_1))+(-1)\cdot(1-p_1(x_1))p_2(x_1)+0\cdot(1-p_1(x_1))p_2(x_1)+0\cdot p_1(x_1)(1-p_2(x_1))=$
$=p_1(x_1)-p_2(x_1)$. Остаточно одержимо:

$$u_1(x_1,x_2)=\begin{cases}2p_1(x_1)-1, & x_1>x_2,\\ 1-2p_2(x_1), & x_1<x_2,\\ p_1(x_1)-p_2(x_1), & x_1=x_2.\end{cases}$$

В силу симетрії гри виграш другого гравця $u_2(x_1,x_2)=-u_1(x_1,x_2)$.

**Приклад.** «Піратські кораблі». Два кораблі відправляються в один і той же день на острів скарбів. Кожен з $n$ піратів вирішує, на якому кораблі йому плисти: на кораблі $A$ чи $B$. Якщо $t$ – кількість піратів, які вирішили плисти на кораблі $A$, мандрівка на ньому затягнеться на $a(t)$ днів, а мандрівка на кораблі $B$, на якому $(n-t)$ піратів, триватиме $b(n-t)$ днів. Будемо вважати, що функції $a$ і $b$ строго монотонно зростають і виконані умови $a(0)<b(n)$, $b(0)<a(n)$. Кожен пірат хоче мінімізувати тривалість своєї поїздки.

*Розв'язання*. Позначимо $N=\{1,...,n\}$ множину гравців. Нехай стратегія $x_i=1$ означає, що гравець $i$ пливе на кораблі $A$, а $x_i=0$ означає, що він пливе на кораблі $B$. Тоді в цій грі множиною стратегій гравця $i\in N$ можна вважати множину $X_i=\{0,1\}$. Множина ситуацій гри $X=\prod_{i\in N}\{0,1\}$. Позначимо $t=\sum_{i=1}^{n}x_i$ кількість гравців, які вибрали корабель $A$. Якщо гравець $i\in N$ вирішив плисти на кораблі $A$, то час мандрівки для нього дорівнюватиме $a(t)$. У протилежному випадку, якщо він вирішить плисти на кораблі $B$, то на ньому буде $(n-t)$ гравців і час поїздки дорівнюватиме $b(n-t)$. Оскільки функції виграшу гравців за замовченням максимізуються, то в цій грі за функцію виграшу гравця $i\in N$ можна прийняти час його мандрівки із знаком мінус. Таким чином, вона матиме вигляд

$$u_i(x)=\begin{cases}-a(t), & x_i=1,\\ -b(n-t), & x_i=0.\end{cases}$$

## Лекція 2. Умови повної неінформованості гравців

Розглянемо спочатку випадок, коли гравці діють *ізольовано*, тобто кожен з них вибирає свою стратегію незалежно, вони не обмінюються інформацією, на вибір гравців не впливає минуле (початкова позиція або передісторія партії гри). Будемо також вважати, що кожен гравець знає лише свою цільову функцію виграшу, значення якої він може обчислити після вибору своїх стратегій іншими учасниками.

**Домінуючі стратегії**. Позначимо через $x_{N\backslash i}$ вектор $x$ без $i$ - ї компоненти, тобто $x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i} = \prod\limits_{j\in N\backslash\{i\}} X_j$ (сукупність стратегій усіх гравців за виключенням фіксованого $i$ - го).

**Означення.** Стратегія $x_i \in X_i$ гравця $i$ *переважає* його стратегію $y_i \in X_i$ (будемо позначати це як $x_i \succeq y_i$), якщо: $u_i\left(x_i, x_{N\backslash i}\right) \geq u_i\left(y_i, x_{N\backslash i}\right), \forall x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$ .

**Означення.** Стратегія $\hat{x}_i \in X_i$ гравця $i$ називається *домінуючою* стратегією, якщо: $\hat{x}_i \succeq y_i,\ \forall y_i \in X_i$. Множину домінуючих стратегій $i$-го гравця позначатимемо через $D_i$.

Таблиця 1.

| $X_2$ \ $X_1$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ | $d_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 3,2 | 5,1 | 2,1 | 3,1 |
| $b_1$ | 3,1 | 4,2 | 2,1 | 3,1 |
| $c_1$ | 2,1 | 3,1 | 2,1 | 2,1 |

Розглянемо **Приклад 1**. Тут, $a_1 \succ b_1$, $a_1 \succ c_1$, $b_1 \succ c_1$. Звідси випливає, що стратегія $a_1$ першого гравця є домінуючою: $D_1 = \{a_1\}$.

Для другого гравця, маємо: $a_2 \succ c_2$, $a_2 \succ d_2$, $b_2 \succ c_2$, $c_2 \succ d_2$. Але стратегії $a_2$ і $b_2$ „є непорівнянними. Отже, $D_2 = \varnothing$.

Значення виграшів другого гравця на стратегіях $c_2$ і $d_2$ при всіх виборах першого гравця одне і теж (рівне 1). Такі стратегії називають еквівалентними ($c_2 \sim d_2$).

Таблиця 2.

| $X_2$ \ $X_1$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 2,1 | 3,2 | 4,2 |
| $b_1$ | 2,2 | 3,3 | 4,1 |

**Означення.** Стратегії $x_i$ та $y_i$ першого гравця називаються *еквівалентними*, якщо: $u_i\left(x_i, x_{N\backslash i}\right) = u_i\left(y_i, x_{N\backslash i}\right),\ \forall\ x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$. Множину еквівалентних стратегій $i$ - го гравця позначимо як $E_i$.

**Означення.** Ситуація $x^* = \left(x_i^*\right)_{i\in N}$ називається *рівновагою у домінуючих стратегіях*, якщо $x_i^*$ є домінуючою стратегією кожного гравця ($x_i^* \in D_i,\ \forall i \in N$). Множина $D = \prod\limits_{i\in N} D_i$ називається множиною рівноваг у домінуючих стратегіях.

**Приклад 2.** (див. табл. 2). Маємо: $a_1 \sim b_1$ і $D_1 = HD_1 = \{a_1, b_1\}$. Для другого гравця: $b_2 \succ a_2$, $b_2 \succ c_2$, звідки $D_2 = HD_2 = \{b_2\}$. Отже, ситуації $\left(a_1, b_2\right)$ та

$(b_1, b_2)$ є рівновагами у домінуючих стратегіях.

Рівновага у домінуючих стратегіях є „розумним” розв’язком гри (якщо кількість елементів множини $D$ більша за одиницю, то можна вибирати будь-який – адже всі вони еквівалентні для кожного гравця). На жаль, в абсолютній більшості практично цікавих ігор $D = \varnothing$.

| $X_2$ / $X_1$ | $M_2$ | $A_2$ |
|---|---|---|
| $M_1$ | 2,2 | 0,3 |
| $A_1$ | 3,0 | 1,1 |

Таблиця 3.

Вибір рівноваги у домінуючих стратегіях (якщо вона існує) є раціональною поведінкою ізольованих гравців. Але виявляється, що ця раціональна поведінка може бути дуже й дуже „нерозумною”. Приведемо приклад з, який став класичним.

**Приклад 3.** ( „Дилема в’язня”). В’язні знаходяться у одній камері, кожен з них має дві стратегії поведінки – відноситись до сусіда миролюбно ($M$) чи агресивно ($A$). Таблиця виграшів – 1.5. Знову маємо: $A_1 \succ M_1$, $A_2 \succ M_2$ і отже, раціональна поведінка приводить до неефективної ситуації $(A_1, A_2)$ з вектором виграшів $u$=(1,1). миролюбним”. Узагальнюючи дану ситуацію, можна стверджувати, що додаткова інформація може привести до виграшу усіх партнерів. Людська спільнота це розуміє, про що свідчить хоча б наявність у кожній державі розвідки.

| $X_2$ / $X_1$ | $Д_2$ | $H_2$ |
|---|---|---|
| $Д_1$ | 1,1 | 0,1 |
| $H_1$ | 1,0 | 0,0 |

Таблиця 4.

Ще один **Приклад 4**, який показує, що ізольована поведінка гравців не дозволяє їм вибрати ефективну ситуацію. Приклад носить назву „Послуга за послугу”, у ньому кожен гравець має дві стратегії – відноситись до іншого доброзичливо (*Д*) чи недоброзичливо (*Н*) (див. табл. 1.6). Маємо: $Д_1 \approx H_1$, $Д_2 \approx H_2$ і, отже, з точки зору кожного з гравців байдуже, яку стратегію вибирати (така ситуація виникає, коли домінуюча стратегія не єдина – з леми 1.2 випливає, що усі вони еквівалентні). Але ж лише ситуація $(Д_1, Д_2)$ є ефективною. Знову без переговорів не обійтися!

**Недоміновані стратегії**.

**Означення.** Стратегія $x_i \in X_i$ гравця *i домінує* його стратегію $y_i \in X_i$, якщо: $u_i(x_i, x_{N\backslash i}) \ge u_i(y_i, x_{N\backslash i}), \forall x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$;
$\exists \tilde{x}_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i} : u_i(x_i, \tilde{x}_{N\backslash i}) > u_i(y_i, \tilde{x}_{N\backslash i})$.

**Означення.** Стратегія $x_i \in X_i$ *i*-го гравця називається *недомінованою*, якщо не існує стратегії $y_i \in X_i$, яка б її домінувала: $\overline{\exists}\ y_i \in X_i :\ y_i \succ x_i$. Множину недомінованих стратегій *i*-го гравця позначатимемо через $HD_i$.

Повертаючись до прикладу 1, маємо: $HD_2 = \{a_2, b_2\}$. Зауважимо, що, очевидно, $D_i \subseteq HD_i$ (домінуючі стратегії є частинним випадком недомінованих). Тому для прикладу 1: $D_1 = HD_1 = \{a_1\}$.

**Завдання.** Знайти множини недомінованих стратегійу грі: $X_1 = X_2 = R^1$;

$u_1(x_1,x_2) = -x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1$; $u_2(x_1,x_2) = -2x_1x_2 + x_2^2 - x_1$.

Підведемо підсумок. По-перше, для знаходження домінуючих стратегій кожному гравцю досить знати лише свою функцію виграшу та спостерігати за вибором стратегій усіма іншими гравцями для формування ситуації, від якої залежить його виграш.

По-друге, „розумний" гравець (точніше „раціонально мислячий") ніколи не буде вибирати домінованих стратегій – адже при їх виборі, він може лише втратити!

По-третє, у випадку скінченності множини стратегій $X_i$ існування непорожніх множин недомінованих стратегій $HD_i$ очевидне. У більш загальному випадку при досить слабких припущеннях можна також довести непорожність $HD_i$.

**Теорема.** Нехай множини стратегій $X_i$, $i \in N$ скінчені. Тоді множини $HD_i$ недомінованих стратегій гравців є непорожні.

**Теорема.** Нехай множини стратегій $X_i$, $i \in N$, компактні та у кожній з них існує зліченна, скрізь щільна підмножина. Нехай також функції виграшів $U_i$, $i \in N$, неперервні. Тоді множини $HD_i$ недомінованих стратегій кожного гравця непорожні.

*Доведення.* Для кожного $j \in N$ виберемо ймовірнісний розподіл $p_j$ на $X_j$ таким чином, щоб непорожня відкрита підмножина $X_j$ мала додатню міру (можливість цього випливає з другої умови, накладеної на множини стратегій). Зафіксуємо $i$ й розглянемо функцію $\psi_i$, визначену на $X_i : \psi_i(x_i) = \int\limits_{X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i})$, де $p_{N\setminus i}$ – добуток $p_j$, $j \neq i$.

Оскільки функція $u_i$ неперервна, то неперервна і функція $\psi_i$, а отже, можна вибрати стратегію $x_i^*$, що максимізує функцію $\psi_i$ на множині $X_i$.

Покажемо, що стратегія $x_i^*$ недомінована. Дійсно, якщо існує стратегія $x_i$, що домінує $x_i^*$, то в силу неперервності функції $u_i$ знайдеться відкрита підмножина $X'_{N\setminus i}$ множини $X_{N\setminus i}$ така, що $u_i(x_i^*, x_{N\setminus i}) < u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ для $\forall x_{N\setminus i} \in X'_{N\setminus i}$. У силу вибору $p_j$, $j \neq i$, маємо:

$$\int\limits_{X'_{N\setminus i}} u_i(x_i^*, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}) < \int\limits_{X'_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}). \quad (1)$$

Оскільки $u_i(x_i^*, x_{N\setminus i}) \le u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ справедливо для $\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$, то

$$\int\limits_{X_{N\setminus i}\setminus X'_{N\setminus i}} u_i(x_i^*, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}) \le \int\limits_{X_{N\setminus i}\setminus X'_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})\, dp_{N\setminus i}(x_{N\setminus i}). \quad (2)$$

Складаючи (1) та (2), приходимо до протиріччя: $\psi_i(x_i^*) < \psi_i(x_i)$.

Зв'язок між домінуючими та недомінованими стратегіями встановлює теорема.

**Теорема.** Нехай множина недомінованих стратегій $HD_i \neq \varnothing$. Тоді еквівалентні твердження: а) $D_i \neq \varnothing$; б) $D_i = HD_i$; в) $x_i, y_i \in HD_i \Rightarrow x_i \sim y_i$. Тобто, всі стратегії у множині недомінованих стратегій еквівалентні.

*Доведення.* Доведемо еквівалентність а) і б). Оскільки $D_i \neq \varnothing$, то недомінованою стратегією може бути лише домінуюча стратегія $i$, отже, $HD_i \subseteq D_i$. Оскільки включення $D_i \subseteq HD_i$ очевидне (див. вище), то з а) випливає б). Імплікація б) $\Rightarrow$ а) випливає з умови Теореми. Із визначення еквівалентності стратегій $x_i, y_i$ випливає, що, якщо $x_i \in D_i \neq \varnothing$, то і $y_i \in D_i$. Якщо $x_i, y_i \in ND_i$, $x_i \neq y_i$, то оскільки $ND_i = D_i$, то $x_i, y_i \in D_i$, $x_i \neq y_i$, що неможливо.

Ми бачимо, що недоміновані стратегії існують для достатньо широкого класу ігор, але виникає проблема вибору: «Яку само вибрати?»

## Лекція 3. Обережна поведінка гравців

**Обережні стратегії.** Обережна поведінка гравців обґрунтовано в умовах їхньої ізольованості та повної неінформованості. В цих умовах кожен з них вибирає свою стратегію незалежно, вони не обмінюються інформацією, кожен гравець знає лише свою функцію виграшу, гравцям невідома передісторія гри.

Нехай задана гра $G$ у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$.

**Означення.** Стратегія $\hat{x}_i$ гравця $i \in N$ називається обережною, якщо

$$\hat{x}_i = \arg\max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}).$$

Позначимо $O_i = Arg\max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ множину обережних стратегій $i$ - го гравця. Величина $\alpha_i = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ називається максимальним гарантованим виграшом гравця $i \in N$.

Вибираючи обережну стратегію, гравець $i \in N$ вважає, що інші гравці діють найгіршим для нього чином і його «раціональність» в умовах ізольованості та повної неінформованості полягає у виборі на множині своїх стратегій такої, яка максимізує його гарантований виграш.

Для скінченної гри існування обережних стратегій гравців очевидне. У випадку нескінченої гри справедлива така теорема.

**Теорема.** Нехай множини стратегій гравців $X_i$ компактні, а функції виграшу $u_i$ неперервні на множині ситуацій гри, $i \in N$. Тоді множини обережних стратегій $O_i$ гравців $i \in N$ не порожні і компактні.

***Доведення***. Оскільки $\forall i \in N$ функції $u_i$ - неперервна, то функція $\Theta(y_i) = \inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, x_{N\setminus i})$ - напівнеперервна зверху на $X_i$ і для $\forall \lambda$ множина $\left\{ y_i \in X_i \,\middle|\, \Theta(y_i) \geq \lambda \right\} = \bigcap_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} \left\{ y_i \in X_i \,\middle|\, u_i(y_i, x_{N\setminus i}) \geq \lambda \right\}$ є замкненою. Звідси випливає, що множина $O_i$ точок максимуму функцій $\Theta(y_i)$ є непорожньою і компактною.

Обережні та недомінуючі стратегії не суперечать одна іншій.

**Теорема.** Нехай $X_i$ – компакти, $u_i$ – неперервні, $i \in N$. Тоді $O_i \cap HD_i \neq \varnothing$, $i \in N$.

***Доведення***. Зафіксуємо $i$ та розглянемо гру $\tilde{G} = \left(Y_j, u_j, j \in N\right)$, у якій $Y_j = X_j$, $j \neq i$, $Y_i = O_i$ (за лемою 1.3 множина $Y_i \neq \varnothing$ і компактна). За лемою 1.1 у грі $\tilde{G}$ $i$ – й гравець має хоча б одну недоміновану стратегію $x_i$. Покладемо, що $x_i$ домінується стратегією $y_i$ у початковій грі, тобто $u_i(x_i, x_{N\setminus i}) \leq u_i(y_i, x_{N\setminus i})$ для $\forall x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Тоді маємо:

$$\Theta(x_i) = \inf_{y_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, y_{N\setminus i}) \leq \Theta(y_i) = \inf_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, x_{N\setminus i}),$$

звідки $\Theta\left(y_i\right)=\sup_{z_i\in X_i}\Theta\left(z_i\right)$ і $y_i\in O_i$, що суперечить припущенню про недомінованість $x_i$ у грі $\tilde{G}$. Отже, $x_i\in O_i\bigcap HD_i$.

**Несуттєві ігри.** Розглянемо питання «оптимальності» обережних стратегій.

**Означення.** Гра називається несуттєвою, якщо не існує такої ситуації $y\in X$, для якої виконуються наступні умови:

$$\begin{cases}\forall i\in N \quad \max\limits_{x_i\in X_i}\min\limits_{x_{N\backslash i}\in X_{N\backslash i}} u_i(x_i,x_{N\backslash i})=\alpha_i\le u_i(y),\\ \exists j\in N \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_j<u_j(y).\end{cases}$$

Обережні стратегії в несуттєвій грі є оптимальними в подальшому сенсі.

**Теорема.** Припустимо, що гра $G$ у нормальній формі $(X_i,u_i;i\in N)$ несуттєва. Нехай $\hat{x}_i$ – обережна стратегія гравця $i\in N$, а $\hat{x}=(\hat{x}_i)_{i\in N}$ є відповідною ситуацією гри. Тоді:

1) $u_i(\hat{x})=\alpha_i\le u_i(\hat{x}_i,x_{N\backslash i})$ для $\forall x_{N\backslash i}\in X_{N\backslash i}$, $\forall i\in N$ (якщо деякі гравці $j\neq i$ відмовляться від обережних стратегій, то це буде вигідно лише гравцю $i$, який має гарантований виграш);

2) для будь-якої коаліції гравців $S\subseteq N$ і будь-якого набору стратегій $x_S\in X_S$ наступна система умов є несумісною:

$$\begin{cases}\forall i\in S \quad u_i(\hat{x})\le u_i(x_S,\hat{x}_{N\backslash S}),\\ \exists j\in S \quad u_j(\hat{x})<u_j(x_S,\hat{x}_{N\backslash S})\end{cases}$$

(жоден окремий гравець і жодна коаліція гравців, включаючи всю спільноту гравців, не мають причин для однобічного відходу від обережних стратегій).

**Побудова множини обережних стратегій.**

**Приклад.** Знайти максимальні гарантовані виграші та множини обережних стратегій гравців в біматричній грі з наступними матрицями виграшу гравців:

$$U^1=\{u^1_{j_1j_2}\}_{j_1\in X_1,\,j_2\in X_2}=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&2&3\\5&4&1\end{pmatrix},\ U^2=\{u^2_{j_1j_2}\}_{j_1\in X_1,\,j_2\in X_2}=\begin{pmatrix}2&4&3\\3&1&2\\2&4&2\end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Оскільки гра є біматричною, то кількість гравців $n=2$, множина гравців $N=\{1,2\}$. В силу того, що матриці виграшу гравців розмірності $3\times 3$, за їхні множини стратегій можна прийняти $X_1=X_2=\{1,2,3\}$.

Для знаходження максимального гарантованого виграшу та обережних стратегій першого гравця розв'яжемо таку задачу: $\alpha_1=\max\limits_{j_1\in\{1,2,3\}}\min\limits_{j_2\in\{1,2,3\}}u^1_{j_1j_2}$.

Спочатку знайдемо $f_1(j_1)=\min\limits_{j_2\in\{1,2,3\}} u^1_{j_1 j_2}$ – гарантований виграш першого гравця при виборі ним стратегії $j_1=\{1,2,3\}$. Одержимо: $f_1(1)=\min\limits_{j_2\in\{1,2,3\}} u^1_{1 j_2}=\min\{2,2,2\}=2$, $f_1(2)=\min\limits_{j_2\in\{1,2,3\}} u^1_{2 j_2}=\min\{1,2,3\}=1$, $f_1(3)=\min\limits_{j_2\in\{1,2,3\}} u^1_{3 j_2}=\min\{5,4,1\}=1$. Після цього знайдемо максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1=\max\limits_{j_1\in\{1,2,3\}} f_1(j_1)=\max\{2,1,1\}=2$ та множину його обережних стратегій $O_1=A\text{rg}\max\limits_{j_1\in\{1,2,3\}} f_1(j_1)=\text{Arg}\max\{2,1,1\}=\{1\}$.

Аналогічно для другого гравця. Розв'яжемо задачу $\alpha_2=\max\limits_{j_2\in\{1,2,3\}}\min\limits_{j_1\in\{1,2,3\}} u^2_{j_1 j_2}$. Для цього знайдемо $f_2(j_2)=\min\limits_{j_1\in\{1,2,3\}} u^2_{j_1 j_2}$ – гарантований виграш другого гравця при виборі ним стратегії $j_2=\{1,2,3\}$. Одержимо: $f_2(1)=\min\limits_{j_1\in\{1,2,3\}} u^2_{j_1 1}=\min\{2,3,2\}= \quad =2$, $f_2(2)=\min\limits_{j_1\in\{1,2,3\}} u^2_{j_1 2}=\min\{4,1,4\}=1$, $f_2(3)=\min\limits_{j_1\in\{1,2,3\}} u^2_{j_1 3}=\min\{3,2,2\}=2$. Тоді максимальний гарантований виграш другого гравця $\alpha_2=\max\limits_{j_2\in\{1,2,3\}} f_2(j_2)=\max\{2,1,2\}=2$ та множина його обережних стратегій $O_2=A\text{rg}\max\limits_{j_2\in\{1,2,3\}} f_2(j_2)=\text{Arg}\max\{2,1,2\}=\{1,3\}$.

**Приклад.** Знайти максимальні гарантовані виграші та множини обережних стратегій гравців в наступній грі двох осіб: $X_1=[0,10]$, $X_2=[0,5]$, $u_1(x)=-20x_1x_2+4x_2^2+40x_2$, $u_2(x)=2x_1x_2-x_1^2+2x_1$.

*Розв'язання.* Для знаходження максимального гарантованого виграшу та обережних стратегій першого гравця розв'яжемо таку задачу:

$$\alpha_1=\max_{x_1\in[0,10]}\min_{x_2\in[0,5]}(-20x_1x_2+4x_2^2+40x_2).$$

Для цього побудуємо $f_1(x_1)=\min\limits_{x_2\in[0,5]}(-20x_1x_2+4x_2^2+40x_2)$ – гарантований виграш першого гравця при виборі ним стратегії $x_1\in[0,10]$. Оскільки функція $(-20x_1x_2+4x_2^2+40x_2)$ не монотонно залежить від $x_2$, то скористуємося умовами екстремуму функцій. Оскільки функція $u_1(x)$ є двічі-диференційованою запишемо необхідну умову екстремуму за $x_2$: $\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_2}=-20x_1+8x_2+40=0$. Перевіримо достатню умову мінімуму за $x_2$: $\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2}=8>0$ (вона виконується для усіх $x_2=\frac{5}{2}x_1-5$). Таким чином функція $u_1(x)$ набуває свого безумовного мінімуму за $x_2$, коли $x_2 = \frac{5}{2}x_1 - 5$. Оскільки нам треба знайти мінімум за умовою $x_2 \in [0,5]$ при усіх значеннях $x_1 \in [0,10]$, дослідимо $u_1(x)$ на границях. Зробимо це графічно. З рис. 3.1 бачимо, що значення $x_2 = \frac{5}{2}x_1 - 5$ потрапляють у проміжок [0,5] при $x_1 \in [2,4]$. При інших значеннях $x_1$ мінімум досягається на нижній границі $x_2 = 0$ при $x_1 \in [0,2]$ та на верхній границі $x_2 = 5$ при $x_1 \in [4,10]$. Загалом множина точок умовного мінімуму $u_1(x)$ за $x_2$ позначена на рис. 3.1 жирною лінією. Звідси маємо $f_1(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 \in [0,2], \\ -25(x_1-2)^2 & x_1 \in [2,4], \\ -100x_1 + 300, & x_1 \in [4,10]. \end{cases}$

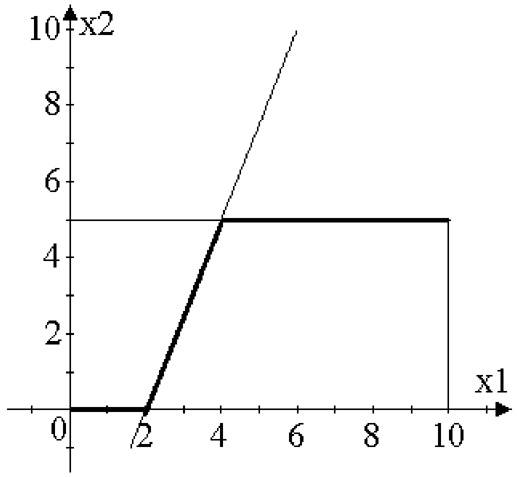



Рис. 2.1.

Для пошуку $\max\limits_{x_1 \in [0,10]} f_1(x_1)$ розглянемо графік функції $f_1(x_1)$ на рис. 3.2, з якого бачимо, що максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = \max\limits_{x_1 \in [0,10]} f_1(x_1) = 0$, а множиною обережних стратегій $O_1$ буде відрізок [0,2].

Аналогічно для другого гравця. Розв'яжемо задачу

$$\alpha_2 = \max_{x_2 \in [0,5]} \min_{x_1 \in [0,10]} (2x_1x_2 - x_1^2 + 2x_1).$$

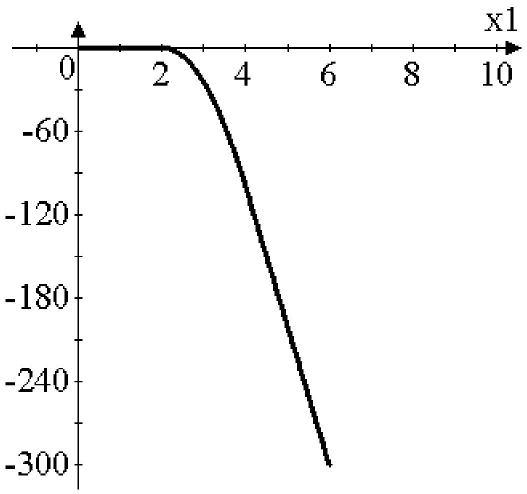



Рис. 2.2.

Для цього побудуємо функцію

$$f_2(x_2) = \min_{x_1 \in [0,10]} (2x_1x_2 - x_1^2 + 2x_1)$$

гарантованого виграшу першого гравця для $x_2 \in [0,5]$. Оскільки функція $2x_1x_2 - x_1^2 + 2x_1$ не монотонно залежить від $x_1$, то скористуємося умовами екстремуму функцій. Оскільки функція $u_2(x)$ є двічі-диференційованою, запишемо необхідну умову екстремуму за $x_1$: $\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_1} = 2x_2 - 2x_1 + 2 = 0$.

Перевіримо достатню умову мінімуму за $x_1$: $\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2} = -2 < 0$ (виконується умова максимуму для усіх $x$). Таким чином функція $u_2(x)$ набуває свого мінімуму за $x_1$ тільки на границях відрізка [0,10]. Порівняємо між собою значення $u_2(0, x_2) = 0$ та $u_2(10, x_2) = 20x_2 - 80$ при $x_2 \in [0,5]$. Одержимо

$$\arg\min_{x_1 \in [0,10]} u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 \in [0,4], \\ 10, & x_2 \in (4,5]. \end{cases}$$

Звідси маємо

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 0, & x_2 \in [0,4], \\ 20x_2 - 80, & x_2 \in (4,5]. \end{cases}$$

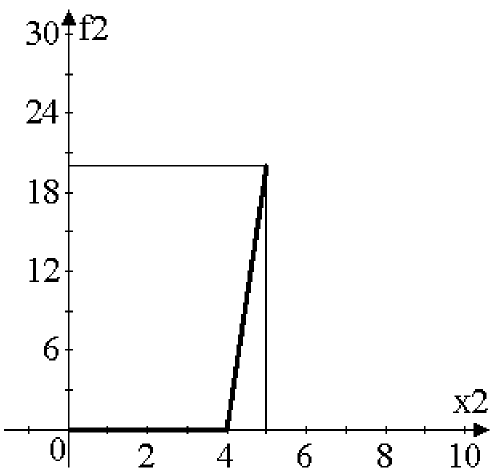



Рис. 2.3.

Для пошуку $\max\limits_{x_2 \in [0,5]} f_2(x_2)$ розглянемо графік функції $f_2(x_2)$ на рис. 3.3, з якого бачимо, що максимальний гарантований виграш другого гравця $\alpha_2 = \max\limits_{x_2 \in [0,5]} f_2(x_2) = 20$, а єдиною обережною стратегією другого гравця буде $\hat{x}_2 = 5$.

## Лекція 4. Обережні стратегії в антагоністичних іграх

**Антагоністичні ігри.** Розглянемо антагоністичну гру $G$ (гра двох осіб з нульовою сумою функцій виграшу гравців) в нормальній формі $(X_1, X_2, u)$, де $X_1, X_2$ – множини стратегій відповідно першого і другого гравця, $u(x)$ – функція виграшу першого гравця, яку він максимізує. Оскільки гра є антагоністичною, то другий гравець максимізує функцію $-u(x)$. Якщо вважати $u(x)$ функцією програшу другого гравця, то він буде її мінімізувати.

Обережні стратегії $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ кожного гравця визначаються співвідношеннями:

$$\hat{x}_1 = \arg\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2),$$

$$\hat{x}_2 = \arg\min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2).$$

Позначимо $O_1 = A\mathrm{rg}\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2)$ та $O_2 = A\mathrm{rg}\min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2)$ множину обережних стратегій відповідно першого та другого гравця. Величина $\alpha_1 = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2)$ називається максимальним гарантованим виграшем першого гравця, а величина $\alpha_2 = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2)$ – мінімальним гарантованим програшем другого гравця.

**Теорема.** В антагоністичній грі максимальний гарантований виграш першого гравця не перебільшує мінімального гарантованого програшу другого гравця, тобто $\alpha_1 \le \alpha_2$ .

**Означення.** Величина $\alpha$ називається ціною антагоністичної гри, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . Якщо $\alpha_1 < \alpha_2$, то відповідна гра не має ціни.

**Означення.** Ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ називається сідловою точкою антагоністичної гри, якщо

$$u(x_1, \hat{x}_2) \le u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \le u(\hat{x}_1, x_2), \text{ для } \forall x_1 \in X_1,\ \forall x_2 \in X_2. \quad (1)$$

Будемо позначати множину сідлових точок $\hat{X}$ .

Нерівності (3.1) іноді зручно записувати у вигляді системи двох взаємозв’язаних задач оптимізації:

$$u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \max_{x_1 \in X_1} u(x_1, \hat{x}_2), \quad (2)$$

$$u(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \min_{x_2 \in X_2} u(\hat{x}_1, x_2). \quad (3)$$

З означення випливає, що коли стратегії гравців утворюють сідлову точку антагоністичної гри, то кожному з них окремо не вигідно їх змінювати на будь-які інші.

**Теорема.** 1) Для того щоб антагоністична гра мала сідлову точку, необхідно й достатньо, щоб вона мала ціну.

2) Нехай антагоністична гра має ціну. Ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ тоді й лише тоді буде сідловою точкою, коли $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ будуть обережними стратегіями відповідно першого та другого гравця.

Таким чином, обережні стратегії в антагоністичній грі, яка має ціну, є оптимальними в наступному сенсі. По-перше, для кожного гравця є виключеним ризик (оскільки стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ є обережними). По-друге, кожному гравцю окремо не вигідно змінювати стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ на будь-які інші (оскільки ситуація $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ є сідловою точкою). По-третє, обом гравцям разом не вигідно змінювати стратегії $\hat{x}_1$ та $\hat{x}_2$ на будь-які інші. Це пояснюється тим, що в антагоністичній грі виграш першого гравця дорівнює програшу другого. Тому при збільшенні виграшу першого гравця збільшиться програш другого, і навпаки.

**Зауваження.** Множина сідлових точок $\hat{X}$ антагоністичної гри, яка має ціну, є прямокутною і дорівнює $O_1 \times O_2$.

Достатні умови існування сідлових точок встановлює наступна теорема.

**Теорема.** Нехай $X_1, X_2$ є опуклими компактами відповідних евклідових просторів, а функція $u(x_1, x_2)$ неперервна на $X_1 \times X_2$. Припустимо, що $u(x_1, x_2)$ є опуклою вгору за $x_1$ при довільному $x_2 \in X_2$ та опуклою вниз за $x_2$ при довільному $x_1 \in X_1$. Тоді антагоністична гра $G$ в нормальній формі $(X_1, X_2, u)$ має хоча б одну сідлову точку.

Якщо множини стратегій гравців скінченні, то за множину стратегій гравця $i = 1, 2$ можна прийняти $X_i = \{1, ..., m_i\}$. За означенням гри для кожної ситуації гри $(j_1, j_2) \in X = X_1 \times X_2$ визначене число $u(j_1, j_2)$ – виграш першого гравця, який дорівнює програшу другого гравця. Тому можна визначити матриці виграшу першого гравця $U = \{u_{j_1 j_2}\}_{j_1 \in X_1,\, j_2 \in X_2}$. В цьому випадку гра називається матричною антагоністичною.

**Приклад.** Розв'язати антагоністичну гру з матрицею

$$U = \{u_{j_1 j_2}\}_{j_1 \in X_1,\, j_2 \in X_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Оскільки гра є матричною антагоністичною, то кількість гравців $n = 2$, множина гравців $N = \{1, 2\}$. В силу того, що матриця виграшу першого гравця розмірності $2 \times 2$, за множини стратегій гравців можна прийняти $X_1 = X_2 = \{1, 2\}$. Сідлові точки можна знайти двома шляхами: або за означенням 3.2, або за теоремою 3.2 скласти з обережних стратегій гравців, якщо існує ціна гри.

Знайдемо їх за означенням 3.2. Для цього треба перебрати всі ситуації гри і перевірити для них нерівності (3.1).

Позначимо $\hat{x} = (1,1)$. Якщо не записувати тотожні нерівності, то (3.1) приймуть вигляд $0 = u(2,1) \le u(1,1) = 0 \le u(1,2) = 2$. Таким чином, $\hat{x} = (1,1)$ є сідловою точкою.

Позначимо $\hat{x} = (1,2)$. Без тотожних нерівностей (3.1) приймуть вигляд $0 = u(2,2) \le u(1,2) = 2 \not\le u(1,1) = 0$. Таким чином, $\hat{x} = (1,2)$ не є сідловою точкою.

Позначимо $\hat{x} = (2,1)$. Одержимо $0 = u(1,1) \le u(2,1) = 0 \le u(2,2) = 0$. Таким чином, $\hat{x} = (1,1)$ є сідловою точкою.

Позначимо $\hat{x} = (2,2)$. Одержимо $2 = u(1,2) \not\le u(2,2) = 0 \le u(2,1) = 0$. Таким чином, $\hat{x} = (2,2)$ не є сідловою точкою.

Остаточно маємо множину сідлових точок $\hat{X} = \{(1,1),\ (2,1)\}$.

Знайдемо сідлові точки іншим способом за теоремою 3.2. Множини обережних стратегій гравців: $O_1 = \{1,2\}$, $O_2 = \{1\}$. Максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = \max\limits_{j_1 \in \{1,2\}} \min\limits_{j_2 \in \{1,2\}} u_{j_1 j_2} = 0$, мінімальний гарантований програш другого гравця $\alpha_2 = \min\limits_{j_2 \in \{1,2\}} \max\limits_{j_1 \in \{1,2\}} u_{j_1 j_2} = 0$. Оскільки $\alpha_1 = \alpha_2$, то ціна гри $\alpha$ існує та дорівнює 0. Слід звернути увагу, що $u_{22} = \alpha = 0$, але ситуація $(2,2)$ не є сідловою точкою.

**Приклад.** Розв’язати антагоністичну гру в нормальній формі: $X_1 = X_2 = [0,4]$, $u(x) = -2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 16x_1 + 8x_2$.

*Розв’язання.* Знайдемо сідлові точки цієї гри за теоремою 3.2. Для цього спочатку треба знайти обережні стратегії гравців та максимальний гарантований виграш першого гравця і мінімальний гарантований програш другого гравця.

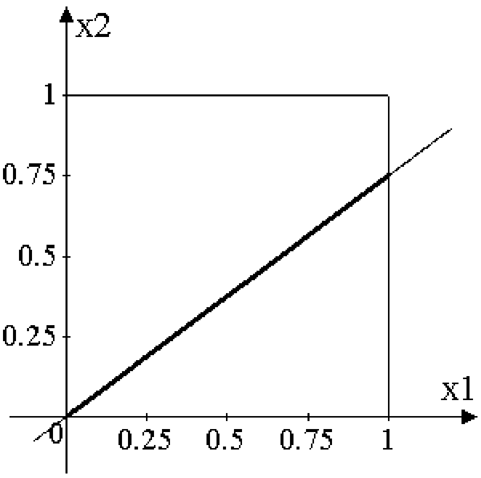



Рис. 3.2.

Для знаходження максимального гарантованого виграшу та обережних стратегій гравця 1 розв’яжемо таку задачу:
$\alpha_1 = \max\limits_{x_1 \in [0,4]} \min\limits_{x_2 \in [0,4]} (-2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 16x_1 + 8x_2)$
. Для цього побудуємо
$f_1(x_1) = \min\limits_{x_2 \in [0,4]} (-2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 16x_1 + 8x_2)$
– гарантований виграш першого гравця при виборі ним стратегії $x_1 \in [0,4]$. Оскільки функція $(-2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 16x_1 + 8x_2)$ не монотонно залежить від $x_2$, то скористаємося умовами екстремуму. Оскільки функція $u_1(x)$ є двічі-диференційованою, запишемо необхідну умову екстремуму за $x_2$: $\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = -4x_1 + 2x_2 + 8 = 0$. Перевіримо достатню умову мінімуму за $x_2$: $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = 2 > 0$ (вона виконується для усіх $x_2 = 2x_1 - 4$). Таким чином, функція $u_1(x)$

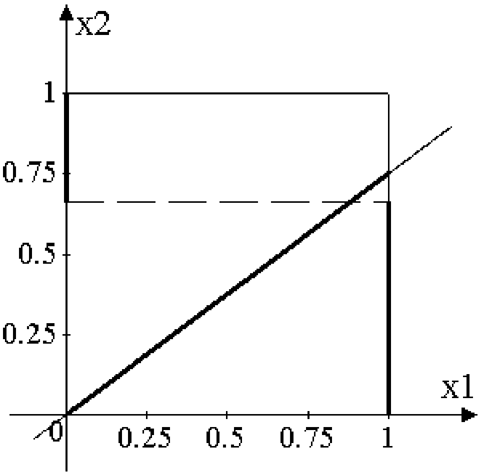



Рис.3.3.

набуває свого безумовного мінімуму за $x_2$, коли $x_2 = 2x_1 - 4$. Оскільки нам треба знайти мінімум за умовою $x_2 \in [0,4]$ при усіх значеннях $x_1 \in [0,4]$, дослідимо $u(x)$ на границях. Зробимо це графічно. З рис. 3.9 видно, що значення $x_2 = 2x_1 - 4$ потрапляють у проміжок [0,4] при $x_1 \in [2,4]$. При інших значеннях $x_1$ мінімум досягається на нижній границі $x_2 = 0$ при $x_1 \in [0,2]$.

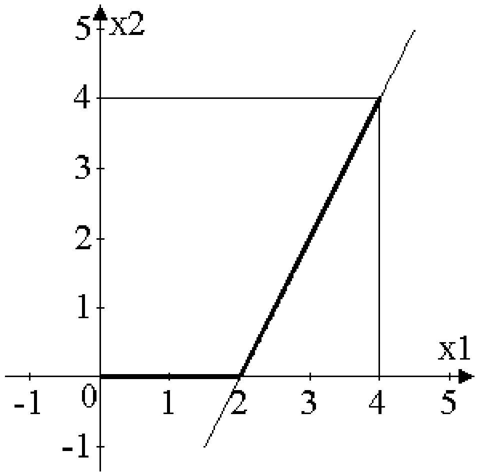


Рис. 3.4.

Загалом множина точок умовного мінімуму $u(x)$ за $x_2$ позначена на рис. 3.9 жирною лінією. Звідси маємо

$$f_1(x_1) = \begin{cases} -2x_1^2 + 16x_1, & x_1 \in [0,2], \\ -6x_1^2 + 32x_1 - 16, & x_1 \in [2,4]. \end{cases}$$

Для пошуку $\max\limits_{x_1 \in [0,10]} f_1(x_1)$ розглянемо графік функції $f_1(x_1)$ на рис. 3.10 з якого бачимо, що максимум функції $f_1(x_1)$ співпадає з максимумом функції $-6x_1^2 + 32x_1 - 16$. Оскільки вона опукла вгору та диференційована, знаходимо його за необхідною умовою екстремуму, яка буде й достатньою, а саме $(-6x_1^2 + 32x_1 - 16)' = -12x_1 + 32 = 0$. Звідси одержимо $x_1 = 8/3$, максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = \max\limits_{x_1 \in [0,4]} f_1(x_1) = 80/3$ та його обережну стратегію $\hat{x}_1 = 8/3$.

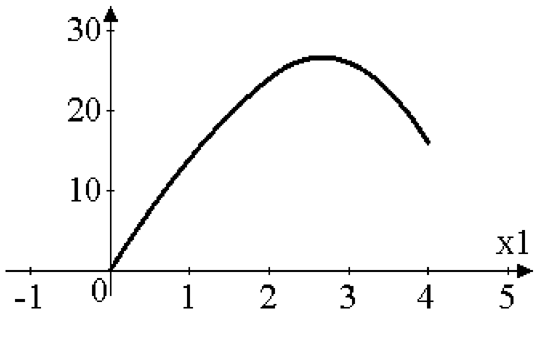


Рис.3,5,

Аналогічно для другого гравця. Розв'яжемо задачу:

$$\alpha_2 = \min_{x_2 \in [0,4]} \max_{x_1 \in [0,4]} (-2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 16x_1 + 8x_2)$$

.

Для цього побудуємо функцію

$$f_2(x_2) = \max_{x_1 \in [0,4]} (-2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 16x_1 + 8x_2)$$

гарантованого виграшу першого гравця для $x_2 \in [0,4]$. Оскільки функція

$$-2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 16x_1 + 8x_2$$

не монотонно залежить від $x_1$, скористаємося умовами екстремуму функцій. Оскільки функція $u(x)$ є двічі-диференційованою, запишемо необхідну умову екстремуму за $x_1$: $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1} = -4x_1 - 4x_2 + 16 = 0$. Перевіримо достатню умову максимуму за $x_1$: $\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} = -4 < 0$. Вона виконується для усіх $x_1 = 4 - x_2$. Таким чином, функція $u(x)$ набуває свого безумовного максимуму за $x_1$, коли $x_1 = 4 - x_2$. Оскільки нам треба знайти максимум за умовою $x_1 \in [0,4]$ при усіх значеннях $x_2 \in [0,4]$, дослідимо $u(x)$ на границях. Зробимо це графічно. З рис. 3.11 бачимо, що значення $x_1 = 4 - x_2$ потрапляють у проміжок [0,4] при $x_2 \in [0,4]$. Множина точок умовного максимуму $u(x)$ за $x_1$ позначена на рис. 3.11 жирною лінією. Звідси маємо $f_2(x_2) = 32 - 8x_2 + 3x_2^2$. Оскільки ця функція є опуклою вниз та диференційованою, то її мінімум знаходимо за необхідною умовою екстремуму, яка буде й достатньою умовою мінімуму, а саме: $[f_2(x_2)]' = -8 + 6x_2$. Звідси одержимо $x_2 = 4/3$, максимальний гарантований програш другого гравця $\alpha_2 = \min\limits_{x_2 \in [0,4]} f_2(x_2) = 80/3$ та його обережну стратегію $\hat{x}_2 = 4/3$.

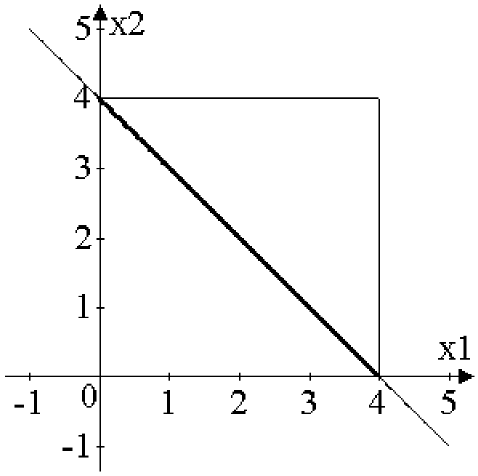


Рис. 3.6.

В силу того, що максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = 80/3$ дорівнює мінімальному гарантованому програшу другого гравця $\alpha_2 = 80/3$, ціна гри $\alpha$ існує і дорівнює $80/3$. Тому за теоремою 3.2 існує сідлова точки цієї гри, яка складається з обережних стратегій гравців. Таким чином, $\hat{x} = (8/3, 4/3)$.

## Лекція 5. Змішані стратегії в матричних іграх

Розглянемо матричну антагоністичну гру $G$ з множинами чистих стратегій гравців $i = 1,2$ відповідно $X_1 = \{1,...,m_1\}$ та $X_2 = \{1,...,m_2\}$. Для кожної ситуації гри $(j_1, j_2) \in X_1 \times X_2$ визначений виграш першого гравця $u(j_1, j_2)$, який дорівнює програшу другого гравця. Позначимо $U = \{u_{j_1 j_2}\}_{j_1 \in X_1,\, j_2 \in X_2}$ матрицю виграшів першого гравця, а $(X_1, X_2, U)$ – її нормальну форму.

**Означення.** Змішаною стратегією гравця $i = 1,2$ в матричній антагоністичній грі називається розподіл ймовірностей на множині його чистих стратегій. Їх можна представити у вигляді векторів відповідно $p = (p_1,..., p_{m_1})$ та $q = (q_1,..., q_{m_2})$, де $p_j$ – ймовірність вибору першим гравцем його чистої стратегії $j \in X_1 = \{1,...,m_1\}$, $q_k$ – ймовірність вибору другим гравцем його чистої стратегії $k \in X_2 = \{1,...,m_2\}$. Очевидно, що $p_j \in [0,1] \quad \forall j \in X_1 = \{1,...,m_1\}$, $\sum_{j \in X_1} p_j = 1$ та $q_k \in [0,1] \quad \forall k \in X_2 = \{1,...,m_2\}$, $\sum_{k \in X_2} q_k = 1$.

Множину усіх змішаних стратегій гравця $i = 1,2$ будемо позначати відповідно

$$P = \{p = (p_1,..., p_{m_1}) \mid \ p_j \in [0,1] \ \ \forall j \in X_1 = \{1,...,m_1\}, \ \sum_{j \in X_1} p_j = 1\},$$

$$Q = \{q = (q_1,..., q_{m_2}) \mid \ q_k \in [0,1] \ \ \forall k \in X_2 = \{1,...,m_2\}, \ \sum_{k \in X_2} q_k = 1\}.$$

Виграш першого гравця, який в антагоністичній грі дорівнює програшу другого гравця, визначається як математичне сподівання таким чином:

$$\overline{u}(p,q) = pUq^T = \sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} p_j u_{jk} q_k .$$

**Означення.** Змішаним розширенням матричної антагоністичної гри $G$ називається матрична антагоністична гра в нормальній формі $(P, Q, \overline{u})$.

**Означення.** Стратегії $\hat{p},\ \hat{q}$, для яких виконуються нерівності

$$pU\hat{q}^T \le \hat{p}U\hat{q}^T \le \hat{p}Uq^T \quad \forall p \in P \ \ \forall q \in Q,$$

називаються оптимальними, ситуація $(\hat{p}, \hat{q})$ – сідловою точкою, а число $\alpha = \hat{p}U\hat{q}^T$ – ціною змішаного розширення матричної антагоністичної гри $G$.

Це означення інколи зручно записувати у вигляді

$$\hat{p}U\hat{q}^T = \max_{p\in P} pU\hat{q}^T,$$
$$\hat{p}U\hat{q}^T = \min_{q\in Q} \hat{p}Uq^T.$$

**Теорема** (основна теорема матричних ігор). Будь-яка матрична антагоністична гра має ціну і хоча б одну сідлову точку в змішаних стратегіях.

**Теорема.** Для того щоб стратегії $\hat{p},\ \hat{q}$ були оптимальними в змішаному розширенні матричної антагоністичної гри $G$, а $\alpha = \hat{p}U\hat{q}^T$ – ціною цієї гри, необхідно й достатньо, щоб виконувалися нерівності:

$$\hat{p}U_{\bullet k} \ge \alpha \quad \forall k \in X_2 = \{1,...,m_2\},$$
$$U_{j\bullet}\hat{q}^T \le \alpha \quad \forall j \in X_1 = \{1,...,m_1\},$$

де $U_{j\bullet}$ – $j$ -й рядок матриці $U$, а $U_{\bullet k}$ – її $k$ -й стовпчик.

**Наслідок.** Нехай $\hat{p},\ \hat{q}$ є оптимальними стратегіями в змішаному розширенні матричної антагоністичної гри $G$. Тоді

$$\max_{j\in X_1} U_{j\bullet}\hat{q}^T \le \min_{k\in X_2} \hat{p}U_{\bullet k}.$$

**Теорема** (властивості доповнюючої нежорсткості). Нехай $\hat{p},\ \hat{q}$ – оптимальні стратегії в змішаному розширенні матричної антагоністичної гри $G$, а $\alpha$ – її ціна. Тоді для $\forall j \in X_1 = \{1,...,m_1\}$, при якому $U_{j\bullet}\hat{q}^T < \alpha$, має місце рівність $\hat{p}_j = 0$ та аналогічно для $\forall k \in X_2 = \{1,...,m_2\}$, при якому $\alpha < \hat{p}U_{\bullet k}$, має місце рівність $\hat{q}_k = 0$.

**Означення.** Вектор $a = (a_1,...,a_m)$ слабко (сильно) домінує вектор $b = (a_1,...,a_m)$, якщо $a_j \ge b_j \quad \forall j \in \{1,...,m\}$ ($a_j > b_j \quad \forall j \in \{1,...,m\}$).

**Теорема.** Якщо $j$-й рядок матриці $U$ слабко домінується опуклою лінійною комбінацією інших рядків, то цей рядок входить з нульовою ймовірністю в деяку оптимальну змішану стратегію першого гравця. Якщо вказане домінування є сильним, то цей рядок входить з нульовою ймовірністю в будь-яку оптимальну змішану стратегію першого гравця. Доміновані рядки можна викреслювати з матриці гри.

Якщо $k$-й стовпчик матриці $U$ слабко домінує опуклу лінійну комбінацію інших стовпчиків, то цей стовпчик входить з нульовою ймовірністю в деяку оптимальну змішану стратегію другого гравця. Якщо вказане домінування є сильним, то цей стовпчик входить з нульовою ймовірністю в будь-яку оптимальну змішану стратегію другого гравця.

Домінуючі стовпчики можна викреслювати з матриці гри.

**Повністю змішані стратегії.**

**Означення.** Оптимальна стратегія $\hat{p}$ першого ($\hat{q}$ другого) гравця називається повністю змішаною, якщо $\hat{p}_j > 0$ для $\forall j \in X_1 = \{1,...,m_1\}$ ($\hat{q}_k > 0$ для $\forall k \in X_2 = \{1,...,m_2\}$).

**Означення.** Сідлова точка матричної антагоністичної гри називається повністю змішаною, якщо оптимальні стратегії гравців, які її утворюють, є повністю змішані.

**Теорема.** Нехай матриця $U$ розмірності $m$ є квадратною та невиродженою. Тоді якщо гра має повністю змішану сідлову точку $(\hat{p},\hat{q})$, то вона єдина і задається так:

$$\hat{p} = \alpha e U^{-1}, \qquad \hat{q} = \alpha U^{-1} e^T, \qquad \alpha = 1/(eU^{-1}e^T), \tag{3.4}$$

де $e = (1,...,1)$ – вектор-рядок розмірності $m$, який складається з одиниць.

Навпаки, якщо вектори $\hat{p}$, $\hat{q}$ задовольняють формулам (3.4) та їхні компоненти невід'ємні, то пара $(\hat{p},\hat{q})$ є сідловою точкою в змішаних стратегіях гри $G$.

**Приклад.** Розв'язати в змішаних стратегіях антагоністичну гру з матрицею

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* В цій грі $n = 2$, $N = \{1,2\}$, $X_1 = X_2 = \{1,2,3,4\}$, сідлової точки в чистих стратегіях немає.

В цій грі перша чиста стратегія першого гравця слабко домінується третьою, тому в матриці $U$ можна викреслити перший рядок і покласти $\hat{p}_1 = 0$. Отримаємо скорочену гру з матрицею

$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

В цій грі четвертий стовпчик слабко домінує другий, тому можна викреслити четвертий стовпчик і покласти $\hat{q}_4 = 0$. Отримаємо гру з матрицею

$$U^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цій грі третій рядок домінується першим і другим, тому в матриці $U^{(2)}$ можна викреслити третій рядок (у вихідній матриці $U$ – четвертий рядок) і покласти $\hat{p}_4 = 0$. Отримаємо гру з матрицею

$$U^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

В цій грі перший стовпчик домінує другий. Тому в матриці $U^{(3)}$ можна викреслити перший стовпчик (у вихідній матриці $U$ це теж перший стовпчик) і покласти $\hat{q}_1 = 0$. Получимо гру з матрицею

$$U^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження ціни отриманої гри та сідлових точок за теоремою 3.2 запишемо нерівності

$$\begin{aligned} &2p_2 + 3p_3 \ge \alpha, \quad 2q_2 + 7q_3 \le \alpha, \\ &7p_2 + p_3 \ge \alpha, \quad\ \ 3q_2 + q_3 \le \alpha, \\ &p_2 + p_3 = 1, \qquad\ \ p_2 + p_3 = 1, \end{aligned}$$

які мають розв’язок $(p_2, p_3) = (2/7, 5/7)$, $(q_2, q_3) = (6/7, 1/7)$, $\alpha = 19/7$.

Таким чином, розв’язок вихідної гри $\hat{p} = (0, 2/7, 5/7, 0)$, $\hat{q} = (0, 6/7, 1/7, 0)$, $\alpha = 19/7$.

**Приклад.** Знайти за означенням сідлові точки в змішаних стратегіях антагоністичної гри з матрицею

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Розв’язання.* За означенням 3.7 , розв’яжемо систему оптимізаційних задач:

$$\hat{p}U\hat{q}^T = \max_{p\in P} pU\hat{q}^T = \max_{\substack{p_1, p_2 \in [0,1], \\ p_1 + p_2 = 1}} (p_1, p_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{pmatrix} = \max_{\substack{p_1, p_2 \in [0,1], \\ p_1 + p_2 = 1}} (2p_1\hat{q}_1 + p_2\hat{q}_2),$$

$$\hat{p}U\hat{q}^T = \min_{q\in Q} \hat{p}Uq^T = \min_{\substack{q_1, q_2 \in [0,1], \\ q_1 + q_2 = 1}} (\hat{p}_1, \hat{p}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \min_{\substack{q_1, q_2 \in [0,1], \\ q_1 + q_2 = 1}} (2\hat{p}_1 q_1 + \hat{p}_2 q_2).$$

Позначимо $\bar{u}(\hat{p}_1, \hat{q}_1) = 2\hat{p}_1\hat{q}_1 + (1 - \hat{p}_1)(1 - \hat{q}_1)$. Зробимо підстановки $p_2 = 1 - p_1$ та $q_2 = 1 - q_1$. Після цього одержимо

$$\overline{u}(\hat{p}_1,\hat{q}_1)=\max_{p_1\in[0,1]}(2p_1\hat{q}_1+(1-p_1)(1-\hat{q}_1)),$$
$$\overline{u}(\hat{p}_1,\hat{q}_1)=\min_{q_1\in[0,1]}(2\hat{p}_1q_1+(1-\hat{p}_1)(1-q_1)).$$

Для розв'язання цієї системи потрібно:

- побудувати множину $BR_1$ ситуацій гри, які складаються з розв'язків $\hat{p}_1$ першої задачі при кожній фіксованій стратегії $q_1$ гравця 2;
- побудувати множину $BR_2$ ситуацій гри, які складаються з розв'язків $\hat{q}_1$ другої задачі при кожній фіксованій стратегії $p_1$ гравця 1.

Тоді множина розв'язків $\hat{Y}=BR_1\bigcap BR_2$.

Побудуємо $BR_1$. Оскільки функція $2p_1q_1+(1-p_1)(1-q_1)=(3q_1-1)p_1+$ $+(1-q_1)$ лінійна за $p_1$, то її максимізуюча стратегія $\hat{p}_1$ дорівнюватиме: 1, якщо коефіцієнт $3q_1-1$ при $p_1$ додатній; 0, якщо – від'ємний; будь-яка точка відрізка [0,1], якщо він дорівнює нулю. Таким чином, одержимо

$$\hat{p}_1=\begin{cases}1, & q_1\in(1/3,1],\\ 0, & q_1\in[0,1/3),\\ [0,1], & q_1=1/3.\end{cases}$$

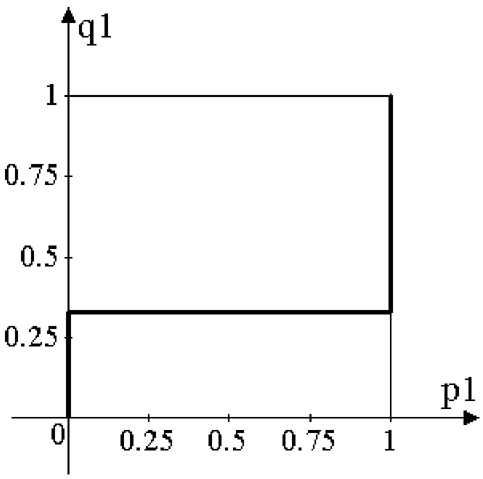



Рис. 4.1.

Всі пари $(\hat{p}_1,q_2)$, які визначають множину $BR_1$, показані на рис. 3.12 жирною лінією.

Аналогічно побудуємо $BR_2$. Оскільки $2p_1q_1+(1-p_1)(1-q_1)=(3p_1-1)q_1+1-p_1$ є також лінійною функцією за $q_1$, то її мінімізуюча стратегія $\hat{q}_1$ дорівнюватиме: 0, якщо коефіцієнт $3p_1-1$ при $q_1$ додатній; 1, якщо – від'ємний; будь-яка точка відрізка [0,1], якщо він дорівнює нулю. Таким чином, одержимо

$$\hat{q}_1=\begin{cases}0, & p_1\in(1/3,1],\\ 1, & p_1\in[0,1/3),\\ [0,1], & p_1=1/3.\end{cases}$$

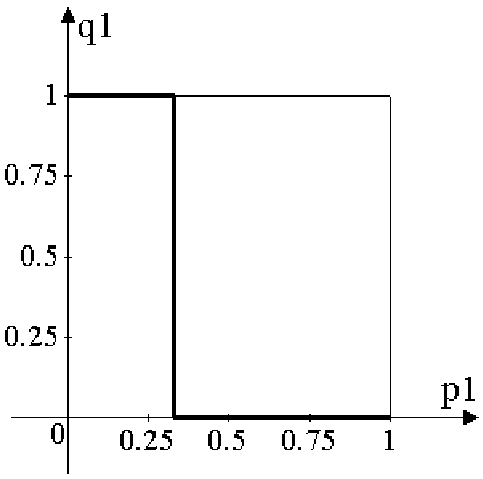



Рис. 4.2.

Всі пари $(p_1,\hat{q}_2)$, які визначають $BR_2$, зображені на рис. 3.13 жирною лінією. З рис. 3.12, 3.13 також бачимо, що $BR_1\bigcap BR_2=\{(1/3,1/3)\}$.

Тепер перейдемо до вихідних змінних $p_1, p_2$ та $q_1, q_2$ і одержимо сідлову точку: $(1/3, 2/3, 1/3, 2/3)$, яка є повністю змішаною.

**Приклад.** Знайти повністю змішану сідлову точку та ціну антагоністичної гри з матрицею

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Оскільки матриця $U$ є квадратною та невиродженою, то скористаємося теоремою 3.5 і формулами (3.4). Спочатку знайдемо обернену матрицю $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Після цього знайдемо ціну гри

$$\alpha = 1/(eU^{-1}e^T) = 1\Big/\left[\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 2/3.$$

Тепер одержимо

$$\hat{p} = \alpha e U^{-1} = (2/3)\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = (1/3, 1/3, 1/3),$$

$$\hat{q} = \alpha U^{-1} e^T = (2/3)\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}.$$

## Лекція 6. Розв'язання матричних ігор

**Графічний метод розв'язання матричних ігор** $2\times m$**.** Застосовується до антагоністичних матричних ігор з матрицею $U=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m}\end{pmatrix}$.

Відповідно до теореми гра має оптимальний розв'язок в змішаних стратегіях $p=(p_1,p_2)$, $q=(q_1,...,q_m)$, де ймовірності застосування чистих стратегій задовольняють умовам: $p_1+p_2=1$, $q_1+...+q_m=1$. Якщо перший гравець використовує свою оптимальну змішану стратегію, а другий гравець – свою чисту стратегію $k$, то ціна гри дорівнює $\alpha=\max\limits_{p\in P}\min\limits_{k\in\{1,...,m\}}(u_{1k}p_1+u_{2k}p_2)=\max\limits_{p_1\in[0,1]}\min\limits_{k\in\{1,...,m\}}(u_{1k}p_1+u_{2k}(1-p_1))$.

Для знаходження ціни гри для оптимальної змішаної стратегії першого гравця достатньо на відрізку [0,1] побудувати графіки сімейства лінійних функцій $l_k(p_1)=u_{1k}p_1+u_{2k}(1-p_1)$ з кутовими коефіцієнтами $a_k=u_{1k}-u_{2k}$, $k\in\{1,...,m\}$ і знайти точку максимуму $\hat{p}_1$ функції $\min\limits_{k\in\{1,...,m\}}l_k(p_1)$ – нижньої огинаючої сімейства. Ціна гри $\alpha=\max\limits_{p_1\in[0,1]}\min\limits_{k\in\{1,...,m\}}l_k(p_1)$. Координати точки обчислюються аналітично за допомогою розв'язку системи двох рівнянь (прямі, які перетинаються в цій точці).

Знайдемо оптимальну стратегію другого гравця. Розглянемо такі можливості.

1. $\hat{p}_1\in(0,1)$. Виберемо дві прямі $l_{k_1}(p_1)$ та $l_{k_2}(p_1)$, які проходять через точку $(\hat{p}_1,\alpha)$ і мають кутові коефіцієнти $a_{k_1}\ge 0$ та $a_{k_2}\le 0$. Розв'яжемо рівняння

$$a_{k_1}q+a_{k_2}(1-q)=0. \qquad (1)$$

Воно має розв'язок $q^*\in[0,1]$. З (1) випливає, що кутовий коефіцієнт прямої $l_{k_1}(p_1)q^*+l_{k_2}(p_1)(1-q^*)$ дорівнює 0. Змішана стратегія другого гравця

$$\hat{q}=(\hat{q}_1,...,\hat{q}_m)\text{, де } \hat{q}_k=\begin{cases} q^*, & k=k_1; \\ 1-q^*, & k=k_2; \\ 0, & k\ne k_1,k_2; \end{cases}$$

буде оптимальною, оскільки для $\forall p_1\in[0,1]$ $pU\hat{q}^T=l_{k_1}(p_1)q^*+l_{k_2}(p_1)(1-q^*)=\alpha$.

2. $\hat{p}_1=0$. У цьому випадку чиста стратегія 2 першого гравця є оптимальною. Тоді знайдеться пряма $l_{k_1}$, яка проходить через точку $(0,\alpha)$ з кутовим коефіцієнтом $a_{k_1}\le 0$, і оптимальною стратегією другого гравця буде $\hat{q}=(\hat{q}_1,...,\hat{q}_m)$, де $\hat{q}_k=\begin{cases}1, & k=k_1, \\ 0, & k\ne k_1.\end{cases}$

3. $\hat{p}_1=1$. У цьому випадку чиста стратегія 1 першого гравця є

оптимальною. Тоді знайдеться пряма $l_{k_2}$, яка проходить через точку $(1,\alpha)$ з кутовим коефіцієнтом $a_{k_2} \geq 0$, і оптимальною стратегією другого гравця буде $\hat{q} = (\hat{q}_1, ..., \hat{q}_m)$, де $\hat{q}_k = \begin{cases} 1, & k = k_2, \\ 0, & k \neq k_2. \end{cases}$

**Графічний метод розв'язання матричних ігор $m \times 2$.** Розв'язання гри з матрицею розмірності $m \times 2$ здійснюється аналогічно випадку $2 \times m$. Але при цьому будується графічне зображення верхньої огинаючої $\max\limits_{j \in \{1,...,m\}} l_j(q_1)$ сімейства прямих $l_j(q_1) = u_{j1}q_1 + u_{j2}(1 - q_1)$, і на відрізку $[0,1]$ знаходять точку $\hat{q}_1$ її мінімуму. Вона відповідатиме оптимальній змішаній стратегії другого гравця. Розглянемо наступні можливості.

1. $\hat{q}_1 \in (0,1)$. Виберемо дві прямі $l_{j_1}(q_1)$ та $l_{j_2}(q_1)$, які проходять через точку $(\hat{q}_1, \alpha)$ і мають кутові коефіцієнти $b_{j_1} \geq 0$ та $b_{j_2} \leq 0$. Розв'яжемо рівняння

$$b_{j_1} p + b_{j_2}(1 - p) = 0. \tag{2}$$

Воно має розв'язок $p^* \in [0,1]$. Змішана стратегія першого гравця визначається таким чином

$$\hat{p} = (\hat{p}_1, ..., \hat{p}_m), \text{ де } \hat{p}_j = \begin{cases} p^*, & j = j_1; \\ 1 - p^*, & j = j_2; \\ 0, & j \neq j_1, j_2. \end{cases}$$

2. $\hat{q}_1 = 0$. У цьому випадку чиста стратегія 2 другого гравця є оптимальною. Тоді знайдеться пряма $l_{j_1}$, яка проходить через точку $(0,\alpha)$ з кутовим коефіцієнтом $b_{j_1} \geq 0$, і оптимальною стратегією першого гравця буде $\hat{p} = (\hat{p}_1, ..., \hat{p}_m)$, де $\hat{p}_j = \begin{cases} 1, & j = j_1, \\ 0, & j \neq j_1. \end{cases}$

3. $\hat{q}_1 = 1$. У цьому випадку чиста стратегія 1 другого гравця оптимальна. Тоді знайдеться пряма $l_{j_2}$, яка проходить через точку $(1,\alpha)$ з кутовим коефіцієнтом $b_{j_2} \leq 0$, і оптимальною стратегією першого гравця буде $\hat{p} = (\hat{p}_1, ..., \hat{p}_m)$, де $\hat{p}_j = \begin{cases} 1, & j = j_2, \\ 0, & j \neq j_2. \end{cases}$

**Зведення матричної гри до пари двоїстих задач лінійного програмування.** Це найбільш ефективний підхід, який дозволяє використовувати симплекс-метод.

Нехай матриця $U$ має розмірність $m_1 \times m_2$. Без обмеження загальності вважатимемо, що ціна гри $\alpha$ є додатньою. Зазначимо, що для перевірки цієї вимоги достатньо, щоб максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = \max\limits_{j \in X_1} \min\limits_{k \in X_2} u_{jk}$ був додатній. Відповідно до теореми 3.13 вона має вигляд

$\alpha = \max\limits_{p \in P} \min\limits_{k \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum\limits_{j=1}^{m_1} u_{jk} p_j$. Введемо додаткову змінну $z$ і запишемо задачу знаходження максміна як задачу лінійного програмування: $\alpha = \max\limits_{(p,z) \in D} z$, де

$$D = \{(p,z) \mid \sum_{j=1}^{m_1} u_{jk} p_j \geq z,\ k \in \{1,\ldots,m_2\},\ \sum_{j=1}^{m_1} p_j = 1,\ p_j \geq 0,\ j \in \{1,\ldots,m_1\}\}.$$

Оскільки $\alpha > 0$, то і $z > 0$. Проведемо заміну змінних $y_j = p_j / z$, $y = (y_1,\ldots,y_{m_1})$. Звідси $\alpha = 1/(\sum\limits_{j=1}^{m_1} \hat{y}_j)$, де $\hat{y}$ – оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування

$$\sum_{j=1}^{m_1} y_j \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{m_1} u_{jk} y_j \geq 1,\ k \in \{1,\ldots,m_2\},\ y_j \geq 0,\ j \in \{1,\ldots,m_1\}.$$

За допомогою $\hat{y}$ знаходимо ціну гри та оптимальну змішану стратегію першого гравця $\alpha = 1/(\sum\limits_{j=1}^{m_1} \hat{y}_j)$, $\hat{p} = \alpha \hat{y}$.

Аналогічно одержимо $\alpha = 1/\sum\limits_{k=1}^{m_2} \hat{w}_k$, де $\hat{w}$ – оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування

$$\sum_{k=1}^{m_2} w_k \to \max,$$

$$\sum_{k=1}^{m_2} u_{jk} w_k \leq 1,\ j \in \{1,\ldots,m_1\},\ w_k \geq 0,\ k \in \{1,\ldots,m_2\}.$$

Оптимальна змішана стратегія другого гравця $\hat{q} = \alpha \hat{w}$. Властивості доповнюючої нежорсткості (теорема 3.14) для оптимальних розв'язків $\hat{y}$ та $\hat{w}$ приймають вигляд

$$\hat{y}_j > 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{m_2} u_{jk} \hat{w}_k = 1,\ \hat{w}_k > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m_1} u_{jk} \hat{y}_j = 1.$$

Вони безпосередньо випливають з теореми після заміни змінних $\hat{p} = \alpha \hat{y}$, $\hat{q} = \alpha \hat{w}$.

**Приклад.** Знайти графічним методом оптимальні змішані стратегії гравців та ціну антагоністичної гри з матрицею

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Для знаходження ціни гри та оптимальної змішаної стратегії першого гравця на відрізку [0,1] побудуємо графіки лінійних функцій:

$$l_1(p_1) = u_{11} p_1 + u_{21}(1 - p_1) = 2p_1 + 7(1 - p_1) = 7 - 5p_1,$$
$$l_2(p_1) = u_{12} p_1 + u_{22}(1 - p_1) = 3p_1 + 5(1 - p_1) = 5 - 2p_1,$$

$$l_3(p_1) = u_{13}p_1 + u_{23}(1-p_1) = 11p_1 + 2(1-p_1) = 2 + 9p_1.$$

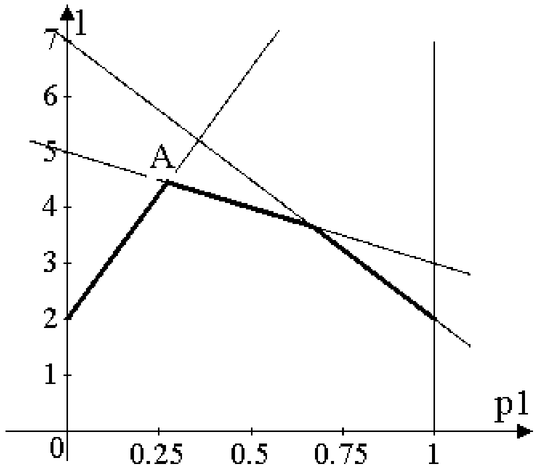



Рис. 5.1.

Точка максимуму $A$ нижньої огинаючої сімейства цих прямих позначена на рис. Її координати $(\hat{p}_1, v) = (3/11, 49/11)$ обчислюються аналітично за допомогою розв'язку системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} 5 - 2p_1 = \alpha, \\ 2 + 9p_1 = \alpha, \end{cases}$$

відповідних прямим $l_2(p_1)$ та $l_3(p_1)$, які перетинаються в цій точці. Таким чином, отримуємо $\hat{p}_1 = 3/11$ та ціну гри $\alpha = \max\limits_{p_1 \in [0,1]} \min\limits_{k \in \{1,2,3\}} l_k(p_1) = 49/11$. Звідси оптимальна стратегія першого гравця $\hat{p} = (\hat{p}_1, 1-\hat{p}_1) = (3/11, 8/11)$.

Знайдемо оптимальну стратегію другого гравця.

Зазначимо, що $\hat{p}_1 \in (0,1)$. Через точку $A$ проходять дві прямі $l_2(p_1)$ та $l_3(p_1)$, які мають кутові коефіцієнти $a_2 = u_{12} - u_{22} = 3 - 5 = -2 < 0$ та $a_3 = u_{13} - u_{23} = 11 - 2 = 9 > 0$ (тут $k_1 = 3$, $k_2 = 2$). Розв'яжемо рівняння (1): $9q - 2(1-q) = 0$. Воно має розв'язок $q^* = 2/11 \in [0,1]$. Тому $\hat{q}_1 = 0$, $\hat{q}_2 = 1 - q^* = 9/11$, $\hat{q}_3 = q^* = 2/11$. Загалом змішана стратегія другого гравця $\hat{q} = (0, 9/11, 2/11)$.

**Приклад.** Знайти оптимальні змішані стратегії гравців та ціну антагоністичної гри з матрицею

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

методом лінійного програмування.

*Розв'язання*. Знайдемо максимальний гарантований виграш першого гравця $\alpha_1 = \max\limits_{j_1 \in X_1} \min\limits_{j_2 \in X_2} u_{j_1 j_2} = 4$. Оскільки $\alpha_1 = 4 > 0$, то задачі лінійного програмування будемо записувати безпосередньо до матриці $U$.

Запишемо задачу лінійного програмування:

$$\begin{aligned} & y_1 + y_2 + y_3 \to \min, \\ & 3y_1 + 9y_2 + 7y_3 \ge 1, \\ & 6y_1 + 4y_2 + 5y_3 \ge 1, \\ & 8y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 1, \\ & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Симплекс-методом знайдемо її розв'язок $\hat{y} = (2/27, 0, 1/9)$. За допомогою $\hat{y}$ знаходимо ціну гри та оптимальну змішану стратегію першого гравця:

$$\alpha = 1/(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3) = 1/(2/27 + 0 + 1/9) = 27/5,$$

$$\hat{p} = \alpha\hat{y} = \frac{27}{5}(2/27, 0, 1/9) = (2/5, 0, 3/5).$$

Розв'яжемо симплекс-методом задачу лінійного програмування:

$$\begin{aligned}
&w_1 + w_2 + w_3 \to \max,\\
&3w_1 + 6w_2 + 8w_3 \le 1,\\
&9w_1 + 4w_2 + 2w_3 \le 1,\\
&7w_1 + 5w_2 + 4w_3 \le 1,\\
&w_1 \ge 0, w_2 \ge 0, w_3 \ge 0.
\end{aligned}$$

Її розв'язок $\hat{w} = (1/27, 4/27, 0)$. Звідси оптимальна змішана стратегія другого гравця $\hat{q} = \alpha\hat{w} = \dfrac{27}{5}(1/27, 4/27, 0) = (1/5, 4/5, 0)$.

## Лекція 7. Наближені методи розв’язання матричних ігор

**Метод Брауна-Робінсон.** Нехай матриця $U$ має розмірність $m_1 \times m_2$. Для вектора $b = (b_1,...,b_i)$ позначимо $\max b = \max\{b_1,...,b_i\}$ та $\min b = \min\{b_1,...,b_i\}$.

**Означення.** Послідовність векторів $\{(c(i), d(i))\}_{i=0,1,...}$, де $c(i) \in R^{m_1}$, $d(i) \in R^{m_2}$ для $\forall i = 0,1,...$, називається векторною системою для матриці $U$, якщо

$$\min c(0) = \max d(0),\ c(i+1) = c(i) + U_{j\bullet},\ d(i+1) = d(i) + U_{\bullet k},$$

де $j,k$ є такими, що $u_{ij} = \min c(i)$, $u_{ik} = \max d(i)$.

Зокрема можна вибрати $c(0) = d(0) = 0$.

Таким чином, векторну систему можна побудувати рекурентно.

**Теорема.** Якщо $\{(c(i), d(i))\}_{i=0,1,...}$ є векторною системою для матриці $U$, то ціна гри $\alpha = \lim_{i\to\infty} \alpha_1(i) = \lim_{i\to\infty} \alpha_2(i)$, де $\alpha_1(i) = \dfrac{\min c(i)}{i}$ є $i$-м наближенням до максимального гарантованого виграшу першого гравця в змішаних стратегіях, а $\alpha_2(i) = \dfrac{\max d(i)}{i}$ є $i$-м наближенням до мінімального гарантованого програшу другого гравця.

Нехай за $s$ повторень гри перший гравець $r_j$ разів вибрав стратегію $j \in \{1,...,m_1\}$, а другий гравець $t_k$ разів вибрав стратегію $k \in \{1,...,m_2\}$. Вектори частот вибору чистих стратегій $p(s) = (r_1/s,...,r_{m_1}/s)$, $q(s) = (t_1/s,...,t_{m_2}/s)$. Тоді $\hat{p} = \lim_{s\to\infty} p(s)$ та $\hat{q} = \lim_{s\to\infty} q(s)$ є оптимальними змішаними стратегіями відповідно першого та другого гравця.

**Означення.** Нехай задане $\varepsilon > 0$. Ситуація $(\hat{p}_\varepsilon, \hat{q}_\varepsilon)$, для якої виконуються нерівності

$$pU\hat{q}_\varepsilon^T - \varepsilon \le \hat{p}_\varepsilon U \hat{q}_\varepsilon^T \le \hat{p}_\varepsilon U q^T + \varepsilon \quad \forall p \in P \quad \forall q \in Q,$$

називається $\varepsilon$ - рівновагою матричної антагоністичної гри $G$ у змішаних стратегіях.

**Означення.** Нехай задане $\varepsilon > 0$, $\alpha_1 = \max_{p\in P} \min_{q\in Q} pUq^T$ – максимальний гарантований виграш першого гравця в змішаних стратегіях, $\alpha_2 = \min_{q\in Q} \max_{p\in P} pUq^T$ – мінімальний гарантований програш другого гравця в змішаних стратегіях. Стратегія першого гравця $\hat{p}_\varepsilon$ називається $\varepsilon$ - максмінною, якщо $\min_{q\in Q} \hat{p}_\varepsilon U q^T \geq \alpha_1 - \varepsilon$. Стратегія другого гравця $\hat{p}_\varepsilon$ називається $\varepsilon$ - мінмаксною, якщо $\max_{p\in P} pU\hat{q}_\varepsilon \geq \alpha_2 + \varepsilon$. Величина $\min_{q\in Q} \hat{p}_\varepsilon U q^T$ називається $\varepsilon$- максимальним виграшем першого гравця, а $\max_{p\in P} pU\hat{q}_\varepsilon$ – $\varepsilon$-мінімальним програшем другого гравця.

Якщо за $s_0$ кроків ціна гри знайдена з точністю $\varepsilon > 0$, то відповідні вектори частот вибору чистих стратегій $p(s_0)$ та $q(s_0)$ є $\varepsilon$- максмінною та $\varepsilon$ - мінмаксною змішаними стратегіями гравців. Число $\alpha_1(s_0) = \dfrac{\min c(s_0)}{s_0}$ є $\varepsilon$-максимальним виграшем першого гравця, а $\alpha_2(s_0) = \dfrac{\max d(s_0)}{s_0}$ – відповідно $\varepsilon$-мінімальним програшем другого гравця.

**Регулярний ітеративний алгоритм.** Розглянемо симетричну антагоністичну гру з матрицею $U$.

**Означення.** Послідовність $\{\lambda_i\}_{i=1,2,...}$ називається регулярною, якщо $\lambda_i \in (0,1)$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i = \infty$.

Нехай $p(0)$ – змішана стратегія першого гравця, $\{\lambda_i\}_{i=1,2,...}$ – регулярна послідовність. Визначимо ітераційний процес наступним чином.

Нехай на кроці $i-1$, $i = 1,2,...$, знайдена змішана стратегія $q(i)$ другого гравця. На кроці $i$ знаходимо змішану стратегію $p(i)$ першого гравця за умовою $p(i)Uq(i)^T = \max_{p\in P} pUq(i)^T$, після чого знаходимо змішану стратегію другого гравця $q(i+1) = (1-\lambda_i)q(i) + \lambda_i p(i)$.

**Теорема.** Нехай антагоністична гра з матрицею $U$ є симетричною, $\{\lambda_i\}_{i=1,2,...}$ – будь-яка регулярна послідовність, $q(0)$ – довільна змішана стратегія другого гравця. Тоді для $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться номер $i_\varepsilon$ такий, що для $\forall i > i_\varepsilon$ ситуація $(p(i), q(i))$ буде ситуацією $\varepsilon$ - рівноваги матричної антагоністичної гри $G$.

**Метод диференціальних рівнянь.** Нехай антагоністична гра з матрицею $U$ розмірності $m \times m$ симетрична. Вектор $p = (p_1,..., p_m)$ є довільним. Позначимо $y_j = U_{j\cdot} p^T$, $f_j(p) = \max\{0, p_j\}$, $F(p) = \sum_{i=1}^{m} f_j(p)$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_j}{dt} = f_j(p) - F(p)p_j, \qquad j = 1,...,m, \qquad (3.6)$$

з початковими умовами $p_j(0) = p_j^0$, $j = 1,...,m$.

**Теорема.** Нехай $p$ – розв’язок (3.6), $\{t_i\}_{i=0,1,...}$ – необмежена зростаюча послідовність дійсних чисел така, що існує $\hat{p} = \lim_{i\to\infty} p(t_i)$. Тоді $\hat{p}$ – оптимальна стратегія першого та другого гравця в симетричній антагоністичній грі з матрицею $U$.

**Приклад.** Знайти наближені значення оптимальних стратегій та ціну антагоністичної гри з матрицею

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

методом Брауна-Робінсона з точністю $\varepsilon = 0,75$.

*Розв’язання.* Виберемо $c(0) = d(0) = 0$ і побудуємо в табл. 1 векторну систему для матриці $U$.

Таблиця 1.

**Векторна система для матриці $U$.**

| $i$ | $j$ | $c(i)$ | | | $\alpha_1(i)$ | $k$ | $d(i)$ | | | $\alpha_2(i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | -1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 5 | -4 | 2,5 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 2 | 8 | -7 | 2,66 | 3 | 6 | 2 | 3 | 0,66 |
| 4 | 2 | 3 | 8 | -4 | 2 | 2 | 8 | 2 | 6 | 0,5 |
| 5 | 2 | 4 | 8 | -1 | 1,6 | 2 | 10 | 2 | 9 | 0,4 |
| 6 | 2 | 5 | 8 | 2 | 1,33 | 2 | 12 | 2 | 12 | 0,33 |
| 7 | 2 | 6 | 8 | 5 | 1,14 | 2 | 14 | 2 | 15 | 0,28 |
| 8 | 2 | 7 | 8 | 8 | 1 | 2 | 16 | 2 | 18 | 0,25 |

За вісім кроків методу Брауна-Робінсона одержимо $p(8) = (1/4, 3/4, 0)$, $q(8) = (1/8, 5/8, 2/8)$, $\alpha_1(8) = \min c(i)/i = 1$ та $\alpha_2(8) = \max d(i)/i = 0,25$ з точністю $\varepsilon = 0,75$.

## Лекція 8. Умови повної інформованості гравців. Складна поведінка гравців.

Розглянемо випадок повної інформованості гравців, коли кожен з них знає функції виграшу – свою і суперників. Гра може повторюватись будь-яку кількість разів.

**Послідовне виключення домінованих стратегій.** При некооперативній поведінці в умовах повної інформованості породжуються взаємні „стратегічні очікування”, які полягають у тому, що $i$ - й гравець очікує, що всі інші гравці також будуть виключати свої доміновані стратегії. У результаті цього у деяких гравців можуть виникнути нові доміновані стратегії і т.д.

**Приклад** (табл.1). Маємо: $a_1 \succ c_1$, $a_1$ і $b_1$ непорівнянні. Усі стратегії другого гравця непоівнянні між собою. Отже, рівноваги у домінуючих стратегіях не існує. Але, якщо другий гравець знає цільову функцію першого, то він може „стратегічно сподіватись” на те, що перший відкине свою доміновану стратегію $c_1$ (простіше кажучи, другий може сподіватись на „розумність” першого) і розглядати вже не початкову задачу, а „скорочену”, у якій $X_1^1 = \{a_1, b_1\}$. У новій задачі стратегія $a_2$ буде домінованою (і $b_2$, і $c_2$). Отже, $X_2^1 = \{b_2, c_2\}$. У свою чергу, на множинах стратегій $X_1^1$, $X_2^1$ стратегія $a_1$ домінується стратегією $b_1$, а на множинах $X_1^2 = \{b_1\}$, $X_2^1$ домінованою буде стратегія $b_2$! Отже, раціональна поведінка кожного гравця разом з раціональною оцінкою поведінки супротивника приводить до однозначного результату: перший вибирає стратегію $b_1$, другий – $c_2$.

| $X_1 \backslash X_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 3,1 | 1,2 | 2,1 |
| $b_1$ | 1,1 | 2,1 | 2,2 |
| $c_1$ | 3,3 | 1,2 | 1,2 |

Таблиця 1.

Ця ситуація $(b_1, c_2)$, отримана у результаті відкидання кожним гравцем своїх домінованих стратегій, називається складною рівновагою. Звернемо увагу на два аспекти. По-перше, складна рівновага була отримана не в результаті послідовної „тактичної” гри (перший гравець відкидає свої доміновані стратегії, потім – другий і т.д.), а в результаті „стратегічного” планування (якщо я відкину свої доміновані стратегії, а другий гравець це врахує й відкине свої і т.д., то прийдемо до $(b_1, c_2)$).

По-друге, отримана ситуація не є ефективною (ситуація $(c_1, a_2)$ краща для обох гравців!)

**Означення.** Для гри $G = (X_i, u_i, i \in N)$ послідовне виключення домінованих стратегій означає побудову послідовностей

$$X_i = X_i^0 \supset X_i^1 \supset \ldots \supset X_i^t \supset X_i^{t+1} \supset \ldots, \forall i \in N,\ X_i^{t+1} = ND\left(u_i, X_j^t, j \in N\right).$$

Розглянемо, до чого може привести послідовне виключення домінованих стратегій.

**Приклад** (Форкуарсон, 1969). Журі з трьох членів повинно вибрати одного з трьох кандидатів $\{a,b,c\}$. Переможець вибирається за правилом більшості, якщо думки членів журі розходяться, то вибирається кандидат, за якого проголосував „голова журі" (нехай - це виборець під номером 1). Отже, якщо гравці висунули кандидатури $(x_1,x_2,x_3)$, $x_i \in X_i=\{a,b,c\}$, $i$=1,2,3, то вибори переможця відбуваються за правилом: $\pi(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases} x_2, \text{ якщо } x_2=x_3, \\ x_1, \text{ якщо } x_2 \neq x_3. \end{cases}$

Покладемо, що функції виграшу гравців мають таку структуру: $u_1(a)>u_1(b)>u_1(c)$, $u_2(b)>u_2(c)>u_2(a)$, $u_3(c)>u_3(a)>u_3(b)$ („цикл Кондорсе"). Розглянемо стратегії $a$ і $b$ першого гравця на предмет домінування. Для цього потрібно розглянути ситуації і для всіх можливих (але однакових) виборів другого й третього гравця. Усього потрібно розглянути $3\times3=9$ ситуацій. Маємо:

$$u_1(\pi(a,a,a))=u_1(a)=u_1(\pi(b,a,a))=u_1(a),$$
$$u_1(\pi(a,a,b))=u_1(a)>u_1(\pi(b,a,b))=u_1(b),$$
$$u_1(\pi(a,a,c))=u_1(a)>u_1(\pi(b,a,c))=u_1(b),$$
$$u_1(\pi(a,b,a))=u_1(a)>u_1(\pi(b,b,a))=u_1(b),$$
$$u_1(\pi(a,b,b))=u_1(b)=u_1(\pi(b,b,b))=u_1(b),$$
$$u_1(\pi(a,b,c))=u_1(a)>u_1(\pi(b,b,c))=u_1(b),$$
$$u_1(\pi(a,c,a))=u_1(a)>u_1(\pi(b,c,a))=u_1(b),$$
$$u_1(\pi(a,c,b))=u_1(a)>u_1(\pi(b,c,b))=u_1(b),$$
$$u_1(\pi(a,c,c))=u_1(c)=u_1(\pi(b,c,c))=u_1(c).$$

Отже, за визначенням домінування $a \succ b$ для першого гравця. Аналогічно $a \succ c$ і $X_1^1=\{a\}$. Для другого й третього гравця маємо (перевірте!): $X_2^1=\{b,c\}$, $X_3^1=\{c,a\}$. Порівняємо стратегії $b$ і $c$ для другого гравця на множинах стратегій $X_i^1$, *i=1,2,3*. Маємо:

$$u_2(a,b,c)=u_2(a)<u_2(a,c,c)=u_2(c),$$
$$u_2(a,b,a)=u_2(a)=u_2(a,c,a)=u_2(a)$$

(стратегія першого фіксована, третій може вибрати або $c$ або $a$). Отже, $X_2^2=\{c\}$. Аналогічно, $X_3^2=\{c\}$ і, таким чином, на множині $X_1^2=X_1^1=\{a\}$, $X_2^2=X_3^2=\{c\}$ за правилом більшості буде вибрано $c$ – найгірший вибір для першого гравця – голови журі! Сила „начальника" у розв'язуванні спірних ситуацій виявляється його слабкістю у грі з розумними (навіть, ізольованими!) підлеглими. Згадайте цей досить життєвий приклад, перед тим, як висуватись в начальники!

**Приклад** (табл. 2). Виключаючи доміновані стратегії $c_1$ і $a_2$ (у будь-якій послідовності), отримаємо $X_1^1 = \{a_1, b_1\}$, $X_2^1 = \{b_2, c_2\}$. Подальше виключення стратегій неможливе, оскільки $a_1$ і $b_1$, $b_2$ і $c_2$ непорівнянні. Що робити далі? Можна задовольнитись фактом скорочення кількості стратегій у кожного гравця і розглядати нову гру з множинами стратегій $X_1^1$, $X_2^1$ (а в реальних ситуаціях скорочення може бути значним – наприклад, від гри $100 \times 100$ до $2 \times 2$), а можна повернутись до початкової гри. У конкретних ситуаціях можливі обидва шляхи, але звернемо увагу, що при „скороченні” початкової гри була втрачена ситуація $(c_1, a_2)$, що домінує за Парето усі ситуації, що залишились.

| $X_1 \backslash X_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 3,1 | 2,3 | 2,3 |
| $b_1$ | 3,3 | 1,5 | 2,4 |
| $c_1$ | 3,4 | 2,4 | 1,5 |

Таблиця 3.

**Приклад** (табл. 3). Маємо: $a_1 \succ b_1$, $a_1 \succ c_1$ , $b_2 \succ a_2$ і виключення домінованих стратегій у довільній послідовності приводить до двох ситуацій – $(a_1, b_2)$, $(a_1, c_2)$, рівноцінних з точки зору кожного гравця. У цьому випадку логічно назвати складною рівновагою обидві ситуації. І знову відмітимо, що раціональна (але ізольована!) поведінка кожного гравця приводить до втрати ситуації $(c_1, a_2)$, кращої для обох.

| $X_1 \backslash X_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 3,1 | 1,2 | 2,1 |
| $b_1$ | 1,1 | 2,1 | 1,2 |
| $c_1$ | 3,3 | 1,3 | 1,4 |

Таблиця 2.

**Складна рівновага.**

**Означення.** Гра $G$ називається *розв’язною за домінуванням*, якщо існує натуральне $t$ таке, що для всіх $i$ функція виграшу $u_i$ не залежить від $x_i$ на $X_N^t$: $\forall x_i, y_i \in X_i^t$, $\forall x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}^t$ $u_i(x_i, x_{N\backslash i}) = u_i(y_i, x_{N\backslash i})$. Множина $X_N^t$ при цьому називається *множиною складних рівноваг*.

Розв’язність гри за домінуванням означає, що після скінченого числа раундів виключення усі стратегії кожного гравця стануть для нього еквівалентними (для нього, але, взагалі кажучи, не для інших. Якщо функції виграшу для всіх гравців однозначні на $X_N$, то множина складних рівноваг (якщо вона існує) складається з одного елемента. Отже, у таких розв’язних за домінуванням іграх, складна поведінка ізольованих гравців є детермінованою. Складна рівновага узагальнює рівновагу у домінуючих стратегіях у наступному сенсі.

**Теорема.** Якщо у грі $G$ множина рівноваг у домінуючих стратегіях $D$ непорожня, то гра є розв'язною за домінуванням і $D$ є множиною складних рівноваг.

Доведення очевидне. Якщо тільки у одного гравця $i$ є домінуюча стратегія, то, очевидно, $D_i\left(u_i\right)$ є $i$ - ю компонентою складної рівноваги, якщо остання існує.

Розглянемо випадок антагоністичної гри.

**Теорема.** Нехай $G=\left(X_1, X_2, u_1\right)$ – гра двох осіб з нульовою сумою і скінченними множинами стратегій. Тоді складна рівновага є сідловою точкою функції $u_1$. Отже, розв'язки за домінуванням гри двох осіб з нульовою сумою мають ціну.

## Лекція 9. Розгорнута форма гри

Почнемо з прикладу.

**Приклад** (вибори з правилом вето). Нехай троє гравців $N = \{1, 2, 3\}$ вибирають одного кандидата з множини $A = \{a, b, c, d\}$. Правило голосування таке: починаючи з гравця 1, кожен гравець послідовно накладає вето на вибір кандидатури одного з невідхилених кандидатів. Єдиний кандидат, що залишився, вважається обраним.

Побудуємо гру в нормальній формі. Множини стратегій гравців:

$X_1 = A = \{a, b, c, d\}$;

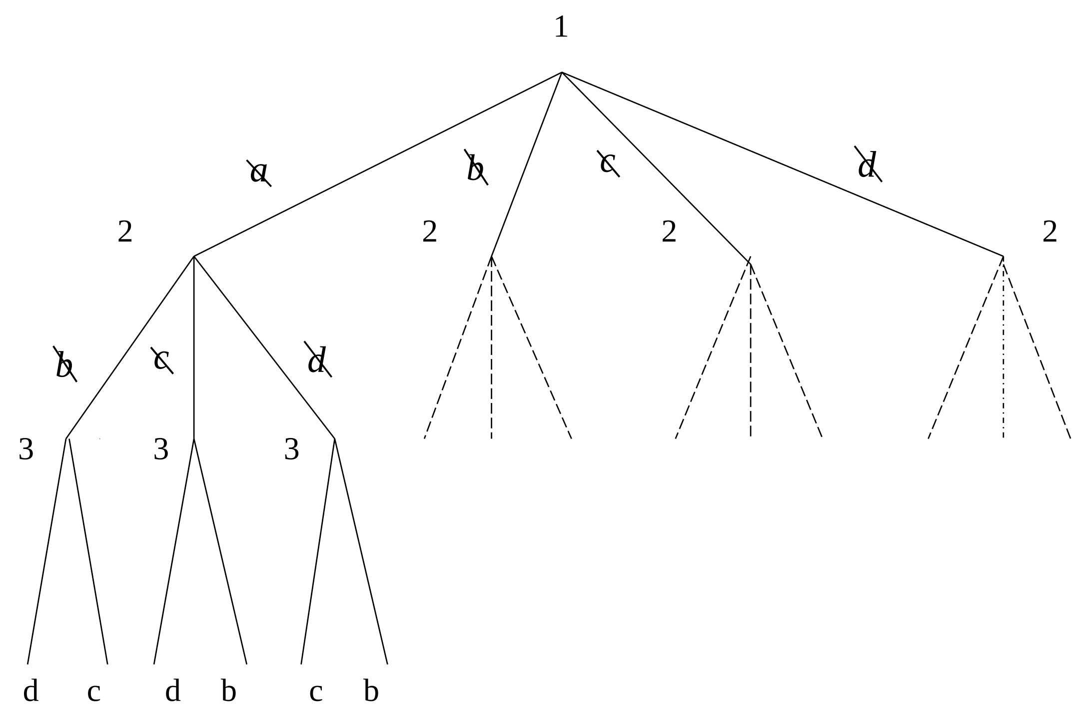
$X_2 = A \setminus \{x_1\}$, де $x_1$ - це стратегія першого гравця (відхилений їм кандидат);

$X_3 = A \setminus \{x_1, x_2\}$, де $x_i$ - це стратегія $i$-го гравця, (відхилений їм кандидат) $i = 1, 2$.

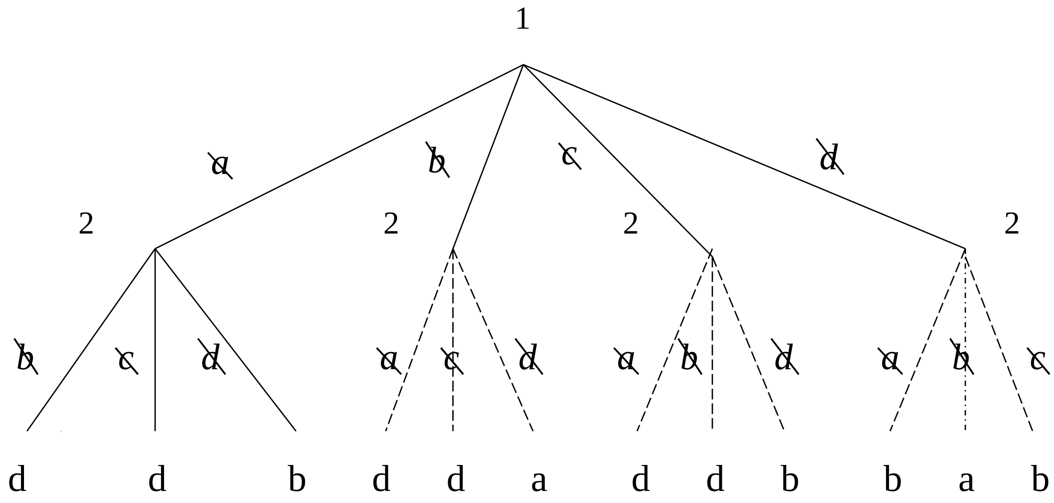
Кожна ситуація гри $x = (x_1, x_2, x_3)$ приводить до відповідного наслідку $\pi(x_1, x_2, x_3) = A \setminus \{x_1, x_2(x_1), x_3(x_1, x_2(x_1))\}$, для якого визначені функції виграшу гравців $u_i(x) = u_i(\pi(x_1, x_2, x_3))$, $i = 1, 2, 3$. Ми не будемо задавати їх чисельно, лише будемо вважати, що вони задовольняють умовам:

$$u_1(d) < u_1(c) < u_1(b) < u_1(a),$$
$$u_1(c) < u_1(d) < u_1(a) < u_1(b),$$
$$u_1(c) < u_1(a) < u_1(b) < u_1(d).$$

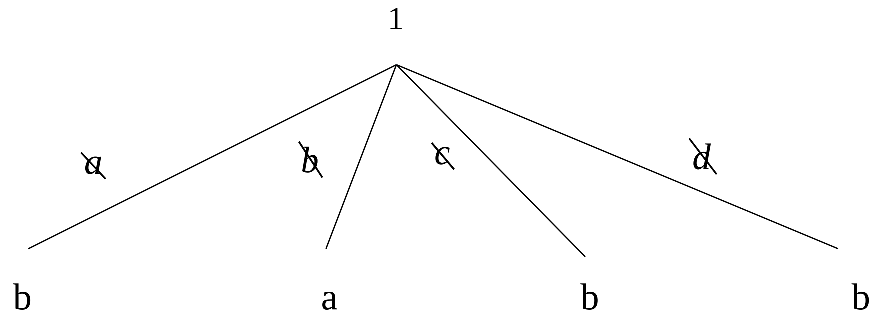
Оскільки в цій грі явно задана послідовність ходів гравців, а множини стратегій «динамічно» міняються в процесі гри, то для представлення гри буде зручною так звана розгорнуті форма у вигляді графу.



З цього графу зрозуміло, що всі гравці побачать доміновані стратегії для третього гравця і після їх виключення для них гра скоротиться спочатку до двох рівнів, а потім до одного.




а потім до одного.




В результаті, переможцем буде кандидат «а».

Ця процедура може бути узагальненою для будь-якої гри в розгорнутій формі при достатньо слабкому припущенні про взаємну однозначність функцій виграшу гравців.

**Означення.** Скінченим деревом гри називається пара $\Gamma = (M, \sigma)$, де $M$ - скінченна множина вершин, а $\sigma$ – відображення, яке ставить у відповідність кожній вершині найближчу попередню, окрім того:

- існує єдина точка $m_0$, що $\sigma(m_0) = m_0$, вона називається початковою вершиною;
- існує ціле число $l$, що $\forall m \in M \quad \sigma^l(m) = m_0$, найменше таке $l$ називається довжиною дерева.

Вершина $m$, для якої $\sigma^{-1}(m) = \varnothing$, називається фінальною. Множину фінальних вершин будемо позначати через $T(M)$. Для будь-якої не фінальної вершини $m$ множина $\sigma^{-1}(m)$ складається із наступних за нею вершин.

**Означення.** Для скінченної множини гравців $N$ грою у розгорнутій формі називається сукупність, що містить:

- скінченне дерево $\Gamma = (M, \sigma)$;
- розбиття $(M_i)_{i \in N}$ множини $M \setminus T(M)$;
- для кожного гравця $i \in N$ функцію виграшу $u_i : T(M) \to E^1$.

Розбиття $\{M_i\}_{i \in N}$ визначає, хто з гравців робить хід у кожній не фінальній вершині. Гра починається у вершині $m_0$ і закінчується, коли досягається фінальна вершина $m \in T(M)$. Після цього визначаються виграші гравців.

Якщо гра відбувається в умовах повної інформованості, то на кожному етапі гри гравці знають поточну позицію, всі попередні ходи, їм відоме дерево гри, а також функції виграшу. Ідея ігор у розгорнутій формі (позиційних ігор) належить Дж. Фон Нейману та О. Моргенштерну. Повна формалізація цих ігор проведена Г. Куном.

**Редукція гри.** Нехай для гри $G$ у розгорнутій формі $(M, \sigma; M_i, u_i; i \in N)$ виконується умова взаємної однозначності функцій виграшу гравців:

$$\forall m, m' \in T(M) \;\; [\exists i \in N : u_i(m) = u_i(m')] \Rightarrow [\forall j \in N \;\; u_j(m) = u_j(m')]. \qquad (1)$$

Нехай також $L(M)$ є множиною вершин, для яких всі наступні є фінальними, тобто

$$m \in L(M) \Leftrightarrow \sigma^{-1}(m) \subseteq T(M).$$

Тоді грі $G$ відповідає редукована гра $(M^*, \sigma^*; M_i^*, u_i^*; i \in N)$, у якій:

- множина вершин $M^* = M \setminus T_0(M)$, $T_0(M) = \{m \in T(M) | \sigma(m) \in L(M)\}$;
- відображення $\sigma^*$ є звуженням відображення $\sigma$ на $M^*$;
- множина фінальних вершин $T(M^*) = L(M) \bigcup (T(M) \setminus T_0(M))$;
- $(M_i^*)_{i \in N}$ є розбиття множини $M^* \setminus T(M^*)$, де $M_i^* = M_i \bigcap (M^* \setminus T(M^*))$;
- функція виграшу $u_i^*(m) = u_i(m)$, якщо $m \in T(M) \setminus T_0(M)$, та $u_i^*(m) = u_i(m_j)$, якщо $m \in L(M) \bigcap M_j$, де $m_j$ є найкращою для гравця $j \in N$ наступною за $m$ вершиною, тобто $u_j(m_j) = \sup\limits_{m' \in \sigma^{-1}(m)} u_j(m')$.

**Алгоритм Куна.** Полягає в послідовній редукції початкової гри $G$ наступним чином. Після $l$ кроків дерево $(M^{*(l)}, \sigma^{*(l)})$ гри $G^{*(l)}$ буде мати довжину 0 та складатись тільки з початкової вершини $m_0$, для якої буде визначеним єдине значення виграшу кожного гравця, тобто $M^{*(l)} = \{m_0\}$, а $\sigma^{*(l)}$ – тотожнє відображення. Позначимо $\beta_i = u_i^{*(l)}(m_0)$ єдине значення виграшу гравця $i$ в $G^{*(l)}$.

Встановлено, що у грі $G$ у розгорнутій формі $(M, \sigma; M_i, u_i; i \in N)$, для якої виконується умова однозначності (1), відповідна гра у нормальній формі є розв'язною за домінуванням, а виграші гравців, що відповідають складній рівновазі, задаються алгоритмом Куна.

**Теорема (Куна).** Нехай $G$ – гра у розгорнутій формі $(M, \sigma; M_i, u_i; i \in N)$, для якої виконується умова взаємної однозначності функцій виграшу гравців (1). Тоді, якщо її розглядати в нормальній формі, вона є розв'язною за домінуванням, а виграші $\beta_i = u_i^{*(l)}(m_0)$, $i \in N$, що відповідають складній рівновазі, можуть бути обчислені за допомогою алгоритму Куна.

Наслідком теореми Куна для багатокрокових антагоністичних ігор у розгорнутій формі є теорема Цермело про розв'язність за домінуванням будь-якої багатокрокової антагоністичної гри з повною інформацією.

Таким чином, складна рівновага узагальнює рівновагу у домінуючих стратегіях. Конструктивні умови існування складних рівноваг можуть бути одержані для ігор у розгорнутій формі. Недоліком концепції складної рівноваги є припущення про раціональну поведінку гравців, яка полягає у відкиданні домінованих стратегій.

## Лекція 10. Приклади складної поведінки гравців

У випадку, коли множини стратегій $X_i$ нескінченні при всіх $i \in N$ (хоча і компактні), досить важко формально визначити складну поведінку. Однією з причин є те, що у процесі виключення домінованих стратегій компактність множини стратегій може порушуватись. Збіжність послідовностей $X_i^t$, $i \in N$, до підмножини еквівалентних стратегій може відбуватися лише при нескінченній кількості гравців. Ці складнощі демонструються таким прикладом.

**Приклад** (поділ долара при інфляції – Дутта, Дживерс).

Гравці ($i \in N = \left\{\overline{1,n}\right\}$) ділять долар за наступним правилом:

*Крок 1.* Гравець 1 пропонує поділ $x^1 = \left(x_1^1, ..., x_n^1\right)$, де $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 = 1$, $x_i^1 \ge 0$, $i \in N$. Гравці *2,…,n* можуть прийняти цей поділ або відхилити його. Якщо усі гравці погоджуються на $x^1$, то він приймається, інакше (хоча б один гравець *2,…,n* не погоджується) відбувається перехід на крок 2.

*Крок 2.* Гравець 1 переставляється у кінець черги, а свій поділ $x^2$ пропонує гравець 2. Якщо інші гравці (*3,…,n,1*) не приймають поділ $x^2$, то процедура повторюється (уже з гравцем 3).

Нехай долар обезцінюється за кожен крок переговорів з коефіцієнтом $\tau$, $0 < \tau < 1$. Так, у другому періоді ділиться вже $\delta = 1 - \tau$ (тобто, другий гравець пропонує свій поділ величини $\delta$, $0 < \delta < 1$), у третьому $\delta^2$ і т.д. Зрозуміло, що якщо процедура буде продовжуватись до нескінченності, то прийдеться ділити нуль. Отже, з одного боку, кожному гравцю вигідно поділити гроші як можна швидше (поки вони не обезцінились), з іншого – не можна погоджуватись на „несправедливий” поділ. Нехай такий „справедливий” поділ $x^*$ існує (його вигідно прийняти кожному гравцю). Приведемо міркування, що базується на стратегічних очікуваннях кожного гравця, аналогічних міркуваннях при знаходженні складної рівноваги у скінченому випадку.

Нехай на першому кроці гравець 1 пропонує $x^1 = \left(x_1^1, ..., x_n^1\right)$. Він знає, що гравець $i$ ($i \ne 1$), розраховує на наступному кроці (якщо він відбудеться) отримати поділ $x^\delta = \left(\delta x_1^*, \delta x_2^*, ..., \delta x_n^*\right)$ (другий гравець перемістився на перше місце, перший на останнє). Отже, для того, щоб поділ $x^1$ був прийнятий гравцями *2,…,n* необхідно, щоб

$$x_2^1 \ge \delta x_1^*,\ x_3^1 \ge \delta x_2^*, \ldots, x_n^* \ge \delta x_{n-1}^*.$$

Покладаючи, що пропозиція $x^*$ буде прийнятою ($x^1 = x^*$), маємо:

$$x_2^* \ge \delta x_1^*, x_3^* \ge \delta x_2^*, \ldots, x_n^1 \ge \delta x_{n-1}^*. \qquad (1)$$

Яка доля при цьому залишається першому гравцю? Очевидно,

$x_1^1 = 1 - \left(x_2^* + ... + x_n^*\right) \le 1 - \left(\delta x_1^* + ... + \delta x_{n-1}^*\right)$. Отже, він не запропонує поділ $x_1^1 < 1 - \left(\delta x_1^* + ... + \delta x_{n-1}^*\right)$. Тобто, $x_1^* \ge 1 - \left(\delta x_1^* + ... + \delta x_{n-1}^*\right) =$

$$= 1 - \left(\delta x_1^* + ... + \delta x_{n-1}^* + \delta x_n^* - \delta x_n^*\right) = 1 - \delta \sum_{i=1}^{n} x_1^* + \delta x_n^* = \left(1 - \delta\right) + \delta x_n^* \qquad (2)$$

З (1), (2) маємо $x_i^* \ge \delta^{i-1} x_1^* \ge \left(1-\delta\right)\delta^{i-1} + \delta^i x_n^* \ge \left(1-\delta\right)\delta^{i-1} + \delta^n x_n^*$,

Звідки:

$$x_i^* \ge \left(1-\delta\right)\delta^{i-1} \big/ (1-\delta^n) = \delta^{i-1} \big/ (1 + \delta + ... + \delta^{n-1}),\ i = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Оскільки величини у правій частині нерівностей у сумі дають 1, то усі нерівності (3) – є рівностями. Отже, компоненти складної рівноваги $x_i^* = \delta^{i-1} \big/ (1 + \delta + ... + \delta^{n-1})$, $i = \overline{1,n}$.

Відмітимо, що коли $\delta$ прямує до 1 ($\tau \to 0$, інфляція незначна), граничний поділ стає справедливим ($x_i^* = 1/n, i = \overline{1,n}$), хоча вже „стратегічна" аргументація при $\delta = 1$ стає некоректною. Якщо гравці рівноправні (початковий порядок на їх множині задається, наприклад, випадковим чином), то пропозиція поділу на $i$ - му кроці $i$ - м гравцем своєї долі $x_i^i > 1/n$ приведе або до „зациклення" або прийняття „несправедливого" поділу (краще мати щось у даний момент, ніж померти від голоду в очікуванні справедливості). Тому потрібні процедури, які „автоматично" забезпечують „справедливий" поділ. У цьому випадку задача зводиться вже не до розумного вибору стратегій, а до розумного вибору процедур розумного вибору стратегій.

Згадаймо, як відбуваються дипломатичні переговори. Основні зусилля тут зводяться до вибору процедури ведення переговорів, а вибір стратегій є другорядним і приймається сторонами автоматично (звичайно, сторони можуть не погодитись з результатом і все починається з початку. У цьому випадку передбачається наявність „апеляційного суду", „конституційного суду" тощо, рішення якого є остаточним).

**Приклад** (Діли–вибирай). Два гравці ділять одиницю нескінченно подільного продукту (золотий пісок, яблуко і т.п.). Гравці рівноправні, кожен претендує на $x_1 = x_2 = 0,5$.

Процедура поділу, у якій гравці по черзі пропонують свої варіанти, може продовжуватись до нескінченності. Але її можна закінчити за один крок, коли один ділить, другий вибирає (того хто ділить, можна визначити жеребом). Зрозуміло, що той, хто ділить, зацікавлений у тому, щоб одиницю поділити пополам як можна точніше (інакше партнер забере собі більшу частину!).

Узагальнення процедуру „Діли – вибирай" на випадок $n \ge 3$ здійснено відомим математиком Штейнгаузом. Якимось чином установлюється черга гравців і перший указує свою долю $x_1$, $0 \le x_1 \le 1$. Якщо другий гравець з нею не погоджується він повинен показати свою долю $x_2$, $0 \le x_2 < x_1$, третьому гравцю і т.д. Якщо другий гравець згоден з $x_1$, то її розглядає третій гравець і т.д. Оскільки, кожен з гравців буде пропускати долю інших не більшу за $1/n$ і затримувати більшу за $1/n$, то оптимальна поведінка кожного є відрізати собі рівно $1/n$.

**Приклад** (парадоксальний метод поділу). Приклад показує, що відносно демократична процедура, може привести до не дуже справедливого результату.

Нехай маємо 100 одиниць продукту (одна одиниця – уже неподільна). Гравці (пірати) вишикувані у чергу (капітан, помічник капітана, …, юнга) і послідовно пропонують свій варіант поділу. Якщо поділ підтримується не менш ніж половиною команди (включаючи того, хто пропонує), він приймається. Інакше (більшість – проти), того, хто пропонує, вилучають з поділу (викидають за борт) і наступний по старшинству пропонує свій варіант поділу. Приймемо досить реалістичне припущення, що кожен з піратів знає функції виграшу інших. А саме, кожен пірат з двох даних поділів вибирає той, у котрому його доля більша. Загальна недовіра, що, як відомо, царювала серед піратів, дозволяє стверджувати, що вони будуть діяти ізольовано (некооперативно).

А отже, задача зводиться до пошуку складної рівноваги. Коли $n=2$, то усі злитки забирає собі старший пірат (він становить половину команди).

При $n=3$ поділ (як не дивно!) такий: $100=99+0+1$ (старший отримує 99 одиниць, молодший – 1, середній – 0). Чому молодший пірат погодиться з 1 і підтримає тим самим старшого? Тому, що інакше (молодший не погоджується, старшого усувають, залишається два пірати й усі 100 одиниць забирає собі середній) він отримує 0. А одиниця краща за 0.

Далі для $n > 3$ маємо: $100 = 99+0+1+0$, $100 = 98+0+1+0+1$ і т.д. У загальному випадку, якщо $n = 2p+1$ або $n = 2p+2$, то у поділі доля капітана дорівнює ($100 - p$) злитків ($100 - p \geq 1$). По одному злитку отримають $p$ піратів, котрі мають номери тієї парності, що і капітан.

## Лекція 11. Рівновага за Нешем

Розглянемо випадок повної інформованості гравців, коли кожен з них знає функції виграшу – свою і суперників. Гра може повторюватись будь-яку кількість разів.

**Рівновага за Нешем.** Домінуюча стратегія, обережна й складна поведінка можуть бути визначеними гравцями незалежно один від одного. На противагу цьому рівновага за Нешем може бути обумовленою тільки динамічним сценарієм, у якому стратегічні рішення, що приймаються у даний момент, залежать від попередніх сценаріїв гри або хоча б від початкової позиції. Таким чином, спілкування гравців стає неминучим. Вони повинні хоча б сумісно спостерігати ситуації гри.

**Приклад** (особисті інтереси та суспільні потреби). Кожен з $n$ учасників може працювати на "суспільство" ($x_i = 0$) або на себе ($x_i = 1$). Розглядається задача:

$$\begin{cases} u_i\left(x\right) = \lambda x_i + \sum_{j=1}^{n}\left(1 - x_j\right) \to \max, \\ x_i \in X_i = \left\{0,1\right\},\ 1 < \lambda < n. \end{cases}$$

Параметр $\lambda$ можна розглядати як продуктивність праці (у грошових одиницях) при роботі на себе ($x^1 = \left(1,...,1\right)$, $u_i\left(x^1\right) = \lambda$), при роботі на суспільство продуктивність праці кожного одинична. Будемо вважати, що членів суспільства досить багато – з якою б продуктивністю $\lambda$ гравці не працювали їхня кількість $n > \lambda$ (на себе можна працювати і "за десятьох", але ж ). Якщо усі працюють на суспільство ($x_i^0 = 0$, $i = \overline{1,n}$), то виграш кожного $u_i\left(x^0\right) = n > \lambda$. Отже, коли усі працюють на суспільство, то це вигідно всім (і кожному). Але! Нехай на суспільство працюють всі, крім одного ($x_i = 0$, $x_k = 1$, $k \neq i \in N$). Маємо: $u_i = n - 1 < n$, $u_k = \lambda + n - 1 = n + \left(\lambda - 1\right) > n$.

Отже, ухилення одного від "суспільних" робіт вигідно йому (він має добавку $\Delta u_k = \lambda - 1$), останні ж від цього втрачають (кожен з них 1). Розглянемо протилежний випадок – усі крім одного працюють на себе ($x_i = 1$, $x_k = 0$, $k \neq i \in N$). Маємо: $u_i = \lambda + 1 > \lambda$, $u_k = 1 < \lambda$. Тобто, відхилення $k$ – го гравця ("альтруїста") від праці "на себе" на працю "на суспільство" виявилось невигідним йому (він утрачає $\Delta u_k = \lambda - 1 > 0$). Відмітимо, що поява альтруїста привела до збільшення прибутку "індивідуалістів" (на 1). Але ж кожен намагається максимізувати свою цільову функцію – отже, відхилення будь-якого гравця від ситуації $x^1$ йому невигідне.

Ідея стабільної угоди приводить до наступного означення.

**Означення.** Для гри $G$ в нормальній формі $\left(X_i, u_i; i \in N\right)$ ситуація $x^*$

називається рівновагою за Нешем, якщо

$$u_i(x^*) \ge u_i(x_i, x^*_{N\setminus i}) \quad \forall x_i \in X_i \ \ \forall i \in N . \qquad (1)$$

Іншими словами, в рівновазі за Нешем $x^*$ гравець $i \in N$ розглядає стратегії інших гравців $x^*_{N\setminus i}$ заданими і максимізує на множині своїх стратегій $x_i \in X_i$ власну функцію виграшу $u_i$.

Будемо позначати $NE(G)$ множину рівноваг за Нешем гри $G$.

Нерівності (1) іноді зручно записувати у вигляді системи взаємозв'язаних задач оптимізації:

$$u_i(\hat{x}) = \max_{x_i \in X_i} u(x_i, \hat{x}_{N\setminus i}),\ i \in N . \qquad (2)$$

| $X_2$ / $X_1$ | $\Pi_2$ | $K_2$ |
|---|---|---|
| $\Pi_1$ | 2,2 | 0,3 |
| $K_1$ | 3,0 | 1,1 |

**Приклад.** Нехай кожен з двох гравців має дві стратегії – підтримувати зміни в суспільстві ("перебудова" – П) або ні ("консерватизм"– К):

Лише від ситуації $(K_1, K_2)$ невигідно відхилятись будь-якому одному гравцю, хоча в ситуації $(\Pi_1, \Pi_2)$ їхні виграші більші. Цю модель можна назвати дилемою між стабільністю ("нічого не міняти") і ефективністю (ситуація $(\Pi_1, \Pi_2)$ є Паретівською або ефективною).

| $X_2$ / $X_1$ | $M_2$ | $A_2$ |
|---|---|---|
| $M_1$ | 2,2 | 0,3 |
| $A_1$ | 3,0 | 1,1 |

**Приклад** (Дилема в'язня) .Аналізуючи таблицю знаходимо дві нешівські точки $(b_1, b_2)$ і $(c_1, c_2)$. Звернемо увагу, що перша з них ефективна, друга – домінується першою. Отже, можливі різні ситуації – нешівські ситуації не є ефективними, деякі з них ефективні, деякі ні.

Концепція рівноваги за Нешем мотивується таким сценарієм гри: гравці разом обговорюють, яку ситуацію вибрати основою для необов'язкової угоди; потім гравці розходяться, обмін інформацією між ними припиняється і кожен приймає рішення самостійно (при цьому угоду можна порушити). Тоді і тільки тоді, коли обрана ситуація є рівновагою Неша, вона є стабільною угодою.

**Властивості *NE*–рівноваг.**

1. Індивідуальна раціональність.

**Означення.** Ситуація $x$ називається індивідуально-раціональною, якщо виграш кожного гравця у ній не менший за гарантований, тобто

$$u_i(x) \ge \max_{y_i \in X} \min_{y_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, y_{N\setminus i}) = \alpha_i$$

**Теорема**. Нешівські рівноваги індивідуально раціональні.

*Доведення.* Нехай $x^* \in NE$, тоді $u_i(x^*) \ge u_i(x_i, x^*_{N\setminus i})$, для $\forall$ $i \in N$, $\forall$ $x_i \in X_i$. Оскільки $x^*_{N\setminus i}$ – фіксоване, то $u_i(x_i, x^*_{N\setminus i}) \ge \min_{x_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i})$ для $\forall$ $x_i \in X_i$. Взявши максимум по $x_i$ в останній нерівності, отримаємо необхідне.

2. *NE*– ситуації можуть бути паретівськими. Співіснування декількох

різних паретівських ситуацій порушує боротьбу за лідерство, що "вбиває" будь-яку надію знайти "оптимальні" стратегії. Ця обставина ілюструється наступним прикладом.

| $X_2$ / $X_1$ | *З* | *Р* |
|---|---|---|
| *Р* | 1,1 | 1-$\varepsilon$,2 |
| *У* | 2,1-$\varepsilon$ | 0,0 |

**Приклад** (Два барани). Два барани рухаються по горній стежці і одночасно зустрічаються на вузькому місті. Кожен з них може або призупинитись (стратегія З) або продовжувати рухатись (Р).

Обидві *NE*–ситуації (З,Р) та (Р,З) є паретівськими, хоча вони і не взаємозамінні. Для кожного гравця оптимальною стратегією є зупинка, якщо інший вирішив пробігти вузьке місце, і навпаки. Отже, задача кожного полягає у виборі першим стратегії рухатись і отримати виграш у 2 одиниці – маємо боротьбу за лідерство. Кожному гравцю вигідно демонструвати, що він може переключитись із стратегії Р на стратегію З (наприклад, крикнути «пропусти»), і в той же час уважно спостерігати за супротивником, щоб вияснити, а може той і дійсно не може зупинитись. Дивно, що найбільш вигідним є нераціональна поведінка, яка в той же час виявляється цілком розумною.

3. Нешівська рівновага може не бути Паретівською.

| | З | НЗ |
|---|---|---|
| З | -7<br>-7 | 0<br>-10 |
| НЗ | -10<br>0 | -1<br>-1 |

**Приклад** (Дилема бандитів). Поліція підозрює двох злочинців у бандитизмі, але єдиний шлях доведення цього – це зізнання. Виграші злочинців наведені у таблиці.

4. Наступна Теорема порівнює *NE* – ситуації з складними рівновагами.

**Теорема.** Нехай у грі *G* множини стратегій $X_i$ скінченні, $i \in N$. Якщо гра *G* розв'язна за домінуванням, то будь-яка складна рівновага є рівновагою Неша.

Отже, для розв'язаних за домінуванням ігор складна поведінка завжди приводить до *NE* – ситуації. Цікаво відмітити, що протилежне твердження не вірне. *NE* – стратегія може бути домінованою, як видно з наступного приклада . Ситуація $(a_1, a_2)$ – єдина рівновага Неша. Однак $a_1$ домінується $c_1$, $a_2$ домінується $c_2$.

| $X_2$ / $X_1$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1,1 | 0,1 | 0,1 |
| $b_1$ | 0,0 | 1,0 | 0,1 |
| $c_1$ | 1,0 | 0,1 | 1,0 |

# Лекція 12. Теорема Неша

Розглянемо питання існування NE та їх пошуку.

**Теорема** (Неш [1951]). Нехай множини стратегій гравців $X_i$, $i \in N$, є опуклими та компактними підмножинами відповідних топологічних векторних просторів. Нехай для кожного гравця $i \in N$ його функція виграшу $u_i$ є неперервною на множині ситуацій $X$ і опуклою вгору за його стратегіями $x_i$ на $X_i$ для кожного набору стратегій всіх інших гравців $x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$. Тоді множина рівноваг за Нешем є непорожньою та компактною.

***Доведення***. Доведення спирається на теорему про нерухому точку та наступну лему.

**Лема** (Кнастера-Куратовського-Мазуркевича). Нехай $p$ – ціле число і $a_1,...,a_p$ – деякі точки топологічного векторного простору. Нехай також $A_1,...,A_p$ – деякі замкнуті підмножини множини $CO\left\{a_1,...,a_p\right\}$, котра є випуклою оболонкою множини $\left\{a_1,...,a_p\right\}$, причому для $\forall\ T \subseteq \left\{\overline{1,p}\right\}$, множина $\bigcup\limits_{k \in T} A_k$ містить $CO\left\{a_k \,\middle|\, k \in T\right\}$. Тоді перетин $\bigcap\limits_{k=\overline{1,p}} A_k \neq \varnothing$. Визначимо дійснозначну функцію $\phi$ на $X_N \times X_N$: $\phi(x,y) = \sum\limits_{i \in N}\left(u_i\left(x_i, y_{N \setminus i}\right) - u_i\left(y\right)\right)$, $x, y \in X_N$. Із неперервності $u_i$ та угнутості $u_i$ по $x_i$ випливає неперервність функції $\phi$ по $y$ та угнутість по $x$. Визначимо многозначне відображення $\Phi$ з $X_N$ у себе:

$$\Phi(x) = \left\{y \in X_N \,\middle|\, \phi(x,y) \leq 0\right\},\ \forall x \in X_N .$$

Оскільки $\phi$ неперервна по $y$, то $\Phi(x)$ – компакт для будь-якого $x$. Оскільки $x \in \Phi(x)$, то $\Phi(x) \neq \varnothing$. Фіксуємо ціле $p$ і $p$ елементів $x^1,...,x^p$ з $X_N$. Будь-яка опукла комбінація $x = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^k \in \bigcup\limits_{k=1}^{p} \Phi\left(x^k\right)$ (інакше мали б для будь-якого $k = \overline{1,p}$: $\Phi\left(x^k, x\right) > 0$; в силу угнутості $\Phi$ відносно першого аргументу отримуємо протиріччя: $0 < \phi\left(\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k x^k, x\right) = \phi(x,x) = 0$). Отже, $CO\left\{x_1,...,x_p\right\} \subseteq \bigcup\limits_{k=\overline{1,p}} \Phi\left(x^k\right)$.

Застосовуючи лему Кнастера-Куратовського-Мазуркевича маємо: $\bigcap\limits_{k=\overline{1,p}} \Phi\left(x^k\right) \neq \varnothing$. Оскільки не порожні компактні множини $\left(\Phi(x)\right)_{x \in X_N}$ такі, що будь-яке їх сімейство має не порожній перетин, то і перетин усіх множин $\bigcap\limits_{x \in X_N} \Phi(x) \neq \varnothing$. Для будь-якого $x^*$ із цього перетину маємо: $\phi\left(x, x^*\right) \leq 0$, $\forall$

$x \in X_N$, що може бути переписаним у вигляді $u_i\left(x_i, x^*_{N\setminus i}\right) - u_i\left(x^*\right) \le 0$, $\forall\ i \in N$, $\forall\ x_i \in X_i$. Отже, $\bigcap_{x \in X_N} \Phi\left(x\right) = NE$ і теорему доведено.

Відмітимо, що це доведення належить Ж. Хаддаду, воно набагато коротше за оригінальне доведення Неша.

**Знаходження рівноваг Неша.** Теорема Неша стверджує, що в умовах теореми множина *NE* не порожня. Для того щоб його обчислити, необхідно розв’язати систему рівнянь: $u_i\left(x^*\right) = \max_{x_i \in X_i} u_i\left(x_i, x^*_{N\setminus i}\right)$, $i \in N$.

Оскільки $u_i$ угнута по $x_i$, то наведена вище задача глобальної оптимізації можебути еквівалентна локальній задачі. Наприклад, якщо $x_i$ – внутрішня точка множини $X_i$ і функція $u_i$ диференційовна по $x_i$, то умовами рівноваги будуть $\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right|_{x^*} = 0$, $i \in N$.

**Приклад** (Олігополія з призначенням випуску). Мається *n* виробників з нульовими витратами деякого насиченого за споживанням товару. Виробники постачають товар на ринок в об'ємах $x_i$, $i \in N$, за ціною $p\left(x_1 + ... + x_n\right)$, де *p(t)* – спадаюча опукла вгору функція: $p\left(0\right) > 0$, $p'\left(t\right) < 0$, $p''\left(t\right) < 0$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \ge 0$. Маємо гру $\left\langle [0, +\infty),\ x_i p\left(\bar{x}\right);\ i = \overline{1,n} \right\rangle$.

Оскільки $X_i$ не є компактними множинами, покладемо $Y_i = [0, s]$, де *s* є пропозицією, що породжує нульову ціну: *p*(*s*)*=0.* Для "звуженої" таким чином гри $\tilde{G} = \left(Y_i, u_i, i \in N\right)$ можна застосувати теорему Неша, котра гарантує існування *NE*– ситуації. В силу опуклості вгору та диференційованості $u_i$ маємо систему: $x_i^* p'\left(\bar{x}^*\right) + p\left(\bar{x}^*\right) = 0$, $i \in N$. Звідси маємо: $x_i^* = -\frac{p\left(\bar{x}^*\right)}{p'\left(\bar{x}^*\right)}$, $i \in N$, тобто: $x_1^* = x_2^* = ... = x_n^* = \tilde{x}$, де $\tilde{x} = -p\left(n\tilde{x}\right) / p'\left(n\tilde{x}\right)$.

Нехай *n=2*, $p\left(x_1 + x_2\right) = \left(\frac{1}{x_1 + x_2} - 1\right)^{1/2}$, $X_i = \left[0, 1/2\right]$, *i=1,2*. Тоді $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 1/8$. Цікаво відмітити, що обом гравцям вигідно випускати 25% товару від їх потенційних можливостей.

**Приклад** (Дуополія Курно з призначенням випусків). Два гравця поставляють на ринок один і той же товар в кількості $x_i$, *i=1,2*, по ціні $p\left(x_1 + x_2\right) = 1 - \left(x_1 + x_2\right)$. Максимальні виробничі можливості кожного гравця дорівнюють $\frac{1}{2}$.

Розглядаються 2 варіанти відносно передумов про функцію витрат:

а) постійні витрати на випуск одиниці продукції при збільшенні масштабів виробництва (оцінюються величиною $\frac{1}{2}x$ на виробництво $x$ одиниць продукції);

б) спадаючі витрати (оцінюються величиною $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}x^2$).

Для випадку а) маємо гру:

$$\begin{cases} u_i\left(x_1,x_2\right)=x_i\left(1-x_1-x_2\right)-\frac{1}{2}x_i \to \max,\ i=1,2, \\ X_1=X_2=\left[0,\frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Оскільки множини стратегій компактні, функції виграшу диференційовні та угнуті отримуємо оптимальні відповіді $i$-го гравця на фіксовані $j$-го ($j\neq i$) з системи: $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0$, $i=1,2$. Маємо: $R_i=\left\{x_i=\alpha\left(x_j\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(x_1+x_2\right),\ 0\le x_j\le\frac{1}{2}\right\}$, $i=1,2$.

Єдина $NE$– ситуація знаходиться як перетин множини $R_i$ : $NE=R_1\cap R_2=\left\{\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)\right\}$.

Для випадку б) маємо задачу:

$$\begin{cases} u_i\left(x_1,x_2\right)=x_i\left(1-x_1-x_2\right)-\left(\frac{1}{2}x_i-\frac{3}{4}x_i^2\right)\to \max,\ i=1,2, \\ X_1=X_2=\left[0,\frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

При знаходженні оптимальних відповідей гравців на фіксовані стратегії супротивника, врахувавши крайові оптимуми, матимемо $R_i=\left\{x_i=\beta\left(x_j\right),\ 0\le x_j\le\frac{1}{2}\right\}$, де $\beta\left(x\right)=\begin{cases} 1/2,\ 0\le x\le\frac{1}{4} \\ 1-2x,\ \frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2} \end{cases}$

В результаті маємо три $NE$– ситуації: $NE=R_1\cap R_2=\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{2},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)\right\}$.

## Лекція 13. Поведінка гравців в умовах мінімальної інформованості

Гра відбувається в умовах *мінімальної інформованості*, якщо гравці знають лише свої функції виграшу, але на відміну від умов повної неінформованості гравців, гра може відбуватися необмежену кількість разів і гравці можуть разом спостерігати її наслідки.

Проаналізуємо мотивацію концепції рівноваги Неша з "філософської" точки зору. Можливі два „крайніх" сценарії.

1. З „нормативної" точки зору покладемо, що гравці спільно обговорюють вибір сценарію до тих пір, поки не домовляться до „необов'язкової" домовленості. Далі вони розходяться й обмін інформацією припиняється. Після цього кожен гравець таємно вибирає свою „справжню" стратегію, не знаючи дійсних стратегічних виборів останніх. Кожен гравець може бути вірним досягнутій домовленості, а може й відступити від неї. Тоді і лише тоді, коли узгоджена ситуація є рівновагою Неша, отримуємо стабільну домовленість.

2. З „описової" точки зору ми шукаємо „стійкі" ситуації „короткозорих" процедур „намацування", у яких кожен гравець притримується оптимальної стратегії при умові (котра постійно порушується), що останні не змінюють своїх стратегій. Коли ця „процедура намацування Курно" (див. нижче) збігається, отримуємо рівновагу Неша. .

Перший сценарій („стратегічний") передбачає повну інформованість гравців (кожен знає усі цільові функції) і актуальну можливість знаходження нешівських рівноваг; другий сценарій („тактичний") реалізується в умовах мінімальної інформованості гравців (кожен знає лише свою цільову функцію, контакти гравців зводяться до спільного спостереження стратегій) і, взагалі кажучи, не завжди приводить до нешівської рівноваги. Розглянемо другий сценарій більш детально.

**Процедура Курно.** Починається з довільної точки $\left(x_1^0, x_2^0\right)$, $0 \le x_i^0 \le 1/2$, далі кожен гравець послідовно використовує свою оптимальну відповідь на поточну стратегію партнера:

$$\left(x_1^0, x_2^0\right) \to \left(x_1^1, x_2^0\right) = \left(\alpha\left(x_2^0\right), x_2^0\right) \in R_1 \to \left(x_1^1, x_2^1\right) = \left(x_1^1, \alpha\left(x_1^1\right)\right) \in R_2 \to \ldots \to$$
$$\to \left(x_1^t, x_2^{t-1}\right) \in R_1 \to \left(x_1^t, x_2^1\right) \in R_2 .$$

Наприклад для дуаполії Курно. На рис. вказано дві такі послідовності. Легко переконатись, що для будь-якої початкової позиції $x^0$ з квадрата $[0,1/2]\times[0,1/2]$ процедура намацування Курно збігається (із швидкістю геометричної прогресії) до *NE*–ситуації $(1/6,\ 1/6)$. У цьому випадку *NE* – ситуація $(1/6,\ 1/6)$ є стійкою.

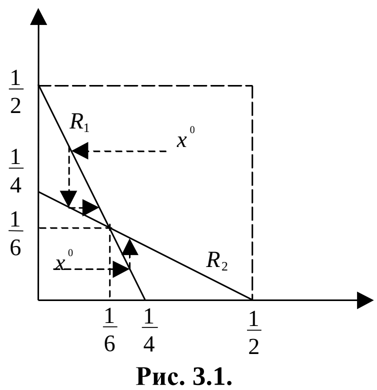


**Рис. 3.1.**

Для випадку б) маємо наступну гру у нормальній формі:

$\left\langle X_i = \left[0,\ {}^{1}\!/_{2}\right],\ u_i(x) = x_i(1 - x_1 - x_2) - ({}^{1}\!/_{2}x_i - {}^{3}\!/_{4}x_i^2)\right\rangle$. При знаходженні оптимальних відповідей гравців на фіксовані стратегії супротивника, врахувавши крайові оптимуми, маємо:

$$R_i = \left\{(x_i, x_j) \middle| x_i = \beta\left(x_j\right),\ 0 \le x_j \le 1/2\right\},\ \beta\left(x\right) = \begin{cases} {}^{1}\!/_{2},\ 0 \le x \le {}^{1}\!/_{4}, \\ 1 - 2x,\ {}^{1}\!/_{4} \le x \le {}^{1}\!/_{2}. \end{cases}$$

Одержимо три *NE* – ситуації: $NE = \left\{\ \left(1/3, 1/3\right), \left(0.5, 0\right), \left(0, 0.5\right)\ \right\}$.

Починаючи з будь-якої початкової позиції $x^0 \ne \left(1/3, 1/3\right)$, процедура намацування Курно за скінченну кількість кроків збігається до $\left(0.5, 0\right)$ або до $\left(0, 0.5\right)$. Це залишається справедливим, навіть, якщо точка $x^0$ знаходиться як завгодно близько до точки $\left(1/3, 1/3\right)$, але не співпадає з нею. Отже, *NE*–ситуацію $\left(1/3, 1/3\right)$ логічно назвати нестійкою, а $\left(0.5, 0\right)$, $\left(0, 0.5\right)$ – стійкими (локально).

Можна дати різні визначення процедури намацування Курно для ігор *n* осіб: гравці можуть змінювати свої стратегії одночасно або послідовно (порядок має значення). Відповідні поняття співпадають для *n=2* і не співпадають для $n \ge 3$.

Нехай кожен гравець має єдину стратегію оптимальної відповіді $r_i\left(x_{N\backslash i}\right) \in R_i$ на стратегії інших гравців $x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$. З будь-якою ситуацією $x^0 \in X_N$ зв’язана *процедура одночасного намацування Курно,* що будує послідовність $x^0, x^1, ..., x^t, ...$ з $X_N$ таку, що $x_i^t = r_i\left(x_{N\backslash i}^{t-1}\right)$, $i \in N$, $t$=1,2,….

**Стійкі, локально стійкі та нестійкі рівноваги Неша.**

**Означення**. Рівновага Неша $x^*$ *стійка*, якщо для $\forall\ x^0 \in X_N$, процедура намацування Курно, що починається з $x^0$, збігається до $x^*$.

Відмітимо, що стійка *NE*– ситуація обов’язково є єдиною рівновагою Неша у грі, оскільки, якщо $x^0$ є рівновагою Неша (у визначенні $x^0$ може будь-якою, зокрема, *NE*– ситуацією), то процедура намацування Курно приводить до стаціонарної послідовності.

Для заданого порядку гравців $N = \{1, 2, ..., n\}$ процедурою $\{1, 2, ..., n\}$ – *послідовного намацування Курно*, що починається з $x^0$, називається послідовність $\left\{x^t\right\}$, де $x_i^t = r_i\left(x_1^t, ..., x_{i-1}^t, x_{i+1}^{t-1}, ..., x_n^{t-1}\right)$, $i \in N$, $t$=1,2,….

**Означення.** *NE* – ситуація $x^* є \{1, 2, ..., n\}$ – стійкою, якщо для $\forall\ x^0$ процедура $\{1, 2, ..., n\}$ – послідовного намацування Курно, що починається у $x^0$, збігається до $x^*$.

**Приклад**. Почнемо з ситуації $x^0 = \left(a_1, a_2\right)$. Перший гравець оптимізує свій виграш при фіксованій стратегії другого гравця, для чого з $a_1$

| $X_1 \backslash X_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 3,3 | 2,4 | 3,3 |
| $b_1$ | 4,2 | 3,3 | 2,3 |
| $c_1$ | 3,4 | 2,2 | 4,3 |

переходить на $b_1$. Далі другий гравець оптимізує свій виграш, переходячи на $b_2$ або $c_2$ (у даній грі не гарантується єдиність оптимізуючої стратегії). Якщо буде вибрана стратегія $b_2$, то процедура зупиниться, оскільки з ситуації $(b_1, b_2)$ перший гравець свій виграш покращити вже не може. Якщо ж буде вибрана стратегія $c_2$, то матимемо:

$$(b_1, c_2) \to (c_1, c_2) \to (c_1, a_2) \to (b_1, a_2) \to (b_1, b_2) \text{ або } (b_1, c_2).$$

Отже, у випадку неоднозначності вибору оптимізуючих стратегій хоча б одним гравцем процедура може зупинитись навіть при єдиній *NE*– ситуації (як у даному прикладі: $(b_1, b_2)$ є єдиною нешівською рівновагою). В умовах визначень 3.1, 3.2 подібного зациклення бути не може (вибір оптимізуючих стратегій однозначний).

| $X_1 \backslash X_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 2,2 | 3,1 | 0,0 |
| $b_1$ | 1,3 | 2,2 | 1,1 |
| $c_1$ | 0,0 | 4,1 | 2,2 |

**Приклад.** Почнемо з $x^0 = (b_1, b_2)$. Процедура (*1,2*) – генерує: $(b_1, b_2) \to (c_1, b_2) \to (c_1, c_2) \in NE$. Процедура (*2,1*)– дає послідовність ситуацій: $(b_1, b_2) \to (b_1, a_2) \to (a_1, a_2) \in NE$. Як бачимо від порядку фіксації стратегій залежить побудова тієї чи іншої *NE*– ситуації.

| $X_1 \backslash X_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 2,2 | 2,3 | 1,2 |
| $b_1$ | 1,3 | 3,1 | 2,2 |
| $c_1$ | 1,1 | 2,1 | 5,5 |

**Приклад.** У прикладі нешівською рівновагою є єдина ситуація $(c_1, c_2)$. Якщо $x^0$ належить декартовому квадрату множин стратегій $\{a_1, b_1\} \times \{a_2, b_2\}$, то процедура намацування Курно зациклюється незалежно від порядку фіксації стратегій. До $(c_1, c_2)$ може привести лише (2,1) – послідовне намацування Курно з точок $(c_1, a_2)$ та $(c_1, b_2)$.

*Резюме.* Навіть у скінченній грі в умовах мінімальної інформованості раціональна поведінка гравців (вибір оптимальної стратегії на оптимальну стратегію супротивника) може не привести до розв'язання конфліктної ситуації. Тепер стає зрозумілою природа „зациклення" у багатьох життєвих ситуаціях (політичних, соціальних, економічних, сімейних і т.д. і т.п.) – адже у більшості випадків ми застосовуємо саме процедуру Курно в умовах мінімальної інформації! В умовах незнання (або небажання знати!) цілі партнерів. І що залишається у цих умовах? На слово – слово, на дію – дію. Одним словом, „око – за око", „зуб – за зуб"! І у результаті в ситуацію $(c_1, c_2)$ з виграшами (5,5) (чи (500,500) – не має значення) узагалі можна ніколи не потрапити.

**Умови стійкості.** Достатні умови стійкості *NE*– ситуацій складно отримати і вони виявляються вельми обмежувальними. Тим не менш, якщо послабити поняття стійкості з „глобальної” на „локальну”, то з’являється можливість (для $n$ = 2) майже повністю описати локально стійкі *NE*– ситуації.

**Теорема.** Нехай множини $X_1$, $X_2$ одновимірні, $x^*$ – рівновага Неша у грі $G=\left(X_1,X_2,u_1,u_2\right)$, причому виконуються умови: $x_i^*$ – внутрішня точка $X_i$, *i=1,2*; функції $u_i$ двічі неперервно-диференційовані в околі $x^*$; частинні похідні $\partial^2 u_i(x^*)\big/\partial x_i^2 < 0$. Тоді, якщо

$$\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right| < \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right|, \qquad (1)$$

то $x^*$ – локально стійка,

$$\left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right| > \left|\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}\right|, \qquad (2)$$

то $x^*$ – не є локально стійкою (усі похідні взято у точці $x^*$).

З умов теореми випливає, що множини оптимальних відповідей гравців $R_i$ є двома неперервно-диференційованими кривими, що перетинаються у точці $x^*$. У нерівностях (1), (2) відбувається порівняння модулів нахилу дотичних до кривих $R_1$ і $R_2$ у точці $x^*$. Покладемо $\alpha_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_1}\bigg/\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_2}$. Тоді умови (1), (2) можна переписати у вигляді:

$\left|\alpha_1\right| > \left|\alpha_2\right| \Rightarrow x^*$ – локально стійка,

$\left|\alpha_1\right| < \left|\alpha_2\right| \Rightarrow x^*$ – не є локально стійкою.

## Лекція 14. Рівновага за Нешем в змішаних стратегіях

**Означення.** Гра $G$ у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ називається скінченною, якщо множини стратегій гравців $X_i$, $i \in N$, є скінченними.

**Означення.** Змішаною стратегією гравця $i \in N$ в скінченній грі $G$ у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ називається розподіл ймовірностей $\mu_i = (\mu_i(x_i))_{x_i \in X_i}$ на множині його стратегій $X_i$, де $\mu_i(x_i)$ – ймовірність вибору $i$-м гравцем його «чистої» стратегії $x_i \in X_i$.

Множиною змішаних стратегій гравця $i \in N$ є одиничний симплекс

$$M_i = \{\mu_i = (\mu_i(x_i))_{x_i \in X_i} \mid \mu_i(x_i) \in [0,1],\ x_i \in X_i;\ \sum_{x_i \in X_i} \mu_i(x_i) = 1\}$$

у просторі $R^{|X_i|}$ його стратегій.

**Означення.** Змішаним розширенням скінченної гри $G$ у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ називається гра $GM$ у нормальній формі $(M_i, \bar{u}_i, i \in N)$, де $\bar{u}_i(\mu) = \sum_{x \in X} u_i(x) \prod_{j \in N} \mu_j(x_j)$, $\mu \in M$, – математичне сподівання виграшу гравця $i \in N$; $\mu = (\mu_i)_{i \in N}$ – ситуація гри у змішаних стратегіях; $M = \prod_{j \in N} M_j$ – множина змішаних ситуацій гри.

**Означення.** Чиста стратегія $x_i \in X_i$ гравця $i \in N$ у скінченній грі $G$ ототожнюється зі змішаною стратегією $\delta_{x_i} \in M_i$, у якій $x_i$ вибирається з ймовірністю одиниця: $\delta_{x_i}(x_i) = 1$; а всі інші стратегії – з ймовірністю нуль: $\delta_{x_i}(y_i) = 0,\ \forall y_i \neq x_i$. У цьому випадку $\bar{u}_i(\delta_x) = u_i(x)\ \ \forall x \in X$, де $\delta_x = (\delta_{x_i})_{i \in N}$. Тому будемо розглядати $X_i$ як підмножину $M_i$, а $\bar{u}_i$ – як розширення функції $u_i$ з області визначення $X$ на $M$.

**Теорема.** Множина рівноваг за Нешем гри $GM$ є непорожнім компактом в $M$ і містить множину рівноваг за Нешем гри $G$, тобто $NE(G) \subseteq NE(GM) \neq \varnothing$.

**Приклад.** Знайти за означенням рівноваги за Нешем у змішаних стратегіях в біматричній грі з такими матрицями виграшу гравців:

$$U^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ U^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Оскільки гра є біматричною, то кількість гравців $n = 2$, множина гравців $N = \{1,2\}$. В силу того, що матриці виграшу гравців розмірності $2 \times 2$, то за їхні множини стратегій можна прийняти $X_1 = X_2 = \{1,2\}$.

Для знаходження рівноваг за Нешем у змішаних стратегіях побудуємо змішане розширення гри. Змішаною стратегією першого гравця буде розподіл ймовірностей $\mu_1 = (\mu_1(1), \mu_1(2))$, де $0 \le \mu_1(1);\ \mu_1(2) \le 1$, $\mu_1(1) + \mu_1(2) = 1$, на множині його стратегій $X_1 = \{1,2\}$. Аналогічно змішаною стратегією другого гравця буде розподіл ймовірностей $\mu_2 = (\mu_2(1), \mu_2(2))$, де

$0 \le \mu_2(1);\ \mu_2(2) \le 1,\quad \mu_2(1)+\mu_2(2)=1,$ на множині його чистих стратегій $X_1 = \{1,2\}$. Множинами змішаних стратегій гравців є одиничні симплекси:

$$M_i = \{\mu_i = (\mu_i(1), \mu_i(2)) \mid \mu_i(1), \mu_i(2) \in [0,1];\ \ \mu_i(1)+\mu_i(2)=1\},\ i=1,2.$$

Математичні сподівання виграшів гравців:

$$\bar u_1(\mu_1,\mu_2) = u_{11}^1\mu_1(1)\mu_2(1) + u_{12}^1\mu_1(1)\mu_2(2) + u_{21}^1\mu_1(2)\mu_2(1) + u_{22}^1\mu_1(2)\mu_2(2) =$$
$$= 2\mu_1(1)\mu_2(1) + \mu_1(1)\mu_2(2) + 3\mu_1(2)\mu_2(1),$$
$$\bar u_2(\mu_1,\mu_2) = u_{11}^2\mu_1(1)\mu_2(1) + u_{12}^2\mu_1(1)\mu_2(2) + u_{21}^2\mu_1(2)\mu_2(1) + u_{22}^2\mu_1(2)\mu_2(2) =$$
$$= 2\mu_1(1)\mu_2(1) + 3\mu_1(1)\mu_2(2) + \mu_1(2)\mu_2(1).$$

Для спрощення розрахунків позначимо $p = \mu_1(1)$, $q = \mu_2(1)$. Тоді $\mu_1(2) = 1-p$, $\mu_2(1) = 1-q$. Таким чином, отримаємо гру (позначимо її $\bar G$) зі стратегіями гравців відповідно $p \in [0,1]$, $q \in [0,1]$ та математичними сподівання виграшів гравців:

$$\bar u_1(p,q) = 2pq + p(1-q) + 3(1-p)q,$$
$$\bar u_1(p,q) = 2pq + 3p(1-q) + (1-p)q.$$

Знайдемо рівновагу за Нешем. За означенням 3.20 розв'яжемо наступну систему оптимізаційних задач:

$$\bar u_1(\hat p,\hat q) = \max_{p\in[0,1]} \bar u_1(p,\hat q) = \max_{p\in[0,1]} (2p\hat q + p(1-\hat q) + 3(1-p)\hat q,$$
$$\bar u_2(\hat p,\hat q) = \max_{q\in[0,1]} \bar u_2(\hat p,q) = \max_{q\in[0,1]} (2\hat p q + 3\hat p(1-q) + (1-\hat p)q.$$

Нехай $BR_1$ – множина розв'язків першої задачі, вважаючи $\hat q$ параметром; $BR_2$ – множина розв'язків другої задачі, вважаючи $\hat p$ параметром. Тоді $NE = BR_1 \bigcap BR_2$.

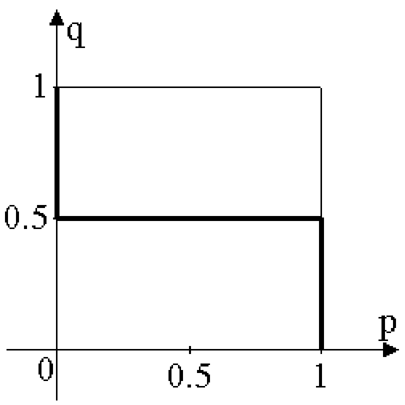



Рис. 7.4.

Побудуємо $BR_1$. Оскільки функція $\bar u_1(p,q)$ є лінійною за $p$ при фіксованому $\hat q$, то максимум буде досягатися або в 0, або в 1, залежно від коефіцієнта при $p$. Оскільки $\bar u_1(p,q) = p(2q+1-q-3q)+3q = p(1-2q)+3q$, то

$$\hat p = \begin{cases} 1, & q \in [0,1/2], \\ 0, & q \in [1/2,1], \\ [0,1], & q = 1/2. \end{cases}$$

Таким чином, множина $BR_1$ точок максимуму $\bar u_1(p,q)$ за $p$ при усіх значеннях $q \in [0,1]$ позначена на рис. 3.20 жирною лінією.

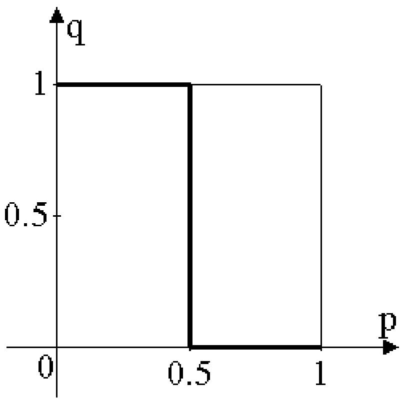



Рис. 7.5.

Побудуємо $BR_2$. Оскільки функція $\bar u_2(p,q)$ є лінійною за $q$ при фіксованому $\hat p$, то максимум буде досягатися або в 0, або в 1, залежно від коефіцієнта при $q$. Оскільки

$\bar{u}_2(p,q) = q(2p+1-p-3p)+3q = q(1-2p)+3p$, то

$$\hat{q} = \begin{cases} 1, & p \in [0,1/2], \\ 0, & p \in [1/2,1], \\ [0,1], & p = 1/2. \end{cases}$$

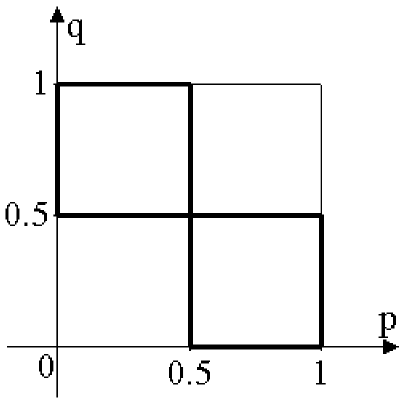



Рис. 7.6.

Таким чином, множина $BR_2$ точок максимуму $\bar{u}_2(p,q)$ за $q$ при усіх значеннях $p \in [0,1]$ позначена на рис. 3.21 жирною лінією.

З рис 3.22 видно, що множини $BR_1$ та $BR_2$ перетинаються у трьох точках: $(0,1)$, $(1/2,1/2)$, $(1,0)$, які є рівновагами за Нешем гри $\bar{G}$. Оскільки змішані стратегії вихідної гри: $\mu_1(1) = p$, $\mu_2(1) = q$, $\mu_1(2) = 1-p$, $\mu_2(1) = 1-q$, то рівноваги за Нешем у змішаних стратегіях будуть мати вигляд $((p,1-p);\ (q,1-q)$. Таким чином, одержимо

$$NE = \{((0,1);(1,0));\ ((1/2,1/2);(1/2,1/2));\ ((1,0);(0,1))\}.$$

Зазначимо, що дві з них: $((0,1);(1,0))$ та $((1,0);(0,1))$, є рівновагами у чистих стратегіях, які відповідають ситуаціям $(2,1)$ та $(1,2)$.

## Лекція 15. Знаходження рівноваг за Нешем в біматричних іграх

Розглянемо біматричну гру $G$ з множинами чистих стратегій гравців $i=1,2$ відповідно $X_1=\{1,...,m_1\}$ та $X_2=\{1,...,m_2\}$. Для кожної ситуації гри $(j,k)\in X_1\times X_2$ визначені: $u_{jk}^1$ – виграш першого гравця та $u_{jk}^2$ – виграш другого гравця. Позначимо $U^1=\{u_{jk}^1\}_{j\in X_1,k\in X_2}$ та $U^2=\{u_{jk}^2\}_{j\in X_1,k\in X_2}$ матриці виграшів відповідно першого та другого гравця.

**Означення.** Ситуація $(\hat{j},\hat{k})\in X_1\times X_2$ називається рівновагою за Нешем біматричної гри $G$ (в чистих стратегіях), якщо

$$u_{\hat{j}\hat{k}}^1\ge u_{j\hat{k}}^1\quad \forall j\in X_1,\;\; u_{\hat{j}\hat{k}}^2\ge u_{\hat{j}k}^2\quad \forall k\in X_2.$$

Позначимо $NE(G)$ множину рівноваг за Нешем біматричної гри $G$.

**Означення.** Змішаною стратегією гравця $i=1,2$ в біматричній грі називається розподіл ймовірностей на множині його чистих стратегій. Їх можна записати у вигляді векторів відповідно $p=(p_1,...,p_{m_1})$ та $q=(q_1,...,q_{m_2})$, де $p_j$ – ймовірність вибору першим гравцем його чистої стратегії $j\in X_1=\{1,...,m_1\}$, $q_k$ – ймовірність вибору другим гравцем його чистої стратегії $k\in X_2=\{1,...,m_2\}$. Очевидно, що $p_j\in[0,1]$ $\forall j\in X_1=\{1,...,m_1\}$, $\sum_{j\in X_1}p_j=1$ та $q_k\in[0,1]$ $\forall k\in X_2=\{1,...,m_2\}$, $\sum_{k\in X_2}q_k=1$.

Множину всіх змішаних стратегій гравця $i=1,2$ позначимо відповідно

$$P=\{p=(p_1,...,p_{m_1})\,|\;p_j\in[0,1]\;\;\forall j\in X_1=\{1,...,m_1\},\;\sum_{j\in X_1}p_j=1\},$$

$$Q=\{q=(q_1,...,q_{m_2})\,|\;q_k\in[0,1]\;\;\forall k\in X_2=\{1,...,m_2\},\;\sum_{k\in X_2}q_k=1\}.$$

Виграші першого та другого гравців визначаються як математичні сподівання відповідно таким чином:

$$\bar{u}^1(p,q)=pU^1q^T=\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m_2}p_ju_{jk}^1q_k,\;\bar{u}^2(p,q)=pU^2q^T=\sum_{j=1}^{m_1}\sum_{k=1}^{m_2}p_ju_{jk}^2q_k.$$

**Означення.** Змішаним розширенням біматричної гри $G$ називається гра $GM$ в нормальній формі $(P,Q,\bar{u}^1,\bar{u}^2)$.

**Означення.** Ситуація $(\hat{p},\hat{q})$ називається рівновагою за Нешем в змішаних стратегіях біматричної гри $G$, якщо виконуються нерівності:

$$\hat{p}U^1\hat{q}^T\ge pU^1\hat{q}^T\quad \forall p\in P,\;\;\hat{p}U^2\hat{q}^T\ge \hat{p}U^2q^T\quad \forall q\in Q.$$

Це означення інколи зручно записувати у вигляді:

$$\hat{p}U^1\hat{q}^T=\max_{p\in P}pU^1\hat{q}^T,\;\;\hat{p}U^2\hat{q}^T=\max_{q\in Q}\hat{p}U^2q^T.$$

Очевидно $(\hat{p},\hat{q})$ є рівновагою за Нешем змішанного розширення $GM$ біматричної гри $G$.

**Теорема**. Будь-яка біматрична гра має рівноваги за Нешем в змішаних стратегіях.

**Теорема.** Для того щоб ситуація $(\hat{p},\hat{q})$ була рівновагою за Нешем біматричної гри $G$ в змішаних стратегіях, необхідно й достатньо, щоб виконувалися нерівності

$$\hat{p}U^1\hat{q}^T \geq U^1_{j\bullet} \cdot \hat{q}^T \quad \forall j \in X_1 = \{1,...,m_1\},$$

$$\hat{p}U^2\hat{q}^T \geq \hat{p} \cdot U^2_{\bullet k} \quad \forall k \in X_2 = \{1,...,m_2\},$$

де $U^1_{j\bullet} - j$ -й рядок матриці $U^1$, а $U^2_{\bullet k} - k$ -й стовпчик матриці $U^2$.

**Теорема** (властивості доповнючої нежорсткості). Нехай ситуація $(\hat{p},\hat{q})$ є рівновагою за Нешем в змішаних стратегіях біматричної гри $G$. Тоді для $\forall j \in X_1 = \{1,...,m_1\}$, при якому $\hat{p}U^1\hat{q}^T > U^1_{j\bullet} \cdot \hat{q}^T$, має місце рівність $\hat{p}_j = 0$ та аналогічно для $\forall k \in X_2 = \{1,...,m_2\}$, що $\hat{p}U^2\hat{q}^T > \hat{p} \cdot U^2_{\bullet k}$, має місце рівність $\hat{q}_k = 0$.

**Теорема.** Для того щоб ситуація $(\hat{p},\hat{q})$ була рівновагою за Нешем біматричної гри $G$ в змішаних стратегіях, необхідно й достатньо, щоб знайшлися множини $\hat{X}_1 \subset X_1$, $\hat{X}_2 \subset X_2$ та числа $\alpha_1,\ \alpha_2$ і виконувались умови:

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in X_2} u^1_{jk}\hat{q}_k = \alpha_1 \quad \forall j \in \hat{X}_1, \\ &\sum_{k\in X_2} u^1_{jk}\hat{q}_k \leq \alpha_1 \quad \forall j \in X_1 \setminus \hat{X}_1, \\ &\sum_{k\in X_2} \hat{q}_k = 1,\ \hat{q}_k \geq 0\ \forall k \in X_2. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j\in X_1} u^2_{jk}\hat{p}_j = \alpha_2 \quad \forall k \in \hat{X}_2, \\ &\sum_{j\in X_1} u^2_{jk}\hat{p}_j \leq \alpha_2 \quad \forall k \in \hat{X}_2 \setminus \hat{X}_2, \\ &\sum_{j\in X_1} \hat{p}_j = 1,\ \hat{p}_j \geq 0\ \forall j \in X_1. \end{aligned} \tag{2}$$

**Теорема.** У будь-якій біматричній грі для деякої ситуації $(\hat{p},\hat{q})$ рівноваги за Нешем у змішаних стратегіях знайдуться такі множини $\hat{X}_1 \subset X_1$, $\hat{X}_2 \subset X_2$ та числа $\alpha_1,\ \alpha_2$, для яких виконуються умови (1), (2) та $|\hat{X}_1| = |\hat{X}_2|$.

**Означення.** Стратегія $\hat{p}$ першого ($\hat{q}$ другого) гравця називається цілком змішаною, якщо $\hat{p}_j > 0$ для $\forall j \in X_1 = \{1,...,m_1\}$ ($\hat{q}_k > 0$ для $\forall k \in X_2 = \{1,...,m_2\}$).

**Означення.** Рівновага за Нешем біматричної гри називається цілком змішаною, якщо стратегії гравців, які її утворюють, є цілком змішаними.

**Теорема.** Нехай матриці виграшів гравців $U^1$ та $U^2$ розмірності $m$ і є квадратними та невиродженими. Тоді якщо гра має цілком змішану рівновагу за Нешем $(\hat{p},\hat{q})$, то вона є єдиною і задається так:

$$\hat{p} = \alpha_2 e[U^2]^{-1};\ \ \hat{q} = \alpha_1[U^1]^{-1}e^T;\ \alpha_i = 1/(e[U^i]^{-1}e^T),\ i = 1,2. \tag{3}$$

де $e = (1,...,1)$ – вектор-рядок розмірності $m$, який складається з одиниць.

Навпаки, якщо вектори $\hat{p},\ \hat{q}$ задовольняють формулам (3) та їхні компоненти невід’ємні, то пара $(\hat{p},\hat{q})$ є рівновагою за Нешем в змішаних стратегіях гри $G$.

**Теорема.** Якщо $j$-й рядок матриці $U^1$ слабко домінується деякою опуклою комбінацією інших рядків, то цей рядок входить з нульовою ймовірністю в деяку рівновагу за Нешем у змішаних стратегіях першого гравця. Якщо вказане домінування є строгим, то цей рядок входить з нульовою ймовірністю в будь-яку рівновагу за Нешем у змішаних стратегіях першого гравця. Доміновані рядки можна викреслювати з матриць виграшів обох гравців.

Якщо $k$-й стовпчик матриці $U^2$ слабко домінується деякою опуклою комбінацією інших стовпчиків, то цей стовпчик входить з нульовою ймовірністю в деяку рівновагу за Нешем у змішаних стратегіях другого гравця. Якщо вказане домінування є строгим, то цей стовпчик входить з нульовою ймовірністю в будь-яку рівновагу за Нешем у змішаних стратегіях другого гравця. Доміновані стовпчики можна викреслювати з матриць виграшів обох гравців.

**Графічний метод розв’язання матричних ігор $2\times m$.** Застосовується до біматричних ігор з матрицями:

$$U^1=\begin{pmatrix} u_{11}^1 & u_{12}^1 & \dots & u_{1m}^1 \\ u_{21}^1 & u_{22}^1 & \dots & u_{2m}^1 \end{pmatrix},\ U^2=\begin{pmatrix} u_{11}^2 & u_{12}^2 & \dots & u_{1m}^2 \\ u_{21}^2 & u_{22}^2 & \dots & u_{2m}^2 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до теореми 3.23 гра має рівновагу за Нешем у змішаних стратегіях $p=(p_1,p_2)$, $q=(q_1,\dots,q_m)$, де ймовірності застосування чистих стратегій задовольняють умовам: $p_1+p_2=1$, $q_1+\dots+q_m=1$. Тому для застосування теореми треба перебирати підматриці розмірності $2\times 2$. Кожна з них задається номерами двох стовпчиків: $k_1,\ k_2$. Система (2) приймає вигляд:

$$u_{1k_1}^2 p_1+u_{2k_1}^2(1-p_1)=\alpha_2,\ u_{1k_2}^2 p_1+u_{2k_2}^2(1-p_1)=\alpha_2,$$
$$u_{1k}^2 p_1+u_{2k}^2(1-p_1)\le\alpha_2 \quad \forall k\ne k_1,k_2,\ p_1\in[0,1].$$

Якщо ця система не є сумісною, то перейдемо до іншої пари $k_1,\ k_2$. У випадку існування розв’язку $\hat{p}_1,\ \hat{\alpha}_2$ (2) розглянемо систему (1):

$$u_{1k_1}^1 q+u_{1k_2}^1(1-q)=\alpha_1,\ u_{2k_1}^2 q+u_{2k_2}^2(1-q)=\alpha_1,\ q\in[0,1]. \quad (4)$$

Нехай існує розв’язок $q^*,\ \hat{\alpha}_1$. Тоді змішана стратегія першого гравця $\hat{p}=(\hat{p}_1,1-\hat{p}_1)$, а змішана стратегія $\hat{q}=(\hat{q}_1,\dots,\hat{q}_m)$ другого гравця має компоненти:

$$\hat{q}_k=\begin{cases} q^*, & k=k_1, \\ 1-q^*, & k=k_2, \\ 0, & k\ne k_1,k_2. \end{cases}$$

Таким чином, ситуація $(\hat{p},\hat{q})$ буде рівновагою за Нешем у змішаних стратегіях.

Для знаходження пар $k_1, k_2$, для яких апріорі існує розв'язок (2), можна використати геометричну інтерпретацію. На відрізку [0,1] будуємо графіки сімейства лінійних функцій $l_k(p_1) = u_{1k}^2 p_1 + u_{2k}^2 (1-p_1)$, $k \in \{1,...,m\}$. Точки злому верхньої огинаючої сімейства прямих $l_k(p_1)$ відповідають парам $k_1, k_2$, для яких існує розв'язок $\hat{p}_1, \hat{\alpha}_2$ системи (2). Тому послідовно перебираємо точки злому верхньої огинаючої і розв'язуємо (4), перевіряючи умову $q^* \in [0,1]$.

**Приклад.** Знайти цілком змішану рівновагу за Нешем у біматричній грі з матрицями виграшу гравців

$$U^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Розв'язання.* Оскільки матриці виграшу гравців є квадратними та не виродженими, то скористаємося теоремою 3.28 і формулами (3.13). Спочатку знайдемо обернені матриці:

$$[U^1]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; [U^2]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Після цього знайдемо виграші гравців:

$$\alpha_1 = 1/(e[U^1]^{-1}e^T) = 1 \Bigg/ \left[ \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 1/4,$$

$$\alpha_2 = 1/(e[U^2]^{-1}e^T) = 1 \Bigg/ \left[ \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 2/3.$$

Тепер одержимо

$$\hat{p} = \alpha_2 e[U^2]^{-1} = (2/3)\begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = (1/3, 1/3, 1/3),$$

$$\hat{q} = \alpha_1 [U^1]^{-1} e^T = (1/4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, цілком змішана рівновага за Нешем має вигляд $(\hat{p}, \hat{q}) = ((1/3, 1/3, 1/3), (1/4, 1/4, 1/2))$.

### Лекція 16. Проблема вибору єдиної рівноваги. Рівновага за Штакельбергом.

У загальному випадку гра може мати декілька ситуацій рівноваги за Нешем, при цьому, в різних ситуаціях гравці можуть отримувати різні виграші. Тобто одні ситуації вигідні одним гравцям, інші – іншим. Після введення Нешем поняття рівноваги, численні спеціалісти намагались сформулювати додаткові умови вибору єдиної рівноваги. Одна з таких концепцій запропонована лауреатами Нобелевської премії з економіки за 1994 рік Дж. Харшаньї та Р. Зельтеном.

| $X_1 \backslash X_2$ | $a_2$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | 9,9 | 1,8 |
| $b_1$ | 8,1 | 7,7 |

**Приклад** (Р. Ауман) У цій грі маємо дві ситуації рівноваги: $(a_1,a_2)$ та $(b_1,b_2)$. Яку з них виберуть гравці? Ситуація $(a_1,a_2)$ начебто краща для обох гравців ($(a_1,a_2)$ строго домінує $(b_1,b_2)$), але вибір $(a_1,a_2)$ зовсім не очевидний. Отже, якщо перший гравець відхилиться від стратегії $a_1$(при умові, що другий буде дотримуватися $a_2$), то він утратить лише одну одиницю виграшу (≈10%), зате інший витратить 8 одиниць (≈90%). Водночас, першому гравцю абсолютно не вигідно відхилятися від ситуації $(b_1,b_2)$, оскільки він втрачає 6 одиниць (≈85%), а другий отримує навіть більше. Оскільки гра симетрична, то для другого гравця висновки аналогічні. Отже, ризик відхилення кожного гравця від ситуації рівноваги $(a_1,a_2)$ великий, від $(b_1,b_2)$ - малий.Розглянемо спрощений варіант концепції Харшаньї – Зельтена.

**Домінування за виграшем.**

**Означення.** Нехай $r$ та $s$ шукані рівноваги в грі $G$. Ситуація $r$ *домінує за виграшем* $s$, якщо$u_i(r) \geq u_i(r),\ i \in N;\ u_i(r) \neq u_i(r)$.

**Означення.** Ситуація рівноваги $r$ називається *ефективною за виграшем* у грі $G$, якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за виграшем $r$.

Отже, ситуація рівноваги $(a_1,a_2)$ у наведеному вище прикладі є ефективною за виграшем. Оцінка ризику для першого гравця визначається : $u_2(a_1,b_2)/u_2(a_1,a_2) = 8/9 > u_2(b_1,a_2)/u_2(b_1,b_2) = 1/7$ (аналогічно для другого гравця). Отже, для обох гравців рівновага $(a_1,a_2)$ є більш ризикованою (на предмет відхилення суперника від неї), рівновага $(b_1,b_2)$- менш ризикованою.

У загальному випадку “несиметричної” гри двох осіб із двома стратегіями, можна також провести дослідження на “ризикованість рівноважних ситуацій. Для цього перейдемо від гри з виграшами до гри із “втратами” (при відхиленні від ситуацій рівноваги). Так, таблиця з Прикладом 1зводиться до такої таблиці. Одержимо несиметричну гру з втратами $v_1, v_2, w_1, w_2 > 0$; $v_1 > w_1,\ v_2 > w_2$. Оцінка ризику для першого гравця

| $X_2$ / $X_1$ | $a_2$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $(v_{11}, v_{12})$ | $(w_{11}, w_{12})$ |
| $b_1$ | $(v_{21}, v_{22})$ | $(w_{21}, w_{22})$ |

визначається відношенням $v_1 / w_1$, другого гравця – відношенням $v_2 / w_2$. Перший гравець має більш сильну мотивацію (з точки зору ризику) вибору $(a_1, a_2)$, ніж другий для вибору $(b_1, b_2)$, якщо $v_1/w_1 > w_2/v_2$, або $v_1 v_2 > w_1 w_2$ (добуток Неша).

**Домінування за ризиком.**

**Означення.** Ситуація *a домінує за ризиком* b, якщо $v_1 v_2 > w_1 w_2$.

**Означення.** Ситуація рівноваги *a* ефективна за ризиком у грі *G*, якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за ризиком *a*.

| $X_2$ / $X_1$ | $a_2$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $(v_{11} - v_{21}, v_{12} - v_{22})$ | (0,0) |
| $b_1$ | (0,0) | $(w_{21} - w_{11}, w_{22} - v_{12})$ |

≡

| $X_2$ / $X_1$ | $a_2$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | $(v_1, v_2)$ | (0,0) |
| $b_1$ | (0,0) | $(w_1, w_2)$ |

Так, у прикладі ситуація рівноваги $(b_1, b_2)$ домінує за ризиком ситуацію рівноваги $(a_1, a_2)$ і є ефективною за ризиком.

| $X_2$ / $X_1$ | $a_2$ | $b_2$ |
|---|---|---|
| $a_1$ | (1,1) | (0,0) |
| $b_1$ | (0,0) | 7,7 |

Отже, за думкою Дж. Харшаньї та Р. Зельтена, гравці не повинні вибирати ситуації, що є домінованими чи за виграшем, чи за ризиком. А далі, вони повинні вирішити, що для них важливіше: виграш чи ризик, та вибирати одну з недомінованих рівноваг, відповідно чи за виграшем, чи за ризиком.

Слід відмітити, що у випадку, коли гравців більше двох та гравці мають більше двох стратегій, пошук недомінованих за ризиком рівноваг значно ускладнюється, але ця проблема має вирішення.

## Несиметрична інформованість гравців.

У багатьох економічних, політичних і соціальних ситуаціях природним чином виникає несиметричний розподіл інформації. Розглянемо найпростішу модель такого виду – поведінка типу „лідер-підлеглий”. Першим подібну модель розглянув економіст Г. Штакельберг на початку XX сторіччя при описанні стратегій фірм, що конкурують на одному і тому ж ринку. У таких ситуаціях нерідко одна з фірм виявляється сильнішою за інші і нав’язує їм свою стратегію, наприклад, призначає ціну. Безліч подібних прикладів можна знайти в політиці, в армії, у сім’ї.

**Рівновага за Штакельбергом.** Нехай для даної гри двох осіб $G=\left(X_1,X_2,u_1,u_2\right)$, $R_j$ – множина кращих відповідей $j$ - го гравця на задані стратегії $i$ - го ( $j\neq i$ ):

$$R_j=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in X_1\times X_2 \;\middle|\; u_j\left(x_1,x_2\right)=\sup_{y_j\in X_j}u_j\left(x_i,y_i\right),\;\; j\neq i\right\}.$$

**Означення**. Ситуація $(x_1,x_2)$ називається $i$ - *рівновагою Штакельберга*, якщо:

$$u_i\left(x_1,x_2\right)=\sup_{\left(y_1,y_2\right)\in R_j}u_i\left(y_1,y_2\right);\; i,j=1,2,\; i\neq j\,. \tag{1}$$

Множину $i$-рівноваг Штакельберга позначимо через $ШE_i$. Рівновагу Штакельберга можна інтерпретувати на основі наступного сценарію: гравець 1 (*лідер*) знає обидві функції виграшу $u_1$ і $u_2$ та використовує цю інформацію для передбачення реакції гравця 2. Гравець 2 (*підлеглий*) сприймає стратегію гравця 1 як задану екзогенно (ззовні) і максимізує власний виграш (вибираючи свою максимізуючу стратегію). Таким чином, гравець 1, маючи перший хід і передбачаючи „розумність” реакцій на нього гравця 2, сам, поступаючи „розумно”, буде розв’язувати задачу (1).

| $X_1 \backslash X_2$ | $a_2$ | $b_2$ | $c_2$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1,3 | 5,1 | 1,5 |
| $b_1$ | 4,1 | 2,2 | 3,2 |
| $c_1$ | 1,1 | 2,4 | 3,3 |

**Приклад.** Знайдемо 1-рівновагу Штакельберга (1-лідер, 2-підлеглий, 1 – знає $u_1$ і $u_2$, 2 – лише $u_2$). На фіксовану стратегію першого $a_1$ другий вибере свою максимізуючу стратегію $c_2$; $b_1\to b_2$, $c_2$; $c_1\to b_2$. Таким чином, для вибору своєї найкращої стратегії 1 гравець повинен розглядати лише ситуації $\left(a_1,c_2\right)$, $\left(b_1,b_2\right)$, $\left(b_1,c_2\right)$, $\left(c_1,b_2\right)$ (це і є множина $R_2$). Він, звичайно, вибере $\left(b_1,c_2\right)$ (на $R_2$ максимум $u_1$ досягається у $b_1$). Отже, 1-рівновагою Штакельберга є $\left(b_1,c_2\right)$ ( $ШE_1=\left\{\left(b_1,c_2\right)\right\}$ ). Аналогічно, фіксуючи $a_2$, знаходимо максимізуючі стратегії першого гравця (це $b_1$), $b_2\to a_1$, $c_2\to b_1,c_1$. Шукаємо на ситуаціях $R_2=\left\{\left(b_1,a_2\right),\left(a_1,b_2\right),\left(b_1,c_2\right),\left(c_1,c_2\right)\right\}$ максимізуючі стратегії другого гравця, отримуємо 2 - рівновагу Штакельберга $ШE_2=\left\{\left(c_1,c_2\right)\right\}$. Отже, при несиметричному розподілі інформації вибір обома гравцями буде детермінованим у першому випадку (лідер – 1) – $\left(b_1,c_2\right)$ і у другому (лідер – 2) – $\left(c_1,c_2\right)$. Звернемо увагу, що лідер – 1 при розумному підлеглому може забезпечити собі лише 3 одиниці виграшу, хоча потенційно він міг отримати і 4 ($\left(b_1,a_2\right)$) і 5 ($\left(a_1,b_2\right)$). Аналогічно маємо для лідера – 2. Звичайно, множина 1-рівноваг Штакельберга може містити більше ніж один елемент і тоді множина вибору скорочується, але неоднозначність залишається.

Принцип поведінки гравців, що описується означенням, нагадує процес виключення домінованих стратегій. Наступний результат показує, що рівновага Штакельберга зводиться до складних рівноваг при відповідному перетворенні початкової гри.

**Теорема (про існування рівноваг Штакельберга).** Нехай $G=\left(X_1,X_2,u_1,u_2\right)$ – скінченна гра двох осіб, причому функції $u_1$ і $u_2$ взаємно однозначні на $X_1\times X_2$. Тоді існує єдина 1 - рівновага Штакельберга.

Відмітимо, що існування $i$ - рівноваги Штакельберга можна гарантувати при звичайних передумовах ($X_i$ – компактні, $u_i$ – неперервні). Однак Теорема безпосередньо не узагальнюється.

## Лекція 17. Боротьба за лідерство. Узагальнення рівноваги за Нешем

Співіснування кількох різних рівноважних за Нешем та опимальних за Парето ситуацій породжує боротьбу за лідерство, що унеможливлює знаходження "оптимальних" стратегій. Це ілюструється наступним прикладом.

**Приклад** (Два барани). Два барани рухаються по горній стежці і одночасно зустрічаються на вузькому місті. Кожен з них може або призупинитись (стратегія З) або продовжувати рухатись (Р). Таблиця 1 формалізує дану ситуацію у припущенні, що кожному гравцю краще зупинитись, ніж постраждати в аварії, і рухатись, якщо інший зупинився. Додатне число $\varepsilon$ відповідає мірі незадоволення того, хто зупинився, від спостерігання колеги, який їде (величина $\varepsilon$ визначається етичними нормами суспільства).

*Таблиця 1.*

| $X_1$ \ $X_2$ | З | Р |
|---|---|---|
| *З* | 1, 1 | 1-$\varepsilon$, 2 |

$\varepsilon$

Обидві *NE* – ситуації (*З*,*Р*) та (*Р*,*З*) є паретівськими, хоча вони і не рівноцінні. Для кожного гравця оптимальною стратегією є зупинка, якщо інший вирішив продовжувати рухатись, і навпаки. Отже, задача кожного полягає у виборі першим стратегії "рухатись" і отримати виграш у 2 одиниці – маємо боротьбу за лідерство. Кожному гравцю вигідно демонструвати, що він може переключитись із стратегії *Р* на стратегію *З* (наприклад, крикнути «пропусти»), і у той же час уважно спостерігати за супротивником, щоб вияснити, а чи той і дійсно не може зупинитись. Дивно, що найбільш вигідним є нераціональна поведінка, яка у той же час виявляється цілком розумною. Хоча кожен з читачів може пригадати випадки із свого життя, коли аналогічні дії (наприклад, стратегія "прибіднятися" на іспиті) приводили до позитивних наслідків. Це ще один приклад того, що, взагалі кажучи, раціональність і розумність – це різні речі. Симетричність ролей обох гравців робить неможливим розв'язання конфліктної ситуації у вказаній постановці. Тому недарма придумуються правила дорожнього руху, чіпляються світлофори і т.д.

Для $n = 2$ розглянуту ситуацію можна повністю формалізувати.

Нехай $S_i$ – виграш $i$ – го гравця у будь-якій *$i$ – рівновазі Штакельберга*. Тобто, $S_i$ – це виграш $i$ – го гравця, коли він є лідером, діє оптимально у припущенні, що і підлеглий поводить себе розумно.

**Означення**. У грі $G$ маємо *боротьбу за лідерство*, якщо $\exists\ x$: $u_i\left(x\right) \geq S_i$, $i$=1,2.

**Теорема.** Якщо у грі $G$ мається хоча б дві паретівські *NE* – ситуації $x^1$, $x^2$ з різними векторами виграшів:

$$\left(\left(u_1\left(x^1\right), u_2\left(x^1\right)\right) \neq \left(u_1\left(x^2\right), u_2\left(x^2\right)\right)\right), \qquad (1)$$

то має місце боротьба за лідерство.

*Доведення.* Оскільки $NE = R_1 \bigcap R_2$, то з визначення $S_i$ $\{x \in NE\} \Rightarrow \{u_i(x) \le S_i,\ i = 1,2\}$. Якщо у грі $G$ відсутня боротьба за лідерство, то знайдеться ситуація $z$, для якої справедливі нерівності $u_i(z) \ge S_i$, $i$=1,2, звідки: $u_i(x^1) \le u_i(z)$, $u_i(x^2) \le u_i(z)$, $i$=1,2. Оскільки ситуації $x^1$ та $x^2$ Парето-оптимальні, то усі чотири нерівності суть рівності, що суперечить (1).

**Коаліційні рівноваги.** У багатьох економічних, соціально-економічних та інших системах агентами (учасниками) гри, які діють некооперативно, є не окремі гравці, а деякі їхні угрупування (коаліції), які спільно вибирають коаліційні стратегії і мають коаліційну ціль - множину функцій виграшу членів коаліції.

Поняття некооперативної коаліційної рівноваги (точка рівноваги для множини гравців $P$) формалізовано ще у монографії К. Бержа з метою визначення та дослідження властивостей сильної рівноваги за Нешем та формалізації основ кооперативних ігор.

Розглянемо гру $G$ у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ з розбиттям $\{N(k)\}_{k \in K}$ множини гравців $N$ гри $G$ на коаліції, що не перетинаються, тобто $\bigcup_{k \in K} N(k) = N$; $N(k) \bigcap N(l) = \varnothing$; $k, l \in K$; $k \ne l$. Множина коаліційних стратегій позначається через $X_{N(k)} = \prod_{i \in N(k)} X_i$, а через $U_{N(k)}(x) = (u_i\,(x))_{i \in N(k)}$ позначається вектор виграшів коаліції, який складається з функцій виграшу членів коаліції $k \in K$.

Ситуація $x^*$ називається коаліційною рівновагою гри $G$, якщо для $\forall k \in K$ або $\exists i \in N(k)$: $u_i(x^*) > u_i(x_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)})$, або $u_i(x^*) = u_i(x_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)})$ для $\forall i \in N(k)$. Таким чином, ситуація $x^*$ буде коаліційною рівновагою, якщо для будь-якої коаліції $k \in K$ стратегія $x^*_{N(k)}$ максимізує за Парето вектор виграшу $U_{N(k)}(x_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)}) = \ = (u_i\,(x_{N(k)}, x^*_{N \setminus N(k)}))_{i \in N(k)}$ коаліції на множині коаліційних стратегій $X_{N(k)} = \prod_{i \in N(k)} X_i$.

Якщо зафіксувати коаліційну структуру $\{N(k)\}_{k \in K}$, а на коаліції дивитися як на окремих гравців (з векторними виграшами), то одержимо бескоаліційну гру $(X_{N(k)}, U_{N(k)}; k \in K)$. Тоді коаліційна рівновага буде векторною рівновагою цієї багатокритеріальної гри.

**Рівновага за Бержем.** Застосування концепції рівноважності за Нешем для розв'язання реальних соціально-економічних, політичних конфліктів виявило ряд випадків, у яких її застосування приводило до парадоксальних результатів. Вперше на це звернув увагу Берж К. і запропонував нове поняття рівноваги, згідно якого одна коаліція гравців може максимізувати функції виграшу гравців іншої коаліції.

Нехай $R \subset N$ є довільною підмножиною індексів функцій виграшу гравців, а $S \subset N$ є коаліцією гравців. Ситуація $x^* \in X$ називається рівновагою гри $G$ у нормальній формі $(X_i, u_i; i \in N)$ для множини індексів $R$ відносно коаліції $S$, якщо: $u_i(x^*) \geq u_i(x_S, x^*_{N \setminus S})$, $\forall x_S \in X_S$, $\forall i \in R$.

Певний інтерес представляє альтруїстичний варіант рівноваги за Бержем, який був розглянутий В. Жуковським.

Ситуація $x^*$ називається рівновагою за Бержем гри $G$ у нормальній формі $(X_i, u_i, i \in N)$, якщо $u_i(x^*) \geq u_i(x^*_i, x_{N \setminus i})$, $\forall x_{N \setminus i} \in X_{N \setminus i}$, $\forall i \in N$, тобто в рівновазі за Бержем доповнювальна коаліція $N \setminus \{i\}$ кожного гравця $i \in N$ максимізує його виграш ("один - за усіх, усі - за одного").

На перший погляд, таку поведінку важко назвати раціональною, але приклади з реального життя доводять протилежне (альтруїстичні погляди мають місце, наприклад, у родинних відносинах, у християнських общинах і т.п.).

Ця рівновага може використовуватися також як альтернативне рішення конфлікту, коли немає рівноваги за Нешем або коли їх багато. В рівновазі за Бержем кожний гравець одержує свій максимальний виграш, якщо ситуація сприятлива для нього зобов'язанням або готовністю інших гравці вибирати стратегії, сприятливі для нього.

## Список літератури


1. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень – навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2- ге вид., перероб. та допов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010.
2. Мащенко С. О. Збірник задач з теорії прийняття рішень: навч. посіб. – К.: «Видавництво Людмила», 2018.
3. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – Москва: Мир, 1985.
4. Васин А.А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики : учеб. пособие. – М. : МАКС Пресс, 2005.