Лекція з ТЙ 7.09.21.

Характеристична функція. Її основні властивості

Характеристичною функцією випадкової величини ξ ми будемо називати функцію $f_\xi(t)$ від дійсного аргументу t, яка дорівнює

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = M\cos\xi t + iM\sin\xi t.$$

Якщо ξ має щільність розподілу $p_\xi(x)$, то

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx.$$

У випадку, коли розподіл ξ дискретний $f_\xi(t) = \sum_k e^{itx_k} P\{\xi = x_k\}$.

Властивості характеристичної функції:

1) $|f_\xi(t)| \le 1$ при кожному дійсному t, $f_\xi(0) = 1$.

$$\left|f_\xi(t)\right|^2 = \left|M\cos(\xi t) + iM\sin(\xi t)\right|^2 = \left(M\cos(\xi t)\right)^2 + \left(M\sin(\xi t)\right)^2 \le$$

$$\le M\cos^2(\xi t) + M\sin^2(\xi t) = M\left(\cos^2(\xi t) + \sin^2(\xi t)\right) = 1$$

2) $f_\xi(t)$ рівномірно неперервна по t.

Для доведення цієї властивості доведемо спочатку наступний результат.

Лема . Для дійсного φ і довільного цілого $n \ge 1$ має місце нерівність

$$\left|e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i\varphi)^k}{k!}\right| \le \frac{|\varphi|^n}{n!}. \qquad (1)$$

Доведення. Оскільки $|e^{i\varphi}| = 1$, то $\left|\int_0^\varphi e^{iu}du\right| = \left|\frac{1}{i}(e^{i\varphi} - 1)\right| = |e^{i\varphi} - 1|$, а також $\left|\int_0^\varphi e^{iu}du\right| \le \int_0^{|\varphi|} |e^{iu}|\, du = |\varphi|$. Таким чином $|e^{i\varphi} - 1| \le |\varphi|$.

Далі (1) доводиться за індукцією. Нехай (1) справедливе для $1, 2, ..., n$. Доведемо справедливість (1) для $n+1$.

Так як $\int_0^\varphi \left(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!}\right)du = \frac{1}{i}\left(e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\varphi)^k}{k!}\right)$, то

$$\left|e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\varphi)^k}{k!}\right| = \left|\int_0^\varphi \left(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!}\right)du\right| \le \int_0^{|\varphi|} \frac{u^n}{n!}du \le \frac{|\varphi|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Лему доведено.

Перейдемо до доведення рівномірної неперервності характеристичної функції.

Розглянемо подію $A=\{|\xi|\le X\}$. Тоді

$$|f(t+h)-f(t)|=|Me^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)|\le M|e^{ih\xi}-1|\chi_A+M|e^{ih\xi}-1|\chi_{\bar{A}}\le$$
$$\le|h|M|\xi|\chi_A+2M\chi_{\bar{A}}\le|h|X+2P\{|\xi|>X\}.$$

Виберемо X так, щоб $P\{|\xi|>X\}<\dfrac{\varepsilon}{4}$. При $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2X}$ отримаємо, що $|f(t+h)-f(t)|<\varepsilon$ для $|h|<\delta$.

3) Якщо $\eta=a\xi+b$, де a і b константи, то

$$f_\eta(t)=Me^{it\eta}=Me^{it(a\xi+b)}=e^{itb}Me^{iat\xi}=e^{itb}f_\xi(at).$$

4) Якщо $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ незалежні, то $f_{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}(t)=\prod\limits_{k=1}^{n}f_{\xi_k}(t)$.

5) $f_\xi(-t)=\overline{f}_\xi(t)$.

6) Позначимо $m_n=M\xi^n$. Якщо m_n - скінченне, то існують усі похідні $f^{(k)}(t)$ при $k\le n$ і

$$f^{(k)}(0)=i^k\cdot M\xi^k. \qquad (2)$$

Крім того має місце такий розклад

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(it)^k}{k!}m_k+R_n(t), \qquad (3)$$

де $R_n(t)=o(t^n)$ при $t\to0$.

Доведення. Розглянемо відношення $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=Me^{it\xi}\left(\dfrac{e^{ih\xi}-1}{h}\right)$. Так як $\left|e^{it\xi}\left(\dfrac{e^{ih\xi}-1}{h}\right)\right|\le|\xi|$ і $M|\xi|<\infty$, то за теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$f'(t)=\lim_{h\to0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=M\left(e^{it\xi}\lim_{h\to0}\frac{e^{ih\xi}-1}{h}\right)=Mi\xi e^{it\xi}.$$

Припустимо тепер, що

$$f^{(k)}(t)=Mi^k\xi^ke^{it\xi} \quad \text{для} \quad k=1,2,...,n-1. \qquad (4)$$

Доведемо цю формулу для $k=n$. За визначенням *n*-ої похідної маємо

$$f^{(n)}(t)=\lim_{h\to0}\frac{f^{(n-1)}(t+h)-f^{(n-1)}(t)}{h}=\lim_{h\to0}Mi^{n-1}\xi^{n-1}\frac{e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)}{h}=$$
$$=Mi^{n-1}\xi^{n-1}\lim_{h\to0}\frac{e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)}{h}=Mi^n\xi^ne^{it\xi}.$$

Граничний перехід під знаком інтегралу ми змогли зробити, оскільки

$$\left|i^{n-1}\xi^{n-1}\frac{e^{it\xi}(e^{ih\xi}-1)}{h}\right|\le|\xi|^n \quad \text{і} \quad M|\xi|^n<\infty.$$

З формули (4) випливає, що $f^{(k)}(0)=i^k\cdot M\xi^k$.

Доведемо тепер формулу (3).

Нехай $A=\{\omega:|\xi|\le X\}$. Тоді $|R_n(t)|$ можна оцінити зверху

$$|R_n(t)| \le \left| M\left(e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it\xi)^k}{k!}\right)\right| \le M\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it\xi)^k}{k!}\right| =$$

$$= M\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it\xi)^k}{k!}\right|\chi_A + M\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it\xi)^k}{k!}\right|\chi_{\bar{A}} \le M\frac{|t|^{n+1}|\xi|^{n+1}}{(n+1)!}\chi_A +$$

$$+M\left\{\left|e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it\xi)^k}{k!}\right| + \left|\frac{(it\xi)^n}{n!}\right|\right\}\chi_{\bar{A}} \le M\frac{|t|^{n+1}|\xi|^{n+1}}{(n+1)!}\chi_A + 2M\frac{|t|^n|\xi|^n}{n!}\chi_{\bar{A}} \le$$

$\le \frac{|t|^{n+1}\ X^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2|t|^n}{n!}M|\xi|^n\ \chi_{\bar{A}} = \frac{|t|^n}{n!}\left(|t|\frac{X^{n+1}}{n+1} + 2M|\xi|^n\ \chi_{\bar{A}}\right)$. Враховуючи цю оцінку, залишилось показати

$$|t|\frac{X^{n+1}}{n+1} + 2M|\xi|^n\ \chi_{\bar{A}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Оберемо X настільки великим, щоб $M|\xi|^n\ \chi_{\bar{A}} < \frac{\varepsilon}{4}$, а потім візьмемо $\delta = \frac{(n+1)\varepsilon}{2X^{n+1}}$. Тоді при $|t| < \delta$ маємо $|t|\frac{X^{n+1}}{n+1} + 2M|\xi|^n\ \chi_{\bar{A}} < \varepsilon$. Властивість 3) доведено.

Обчислимо характеристичні функції для найбільш відомих розподілів.

1) Біноміальний розподіл.

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1,...,n.$$

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [pe^{it} + (1-p)]^n.$$

2) Пуассонівський розподіл.

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0,1,2,.... \qquad f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \exp\{\lambda(e^{it}-1)\}.$$

3) Геометричний розподіл.

$$P\{\xi = k\} = p^k q, k = 0,1,2,.... \qquad f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} p^k q = \frac{q}{1-pe^{it}}.$$

4) Вироджений розподіл.

$$P\{\xi = c\} = 1, \qquad f_\xi(t) = e^{itc}.$$

5) Рівномірний розподіл на відрізку $[a,b]$.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b], \\ 0, x \notin [a,b]. \end{cases}$$

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

6) Показниковий розподіл.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \ge 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

$$f_\xi(t) = \int_0^\infty \lambda e^{itx} e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^\infty e^{(it-\lambda)x}dx = \frac{\lambda}{it-\lambda}e^{(it-\lambda)x}\Big|_0^\infty = -\frac{\lambda}{it-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

7) Стандартний нормальний розподіл.

За визначенням характеристична функція стандартного нормального розподілу дорівнює

$$f_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx .$$

Продиференцюємо цю рівність по t

$$f_\xi^{'}(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{matrix} dv = xe^{-\frac{x^2}{2}} dx, \, v = -e^{-\frac{x^2}{2}} \\ u = e^{itx}, \, du = ite^{itx} dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{itx - \frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx \right] = -tf_\xi(t) \cdot$$

Таким чином $f_\xi(t)$ задовольняє диференціальному рівнянню $f_\xi'(t) = -tf_\xi(t)$ з початковою умовою $f_\xi(0) = 1$. Звідси маємо $f_\xi(t) = e^{-t^2/2}$.