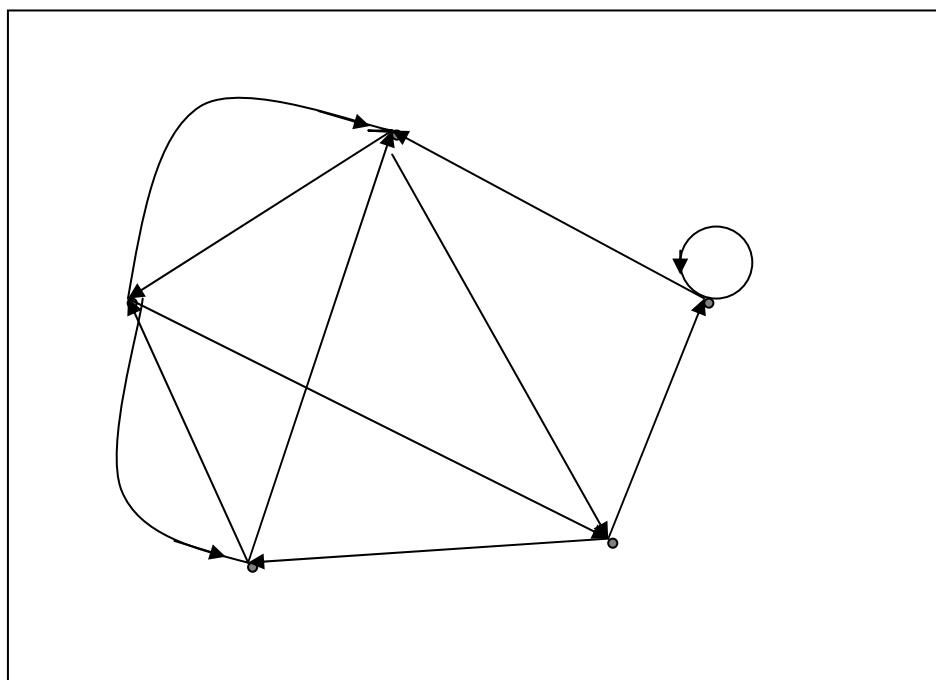


Т.В. Волченская, В.С. Князьков

Компьютерная математика:

Часть 2. Теория графов

Учебное пособие



Пенза 2002

УДК 519.15
В 17

Волченская Т.В., Князьков В.С. Компьютерная математика: Часть 2 Теория графов/ Учебн. пособ. - Пенза: Изд-во Пенз. ун-та, 2002,- 101 с. : ил. 104 , табл. 53 . , библиогр. - 13 назв. и 5 прил.

Пособие содержит материал практического изучения основ современной дискретной математики. Приведены основные понятия из теории графов и сетей. Рассматриваются вопросы различных способов описания графов, операции над графами, задачи связности и достижимости в графах. Причем, особое внимание уделено машинным методам представления информации и компьютерным алгоритмам решения задач. Значительное место уделено решению оптимизационных задач на графах, таких как поиск кратчайших путей в графах и разбиение графов на максимальные сильно связные подграфы.

Предлагаемое учебное пособие позволяет значительно облегчить процесс овладения необходимыми элементами современной дискретной математики.

Учебное пособие предназначено для студентов младших курсов специальностей 20.18.00 , 22.04.00 и других специальностей, изучающих дисциплины “Дискретная математика” и “Прикладная математика”.

Рецензенты:

- кафедра “ Вычислительные системы и моделирование” Пенз. Гос. пед. ун-та;

докт. техн. наук, профессор Г.И. Чижухин, Зам. директора по науке ПФ ФГУП НТЦ «АТЛАС»

©Издательство Пензенского государственного университета, 2002

© Т.В. Волченская, Князьков В.С.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. ГРАФЫ И СПОСОБЫ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.
1.2 СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ГРАФОВ.....	10
1.2.1. Теоретико-множественное представление графов	10
1.2.2. Задание графов соответствием	10
1.2.3. Матричное представление графов.....	10
1.3 ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ.....	14
2. ДОСТИЖИМОСТЬ И СВЯЗАНОСТЬ В ГРАФАХ	17
2.1.МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ	17
2.1.1.Прямые отображения.....	17
2.1.2. Обратные отображения.....	17
2.2. ТРАНЗИТИВНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ.....	20
2.2.1. Прямое транзитивное замыкание.....	20
2.2.2. Обратное транзитивное замыкание	21
2.2.3.Нахождение транзитивных замыканий по матрице смежности.....	21
2.3 Достижимость и контрдостижимость	25
3. ГРАФЫ И ПОДГРАФЫ.....	29
3.1 Типы ГРАФОВ.	29
3.1.1.Теорема о двудольности.....	31
Доказательство.....	32
3.2.Виды ПОДГРАФОВ	36
3.3.Сильно СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ И КОМПОНЕНТЫ ГРАФА.....	40
4. МЕТОДЫ РАЗБИЕНИЯ ГРАФА НА МАКСИМАЛЬНЫЕ СИЛЬНО СВЯЗНЫЕ ПОДГРАФЫ	45
4.1 МЕТОД МАЛЬГРАНЖА	45
4.2. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РАЗБИЕНИЯ	51
5.ПУТИ И ЦИКЛЫ В ГРАФАХ	54
5.1.Пути и МАРШРУТЫ	54
5.2 МАТРИЧНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ПУТЕЙ В ГРАФАХ	55

5.3. ВЕС и ДЛИНА ПУТИ	59
5.4. АЛГОРИТМ ДЕЙКСТРЫ ПОИСКА КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В ГРАФЕ.....	62
5.5. ОРЦИКЛЫ И ЦИКЛЫ	76
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	79
ЛИТЕРАТУРА	80
Приложения:.....	81
Приложение 1. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАФА.....	81
Приложение 2. Построение транзитивных замыканий.....	83
Приложение 3. Построение матриц достижимости и контрдостижимости.....	86
Приложение 4. Разбиение графа на подграфы по методу Мальгранжа.....	87
Приложение 5. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РАЗБИЕНИЯ.	89
ОТВЕТЫ.....	91
УПРАЖНЕНИЙ К ГЛАВЕ 1	91
УПРАЖНЕНИЙ К ГЛАВЕ 2	93
УПРАЖНЕНИЙ К ГЛАВЕ 3	95
УПРАЖНЕНИЙ К ГЛАВЕ 4	97
УПРАЖНЕНИЙ К ГЛАВЕ 5	98

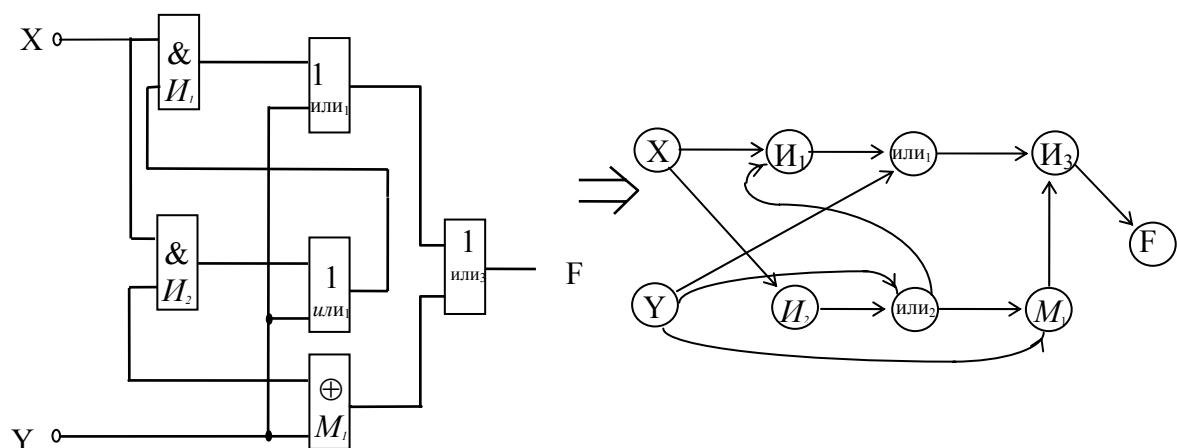
ВВЕДЕНИЕ

В последние годы особую важность приобрели те разделы математики, которые имеют отношение к развитию цифровых устройств, цифровой связи и цифровых вычислительных машин. Базой для преподавания этих дисциплин наряду с классическими методами анализа непрерывных физических моделей стали алгебраические, логические и комбинаторные методы исследования различных моделей дискретной математики.

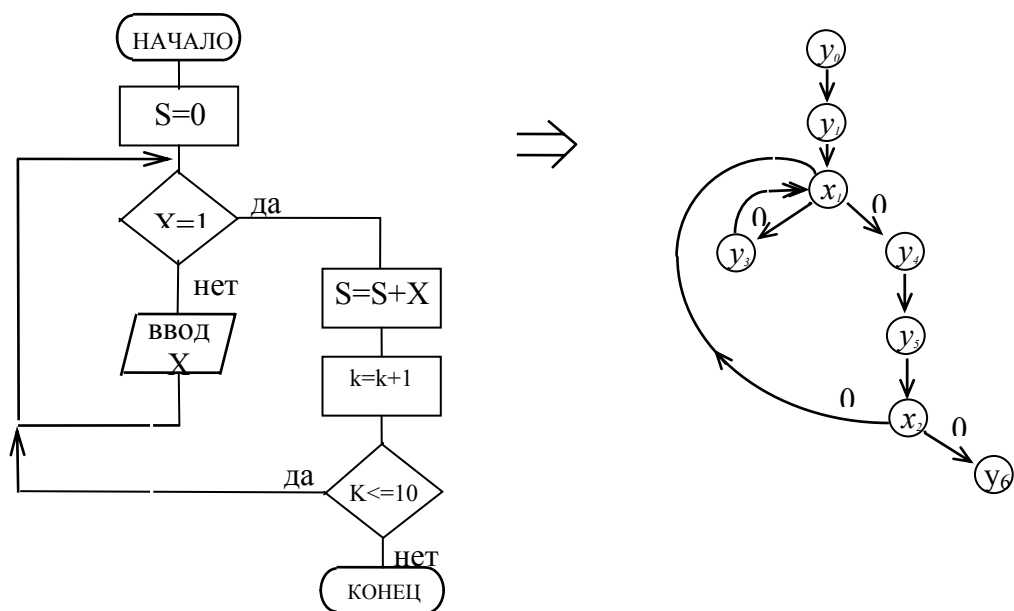
Значительно возросла популярность теории графов - ветви дискретной математики. Графы встречаются во многих областях под разными названиями: "структуры" в гражданском строительстве, "сети" - в электронике, "социограммы" - в социологии и экономике, "молекулярные структуры" - в химии, "дорожные карты", электрические или газовые распределительные сети и т.д.

Родившись при решении головоломок и игр, таких, например, как задача о кенигсбергских мостах и игра Гамильтона, теория графов стала мощным средством исследования и решения многих задач, возникающих при изучении больших и сложных систем. Для специалистов по вычислительной технике, информационным системам и системам цифровой связи теория графов - это удобный язык выражения понятий из этой области; многие результаты теории графов имеют непосредственную связь с задачами, с которыми им приходится сталкиваться. Графическая интерпретация различных моделей графов дана на рис. 1. Так в виде ориентированных графов можно представить любую логическую или функционально - логическую схему (рис. 1а). На таких графовых моделях можно, например, оценить быстродействие схемы. Блок - схема алгоритма может быть представлена вероятностным графом (рис. 1б), который позволяет оценить временные характеристики алгоритма, затраты процессорного времени, трудоемкость и другие. Графом типа "дерево" можно отобразить практически любую структуру организации или предприятия (рис. 1в).

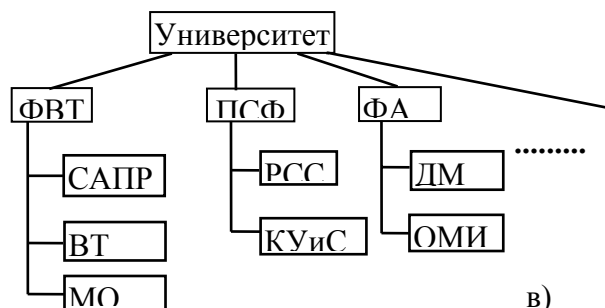
Широкое применение теория графов получила при исследовании так называемой проблемы оптимизации, возникающей при конструировании больших систем как технических, так и программных, например, таких как



а)



б)



в)

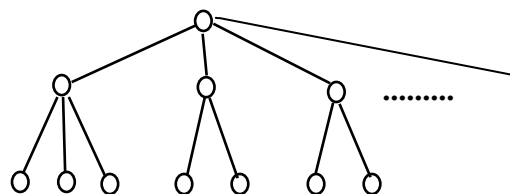


Рис. 1. Графическая интерпретация применения графовых структур: а) - орграф; б) - вероятностный граф; в) - граф-дерево

компиляторы. В рамках этих исследований были разработаны многие, неизвестные ранее теоретико-графовые понятия. Теория графов имеет большую

привлекательность для специалистов в области проектирования для построения эффективных алгоритмов и анализа их сложности. Использование аппарата теории графов оказало существенное влияние на разработку алгоритмов конструкторского проектирования схем. Непосредственное и детальное представление практических систем, таких, как распределительные сети, системы связи, приводит к графам большого размера, успешный анализ которых зависит в равной степени, как от эффективных алгоритмов, так и от возможностей компьютерной техники. Поэтому в настоящее время основное внимание сосредоточено на разработке и описании компьютерных алгоритмов анализа графов. В связи с этим основной упор в данном учебном пособии делается на машинные способы представления графов и алгоритмы решения задач на графах, легко реализуемых на ЭВМ.

1. ГРАФЫ И СПОСОБЫ ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

1.1. Основные определения

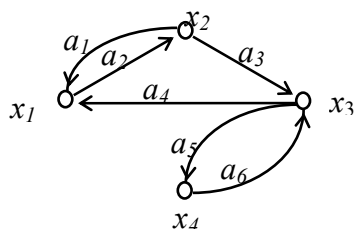
Граф задается множеством точек или вершин x_1, x_2, \dots, x_n и множеством линий или ребер a_1, a_2, \dots, a_m , соединяющих между собой все или часть точек. Формальное определение графа может быть дано следующим образом:

Графом называется двойка вида

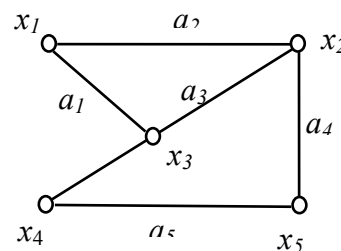
$$G = (X, A),$$

где $X = \{x_i\}, i=1, 2, \dots, n$ - множество вершин графа, $A = \{a_i\}, i=1, 2, \dots, m$ - множество ребер графа.

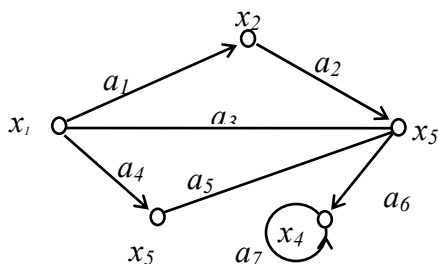
Графы могут быть ориентированными, неориентированными и смешанными (рис.2). Если ребра у множества A ориентированы, что обычно показывается стрелкой, то они называются дугами, и граф с такими ребрами называется **ориентированным** графом или **орграфом** (рис.2,а).



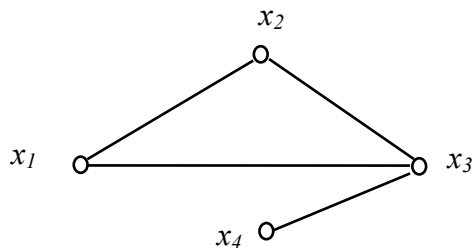
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. Виды графов: а) ориентированный граф G_1 ; б) неориентированный граф G_2 ; в) смешанный граф G_3 ; г) неориентированный дубликат графа G_4 .

Если ребра не имеют ориентации, то граф называется **неориентированным** (рис 2,б). Граф, в котором присутствуют и ребра, и дуги называется **смешанным** (рис 2,в). В случае, когда $G = (X, A)$ является орграфом, и мы хотим пренебречь направленностью дуг из множества A , то неориентированный граф, соответствующий G , будет обозначаться $\bar{G} = (X, A)$ и называться **неориентированным дубликатом** или **неориентированным двойником** (рис.2,г).

Дуга a_i может быть представлена упорядоченной парой вершин (x_n, x_k) , состоящей из начальной x_n и конечной x_k вершин. Например, для графа G_1 (рис.2,а) дуга a_1 задается парой вершин (x_1, x_2) , а дуга a_3 парой (x_2, x_3) . Если x_n, x_k — концевые вершины дуги a_i , то говорят, что вершины x_n и x_k **инцидентны** дуге a_i или дуга a_i инцидентна вершинам x_n и x_k .

Дуга, у которой начальная и конечная вершины совпадают, называется **петлей**. В графе G_3 (рис.2,в) дуга a_7 является петлей.

Каждая вершина орграфа x_i может характеризоваться полустепенью исхода $d_o(x_i)$ и полустепенью захода $d_t(x_i)$.

Полустепенью исхода вершины x_i — $d_o(x_i)$ называется количество дуг, исходящих из этой вершины. Например, для орграфа G_1 (рис.2,а) характеристики полустепеней исхода следующие: $d_o(x_1)=1$, $d_o(x_2)=2$, $d_o(x_3)=2$, $d_o(x_4)=1$.

Полустепенью захода вершины x_i — $d_t(x_i)$ называется количество дуг, входящих в эту вершину. Например, для орграфа G_1 : $d_t(x_1)=2$, $d_t(x_2)=1$, $d_t(x_3)=2$, $d_t(x_4)=1$.

Очевидно, что сумма полустепеней исхода всех вершин графа, а также сумма полустепеней захода всех вершин графа равна общему числу дуг графа, т.е.

$$\sum_{i=1}^n d_o(x_i) = \sum_{i=1}^n d_t(x_i) = m,$$

где n -число вершин графа, m -число дуг.

Каждая вершина неориентированного графа x_i может характеризоваться степенью вершины $d(x_i)$.

Степенью вершины x_i — $d(x_i)$ называется количество ребер, инцидентных этой вершине. Например, для орграфа G_1 (рис.2,б) характеристики степеней следующие: $d(x_1)=2$, $d(x_2)=3$, $d(x_3)=2$, $d(x_4)=2$.

Алгоритм и программа нахождения характеристик графа приведены в прил.1.

Упражнения 1.1

1. Какого типа граф изображен на рисунке?

Ответ:

2. Какие вершины инцидентны дуге f ?

Ответ:

3. Какие дуги инцидентны вершине 3?

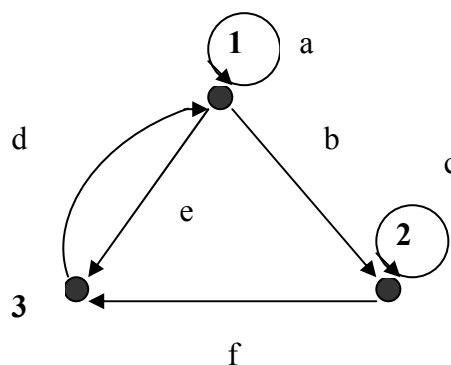
Ответ:

4. Перечислите дуги, являющиеся петлями?

Ответ:

5. Найдите полустепени исхода и захода для всех вершин графа.

Ответ: $d_o(x_1)=\dots$, $d_o(x_2)=\dots$, $d_o(x_3)=\dots$, $d_t(x_1)=\dots$, $d_t(x_2)=\dots$, $d_t(x_3)=\dots$



1.2 Способы описания графов

1.2.1. Теоретико-множественное представление графов

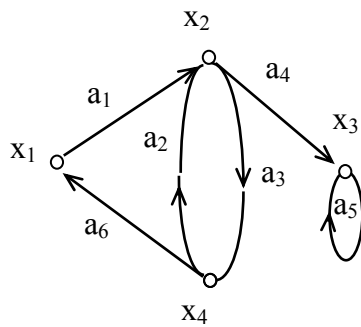


Рис. 3. Орграф G_4

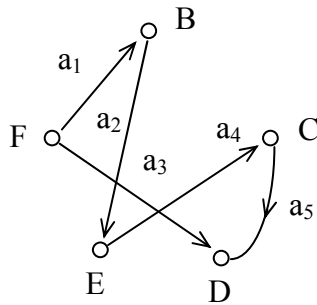


Рис. 4. Орграф G_5

Граф описывается перечислением множества вершин и дуг. Примеры описания приведены для орграфов на рис.3 и рис. 4.

$$G_4=(X, A),$$

где $X = \{ x_i \}, i=1,2,3,4$ - множество вершин;

$A = \{ a_i \}, i=1,2,...,6$ - множество дуг, причем $A=\{(x_1, x_2), (x_4, x_2), (x_2, x_4), (x_2, x_3), (x_3, x_3), (x_4, x_1)\}$.

$$G_5=(X, A),$$

где $X=\{B, C, D, E, F\}$ - множество вершин графа,

$A=\{a_i\}, i=1,2,...,5$ - множество дуг графа,

причем $a_1=(F, B), a_2=(F, E), a_3=(F, D),$

$a_4=(E, C), a_5=(C, D)$.

1.2.2. Задание графов соответствием

Описание графов состоит в задании множества вершин X и соответствия Γ , которое показывает, как между собой связаны вершины.

Соответствием Γ называется отображение множества X в X , а граф в этом случае обозначается парой $G=(X, \Gamma)$.

Отображением вершины x_i — $\Gamma(x_i)$ является множество вершин, в которые существуют дуги из вершины x_i , то есть $\Gamma(x_i)=\{ x_j: \exists \text{ дуга } (x_i, x_j) \in A \}$.

Так для орграфа на рис.3 описание заданием множества вершин и соответствия выглядит следующим образом:

$$G_4=(X, \Gamma),$$

где $X=\{x_i\}, i=1,2,...,4$ - множество вершин,

$\Gamma(x_1)=\{ x_2 \}, \Gamma(x_2)=\{ x_3, x_4 \}, \Gamma(x_3)=\{ x_3 \}, \Gamma(x_4)=\{ x_1, x_2 \}$ - отображения.

Для неориентированного или смешанного графов предполагается, что соответствие Γ задает такой эквивалентный ориентированный граф, который получается из исходного графа заменой каждого ориентированного ребра двумя противоположно направленными дугами, соединяющими те же самые вершины. Например, для графа на рис.2,б $\Gamma(x_2)=\{ x_1, x_3, x_5 \}, \Gamma(x_4)=\{ x_3, x_5 \}$ и т.д.

1.2.3. Матричное представление графов

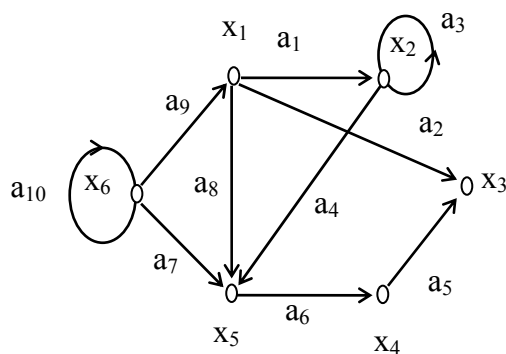
Для обработки на ЭВМ графы удобно представлять в виде матриц смежности и инциденций.

Матрица смежности - это квадратная матрица размерностью $n \times n$, (где n - число вершин графа), однозначно представляющая его структуру.

$A=\{a_{ij}\}, i,j= 1,2,...,n$, а каждый элемент матрицы определяется следующим образом:

$a_{ij}=1$, если \exists дуга (x_i, x_j) ,

$a_{ij}=0$, если нет дуги (x_i, x_j) .



а)

$$A =$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	1	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

б)

$$B =$$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0
x_2	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	0	0	-1	0	1	-1	-1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

в)

Рис. 5. Орграф и его матричное представление:
а) - орграф; б)- матрица смежности;
в) - матрица инцидентий.

Матрица инцидентий представляет собой прямоугольную матрицу размером $n \times m$, где n - количество вершин графа, а m - количество дуг графа. Обозначается матрица инцидентий $B = \{b_{ij}\}, i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m$.

Каждый элемент матрицы определяется следующим образом:

$b_{ij}=1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_j ,

$b_{ij}=-1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_j ,

$b_{ij}=0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j или если a_j является петлей.

На рис.5,а ,б приведен граф и его матрица смежности, по которой можно найти характеристики вершин. Так сумма элементов i -ой строки матрицы дает полустепень исхода вершины x_i , а сумма элементов i -го столбца дает полустепень захода вершины x_i . По матрице смежности можно найти прямые и обратные отображения. Рассмотрим i -ю строку матрицы. Если элемент $a_{ij}=1$, то элемент графа x_j входит в отображение $\Gamma(x_i)$. Например, в 2-й строке матрицы A (рис.5,б) единицы стоят в 2-м и 5-м столбцах, следовательно, $\Gamma(x_2)=\{x_2, x_5\}$.

Для графа на рис.5,а матрица инцидентий приведена на рис.5,в. Поскольку каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая,

когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1 и один - равный -1, либо все элементы столбца равны 0.

Для неориентированного графа, матрица инцидентий определяется так же, за исключением того, что все элементы, равные -1, заменяются на 1.

Упражнения к п. 1.2

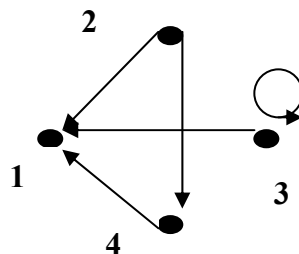
1. Для графа, изображенного на рисунке, дать описание перечислением и с помощью отображений.

Ответ: $G=(X, A)$,

где $X = \{x_i\}$, $i=1, 2, 3, 4$ - множество вершин;

$A = \{a_i\}$, $i=1,2,...,5$ - множество дуг, причем $A=\{(x_2, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_4)\}$.

$G=(X, \Gamma)$, где $X=\{x_i\}$, $i=1,2,...,4$ - множество вершин, $\Gamma = \{\Gamma(x_i)\}$ - множество отображений, $\Gamma(x_1)=\{... \}$, $\Gamma(x_2)=\{... \}$, $\Gamma(x_3)=\{... \}$, $\Gamma(x_4)=\{... \}$ - отображения.



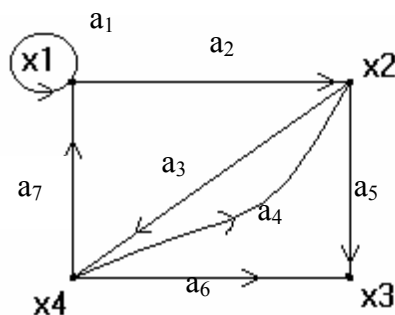
2. Для графа, представленного на рисунке, построить матрицы смежности и инцидентий.

Ответ: Матрица смежности

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1				
x_2				
x_3				
x_4				

Матрица инцидентий

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_1							
x_2							
x_3							
x_4							



3. Построить граф, заданный матрицей смежности.

1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1

4. По матрице смежности, данной в предыдущей задаче, подсчитать:

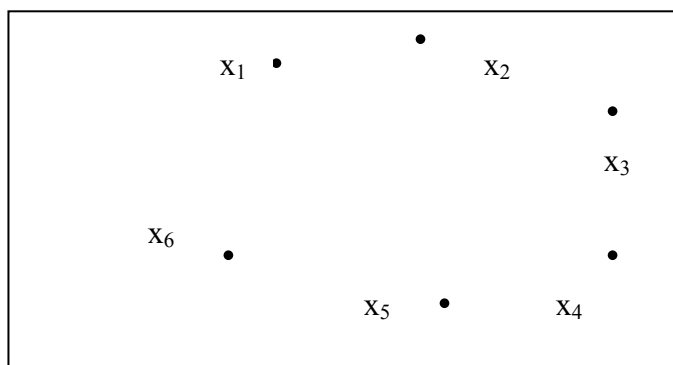
а) количество петель графа - ...

б) полустепень исхода второй вершины

$d_o(x_2)=...$,

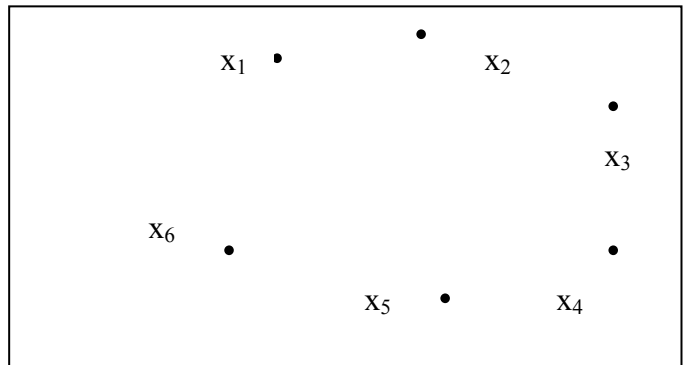
в) полустепень захода второй вершины

$d_i(x_2)=...$



5. Построить граф $G = (X, A)$,
где
 $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 5$, $A = \{a_i\}$,
 $i = 1, 2, \dots, 8$,

$a_1 = (x_1, x_2)$, $a_2 = (x_2, x_3)$, $a_3 = (x_2, x_5)$,
 $a_4 = (x_3, x_5)$, $a_5 = (x_3, x_1)$, $a_6 = (x_4, x_5)$,
 $a_7 = (x_4, x_1)$, $a_8 = (x_5, x_1)$.



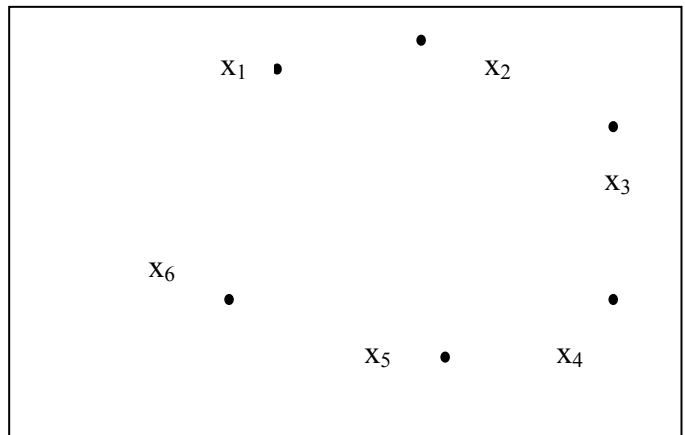
6. Построить граф $G = (X, \Gamma)$,
где $X = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, 6$, $\Gamma = \{\Gamma(x_i)\}$ – множество
отображений,

$\Gamma(x_1) = \{x_1, x_3, x_4\}$,

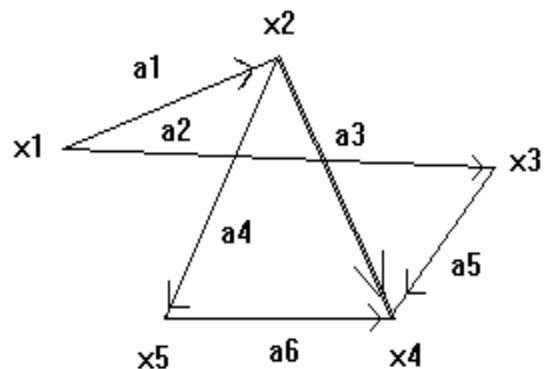
$\Gamma(x_2) = \{x_2, x_4, x_6\}$,

$\Gamma(x_3) = \{x_3, x_6\}$, $\Gamma(x_4) = \{x_5, x_6\}$,

$\Gamma(x_5) = \{x_2, x_6\}$, $\Gamma(x_6) = \{x_1, x_3\}$.



7. Для графа,
изображенного на рисунке дать
возможные варианты его
описания матрицей смежности и
инциденций.



Ответ: Матрица смежности

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1					
x_2					
x_3					
x_4					
x_5					

Матрица инциденций

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x_1						
x_2						
x_3						
x_4						
x_5						

8. По матрице инциденций найти полустепени исхода и захода для x_2 , построить матрицу смежности и граф.

Ответ: $d_o(x_2) = \dots$,

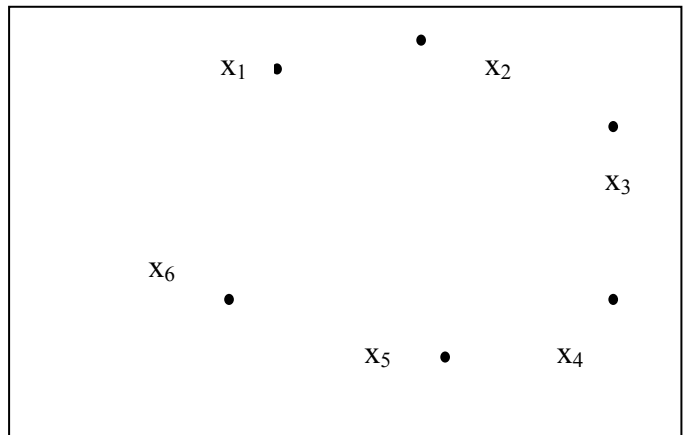
$d_t(x_2) = \dots$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
x_1	2	-1	1	0	1	0	1	0	0	0
x_2	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	-1	-1	1	0	1	0	0

X_4	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
X_5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
X_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1

Матрица смежности

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1						
X_2						
X_3						
X_4						
X_5						
X_6						



1.3 Операции над графами

Рассмотрим семь операций над графами, три из которых являются бинарными, включающими два графа, а остальные четыре - унарные, то есть определены на одном графе.

Исходные графы G_1 и G_2 показаны на рис. 6, а,б. $G_1=(X_1, A_1)$, где $X_1=\{x_i\}$, $i=1,2,\dots,6$, $A=\{a_i\}$, $i=1,2,\dots,7$. и $G_2=(X_2, A_2)$, где $X_2=\{x_i\}$, $i=1,2,\dots,6$, $A=\{a_1, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{10}\}$. Матрицы смежности графов показаны на рис.6,в и 6,г соответственно. (Чтобы не загромождать рисунок, нули не показаны.)

Объединение графов G_1 и G_2 , обозначаемое как $G_1 \cup G_2$, представляет такой граф $G_3=(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$, что множество его вершин является объединением X_1 и X_2 , а множество ребер - объединением A_1 и A_2 . Граф G_3 , полученный операцией объединения графов G_1 и G_2 , показан на рис. 6,д, а его матрица смежности - на рис. 6,е.

Пересечение графов G_1 и G_2 , обозначаемое как $G_1 \cap G_2$, представляет собой граф $G_4=(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$. Таким образом, множество вершин графа G_4 состоит из вершин, присутствующих одновременно в G_1 и G_2 . Операция пересечения графов $G_1 \cap G_2$ показана на рис. 7,а.

Кольцевая сумма двух графов G_1 и G_2 , обозначаемая как $G_1 \oplus G_2$, представляет собой граф G_5 , порожденный на множестве ребер $A_1 \oplus A_2$. Другими словами, граф G_5 не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в G_1 , либо в G_2 , но не в обоих одновременно.

Кольцевая сумма графов G_1 и G_2 показана на рис.7 ,б.

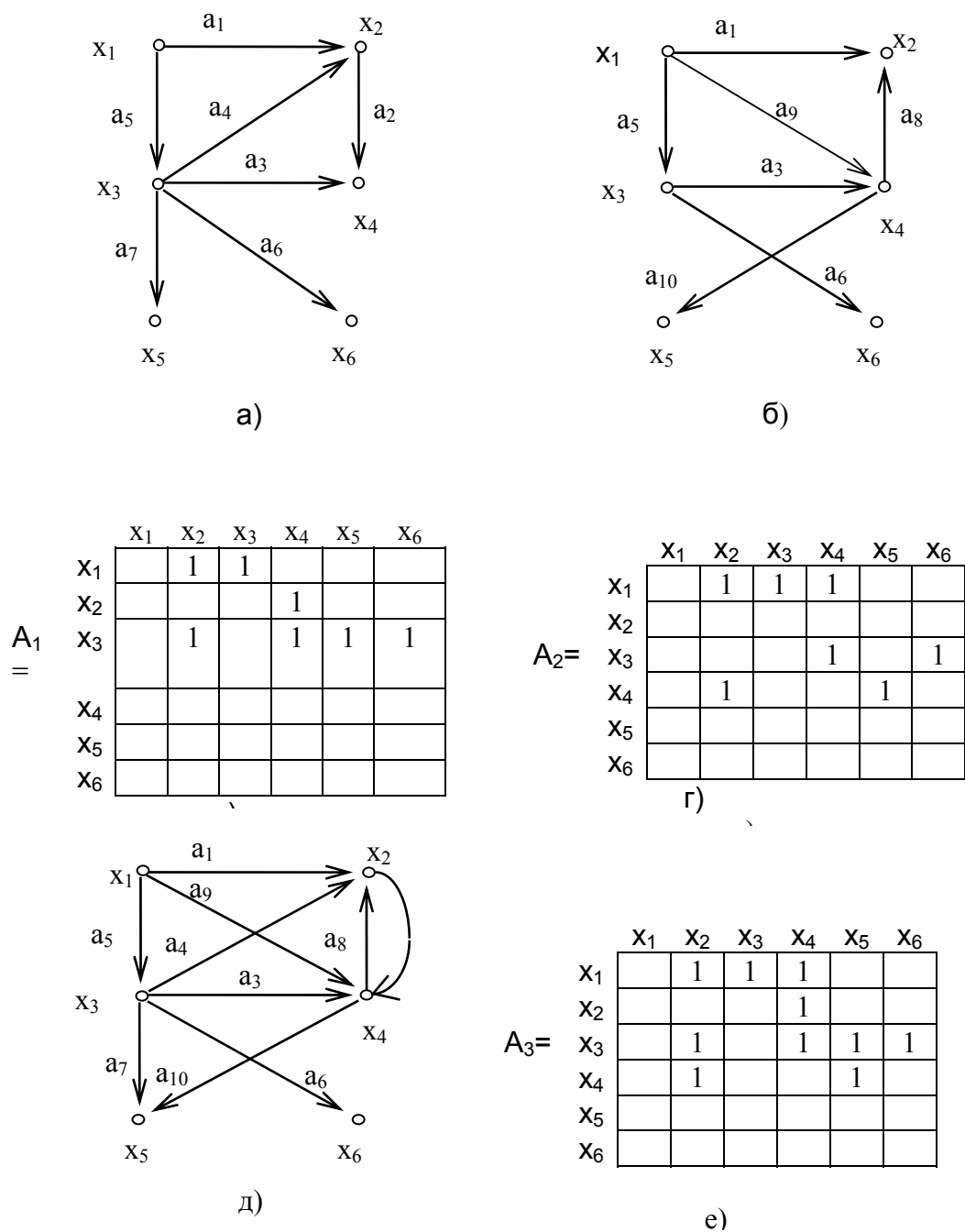


Рис. 6. Операция объединения:

а) граф G_1 ; б) граф G_2 ; в) матрица смежности графа G_1 ; г) матрица смежности графа G_2 ; д) $G_1 \cup G_2$; е) матрица смежности графа G_3 .

Легко убедиться в том, что три рассмотренные операции коммутативны т.е. $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$, $G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$, $G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$, и многоместны, т.е. $G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4 \cap \dots$, $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup \dots$ и так далее. Рассмотрим унарные операции на графе.

Удаление вершины. Если x_i -вершина графа $G=(X,A)$, то $G-x_i$ -порожденный подграф графа G на множестве вершин $X-x_i$, т.е. $G-x_i$ является графом, получившимся после удаления из графа G вершины x_i и всех ребер,

инцидентных этой вершине. Удаление вершины x_3 показано на рис.8, б (для исходного графа, изображенного на рис.8, а).

Удаление ребра или удаление дуги. Если a_i -дуга графа $G=(X,A)$, то $G-a_i$ - подграф графа G , получающийся после удаления из G дуги a_i . Заметим, что концевые вершины дуги a_i не удаляются. Удаление из графа множества вершин или дуг определяются как последовательное удаление определенных вершин или дуг. Удаление дуг a_4 и a_7 показано на рис.8, в.

Замыкание или отождествление. Говорят, что пара вершин x_i и x_j в графе G замыкается (или отождествляется), если они замыкаются такой новой вершиной, что все дуги в графе G , инцидентные x_i и x_j , становятся инцидентными новой вершине. Например, результат замыкания вершины x_1 и x_6 показан на рис.8,г для графа G (рис.8, а).

Стягивание. Под стягиванием подразумевают операцию удаления дуги или ребра и отождествление его концевых вершин. Граф, изображенный на рис.6,д получен стягиванием дуги A_1 , а на рис.8,е - стягиванием дуг a_1 , a_6 и a_7 .

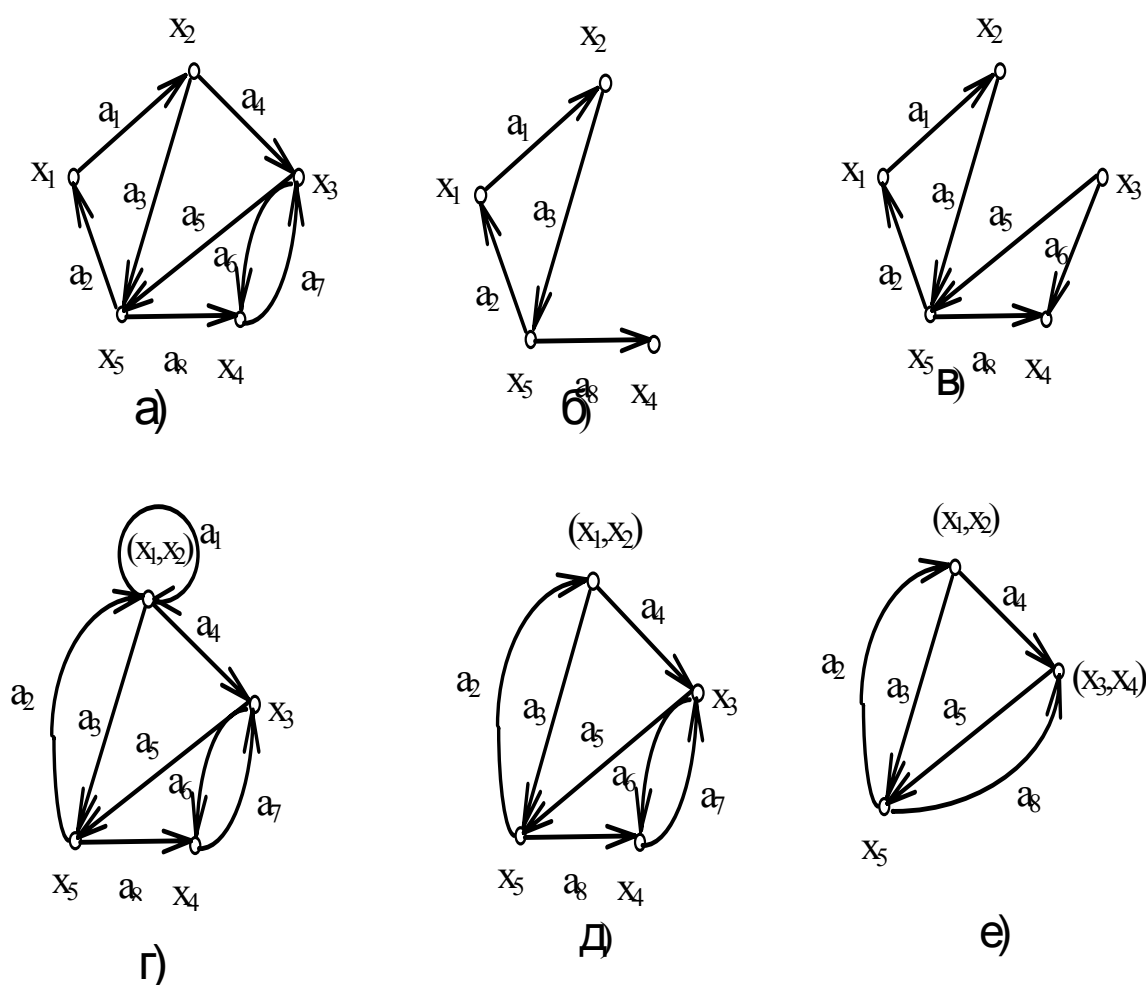


Рис. 8. Исходный граф G (а); удаление вершины $G \setminus \{x_3\}$ (б); удаление ребер $G \setminus \{a_4, a_7\}$ (в); отождествление вершин x_1, x_2 (г); стягивание дуги a_1 (д); стягивание дуг a_6 и a_7 (е).

2. ДОСТИЖИМОСТЬ И СВЯЗАННОСТЬ В ГРАФАХ

2.1. Многозначные отображения

2.1.1. Прямые отображения

Прямым отображением 1-го порядка вершины x_i является множество таких вершин графа, для которых существует дуга (x_i, x_j) , т.е.

$\Gamma^1(x_i) = \{x_j : \exists \text{ дуга } (x_i, x_j) \in A\}$ для графа $G=(X, A)$, где $X=\{x_i\}$, $i=1,2,\dots,n$ - множество вершин, а $A=\{a_i\}$, $i=1,2,\dots,m$ - множество дуг.

Прямое отображение 2-го порядка вершины x_i - это прямое отображение от прямого отображения 1-го порядка, т.е.

$$\Gamma^{+2}(x_i) = \Gamma^+(\Gamma^{+1}(x_i)).$$

Аналогично, можно записать для прямого отображения 3-го и т.д. n-ого порядка.

$$\Gamma^{+3}(x_i) = \Gamma^+(\Gamma^{+2}(x_i)) = \Gamma^+(\Gamma^+(\Gamma^{+1}(x_i)))$$

...

$$\Gamma^{+n}(x_i) = \Gamma^+(\Gamma^{+(n-1)}(x_i))$$

Прямые многозначные отображения для графа на рис.9 находятся следующим образом:

$$\Gamma^{+1}(x_1) = \{x_2, x_3\},$$

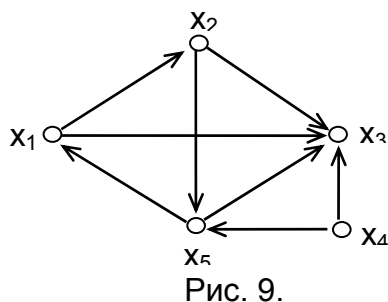


Рис. 9.

$$\Gamma^{+2}(x_1) = \Gamma^+(\Gamma^{+1}(x_1)) = \Gamma^+(x_2, x_3) = \{x_3, x_5\}$$

$$\Gamma^{+3}(x_1) = \Gamma^+(\Gamma^{+2}(x_1)) = \Gamma^+(x_3, x_5) = \{x_3, x_1\} \quad \text{и т. д.}$$

2.1.2. Обратные отображения

Обратным отображением 1-го порядка для вершины x_i является множество элементов x_j таких, что существует дуга (x_j, x_i) , принадлежащая множеству дуг графа, т.е. $\Gamma^{-1}(x_i) = \{x_j : \exists \text{ дуга } (x_j, x_i) \in A\}$

Обратные отображения 2-го, 3-го и т.д. n-го порядка определяется следующим образом:

$$\Gamma^{-2}(x_i) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(x_i))$$

$$\Gamma^{-3}(x_i) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-2}(x_i))$$

...

$$\Gamma^{-n}(x_i) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-(n-1)}(x_i))$$

Для графа на рис.9 обратные многозначные отображения вершины x_1 находятся следующим образом:

$$\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_5\}$$

$$\Gamma^{-2}(x_1) = \Gamma(\Gamma^{-1}(x_1)) = \Gamma(x_5) = \{x_2, x_4\}$$

$$\Gamma^{-3}(x_1) = \Gamma(\Gamma^{-2}(x_1)) = \Gamma(x_2, x_4) = \{x_1\}$$

$$\Gamma^{-4}(x_1) = \Gamma(\Gamma^{-3}(x_1)) = \Gamma(x_1) = \{x_5\} \text{ и т.д.}$$

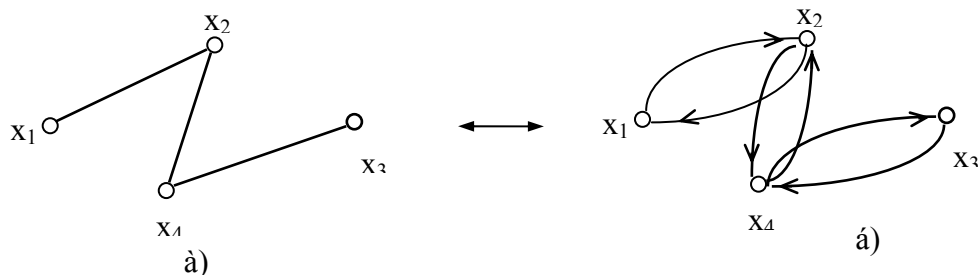


Рис. 10. Граф : а) - неориентированный ;
б) - тождественный ему ориентированный .

ПРИМЕЧАНИЕ. 1) Когда отображение действует не на одну вершину, а на множество вершин $X_q = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$, то под $\Gamma(X_q)$ понимают объединение.

$$\Gamma(x_1) \cup \Gamma(x_2) \cup \dots \cup \Gamma(x_q).$$

2) Многозначное отображение для неориентированного графа строится, если представить каждое ребро двумя противоположно направленными дугами (рис.10).

Упражнения 2.1

1. Найти прямые многозначные отображения для всех вершин графа, показанного на рисунке.

Ответ: $\Gamma^{+1}(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,

$$\Gamma^{+2}(x_1) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+1}(x_1)) = \Gamma^{+}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\},$$

$$\Gamma^{+3}(x_1) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+2}(x_1)) = \Gamma^{+}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$\Gamma^{+4}(x_1) = \Gamma^{+5}(x_1) = \Gamma^{+6}(x_1) \text{ и т. д.}$$

$$\Gamma^{+1}(x_2) = \{x_1, x_3\},$$

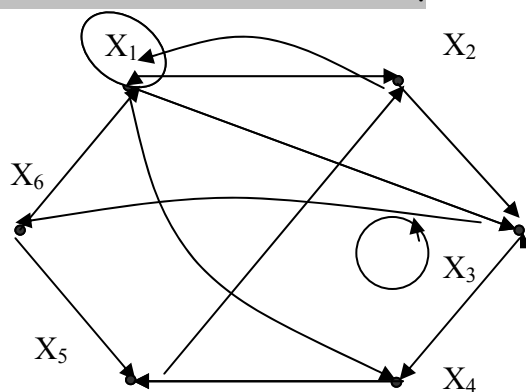
$$\Gamma^{+2}(x_2) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+1}(x_2)) = \Gamma^{+}(\dots) = \{\dots\},$$

$$\Gamma^{+3}(x_2) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+2}(x_2)) = \Gamma^{+}(\dots) = \{\dots\} \quad \Gamma^{+4}(x_2) = \dots$$

.....

$$\Gamma^{+1}(x_3) = \{x_4, x_6\},$$

$$\Gamma^{+2}(x_3) = \Gamma^{+}(\dots) = \{\dots\},$$



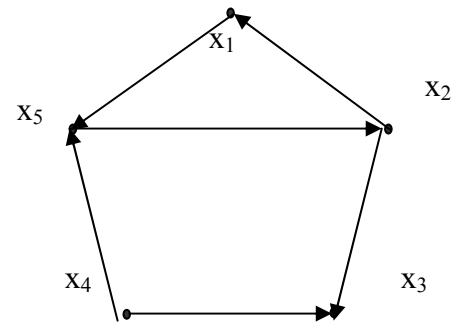
$$\begin{aligned}
\Gamma^{+3}(x_3) &= \Gamma^+(\Gamma^{+2}(x_3)) = \Gamma^+(\dots) = \{\dots\} \\
\Gamma^{+4}(x_3) &= \dots \\
\Gamma^{+1}(x_4) &= \{\dots\}, \\
\Gamma^{+2}(x_4) &= \Gamma^+(\Gamma^{+1}(x_4)) = \Gamma^+(\dots) = \{\dots\}, \\
\Gamma^{+3}(x_4) &= \Gamma^+(\Gamma^{+2}(x_4)) = \Gamma^+(\dots) = \dots \\
\Gamma^{+4}(x_4) &= \Gamma^+(\dots) = \{\dots\}, \\
\Gamma^{+5}(x_4) &= \dots \\
\Gamma^{+1}(x_5) &= \{\dots\}, \\
\Gamma^{+2}(x_5) &= \Gamma^+(\dots) = \{\dots\}, \\
\Gamma^{+3}(x_5) &= \dots = \dots = \{\dots\}, \\
\Gamma^{+4}(x_5) &= \dots = \{\dots\}, \\
\Gamma^{+5}(x_5) &= \dots \\
\Gamma^{+1}(x_6) &= \{\dots\}, \\
\Gamma^{+2}(x_6) &= \dots = \{\dots\}, \\
\Gamma^{+3}(x_6) &= \Gamma^+(\dots) = \{\dots\} \\
\Gamma^{+4}(x_6) &= \dots
\end{aligned}$$

2. Найти обратные многозначные отображения для всех вершин графа, показанного на рисунке.

Ответ: $\Gamma^{-1}(x_1) = \{x_2\}$,
 $\Gamma^{-2}(x_1) = \Gamma^-(\Gamma^{-1}(x_1)) = \Gamma^-(x_2) = \{x_5\}$,
 $\Gamma^{-3}(x_1) = \Gamma^-(\Gamma^{-2}(x_1)) = \Gamma^-(x_5) = \{x_1, x_4\}$,
 $\Gamma^{-4}(x_1) = \Gamma^-(x_1, x_4) = \{x_2\}$, $\Gamma^{-5}(x_1) = \Gamma^-(x_2) = \{x_5\}$, $\Gamma^{-6}(x_1) = \Gamma^-(x_5) = \{x_1, x_4\}$,

и т. д.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{-1}(x_2) &= \{x_5\}, \\
\Gamma^{-2}(x_2) &= \Gamma^-(x_5) = \{x_1, x_4\}, \quad \Gamma^{-3}(x_2) = \Gamma^-(x_1, x_4) = \{x_2\}, \quad \Gamma^{-4}(x_2) = \{x_5\}, \text{ и т. д.} \\
\Gamma^{-1}(x_3) &= \{x_4, x_2\}, \quad \Gamma^{-2}(x_3) = \Gamma^-(x_2, x_4) = \{x_1, x_3, x_5\}, \quad \Gamma^{-3}(x_3) = \{x_2, x_5\}, \quad \Gamma^{-4}(x_3) = \\
&= \{x_1, x_3, x_2\}, \quad \Gamma^{-5}(x_3) = \{x_1, x_3, x_5\}, \quad \Gamma^{-6}(x_3) = \{x_2, x_5\}, \text{ и т. д.} \\
\Gamma^{-1}(x_4) &= \{\dots\}, \\
\Gamma^{-2}(x_4) &= \Gamma^-(\dots) = \{\dots\}, \\
\Gamma^{-3}(x_4) &= \dots \\
\Gamma^{-1}(x_5) &= \{\dots\}, \\
\Gamma^{-2}(x_5) &= \Gamma^-(\dots) = \{\dots\}, \\
\Gamma^{-3}(x_5) &= \dots = \dots = \{\dots\}, \\
\Gamma^{-4}(x_5) &= \dots = \{\dots\}, \\
\Gamma^{-5}(x_5) &= \dots
\end{aligned}$$



2.2. Транзитивные замыкания

2.2.1. Прямое транзитивное замыкание.

Прямым транзитивным замыканием некоторой вершины x_i - $T^+(x_i)$ является объединение самой вершины x_i с прямыми отображениями 1-го порядка, второго порядка и т.д., т.е.

$$T^+(x_i) = x_i \cup \Gamma^1(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup \dots$$

Многочленное отображение находится до тех пор, пока в них добавляются новые вершины.

Так для графа на рис.9.

$$\Gamma^1(x_1) = \{x_2, x_3\}$$

$$\Gamma^2(x_1) = \{x_3, x_5\}$$

$$\Gamma^3(x_1) = \{x_3, x_1\}$$

$$\Gamma^4(x_1) = \{x_2, x_3\}$$

Отображение четвертого порядка содержит те же элементы, что и отображение 1-го порядка, следовательно других элементов в последующих отображениях не появится. Транзитивное замыкание для вершины x_1 получается следующим образом :

$$T^+(x_1) = x_1 \cup \{x_2, x_3\} \cup \{x_3, x_5\} \cup \{x_3, x_1\} = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$$

Проанализировав множество вершин, входящих в $T^+(x_i)$, можно сделать вывод: прямое транзитивное замыкание содержит вершины, в которые есть пути из вершины x_i . Таким образом, можно дать второе определение $T^+(x_i)$.

Прямое транзитивное замыкание некоторой вершины x_i - $T^+(x_i)$ - это множество вершин, достижимых из вершины x_i , т.е. $T^+(x_i) = \{x_j \mid \exists \text{ путь из } x_i \text{ в } x_j\}$.

2.2.2. Обратное транзитивное замыкание

Обратным транзитивным замыканием некоторой вершины x_i - $T^-(x_i)$ является объединение этой вершины с обратными отображениями 1-го, 2-го и т.д. n -го порядка, т.е. $T^-(x_i) = x_i \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \dots$

Иначе, обратное транзитивное замыкание для некоторой вершины x_i - $T^-(x_i)$ - это множество вершин, из которых достижима вершина x_i , т.е. $T^-(x_i) = \{x_j \mid \exists \text{ путь из } x_j \text{ в } x_i\}$

Рассмотрим построение обратного транзитивного замыкания для графа на рис.9

$$\Gamma^1(x_1) = \{x_5\}$$

$$\Gamma^2(x_1) = \{x_2, x_4\}$$

$$\Gamma^3(x_1) = \{x_1\}$$

$$\Gamma^4(x_1) = \{x_5\}$$

$$T(x_1) = x_1 \cup \{x_5\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_1\} \cup \{x_5\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$$

2.2.3.Нахождение транзитивных замыканий по матрице смежности.

Рассмотрим метод нахождения прямого транзитивного замыкания по матрице смежности, показанной на рис.11,а для вершины x_2 графа , изображенного на рис.11,б. Вторая клетка уже занята нулем, поэтому 1 не заносим. 2-й шаг начинается просмотром 5-й строки матрицы смежности, соответствующий вершине x_5 графа. Находим, что элементы $a_{51}=1$ и $a_{54}=1$, то есть из вершины x_5 имеются дуги в вершины x_1 и x_4 или иначе из вершины x_2 имеются пути длиной 2 в вершины x_1 и x_4 . Длину пути 2 заносим в 1-ю и 4-ю клетки столбца $T^+(x_2)$. На 3-м шаге анализируются 1-я и 4-я строки матрицы смежности A. Находим элементы $a_{12}=1$, $a_{13}=0$, $a_{43}=1$. В соответствующие свободные клетки столбца $T^+(x_2)$ заносим длину пути от вершины x_2 ,равную 3.Это возможно сделать только для вершины x_3 , так как вторая клетка уже занята. Анализ 3-й строки матрицы на 4-м шаге показывает, что из вершины x_3 нет исходящих дуг, следовательно процесс формирования прямого транзитивного замыкания завершен.

$\xrightarrow{3}$
 $\xrightarrow{1}$
 $\xrightarrow{4}$
 $\xrightarrow{3}$
 $\xrightarrow{2}$
 $\xrightarrow{\quad}$

$A =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	1	0	0	1	0	0
x_6	1	0	0	0	1	1

$T^+(x_2)$
2
0
3
2
1

x_1
 x_2
 x_3
 x_4
 x_5
 x_6

$T(x_1)$
0
1
1
3
2

a)

\downarrow
 \downarrow
 \downarrow
 \downarrow
 \downarrow
 \downarrow

2
 4
 1
 2
 3
 3

\downarrow
 \downarrow
 \downarrow
 \downarrow
 \downarrow
 \downarrow

x_1
 x_2
 x_3
 x_4
 x_5
 x_6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0	1	0
x_3	0	0	0	0	0	0

Таким образом в столбце $T^+(x_2)$ стоят числа равные длине пути от вершины x_2 к соответствующим вершинам графа. Путь от x_2 к x_3 равный 3 показан штриховой линией на рис.11,б. В столбце $T^+(x_2)$ отмечены все вершины, достижимые из вершины x_2 , следовательно они входят в $T^+(x_2)$.

$$T^+(x_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

Во втором столбце показано построение прямого транзитивного замыкания вершины x_1 - $T^+(x_1)$.

$$T^+(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}.$$

Нахождение обратного транзитивного замыкания по матрице смежности показано на рис.11,в. Рассмотрим нахождение обратного транзитивного замыкания вершины x_3 - $T^-(x_3)$, которое начинается с занесения 0 в 3-ю клетку строки $T^-(x_3)$. На 1-м шаге алгоритма, помеченного стрелкой с цифрой 1 просматриваем 3-й столбец матрицы A. Определяем элементы, равные 1, то есть $a_{13}=1$ и $a_{43}=1$. Следовательно в графе из вершин x_1 и x_4 есть дуги в вершину x_3 . Заносим 1 в 1-ю и 4-ю клетки $T^-(x_3)$. На втором шаге просматриваем 1-й и 4-й столбец матрицы A. Находим $a_{51}=1$, $a_{61}=1$, $a_{54}=1$ и проставляем 2 (так как длина пути от этих вершин до вершины x_3 равна 2) в свободные клетки $T^-(x_3)$, т.е. в 5-ю и 6-ю клетки. 3-й шаг заключается в просмотре 5-го и 6-го столбца матрицы A. Элементы $a_{25}=1$, $a_{65}=1$, $a_{66}=1$ позволяют поставить 3 во 2-ю клетку строки $T^-(x_3)$. 4-й шаг просмотра 2-го столбца дает элементы $a_{12}=1$ и $a_{22}=1$, уже вошедшие в $T^-(x_3)$. Итак сформировано обратное транзитивное замыкание для вершины x_3 .

$$T^-(x_3) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}.$$

Числа, стоящие в клетках $T^-(x_3)$, показывают длину кратчайшего пути от соответствующих вершин до вершины x_3 .

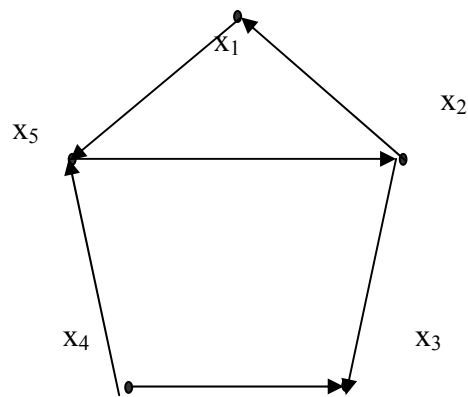
Во второй строке показано формирование обратного транзитивного замыкания вершины x_1 .

$$T^-(x_1) = \{x_1, x_2, x_5, x_6\}.$$

На основе рассмотренного метода был разработан алгоритм, реализованный программно. Блок-схема алгоритма построения транзитивного замыкания (прямого или обратного) и программа приведены в прил. 2.

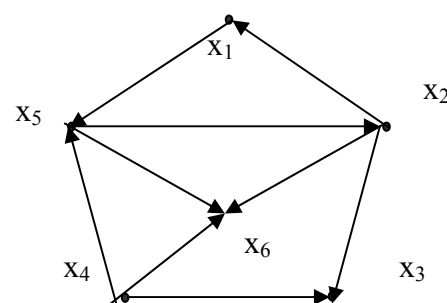
1. Найти прямое и обратное транзитивные замыкания для вершин x_1 и x_3 .

Ответ: $T^+(x_1) = x_1 \cup \Gamma^{+1}(x_1) \cup \Gamma^{+2}(x_1) \cup \dots = \{ \dots \}$,
 $T^-(x_1) = x_1 \cup \Gamma^{-1}(x_1) \cup \Gamma^{-2}(x_1) \cup \dots = \{ \dots \}$,
 $T^+(x_3) = x_3 \cup \Gamma^{+1}(x_3) \cup \Gamma^{+2}(x_3) \cup \dots = \{ \dots \}$,
 $T^-(x_3) = x_3 \cup \Gamma^{-1}(x_3) \cup \Gamma^{-2}(x_3) \cup \dots = \{ \dots \}$.



2. По матрице смежности графа найти прямые и обратные транзитивные замыкания всех вершин.

Ответ: $T^+(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}$, $T^+(x_2) = \{ \dots \}$,
 $T^+(x_3) = \{ \dots \}$,
 $T^+(x_4) = \{ \dots \}$,
 $T^+(x_5) = \{ \dots \}$,
 $T^+(x_6) = \{ \dots \}$.



Матрица смежности

2.3 Достижимость и контрдостижимость

Задач, в которых используется понятие достижимости довольно много. Вот одна из них. Граф может быть моделью какой-то организации, в которой люди

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$T^+(x_1)$	$T^+(x_2)$	$T^+(x_3)$	$T^+(x_4)$	$T^+(x_5)$	$T^+(x_6)$
x_1	0	0	0	0	1	0	0					
x_2	1	0	1	0	0	1	2					
x_3	0	0	0	0	0	0	3					
x_4	0	0	1	0	1	1						
x_5	0	1	0	0	0	1	1					
x_6	0	0	0	0	0	0	2					

представлены вершинами, а дуги интерпретируют каналы связи. При

0	1		3	2		$T^-(x_1) = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$
						$T^-(x_2) = \{ \dots \}$
						$T^-(x_3) = \{ \dots \}$
						$T^-(x_4) = \{ \dots \}$
						$T^-(x_5) = \{ \dots \}$
						$T^-(x_6) = \{ \dots \}$

рассмотрении такой модели можно поставить вопрос, может ли информация от

одного лица x_i быть передана другому лицу x_j , то есть существует ли путь, идущий от вершины x_i к вершине x_j . Если такой путь существует, то говорят, что вершина x_j достижима из вершины x_i . Можно интересоваться достижимостью вершины x_j из вершины x_i только на таких путях, длины которых не превосходят заданной величины или длина которых меньше наибольшего числа вершин в графе и т.п. задачи.

Достижимость в графе описывается матрицей достижимостей $R=[r_{ij}]$, $i,j=1,2, \dots n$, где n -число вершин графа, а каждый элемент определяется следующим образом:

$r_{ij}=1$, если вершина x_j достижима из x_i ,

$r_{ij}=0$, в противном случае.

Множество вершин $R(x_i)$ графа G , достижимых из заданной вершины x_i , состоит из таких элементов x_j , для которых (i,j) -ый элемент в матрице достижимостей равен 1. Очевидно, что все диагональные элементы в матрице R равны 1, поскольку каждая вершина достижима из себя самой путем длины 0. Поскольку прямое отображение 1-го порядка $\Gamma^1(x_i)$ является множеством таких вершин x_j , которые достижимы из x_i с использованием путей длины 1, то множество $\Gamma^+(\Gamma^1(x_i)) = \Gamma^2(x_i)$ состоит из вершин, достижимых из x_i с использованием путей длины 2. Аналогично $\Gamma^p(x_i)$ является множеством вершин, которые достижимы из x_i с помощью путей длины p .

Так как любая вершина графа, которая достижима из x_i , должна быть достижима с использованием пути (или путей) длины 0, или 1, или 2, ..., или p , то множество вершин, достижимых для вершины x_i , можно представить в виде:

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^1(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^p(x_i).$$

Как видим, множество достижимых вершин $R(x_i)$ представляет собой прямое транзитивное замыкание вершины x_i , т.е. $R(x_i) = T^+(x_i)$. Следовательно, для построения матрицы достижимости находим достижимые множества $R(x_i)$ для всех вершин $x_i \in X$. Полагая, $r_{ij}=1$, если $x_j \in R(x_i)$ и $r_{ij}=0$ в противном случае.

Для графа, приведенного на рис.12,а. множества достижимостей находятся следующим образом:

$$R(x_1) = \{x_1\} \cup \{x_2, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\},$$

$$R(x_2) = \{x_2\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_5\} = \{x_2, x_4, x_5\},$$

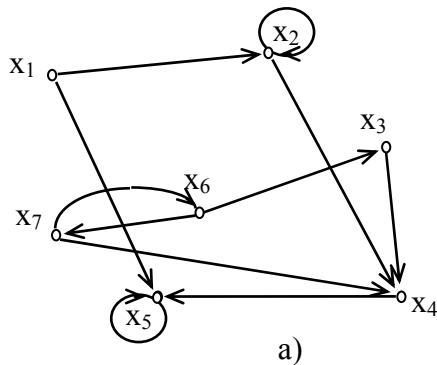
$$R(x_3) = \{x_3\} \cup \{x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_3, x_4, x_5\},$$

$$R(x_4) = \{x_4\} \cup \{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_4, x_5\},$$

$$R(x_5) = \{x_5\} \cup \{x_5\} = \{x_5\},$$

$$R(x_6) = \{x_6\} \cup \{x_3, x_7\} \cup \{x_4, x_6\} \cup \{x_3, x_5, x_7\} \cup \{x_4, x_5, x_6\} = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\},$$

$$R(x_7) = \{x_7\} \cup \{x_4, x_6\} \cup \{x_3, x_5, x_7\} \cup \{x_4, x_5, x_6\} = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}.$$



	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₁	0	1	0	0	1	0	0
x ₂	0	1	0	1	0	0	0
x ₃	0	0	0	1	0	0	0
x ₄	0	0	0	0	1	0	0
x ₅	0	0	0	0	1	0	0
x ₆	0	0	1	0	0	0	1
x ₇	0	0	0	1	0	1	0

б)

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₁	1	1	0	1	1	0	0
x ₂	0	1	0	1	1	0	0
x ₃	0	0	1	1	1	0	0
x ₄	0	0	0	1	1	0	0
x ₅	0	0	0	0	1	0	0
x ₆	0	0	1	1	1	1	1
x ₇	0	0	1	1	1	1	1

R=

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
x ₁	1	0	0	0	0	0	0
x ₂	1	1	0	0	0	0	0
x ₃	0	0	1	0	0	1	1
x ₄	1	1	1	1	0	1	1
x ₅	1	1	1	1	1	1	1
x ₆	0	0	0	0	0	1	1
x ₇	0	0	0	0	0	1	1

Q=

Рис 12. а)- граф; б) - матрица смежности; в) - матрица достижимости; г) - матрица контрдостижимости.

Матрица достижимостей имеет вид, как показано на рис. 12,в. Матрицу достижимостей можно построить по матрице смежности (рис.12,б), формируя множества $T^+(x_i)$ по методу, описанному в п.2.2.3, для каждой вершины x_i .

Матрица контрдостижимостей $Q = [q_{ij}]$, $i, j=1,2, \dots, n$, где n -число вершин графа, определяется следующим образом:

$q_{ij}=1$, если из вершины x_j можно достичь вершину x_i ,

$q_{ij}=0$, в противном случае.

Контрдостижимым множеством $Q(x_i)$ является множество таких вершин, что из любой вершины этого множества можно достичь вершину x_i . Аналогично

построению достижимого множества $R(x_i)$ можно записать выражение для $Q(x_i)$:

$$Q(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^{-p}(x_i).$$

Таким образом, видно, что $Q(x_i)$ - это есть не что иное как обратное транзитивное замыкание вершины x_i , т.е. $Q(x_i) = T^-(x_i)$. Из определений очевидно, что столбец x_i матрицы Q (в котором $q_{ij}=1$, если $x_j \in Q(x_i)$, и $q_{ij}=0$ в

противном случае) совпадает со строкой x_i матрицы R , т.е. $Q = R^T$, где R^T - матрица, транспонированная к матрице достижимостей R .

Матрица контрдостижимостей показана на рис.12 ,г.

Следует отметить, что поскольку все элементы матриц R и Q равны 1 или 0, то каждую строку можно хранить в двоичной форме, экономя затраты памяти ЭВМ. Матрицы R и Q удобны для обработки на ЭВМ, так как с вычислительной точки зрения основными операциями являются быстродействующие логические операции.

Алгоритм построения матриц достижимостей и контрдостижимостей приведен в прил.3.

Упражнения 2.3

1. Для графа построить матрицу достижимости R и контрдостижимости Q .

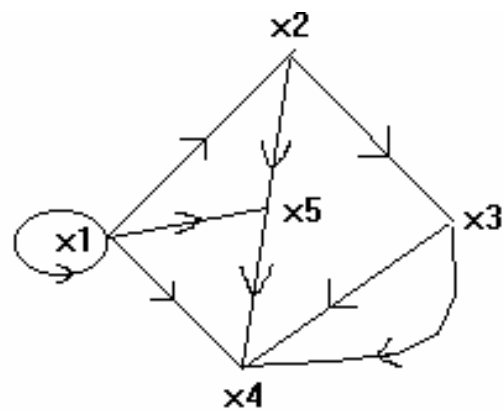
Ответ:

Матрица достижимости

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1					
x_2					
x_3					
x_4					
x_5					

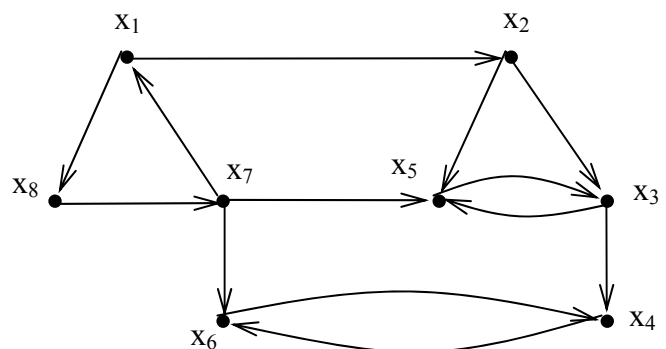
Матрица контрдостижимости

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1					
x_2					
x_3					
x_4					
x_5					



2. Для графа, приведенного на рисунке, найти матрицы достижимости и контрдостижимости.

Ответ:



Матрица смежности

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1	0	1	0	0	0	0	0	1
X2	0	0	1	0	1	0	0	0
X3	0	0	0	1	1	0	0	0
X4	0	0	0	0	0	1	0	0
X5	0	0	1	0	0	0	0	0
X6	0	0	0	1	0	0	0	0
X7	1	0	0	0	1	1	0	0
X8	0	0	0	0	0	0	1	0

Матрица достижимости R

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1								
X2								
X3								
X4								
X5								
X6								
X7								
X8								

Матрица контрдостижимости Q

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1								
X2								
X3								
X4								
X5								
X6								
X7								
X8								

3. ГРАФЫ И ПОДГРАФЫ

3.1 Типы графов.

Граф $G = (X, A)$ называют **полным**, если для любой пары вершин x_i и x_j в X существует ребро (x_i, x_j) в неориентированном графе $\bar{G} = (X, \bar{A})$, т. е. для каждой пары вершин графа G должна существовать по крайней мере одна дуга, соединяющая их (рис 13а).

Граф $G = (X, A)$ называется **симметрическим**, если в множестве дуг A для любой дуги (x_i, x_j) существует также противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i) (рис.13б.).

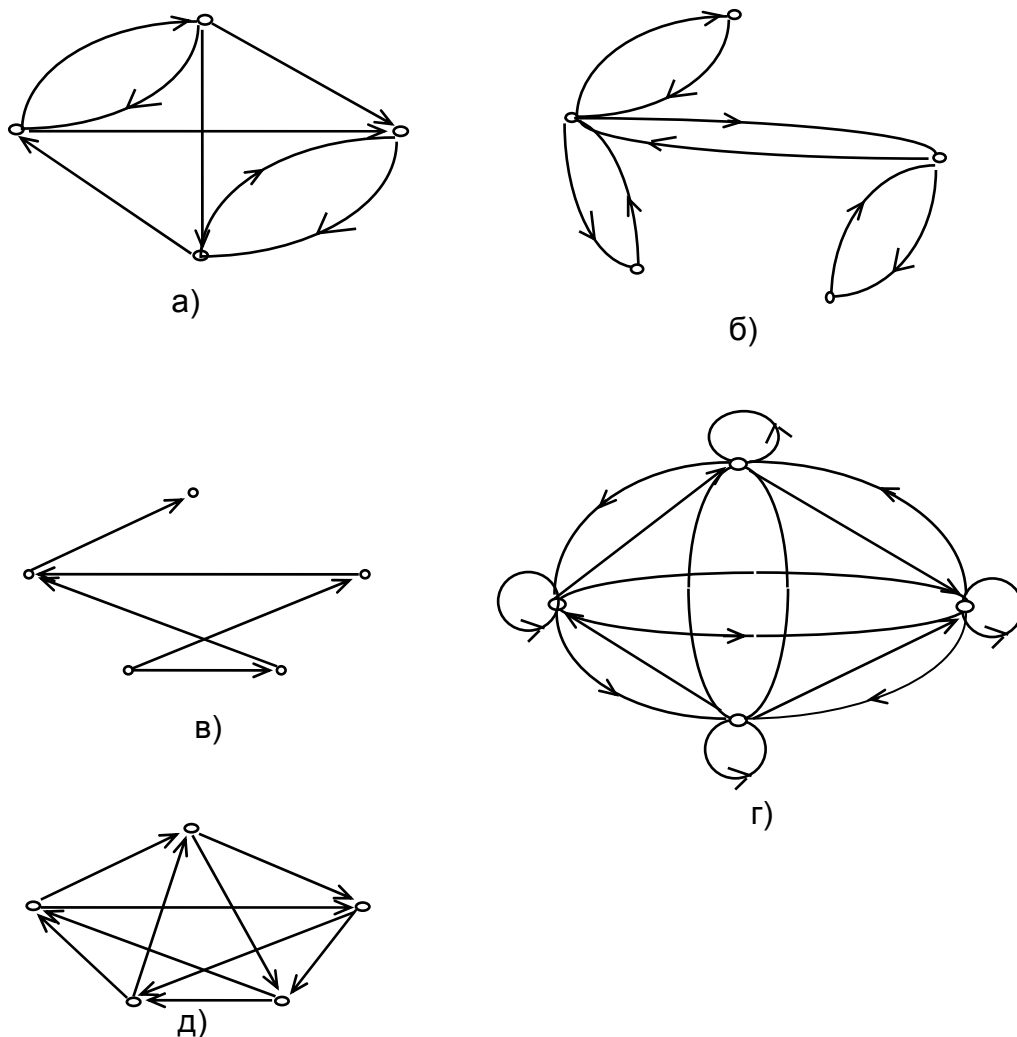


Рис. 13. Виды графов: а) - полный граф, б) - симметрический граф, в)- антисимметрический граф, г) - полный симметрический, д) - полный антисимметрический

Антисимметрическим называется такой граф, для которого справедливо следующее условие: если дуга $(x_i, x_j) \in A$, то во множестве A нет противоположно

ориентированной дуги, т.е. $(x_j, x_i) \notin A$ (рис.13в.).
 антисимметрическом графе нет петель.

Очевидно, что в

В качестве примера можно рассмотреть граф, являющийся моделью некоторой группы людей: вершины графа интерпретируют людей, а дуги - их взаимоотношения. Так, если в графе дуга, нарисованная от вершины x_i к вершине x_j , означает, что x_i является другом или родственником x_j , тогда данный граф должен быть симметрическим. Если дуга, направленная от x_i к x_j , означает, что вершина x_j подчинена вершине x_i , то такой граф должен быть антисимметрическим.

Комбинируя определения полного и симметрического графов и полного и антисимметрического графов, получили следующие определения:

- Граф $G = (X, A)$, в котором любая пара вершин (x_i, x_j) соединена двунаправленными дугами называется **полным симметрическим**. (рис. 13. г)
- Граф $G = (X, A)$, имеющий для каждой пары вершин (x_i, x_j) только одну дугу, называется **полным антисимметрическим**. (Рис 13. д) или **турниром**.

Связный граф, не имеющий циклов, либо граф, в котором каждая пара вершин соединена одной и только одной простой цепью называется **деревом** (рис.14 а, б).

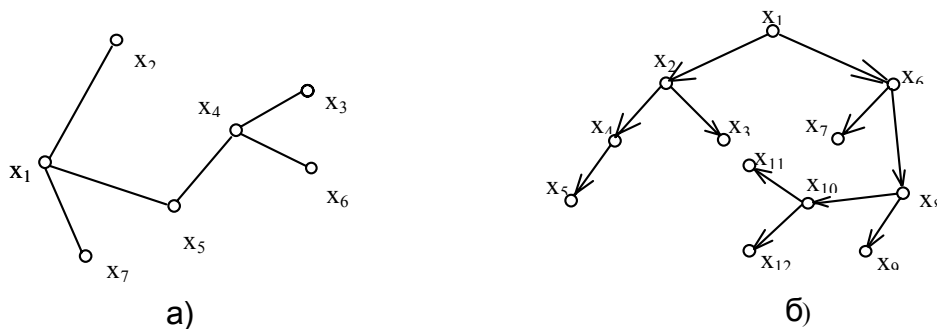


Рис. 14. Граф типа "дерево": а) - неориентированное дерево, б) - ориентированное дерево

Ориентированное дерево представляет собой ориентированный граф без циклов, в котором полустепень захода каждой вершины, за исключением одной (например, вершины x_1), равна 1, а полустепень захода вершины x_1 , (называют корнем этого дерева) равна 0. (рис.14 б).

Граф $G = (X, A)$, который может быть изображен на плоскости или сфере без пересечений называется **планарным**. (рис.15)

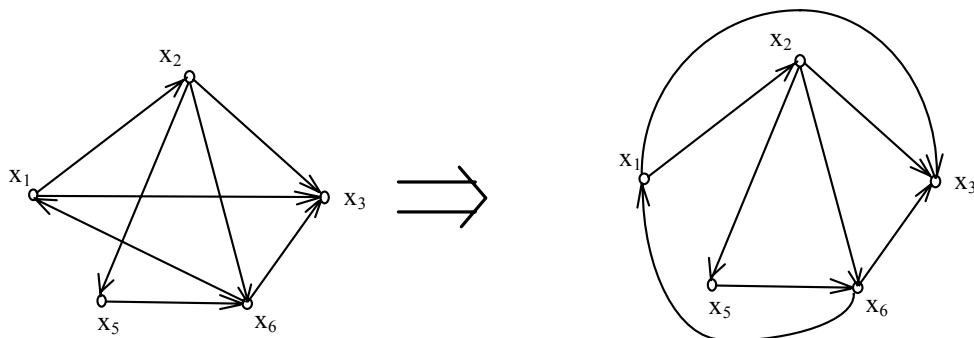


Рис. 15. Планарный граф

На рис.16 показаны непланарные графы. Эти два графа играют важную роль в теории планарных графов и известны как графы Куратовского.

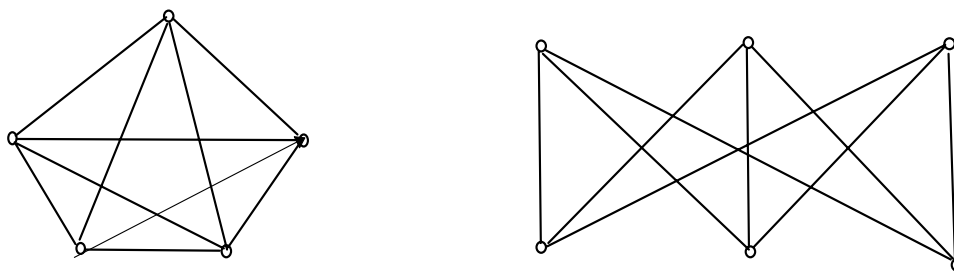


Рис. 16. Непланарные графы.

Неориентированный граф $G = (X, A)$ называют **двудольным**, если множество его вершин X может быть разбито на такие два подмножества X^a и X^b , что каждое ребро имеет один конец в X^a , а другой в X^b (рис.17а).

Ориентированный граф G называется **двудольным**, если его неориентированный двойник - двудольный граф (рис.17б,в).

Двудольный граф $G=(X^a \cup X^b, A)$ называют **полным**, если для любых двух вершин $x_i \in X^a$ и $x_j \in X^b$ существует ребро (x_i, x_j) в $G=(X, A)$. (рис.14.г).

Для доказательства двудольности графа существует теорема .

3.1.1. Теорема о двудольности

Граф $G = (X, A)$ является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Доказательство.

1.Необходимость. Поскольку множество X разбивается на две части X^a и X^b , то $X^a \cup X^b = X$ и $X^a \cap X^b = \emptyset$.

Пусть существует цикл нечетной длины $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iq}, x_{i1}$. Без потери общности допустим, что $x_{i1} \in X^a$. Согласно определению одна из двух следующих друг за другом вершин этого цикла должна принадлежать множеству X^a , а другая - множеству X^b , тогда имеем: $x_{i2} \in X^b$, $x_{i3} \in X^a$ и т.д. Следовательно, $x_{ik} \in X^a$, если k - нечетное, и $x_{ik} \in X^b$, если k - четное.

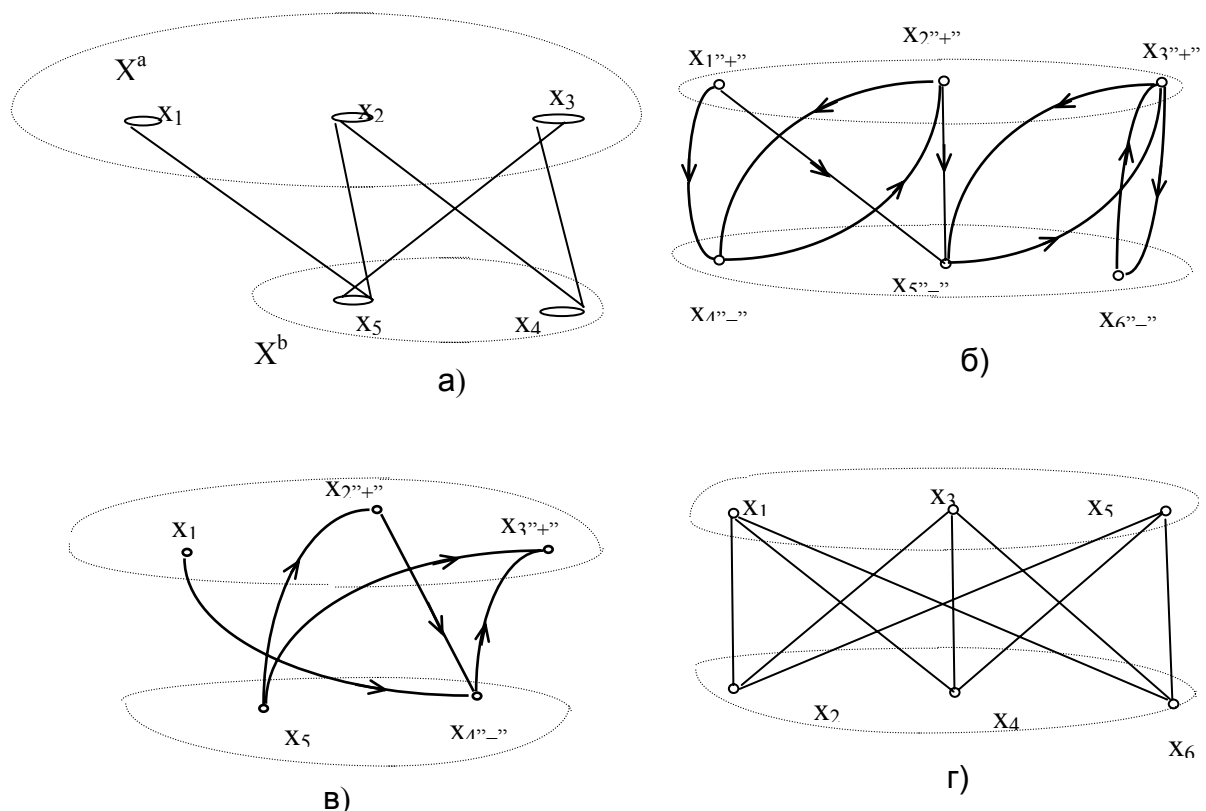


Рис. 17. Двудольные графы. а) , б), в), - двудольные графы
г) - полный двудольный граф.

Мы предположили, что длина цикла нечетная. Поэтому из соотношения $x_{iq} \in X^a$ следует, что $x_{i1} \in X^b$. Это противоречит исходному условию, поскольку $X^a \cap X^b = \emptyset$ и вершина не может принадлежать одновременно как X^a , так и X^b .

Для большей ясности можно рассмотреть цикл нечетной длины для графа изображенного на рис.18

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & \text{---} & x_3 & \text{---} & x_5 & \text{---} & x_4 & \text{---} & x_2 & \text{---} & x_1 \\ X^a & & X^b & & X^a & & X^b & & X^a & & X^b \end{array}$$

Поочередно помечая вершины, мы видим противоречие: вершина $x_1 \in X^a$ и согласно определению должна принадлежать X^b , следовательно рассматриваемый граф не является двудольным.

2. **Достаточность.** Предположим, что в графе G не существует цикла нечетной длины. Выберем одну из вершин графа, например x_i , и пометим ее "+". Выполним итерационную процедуру.

Берем уже помеченную вершину x_i и помечаем все вершины из множества $\Gamma^{+1}(x_i)$ знаком, противоположным тому, который присвоен вершине x_i .

Будем продолжать эту операцию до тех пор, пока:

1. -все вершины не будут помечены, а знаки, приписанные им, согласованы (иными словами, любые две вершины, соединенные ребром, помечены противоположными знаками);

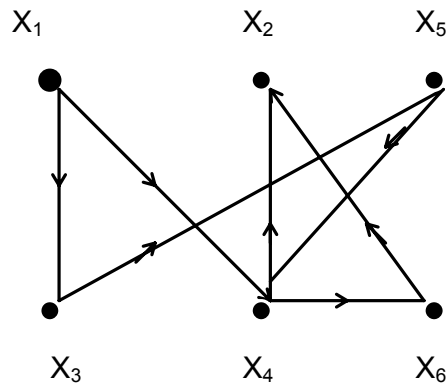


Рис. 18 Построение цикла

2. -для каждой помеченной вершины x_i все вершины из множества $\Gamma^{+1}(x_i)$ помечены, но существуют другие, еще не помеченные вершины;

3.-некоторая вершина, например x_{ik} , которая была уже помечена каким-то знаком ("+" или "-"), может быть помечена теперь (со стороны другой вершины) знаком, противоположным приписанному вершине x_{ik} .

В случае 1 все вершины, помеченные знаком "+" отнесем к множеству X^a , а помеченные знаком "-" - к множеству X^b . Поскольку все ребра соединяют вершины, помеченные противоположными знаками, то граф является двудольным.

Рассмотрим граф на рис. 17,б. Пометим знаком "+", например, вершину x_1 . Найдем отображение $\Gamma^+(x_1) = \{x_4, x_5\}$. Вершины x_4 и x_5 пометим знаком "-". Отображение $\Gamma^+(x_4, x_5) = \{x_2, x_3\}$, помечаем вершины x_2 и x_3 знаком "+". $\Gamma^+(x_2, x_3) = \{x_4, x_5, x_6\}$. Оставшуюся непомеченной вершину x_6 помечаем знаком "-". Таким образом, получили два подмножества вершин $X^a = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $X^b = \{x_4, x_5, x_6\}$ и показали, что рассматриваемый граф является двудольным.

Случай 2 означает, что между помеченной и непомеченной вершинами не существует дуги. Перейдем к неориентированному графу и процедуру пометок знаками "+" и "-" повторим. Если остались непомеченные вершины, то это означает, что граф распадается на две или больше частей, и каждая из них может тогда рассматриваться отдельно. Итак, в конце приходим к случаю (1).

В графе на рис. 17,в пометки были начаты знаком "+" с вершины x_2 . $\Gamma^+(x_2) = \{x_4\}$. Вершина x_4 помечается знаком "-". $\Gamma^+(x_4) = \{x_3\}$. Вершина x_3 помечается знаком "+". $\Gamma^+(x_3) = \emptyset$.

В графе остались непомеченные вершины, но если перейти к неориентированному двойнику этого графа, то процедура пометок легко выполняется и множество вершин разбивается на два подмножества $X^a = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $X^b = \{x_4, x_5, x_6\}$, тем самым исходный граф является двудольным.

В случае (3) вершина x_{ik} должна быть помечена знаком "+" на некотором маршруте, (например, M_1), состоящем из вершин $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$; причем знаки "+" и "-", приписываемые этим вершинам при движении по маршруту M_1 должны образовывать чередующуюся последовательность. Например, для графа на рис.18. маршрут M_1 можно выбрать таким:

$M_1: x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_5 \rightarrow x_4 \rightarrow x_2$.
 "+" "-" "+" "-" "+"

Аналогично знаком "-" вершина x_{ik} помечается вдоль некоторого маршрута M_2 . Например

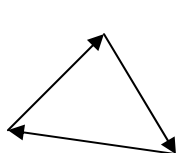
$M_2: x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_6 \rightarrow x_2$.
 "+" "-" "+" "-"

Пусть x^* - предпоследняя (последней является x_{ik}) общая вершина маршрутов M_1 и M_2 . Если вершина x^* помечена знаком "+", то участок от x^* до x_{ik} маршрута M_1 должен быть четным, а участок от x^* до x_{ik} маршрута M_2 должен быть нечетным. Если же вершина x^* помечена знаком "-", то участок маршрута M_1 будет нечетным, а маршрута M_2 - четным. Следовательно, цикл, состоящий из участка маршрута M_1 , от x^* до x_{ik} , и соответствующего участка маршрута M_2 , от x_{ik} до x^* , имеет нечетную длину. Это противоречит предположению, что граф не содержит циклов нечетной длины, и, значит, случай (3) невозможен.

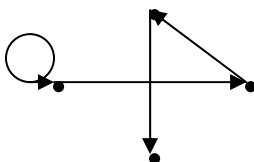
В рассматриваемом примере $x^* = x_4$. В маршруте M_1 длина участка от x_4 до x_2 равна 1, а в маршруте M_2 длина участка от x_4 до x_2 равна 2, что в сумме составляет нечетное число, следовательно граф содержит цикл нечетной длины и не является двудольным.

Упражнения 3.1

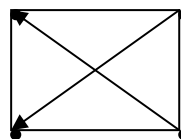
1. Какие из приведенных ниже графов являются полными?



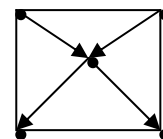
a)



b)



c)



d)

Ответ:

2. По матрицам смежности определить какие из графов являются полными.

1	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0
1	1	1	1	0

a)

0	1	0	1	0
0	0	0	1	1
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
1	0	1	0	0

b)

1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

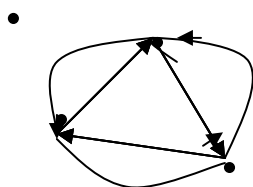
c)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

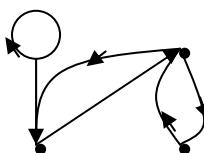
d)

Ответ:

3. Какие из приведенных ниже графов являются симметрическими?



a)



b)

1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

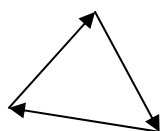
c)

0	1	0	1	0
1	1	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

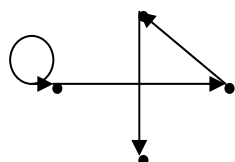
d)

Ответ:

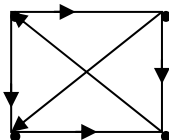
4. Какие из приведенных ниже графов являются антисимметрическими?



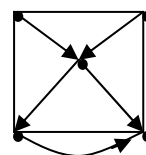
a)



b)



c)



d)

0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0

a)

b)

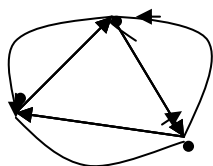
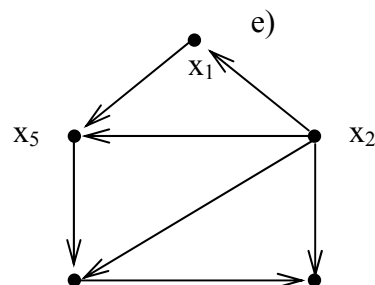
c)

d)

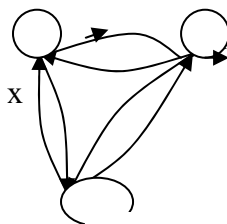
Ответ:

5. Дополнить граф на рисунке до полного антисимметрического.

6. Какие из приведенных ниже графов являются полными симметрическими?



a)



b)

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

c)

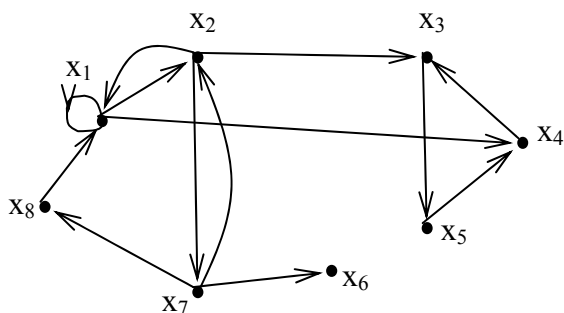
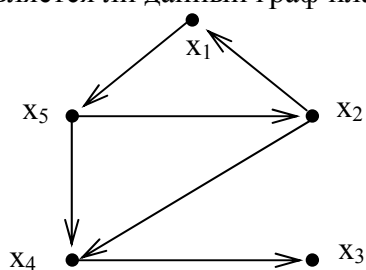
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

d)

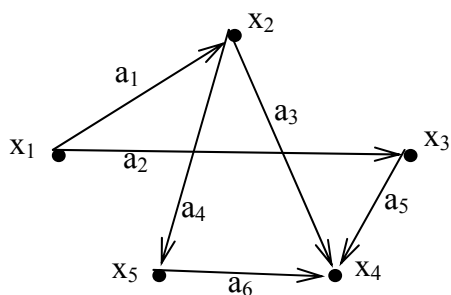
Ответ:

7. Является ли граф на рисунке двудольным? Если нет, то сколько минимально дуг убрать, чтобы он таковым стал? Изобразить граф с выделением двух долей.

8. Является ли данный граф планарным? Если да, то изобразить его на плоскости без

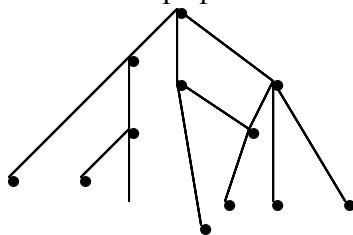
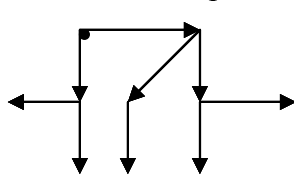


пересечений.



9. Преобразовать граф на рисунке в полный.

10. Какие из приведенных ниже графов являются деревьями?



0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Ответ a)

b)

c)

d)

3.2. Виды подграфов

Пусть дан граф $G = (X, A)$, где $X = \{x_i\}$, $i=1,2,\dots,n$ - множество вершин, $A = \{a_i\}$, $i=1,2,\dots,m$ - множество дуг.

Подграфом $G'=(X', A')$ исходного графа G называется такой граф G' , для которого $X' \subseteq X$ и $A' \subseteq A$. Примеры подграфов показаны на рис.19 б), а исходный граф - на рис.19 а).

Остовным подграфом $G_p=(X, A_p)$ графа G называется граф, для которого $A_p \subseteq A$. Таким образом, остовный подграф имеет то же самое множество вершин, что и исходный граф G , но множество дуг подграфа G_p является подмножеством множества дуг исходного графа. Примеры остовных подграфов приведены на рис.19 в). Для графа, имеющего m дуг можно построить k остовных подграфов

$$k = C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} = 2^m - 1$$

Порожденным подграфом $G_s=(X_s, \Gamma_s)$ называется граф, для которого $X_s \subseteq X$ и для каждой вершины $x_i \in X_s$ прямое отображение $\Gamma_s(x_i) = \Gamma(x_i) \cap X_s$. Таким образом, порожденный подграф состоит из подмножества вершин X_s множества вершин исходного графа и всех таких дуг графа G , у которого конечные и начальные вершины принадлежат подмножеству X_s . Примеры порожденных подграфов приведены на рис. 19 г).

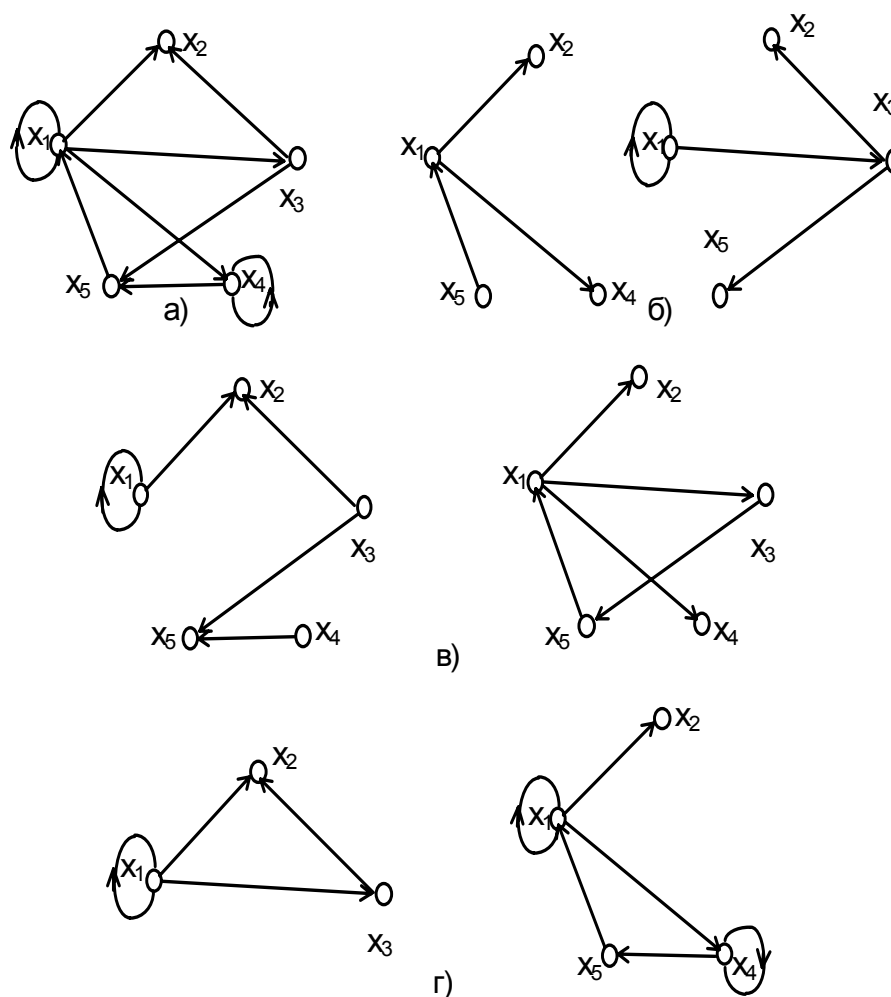
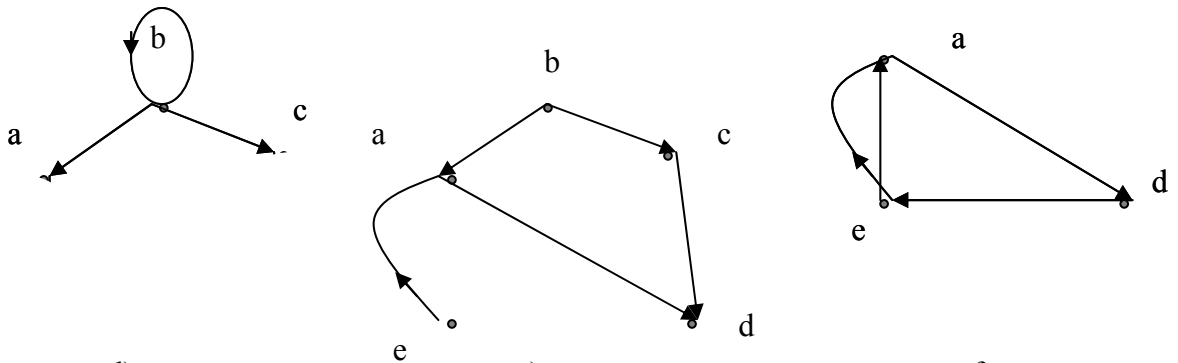
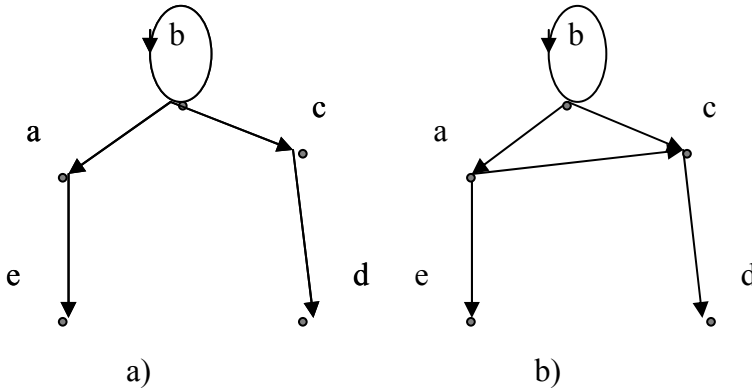
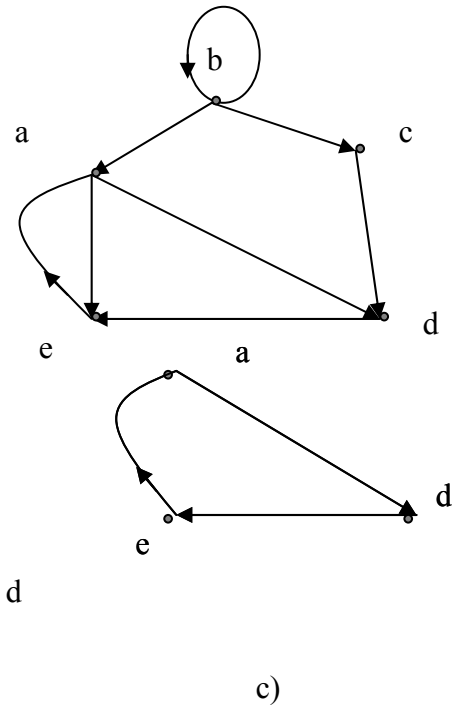


Рис. 19. Виды подграфов:
а) Исходный граф б) подграфы в) остовные подграфы г) порожденные подграфы

В качестве иллюстративного примера рассмотрим граф, вершины которого представляют сотрудников некоторого учреждения, а дуги - линии связи между сотрудниками. Тогда граф, представляющий только наиболее важные связи или каналы связи данного учреждения, является остовным подграфом; граф, который подробно описывает линии связи только какой-то части учреждения (например, отдела) является порожденным подграфом, а граф, который представляет только важные линии связи в пределах отдела, является просто подграфом.

1. Дан граф.

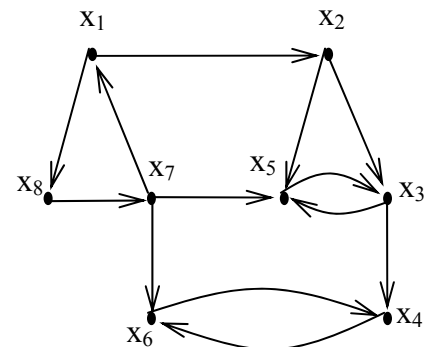
- ♦ Какие из приведенных ниже графов являются его подграфами?
- ♦ Какие из приведенных ниже графов являются его остовными подграфами?
- ♦ Какие из приведенных ниже графов являются для него порожденными подграфами?



Ответ: из (d) являются (e) (f) остовными подграфами являются порожденными подграфами являются

2. Для графа $G=(X,A)$, представленного на рисунке, описать матрицей смежности:

- а) порожденный подграф $\langle \{x_1, x_2, x_4, x_5\} \rangle$,
 б) остовный подграф (X, A') , где $(x_i, x_j) \in A'$ тогда и только тогда, когда $i+j$ нечетно,
 в) остовный подграф подграфа из (а), определенный так же, как в пункте (б).

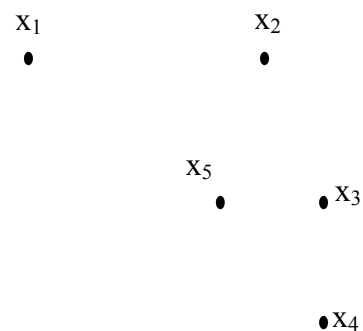


Матрица смежности исходного графа

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1	0	1	0	0	0	0	0	1
X2	0	0	1	0	1	0	0	0
X3	0	0	0	1	1	0	0	0
X4	0	0	0	0	0	1	0	0
X5	0	0	1	0	0	0	0	0
X6	0	0	0	1	0	0	0	0
X7	1	0	0	0	1	1	0	0
X8	0	0	0	0	0	0	1	0

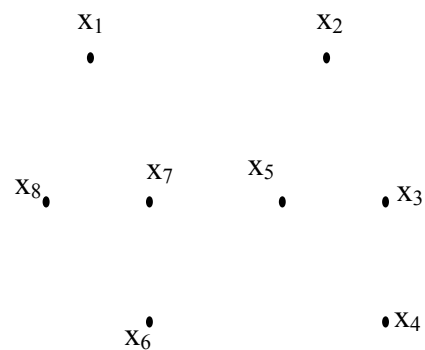
а) Матрица смежности порожденного подграфа

	X1	X2	X3	X4	X5
X1					
X2					
X3					
X4					
X5					



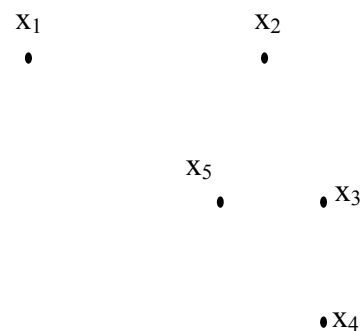
б) Матрица смежности остовного подграфа

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1								
X2								
X3								
X4								
X5								
X6								
X7								
X8								



в) Матрица смежности остовного порожденного подграфа

	X1	X2	X3	X4	X5
X1					
X2					
X3					
X4					
X5					



3.3. Сильно связанные графы и компоненты графа

Кроме классификации типов графов данной в п.3.1 графы могут быть классифицированы по связности: сильно связанные, односторонне связанные, слабо связанные и несвязные.

Орграф называется **сильно связным** или **сильным**, если для двух любых различных его вершин x_i и x_j существует по крайней мере один путь,

соединяющий эти вершины. Это определение означает также, что любые две вершины сильносвязного графа взаимодостижимы. Пример данного графа показан на рис. 20а.

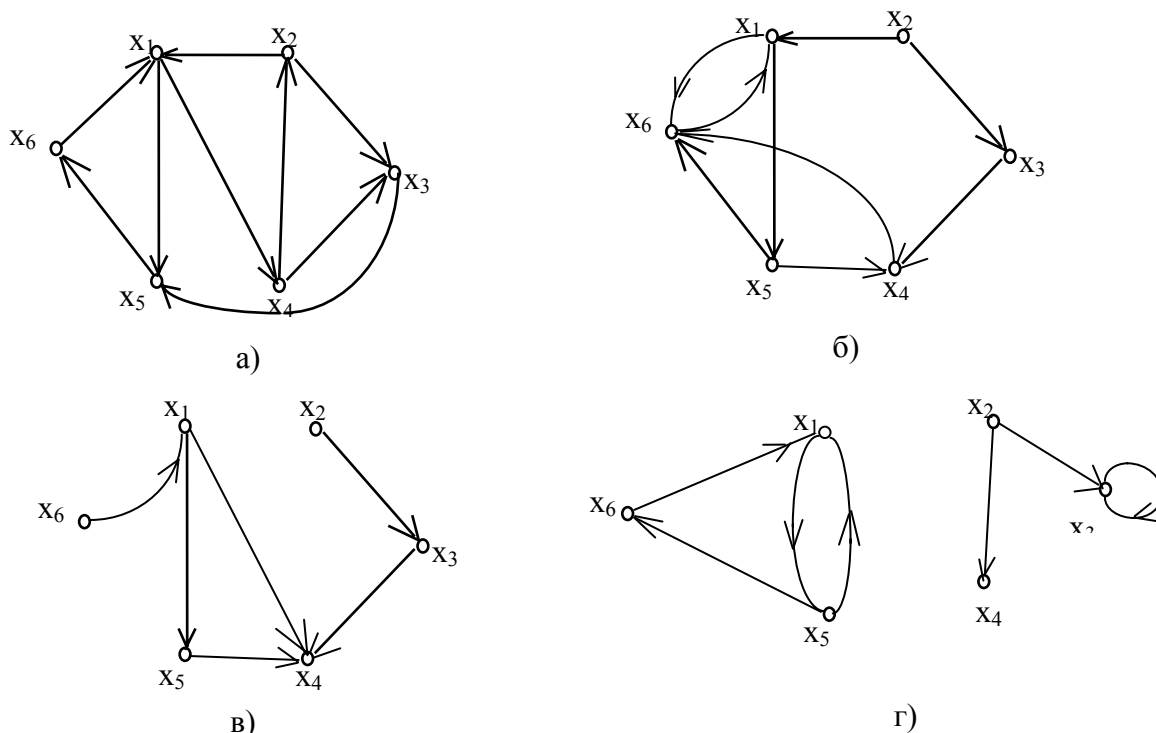


Рис. 20. Виды связанных графов: а) сильно связный граф; б)одно-
-сторонне связный граф; в)слабо связный граф; г)Несвязный
граф:

Орграф называется **односторонне связным** или **односторонним**, если для любых двух различных его вершин x_i и x_j существует по крайней мере один путь из x_i в x_j или из x_j в x_i или оба пути существуют одновременно. Граф на рис.20,б не является сильным, так как в нем нет пути из x_1 в x_3 , но является односторонне связным.

Орграф называется **слабо связным** или **слабым**, если для любых двух различных вершин графа существует по крайней мере один маршрут, соединяющий их. Граф, изображенный на рис.20,в не является ни сильным, ни односторонним, поскольку в нем не существует путей от x_2 к x_5 и от x_5 к x_2 . Он слабо связный.

Орграф называется **несвязным**, если для некоторой пары вершин орграфа не существует маршрута соединяющего их. (рис. 20,г).

По признаку связности могут быть классифицированы и подграфы, но сначала введем понятие максимального подграфа. Пусть дано некоторое свойство P , которым могут обладать графы.

Максимальным подграфом графа G относительно свойства P называется порожденный подграф G_{sm} , обладающий этим свойством и такой, что не существует другого порожденного графа G_s , у которого $X_s \supset X_{sm}$ и который так же обладает свойством P . Так, например, если в качестве свойства P взята сильная связность, то максимальным сильным подграфом графа G является сильный

подграф, который не содержится ни в каком другом сильном подграфе. Такой подграф называется **сильной компонентой** графа. Аналогично, **односторонняя компонента** представляет собой односторонний максимальный подграф, а **слабая компонента** - максимальный слабый подграф.

Например, в графе, приведенном на рис. 20,б, подграф, состоящий из вершин $\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$, является сильной компонентой графа. С другой стороны подграфы, включающие вершины $\{x_1, x_6\}$ и $\{x_1, x_5, x_6\}$, не являются сильными компонентами, (хотя и являются сильными подграфами), поскольку они содержатся в графе, состоящем из вершин $\{x_1, x_4, x_5, x_6\}$ и, следовательно, не максимальные. В графе, показанном на рис. 20,в, подграф не содержит вершины $\{x_1, x_4, x_5\}$ является односторонней компонентой.

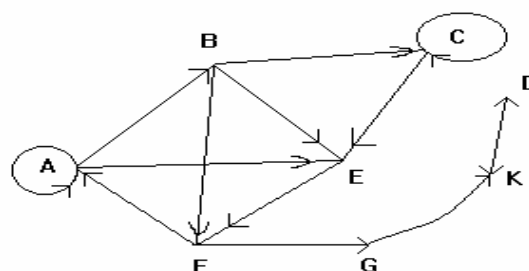
В графе, приведенном на рис. 20,г, оба подграфа, включающие вершины $\{x_1, x_5, x_6\}$ и $\{x_2, x_3, x_4\}$ являются слабыми компонентами, и у этого графа только две компоненты.

Из определений сразу же следует, что односторонние компоненты графа могут иметь общие вершины. Сильная компонента должна содержаться по крайней мере в одной односторонней компоненте, а односторонняя компонента содержится в некоторой слабой компоненте данного графа.

Упражнения к п. 3.3

1. Найти максимальный сильно связанный подграф включающий вершину E для графа на рисунке.

Решение:



	A	B	C	D	E	F	G	K	$T^+(E)$
A	1	1	0	0	1	0	0	0	
B	0	0	1	0	1	1	0	0	
C	0	0	1	0	1	0	0	0	
D	0	0	0	0	0	0	0	1	
E	0	0	0	0	0	1	0	0	
F	1	0	0	0	0	0	1	0	
G	0	0	0	0	0	0	0	1	
K	0	0	0	1	0	0	0	0	
$T^-(E)$									

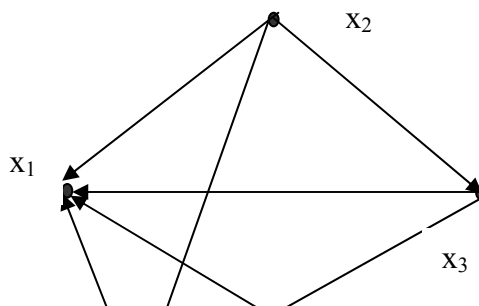
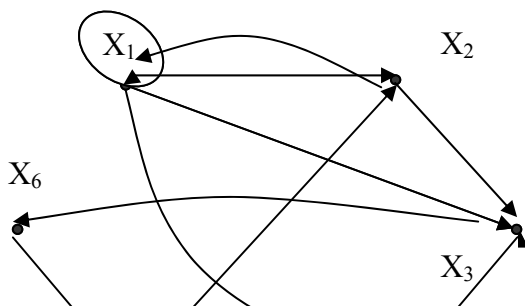
$$T^+(E) = \{ \dots \},$$

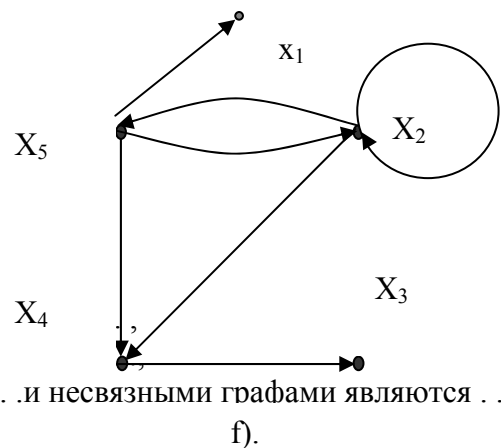
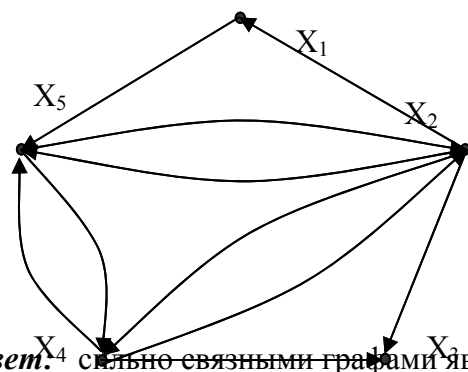
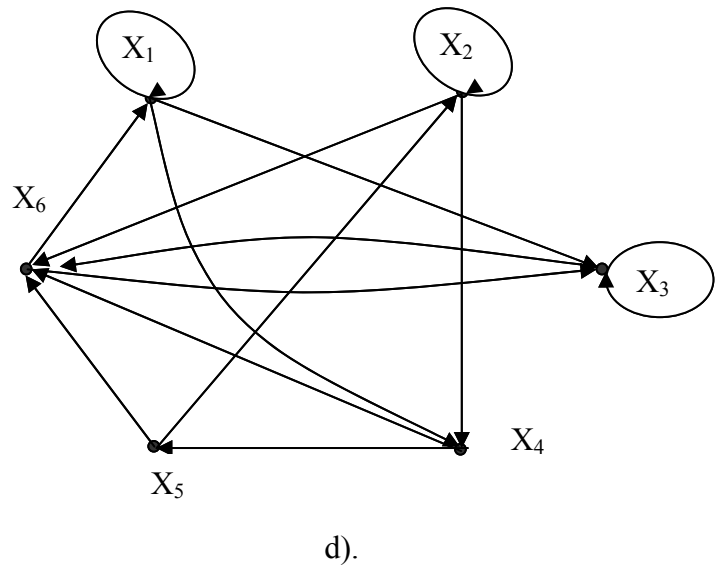
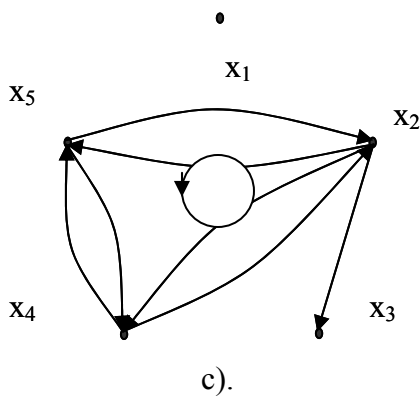
$$T^-(E) = \{ \dots \},$$

$$T^+(E) \cap T^-(E) = \{ \dots \},$$

$$G_{MCC} = \{ \dots \}.$$

2. Какие из приведенных ниже графов являются: сильно связными, односторонне связными, слабо связными и несвязными.





Ответ. 4 сильно связными графами являются
 односторонне связными графами являются
 слабо связными и являются и несвязными графами являются
 e).

3. Выделить в выше представленных графах сильные компоненты, содержащие максимальное число элементов.

Ответ: сильные компоненты < > для графа , сильные компоненты < > для графа , сильные компоненты < > для графа , сильные компоненты < > для графа

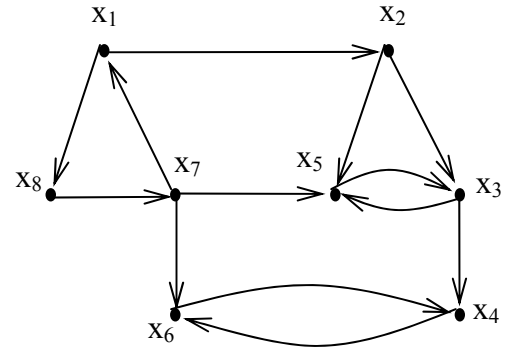
4. Выделить в выше представленных графах односторонние компоненты содержащие максимальное число элементов.

Ответ: односторонние компоненты < > для графа , односторонние компоненты < > для графа , односторонние компоненты < > для графа , односторонние компоненты < > для графа

5. Для графа на рисунке найти сильные

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
X1	0	1	0	0	0	0	0	1
X2	0	0	1	0	1	0	0	0
X3	0	0	0	1	1	0	0	0
X4	0	0	0	0	0	1	0	0
X5	0	0	1	0	0	0	0	0
X6	0	0	0	1	0	0	0	0
X7	1	0	0	0	1	1	0	0
X8	0	0	0	0	0	0	1	0

компоненты, содержащие элементы x_1 и x_5 .



Решение.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8		$T^+(x_1)$
X1	0	1	0	0	0	0	0	1		
X2	0	0	1	0	1	0	0	0		
X3	0	0	0	1	1	0	0	0		
X4	0	0	0	0	0	1	0	0		
X5	0	0	1	0	0	0	0	0		
X6	0	0	0	1	0	0	0	0		
X7	1	0	0	0	1	1	0	0		
X8	0	0	0	0	0	0	1	0		
$T^-(x_1)$										
	X2	X3	X4	X5	X6		$T^+(x_5)$			
X2	0	1	0	1	0					
X3	0	0	1	1	0					
X4	0	0	0	0	1					
X5	0	1	0	0	0					
X6	0	0	1	0	0					
$T^-(x_5)$										

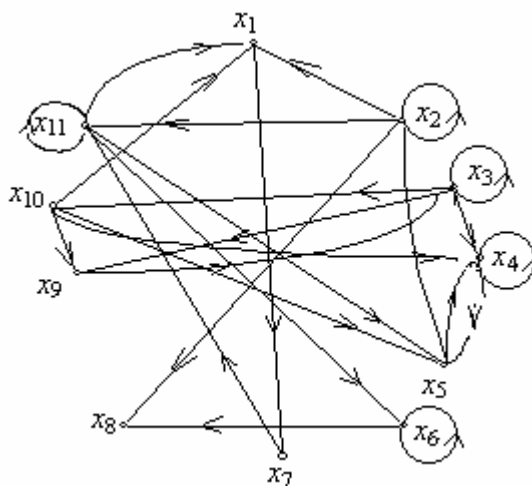
$T^+(x_1) = \{ \dots \}$,
 $T^-(x_1) = \{ \dots \}$,
 $G_1 = T^+(x_1) \cap T^-(x_1) = \{ \dots \}$,

$T^+(x_5) = \{ \dots \}$,
 $T^-(x_5) = \{ \dots \}$,
 $G_2 = T^+(x_5) \cap T^-(x_5) = \{ \dots \}$.

4. МЕТОДЫ РАЗБИЕНИЯ ГРАФА НА МАКСИМАЛЬНЫЕ СИЛЬНО СВЯЗНЫЕ ПОДГРАФЫ .

4.1 МЕТОД МАЛЬГРАНЖА

Пусть дан граф $G=(X, A)$, где $X=\{x_i\}, i=1, 2, \dots, n$ – множество вершин, а $A=\{a_i\}, i=1, 2, \dots, m$ – где множество дуг, описанных матрицей смежности. Алгоритм разбиения заключается в следующем [4].



а

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	$T(x_1)$
$T^+(x_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$T^-(x_1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

1. Для произвольной вершины $x_i \in X$ находим прямое $T^+(x_i)$ и обратное $T^-(x_i)$ транзитивные замыкания.

2. Находим $T^+(x_i) \cap T^-(x_i)$. Множество вершин этого пересечения составляют вершины максимального сильно связного подграфа $G_1 = (X_1, A_1)$.

3. Из исходного графа вычитаем подграф $G_1: G' = G \setminus G_1, X' = X \setminus X_1$.

4. Граф G' принимаем за исходный граф и пока $X' \neq \emptyset$ пункты 1, 2, 3 алгоритма повторяются.

Рассмотрим этот алгоритм более подробно на примере разбиения графа, представленного на рис. 21, а, матрица смежности которого показана на рис. 21, б.

$T^-(x_1)$	0	1	2				2		3	1	1
------------	---	---	---	--	--	--	---	--	---	---	---

РАЗБИЕНИЕ - 1 .

Б

1. Начальной вершиной первого разбиения выберем x_1 . Построим прямое и обратное транзитивные замыкания. $T^+(x_1)$ - столбец показан справа от матрицы А, а $T^-(x_1)$ - строка, находящаяся ниже матрицы смежности.

$$T^+(x_1) = \{x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}\}$$

$$T^-(x_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_7, x_9, x_{10}, x_{11}\}$$

2. Находим $T^+(x_1) \cap T^-(x_1) = \{x_1, x_7, x_{11}\}$. Эти вершины и составляют первый выделенный максимальный сильно связный подграф $G_1 = (X_1, A_1)$, где $X_1 = \{x_1, x_7, x_{11}\}$, а матрица смежности A_1 подграфа G_1 показана на рис.22,а

3. Из исходного графа G вычитаем подграф G_1 $G' = G \setminus G_1$;

$G' = (X', A')$, $X' = \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$.

4. Так как X' не пустое множество, то G' принимаем за G и переходим ко второму разбиению.

РАЗБИЕНИЕ. - 2

1. Выбираем любую вершину принадлежащую X , например x_2 , и находим $T^+(x_2)$ и $T^-(x_2)$. Это показано на рис.22,б. $T^+(x_2) = \{x_2, x_8\}$; $T^-(x_2) = \{x_2\}$.

2. $T^+(x_2) \cap T^-(x_2) = \{x_2\}$. Следовательно, второй выделенный подграф G_2 состоит из одной вершины x_2 .

3. $G' = G \setminus G_2$; $G' = (X', A')$; $X' = \{x_3, x_4, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$.

4. Так как X' не пустое множество, то G' принимаем за G и процесс разбиения продолжается.

РАЗБИЕНИЕ - 3.

1. Выберем, например, вершину x_3 (рис.22,в) $T^+(x_3) = \{x_3, x_4, x_5, x_9, x_{10}\}$, $T^-(x_3)$

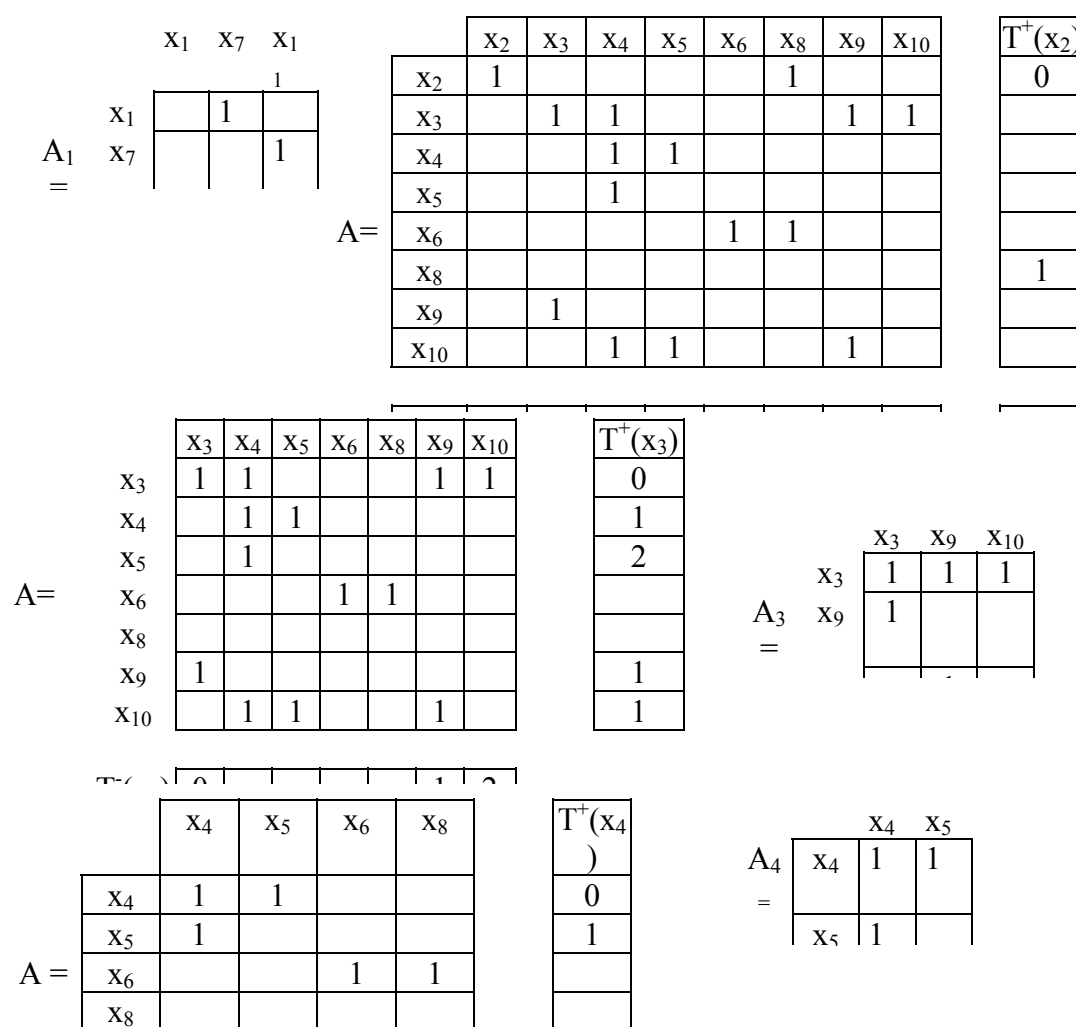


Рис. 22. Пример разбиения: а) матрица смежности подграфа G_1 ; б) матрица смежности при 2-м разбиении; в) матрица смежности при 3-м разбиении; г) матрица смежности подграфа G_3 ; д) матрица смежности при 4-м разбиении; е) матрица смежности подграфа G_4 ;

$\} = \{x_3, x_9, x_{10}\}$.

2. $T^+(x_3) \cap T^-(x_3) = \{x_3, x_9, x_{10}\}$. Следовательно, третий подграф G_3 состоит из вершин x_3, x_9, x_{10} , матрица смежности которого показана на рис.22 ,г.

3. $G' = G \setminus G_3$; $G' = (X', A')$; $X' = \{x_4, x_5, x_6, x_8\}$.

4. $X' \neq \emptyset$, следовательно, процесс разбиения продолжаем: $G' \rightarrow G$. $X' \rightarrow X$.

РАЗБИЕНИЕ - 4.

1. Выберем $x_4 \in X$ (рис.22,д) $T^+(x_4) = \{x_4, x_5\}$; $T^-(x_4) = \{x_4, x_5\}$.

2. $T^+(x_4) \cap T^-(x_4) = \{x_4, x_5\}$, $G_4 = (X_4, A_4)$; $X_4 = \{x_4, x_5\}$, матрица смежности A_4

показана на рис.22 ,е.

3. $G' = G \setminus G_4$; $G' = (X', A')$; $X' = \{x_6, x_8\}$.

4. $X' \neq \emptyset$, следовательно, переходим к пятому разбиению.

РАЗБИЕНИЕ - 5.

1. Выберем x_6 . $T^+(x_6) = \{x_6, x_8\}$; $T^-(x_6) = \{x_6\}$.

2. $T^+(x_6) \cap T^-(x_6) = \{x_6\}$; $G_5 = (X_5, A_5)$; $X_5 = \{x_6\}$.

3. $G' = G \setminus G_5$; $X' = \{x_8\}$.

4. $X' \neq \emptyset$, но состоит из одной вершины, поэтому очевидно, что шестой подграф содержит вершину x_8 . На этом процесс разбиения завершается. Итак, результат разбиения:

$G_1 = (X_1, A_1)$, $X_1 = \{x_1, x_7, x_{11}\}$,

$G_2 = (X_2, A_2)$, $X_2 = \{x_2\}$,

$G_3 = (X_3, A_3)$, $X_3 = \{x_3, x_9, x_{10}\}$,

$G_4 = (X_4, A_4)$, $X_4 = \{x_4, x_5\}$,

$G_5 = (X_5, A_5)$, $X_5 = \{x_6\}$,

$G_6 = (X_6, A_6)$, $X_6 = \{x_8\}$

показан на рис.23,а, где каждый подграф G_1, \dots, G_6 представляет собой сильную компоненту графа. Граф $G^* = (X^*, A^*)$, в котором в качестве элементов выступают

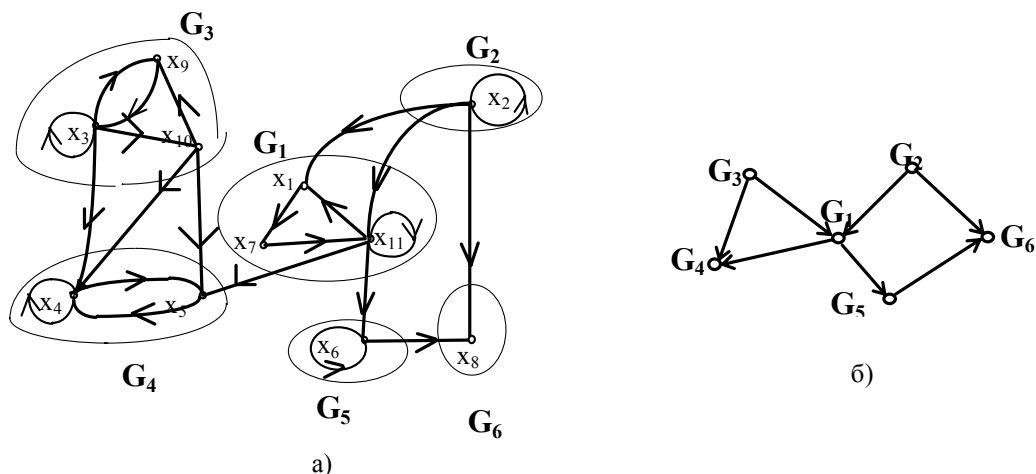


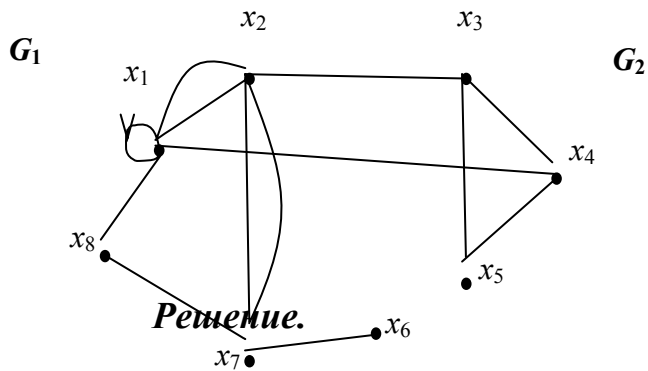
Рис. 23. а)результат разбиения; б)конденсация

сильные компоненты называется **конденсацией**. (рис.23,б).

Подробная блок-схема алгоритма разбиения приведена в приложении 4.

Упражнения 4.1

1. Методом Мальгранжа разбить граф, данный на рисунке, на подграфы.



Матрица смежности

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8			$T^+(x_1)$	G_3
	1											
X1	1	1	0	1	0	0	0	0				
X2	1	0	1	0	0	0	1	0				
X3	0	0	0	0	1	0	0	0				
X4	0	0	1	0	0	0	0	0				
X5	0	0	0	1	0	0	0	0				
X6	0	0	0	0	0	0	0	0				
X7	0	1	0	0	0	1	0	1				
X8	1	0	0	0	0	0	0	0				
$T^-(x_1)$												

$$T^+(x_1) = \{ \dots \},$$

$$T^-(x_1) = \{ \dots \},$$

$$G_1 = T^+(x_1) \cap T^-(x_1) = \{ \dots \}$$

	X3	X4	X5	X6		$T^+(x_3)$
X3	0	0	1	0		
X4	1	0	0	0		
X5	0	1	0	0		
X6	0	0	0	0		
$T^-(x_3)$						

$$T^+(x_3) = \{ \dots \}$$

$$T^-(x_3) = \{ \dots \}$$

$$G_2 = T^+(x_3) \cap T^-(x_3) = \{ \dots \}$$

$$G_3 = \{ \dots \}$$

Результат разбиения:



4.2. Матричный метод разбиения

Метод разбиения графа на максимальные сильно связанные подграфы по матрицам достижимости R и контрдостижимости Q состоит в следующем [5].

1. По матрице смежности строится матрица достижимости R . Используя операцию транспонирования, находим матрицу контрдостижимости Q .

2. Находится матрица $C = \{ c_{ij} \}$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, где n - число вершин исходного графа, а каждый элемент $c_{ij} = r_{ij} \wedge q_{ij}$, т.е. матрица C получается поэлементным логическим умножением матриц R и Q : $C = R \wedge Q$.

3. Элементы, имеющие одинаковые строки и столбцы в матрице C группируем перестановкой строк и столбцов, получаем блочно диагональную матрицу C_b , где каждая группа элементов и есть максимальный сильно связный подграф.

Рассмотрим пример разбиения для графа представленного на рис.21,а. Как следует из определения матрицы R (п.2.3) для ее нахождения следует для каждой вершины найти прямое транзитивное замыкание. Если некоторая x_j вершина графа входит в транзитивное замыкание

$T^+(x_i)$, то элемент матрицы R $r_{ij}=1$. Полученные, таким образом, матрицы R и Q показаны на рис.24,а и б. В результате логического умножения получили матрицу C (рис.24,в), в которой находим одинаковые строки. Например, для вершины x_1 строка совпадает с седьмой и одиннадцатой. Следовательно, вершины x_1, x_7, x_{11} группируем вместе и они составляют первый выделенный подграф. Как видим из блочно-диагональной матрицы (рис.24,г) полученные подграфы совпадают с результатом разбиения по методу Мальгранжа (п.4.1.,рис.23,а).

Блок-схема алгоритма матричного метода разбиения приведена в приложении 5.

R=

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁
x ₁	1			1	1	1	1	1			1
x ₂	1	1		1	1	1	1	1			1
x ₃			1	1	1	1	1	1	1	1	1
x ₄				1	1						
x ₅				1	1						
x ₆						1		1			
x ₇	1			1	1	1	1	1			1
x ₈								1			
x ₉	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
x ₁₀	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
x ₁₁	1			1	1	1	1	1			1

a)

Q=

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁
x ₁	1	1					1		1	1	1
x ₂		1									
x ₃			1						1	1	
x ₄	1	1	1	1	1		1		1	1	1
x ₅	1	1	1	1	1		1		1	1	1
x ₆	1	1	1			1	1		1	1	1
x ₇	1	1	1				1		1	1	1
x ₈	1	1	1			1	1	1	1	1	1
x ₉			1						1	1	
x ₁₀			1						1	1	
x ₁₁	1	1	1				1		1	1	1

б)

C=

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁
x ₁	1						1				1
x ₂		1									
x ₃			1						1	1	
x ₄				1	1						
x ₅				1	1						
x ₆						1					
x ₇	1						1				1
x ₈								1			
x ₉		1							1	1	
x ₁₀		1							1	1	
x ₁₁	1						1				1

в)

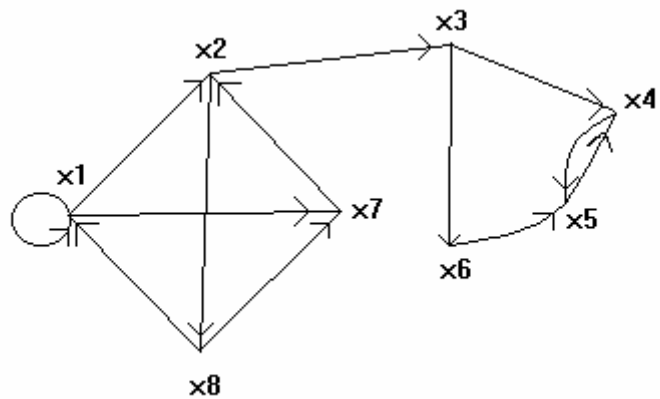
C_B=

	x ₁	x ₇	x ₁₁	x ₂	x ₃	x ₉	x ₁₀	x ₄	x ₅	x ₆	x ₈
x ₁	1	1	1								
x ₇	1	1	1								
x ₁₁	1	1	1								
x ₂				1							
x ₃					1	1	1				
x ₉					1	1	1				
x ₁₀					1	1	1				
x ₄								1	1		
x ₅								1	1		
x ₆										1	
x ₈											1

г)

Рис. 24. Пример матричного метода разбиения

1. Метод разбиения графа по матрицам R и Q рассмотреть на примере графа, изображенного на рисунке.



Решение:

Матрица достижимости R

Матрица контрдостижимости Q

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈
X ₁								
X ₂								
X ₃								
X ₄								
X ₅								
X ₆								
X ₇								
X ₈								

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈
X ₁								
X ₂								
X ₃								
X ₄								
X ₅								
X ₆								
X ₇								
X ₈								

Умножая поэлементно матрицу контрдостижимости и матрицу достижимости, получаем матрицу, в которой имеются одинаковые строки. Соответствующие этим строкам элементы группируем, получая блочно-диагональную матрицу.

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈		X ₁	X ₂	X ₇	X ₈	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆
X ₁										X ₁							
X ₂										X ₂							
X ₃										X ₇							
X ₄										X ₈							
X ₅										X ₃							
X ₆										X ₄							
X ₇										X ₅							
X ₈										X ₆							

Ответ: Выделенные максимальные сильносвязные подграфы;
 $G_{мсс1} = \{ \dots \}$, $G_{мсс2} = \{ \dots \}$,
 $G_{мсс3} = \{ \dots \}$, $G_{мсс4} = \{ \dots \}$.

5. Пути и циклы в графах

5.1. Пути и маршруты

Путем в орграфе называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, кроме последней, является начальной вершиной следующей дуги.

Например, для графа на рис.25 последовательности дуг

$M_1: a_6, a_5, a_9, a_8, a_4$

$M_2: a_1, a_6, a_5, a_9, a_7$

$M_3: a_1, a_6, a_5, a_9, a_{10}, a_6, a_4$

являются путями. Пути могут быть различными.

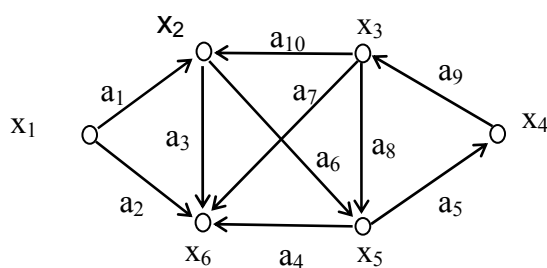


Рис. 25. Орграф

Орцепью (или простым путем) называется такой путь, в котором каждая дуга используется не более одного раза.

Так пути M_1 и M_2 являются орцепями, а M_3 нет, поскольку дуга a_6 используется дважды.

Простой орцепью (или элементарным путем) называется путь, в котором каждая вершина используется не более одного раза.

Простой орцепью является путь M_2 .

Для неориентированного графа понятия **маршрута**, **цепи** и **простой цепи** аналогичны понятиям пути, орцепи и простой орцепи в орграфе. (В определениях следует заменить слово "дуга" на слово "ребро").

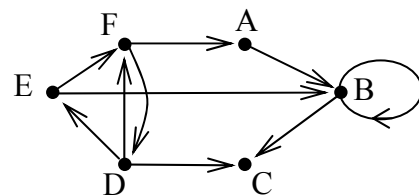
Путь или маршрут можно изображать также последовательностью вершин. Так путь M_1 можно представить последовательностью вершин $x_2, x_5, x_4, x_3, x_5, x_6$ и такое представление часто оказывается более полезным.

Упражнения 5.1

1. а). Построить все возможные пути длиной 2 в графе, изображенном на рисунке для вершин А и Е.

б). Построить орцепи максимальной длины из всех вершин графа.

с). Построить простые орцепи максимальной длины из всех вершин графа.



Ответ: а).....

.....

б).....

.....

с).....

.....

2. Для графа на рисунке даны маршруты из вершины А в вершину F:

а). (A, B), (B, C), (C, G), (G, F) ;

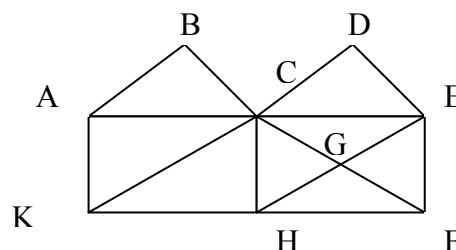
б). (A, K), (K, H), (H, F);

с). (A, C), (C, E), (E, D), (D, C), (C, H), (H, F);

д). (A, K), (K, H), (H, C), (C, K), (K, H), (H, F);

Найти среди них цепи и простые цепи.

Ответ: цепии простые цепи.



5.2 Матричный метод нахождения путей в графах

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Возведем матрицу смежности в квадрат по правилам математики. Каждый элемент матрицы A^2 определяется по формуле

$$a_{ik}^{(2)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}$$

Слагаемое в формуле равно 1 тогда и только тогда, когда оба числа a_{ij} и a_{jk} равны 1, в противном случае оно равно 0. Поскольку из равенства $a_{ij} = a_{jk} = 1$ следует существование пути длины 2 из вершины x_i в вершину x_k , проходящего через вершину x_j , то (i-й, k-й) элемент матрицы A^2 равен числу путей длины 2, идущих из x_i в x_k .

На рисунке 26,а представлена матрица смежности графа, изображенного на рис.25. Результат возведения матрицы смежности в квадрат A^2 показан на рис. 26,б.

$A=$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_1	0	1	0	0	0	1
	x_2	0	0	0	0	1	1
	x_3	0	1	0	0	1	1
	x_4	0	0	1	0	0	0
	x_5	0	0	0	1	0	1
	x_6	0	0	0	0	0	0

$A^2=$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_1	0	0	0	0	1	1
	x_2	0	0	0	1	0	1
	x_3	0	0	0	1	1	2
	x_4	0	1	0	0	1	1
	x_5	0	0	1	0	0	0
	x_6	0	0	0	0	0	0

$A^3=$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_1	0	0	0	1	0	1
	x_2	0	0	1	0	0	0
	x_3	0	0	1	1	0	1
	x_4	0	0	0	1	1	2
	x_5	0	1	0	0	1	1
	x_6	0	0	0	0	0	0

$A^4=$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	x_1	0	0	1	0	0	0
	x_2	0	1	0	0	1	1
	x_3	0	1	1	0	1	1
	x_4	0	0	0	1	1	1
	x_5	0	0	0	1	1	2
	x_6	0	0	0	0	0	0

Рис. 26. Нахождение путей

Так "1", стоящая на пересечении второй строки и четвертого столбца, говорит о существовании одного пути длиной 2 из вершины x_2 к вершине x_4 . Действительно, как видим в графе на рис.25, существует такой путь: a_6, a_5 . "2" в матрице A^2 говорит о существовании двух путей длиной 2 от вершины x_3 к вершине x_6 : a_8, a_4 и a_{10}, a_3 .

Аналогично для матрицы смежности возведенной в третью степень A^3 (рис.26,в) $a_{ik}^{(3)}$ равно числу путей длиной 3, идущих от x_i к x_k . Из четвертой строки матрицы A^3 видно, что пути длиной 3 существуют: один из x_4 в x_4 (a_9, a_8, a_5), один из x_4 в x_5 (a_9, a_{10}, a_6) и два пути из x_4 в x_6 (a_9, a_{10}, a_3 и a_9, a_8, a_4). Матрица A^4 показывает существование путей длиной 4 (рис.26,г).

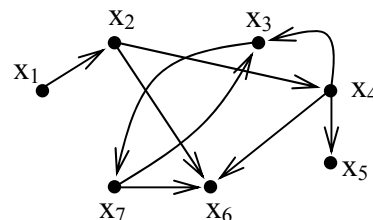
Таким образом, если a_{ik}^p является элементом матрицы A^p , то a_{ik}^p равно числу путей (не обязательно орцепей или простых орцепей) длины p , идущих от x_i к x_k .

Если необходимо узнать не только о наличии путей, но и о вершинах графа, входящих в эти пути, то следует вспомнить определения прямого и обратного транзитивных замыканий. Так как $T^+(x_i)$ - это множество вершин, в которые есть пути из вершины x_i , а $T^-(x_j)$ - множество вершин, из которых есть пути в x_j , то $T^+(x_i) \cap T^-(x_j)$ - множество вершин, каждая из которых принадлежит по крайней мере

одному пути, идущему от x_i к x_j . Эти вершины называются существенными или неотъемлемыми относительно двух концевых вершин x_i и x_j . Все остальные вершины графа называется несущественными или избыточными, поскольку их удаление не влияет на пути от x_i к x_j .

Упражнения 5.2

- Для графа, представленного на рисунке, а). найти вершины, входящие в путь и путь между вершинами X_1 и X_7 матричным способом;
б). орцепь максимальной длины.



Решение.

Заполним матрицу смежности графа.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7		$T^+(x_1)$
X1	0	1	0	0	0	0	0		
X2	0	0	0	1	0	1	0		
X3	0	0	0	0	0	0	1		
X4	0	0	1	0	1	1	0		
X5	0	0	0	0	0	0	0		
X6	0	0	0	0	0	0	0		
X7	0	0	1	0	0	1	0		
$T^-(x_7)$									

$T^+(x_7) = \{ \dots \dots \dots \}$,

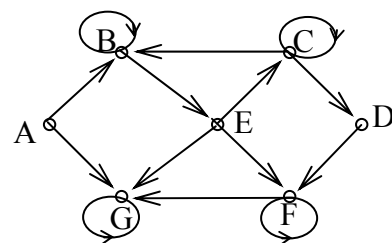
$T^-(x_7) = \{ \dots \dots \dots \}$,

$T^+(x_1) \cap T^-(x_7) = \{ \dots \dots \dots \}$.

Ответ: а). путь -

$\dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow \dots$

б). Орцепь максимальной длины -
 $\dots \dots \dots$



- Для графа, данного на рисунке, найти и записать
а). все пути длиной 3 из вершин A и B;
б). между какими вершинами наибольшее число путей длиной 3;
с). орцепь максимальной длины;
д). между какой парой вершин A и F или C и G больше число путей длиной 4.

Решение.

$A =$

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	0	0	1
B	0	1	0	0	1	0	0
C	0	1	1	1	0	0	0
D	0	0	0	0	0	1	0
E	0	0	1	0	0	1	1
F	0	0	0	0	0	1	1
G	0	0	0	0	0	0	1

$A^2 =$

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

$$A^3 =$$

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	0	1	1	2
B	0	2	2	1	1	2	3
C	0	3	2	1	2	3	2
D	0	0	0	0	0	1	2
E	0	2	1	1	1	2	3
F	0	0	0	0	0	1	3
G	0	0	0	0	0	0	1

$$A^4 =$$

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C							
D							
E							
F							
G							

Ответ: а). все пути длиной 3 из вершин А и В :

.....

.....

б). наибольшее число путей длины 3 между вершинами.

.....

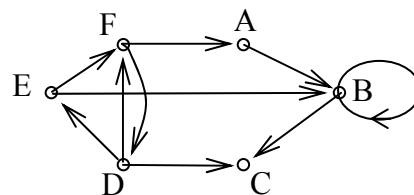
с). орцепь максимальной длины -.

.....

д). между парой вершин больше число путей длиной 4 чем между парой.

3. Построить все возможные пути длиной 2 в графе, изображенном на рисунке.

Решение.



$$A =$$

	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	1	0	0
B	0	1	1	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0
D	1	0	0	0	1	0
E	0	1	0	0	0	1
F	1	0	0	0	0	0

$$A^2 =$$

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Ответ:

а).

все пути длиной 2:

.....

.....

5.3.Вес и длина пути

Иногда дугам графа сопоставляют числа $a_i \rightarrow c_i$, называемые весом или длиной, или стоимостью или ценой. В каждом конкретном случае выбирается то слово, которое ближе подходит по смыслу задачи.

Граф G , описываемый тройкой вида

$$G = (X, A, C),$$

где $X = \{x_i\}$, $i=1,2,3,\dots,n$ - множество вершин,

$A = \{a_i\}$, $i=1,2,3,\dots,m$ - множество дуг,

$C = \{c_i\}$, $i=1,2,3,\dots,m$ - множество характеристик дуг, называется **графом со взвешенными дугами**.

Пример такого графа приведен на рис.27,а. При рассмотрении пути M , представленного последовательностью дуг (a_1, a_2, \dots, a_q) , за его **вес** (или **длину**, или **стоимость**) принимается число $L(M)$, равное сумме весов всех дуг, входящих в путь, то есть

$$L(M) = \sum c_i \text{ для всех } a_i \in M$$

Длиной (или **мощностью**) пути называется число дуг, входящих в него. Чаще всего термин "длина" употребляется, когда все дуги, входящие в путь, имеют веса, равные 1, то есть когда вес пути совпадает с его длиной (мощностью).

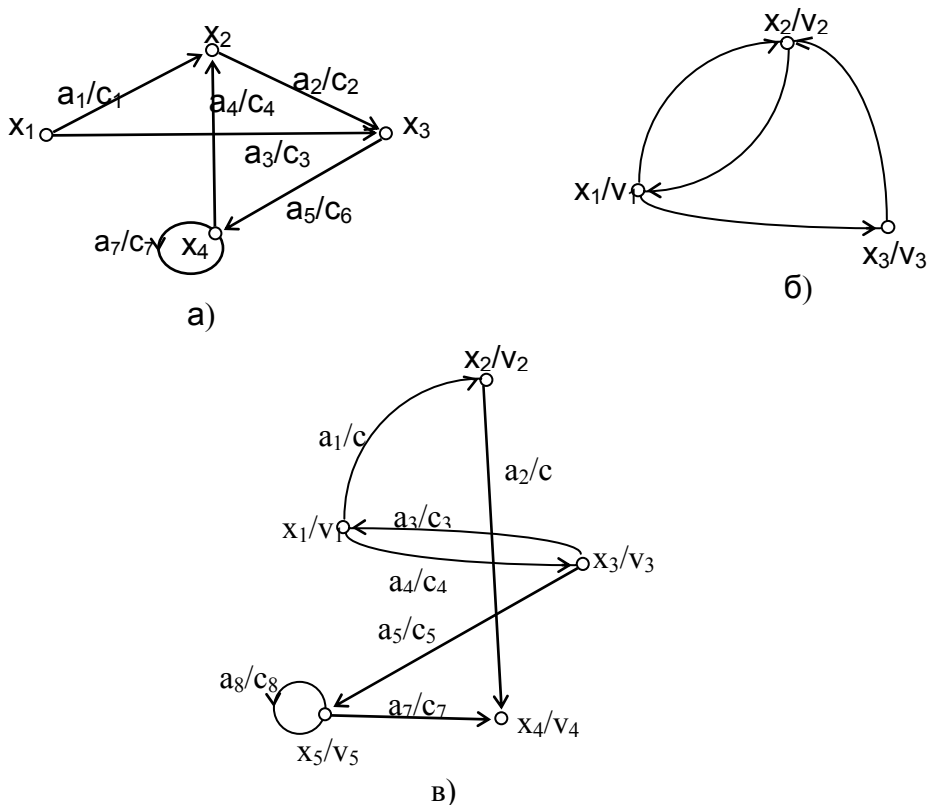


Рис. 27. Взвешенные графы: а) граф со взвешенными дугами; б) граф со взвешенными вершинами; в) взвешенный граф

Граф со взвешенными вершинами - это граф, описываемый тройкой

$$G = (X, A, V),$$

где $X = \{x_i\}, i=1,2,\dots,n$ - множество вершин графа,

$A = \{a_i\}, i=1,2,\dots,m$ - множество дуг графа,

$V=\{v_i\}, i=1,2,\dots,n$ - множество характеристик вершин.

В качестве характеристик вершин могут выступать "стоимость", "мощность", "вес" и т.п. Пример такого графа приведен на рис. 27,б. Для графа со взвешенными вершинами в случае представления пути последовательностью вершин, весом пути является сумма весов, входящих в этот путь вершин.

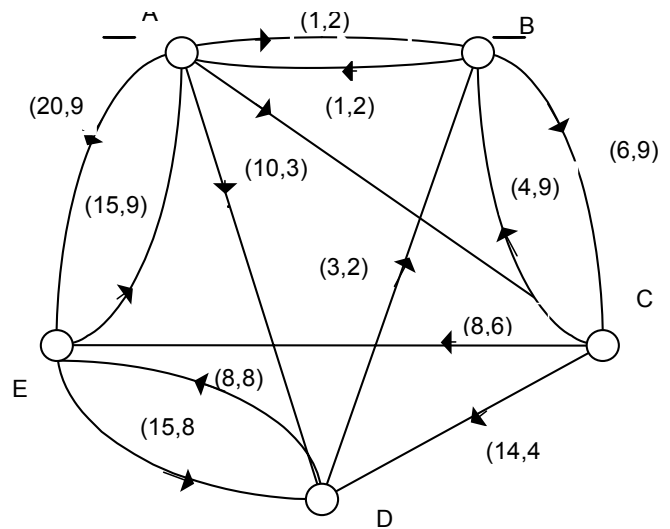
И наконец, **взвешенный граф** определяется четверкой вида $G = (X, A, V, C)$, то есть и дуги, и вершины этого графа имеют некоторые характеристики.

Область применения взвешенных графов в качестве моделей довольно обширна: транспортные задачи, задачи оптимизации сети связи и системы перевозок и др. Одной из известнейших оптимизационных задач является нахождение кратчайших путей в графе со взвешенными дугами.

Упражнения к п. 5.3

1. На рисунке дан граф со взвешенными дугами, который представляет сеть допустимых маршрутов для некоторого судна. Каждая дуга имеет пометку (a, b) , причем a равно выгоде, получаемой при обслуживании этого маршрута, а b - времени обслуживания маршрута. Найти какой из перечисленных путей наиболее выгодный (в терминах скорости оборота капитала) путь судна.

1. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A$
2. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$
3. $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$
4. $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$



Решение: Скорость оборота капитала n -ого пути судна найдем как суммарную выгоду пути, деленную на суммарное время, то есть $v_n = \Sigma a_i / \Sigma b_i$.

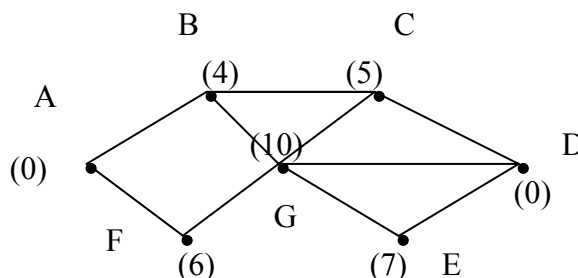
1. $v_1 = \dots$

2. $v_2 =$
3. $v_3 =$
4. $v_4 =$

Ответ: наиболее выгодный путь.

2. Дан граф со взвешенными вершинами, в котором в качестве характеристики вершины указывается ее пропускная способность. Определить какой из перечисленных маршрутов имеет лучшую среднюю пропускную способность.

1. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$
2. $A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow D$
3. $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow D$
5. $A \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow D$



Решение: Средняя пропускная способность маршрута определяется как суммарное значение пропускной способности всех вершин, входящих в маршрут, деленное на количество вершин этого пути, то есть $p_n = \sum a_i / l_i$.

1. $p_1 =$
2. $p_2 =$
3. $p_3 =$
4. $p_4 =$

Ответ: наиболее выгодный маршрут.

5.4. Алгоритм Дейкстры поиска кратчайших путей в графе

Наиболее эффективный алгоритм решения задачи о кратчайшем пути первоначально дал Дейкстра [5]. В общем случае этот метод основан на приписывании вершинам временных пометок, причем пометка вершины дает верхнюю границу длины пути от некоторой вершины s к рассматриваемой вершине. Эти пометки постепенно уменьшаются с помощью некоторой итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации точно одна из временных пометок становится постоянной. Последнее указывает на то, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от t к рассматриваемой вершине. Рассмотрим подробнее этот алгоритм.

Дан граф $G=(X, A, C)$ со взвешенными дугами. Обозначим $L(x_i)$ пометку вершины x_i .

Рассмотрим алгоритм нахождения кратчайшего пути от вершины s к вершине t графа и более общий случай: от вершины s ко всем вершинам графа.

Присвоение начальных значений

ШАГ 1. Положить $L(s)=0$ и считать эту пометку постоянной. Для всех вершин $x_i \neq s$ положить $L(x_i)=\infty$ и считать эти пометки временными. За текущую

рассматриваемую вершину с постоянной пометкой возьмем вершину p , т.е. положить $p = s$.

Обновление пометок

ШАГ 2. Для вершин, входящих в прямое отображение вершины p , т.е. для всех x_i , принадлежащих $\Gamma(p)$, пометки которых временные, изменить пометки в соответствии со следующим выражением:

$$L(x_i) \leftarrow \min [L(x_i), L(p)+c(p, x_i)].$$

Преобразование пометки в постоянную

ШАГ 3. Среди всех вершин с временными пометками найти такую, для которой:

$$L(x_i^*) = \min [L(x_i)].$$

ШАГ 4. Считать пометку вершины x_i^* постоянной и положить $p = x_i^*$.

ШАГ 5(а). { **При нахождении пути от s к t** }

- Если текущая вершина p является искомой, т.е. $p = t$, то $L(p)$ является длиной кратчайшего пути от s к t . Останов.
- Если $p \neq t$, перейти к шагу 2.

ШАГ 5(б) { **При нахождении путей от s ко всем вершинам** }

- Если все вершины отмечены постоянными метками, то эти метки дают длины кратчайших путей.
- Если некоторые метки являются временными, то следует перейти к шагу 2.

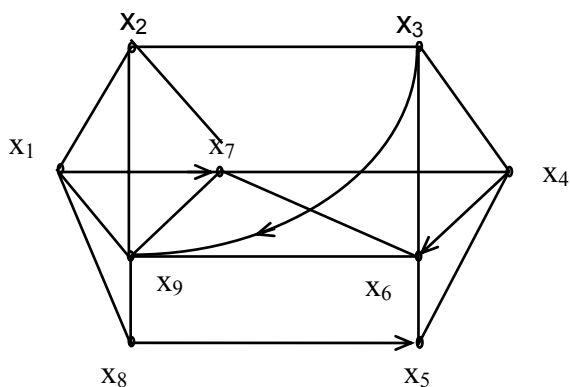
Как только длины кратчайших путей от вершины s будут найдены, сами пути можно получить при помощи рекурсивной процедуры (*). Так как вершина x_i^* непосредственно предшествует вершине x_i в кратчайшем пути от s к x_i , то для любой вершины x_i соответствующую вершину x_i^* можно найти как одну из оставшихся вершин, для которой

$$L(x_i^*) + c(x_i^*, x_i) = L(x_i). \quad (*)$$

Если кратчайший путь от s до любой вершины x_i является единственным, то дуги (x_i^*, x_i) этого кратчайшего пути образуют ориентированное дерево с корнем s . Если существует несколько кратчайших путей от s к какой-либо другой вершине, то при некоторой фиксированной вершине x_i^* соотношение (*) будет выполняться для более чем одной вершины x_i . В этом случае выбор может быть либо произвольным (если нужен какой-то один кратчайший путь между s и x_i), либо таким, что рассматриваются все дуги (x_i^*, x_i) , входящие в какой-либо из кратчайших путей, и при этом совокупность всех таких дуг образует не ориентированное дерево, а общий граф, называемый **базой** относительно s .

ПРИМЕР. Рассмотрим граф смешанного типа, изображенный на рис. 28,а, где каждое неориентированное ребро рассматривается как пара противоположно направленных дуг равного веса. Матрица весов приведена на рис.28,б. Требуется найти все кратчайшие пути от вершины x_1 ко всем остальным вершинам.

Постоянные пометки будем помечать знаком "+".



а)

$$C = \begin{array}{c|cccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ \hline x_1 & & 10 & & & & & 3 & 6 & 12 \\ x_2 & 10 & & 18 & & & & 2 & & 13 \\ x_3 & & 18 & & 25 & & 20 & & & 7 \\ x_4 & & & 25 & & 5 & 16 & 4 & & \\ x_5 & & & & 5 & & 10 & & & \\ x_6 & & & 20 & & 10 & & 14 & 15 & 9 \\ x_7 & & 2 & & 4 & & 14 & & & 24 \\ x_8 & 6 & & & & 23 & 15 & & & 5 \\ x_9 & 12 & 13 & & & & 9 & 24 & 5 & \end{array}$$

б)

Рис. 28. Пример поиска кратчайшего пути:

а) - граф;

б) - матрица весов дуг

ШАГ 1. Присвоим $L(x_1)=0$, $L(x_i)=\infty$ для всех x_i , кроме x_1 . Положим $p = x_1$.

Первая итерация

ШАГ 2. Найдем прямое отображение для текущей рассматриваемой вершины:

$\Gamma(p)=\Gamma(x_1)=\{x_2, x_7, x_8, x_9\}$. Все вершины, входящие в прямое отображение имеют временные пометки, поэтому пересчитаем их значение:

$$L(x_2) = \min [L(x_2), L(x_1)+c(x_1, x_2)] = \min [\infty, 0+10] = 10$$

$$L(x_7) = \min [\infty, 0+3] = 3$$

$$L(x_8) = \min [\infty, 0+6] = 6$$

$$L(x_9) = \min [\infty, 0+12] = 12$$

ШАГ 3. На данном шаге итерации имеем следующие временные метки вершин:

$$L(x_2) = 10, \quad L(x_3) = \infty,$$

$$L(x_7) = 3, \quad L(x_4) = \infty,$$

$$L(x_8) = 6, \quad L(x_5) = \infty,$$

$$L(x_9) = 12, \quad L(x_6) = \infty.$$

Очевидно, что минимальную метку, равную 3, имеет вершина x_7 .

ШАГ 4. За следующую текущую метку принимаем вершину x_7 , т.е. $p = x_7$, а ее метка становится постоянной, $L(x_7) = 3^+$.

ШАГ 5. Так как не все вершины графа имеют постоянные метки, переходим к шагу 2.

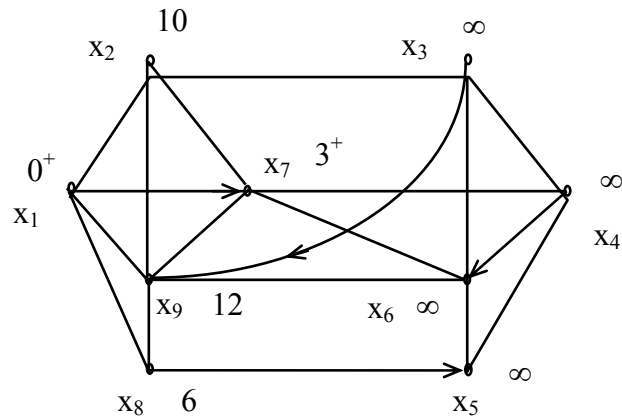


Рис. 29 Пометки в конце первой итерации

Вторая итерация

Граф с текущими значениями меток вершин показан на рис. 29.

ШАГ 2. Находим $\Gamma(x_7) = \{x_2, x_4, x_6, x_9\}$. Метки всех вершин временные, следовательно пересчитываем их значения:

$$L(x_2) = \min [10, 3+2] = 5,$$

$$L(x_4) = \min [\infty, 3+4] = 7,$$

$$L(x_6) = \min [\infty, 3+14] = 17,$$

$$L(x_9) = \min [12, 3+24] = 12.$$

ШАГ 3. На данном шаге итерации имеем следующие временные метки вершин:

$$L(x_2) = 5, \quad L(x_3) = \infty,$$

$$L(x_4) = 7, \quad L(x_5) = \infty,$$

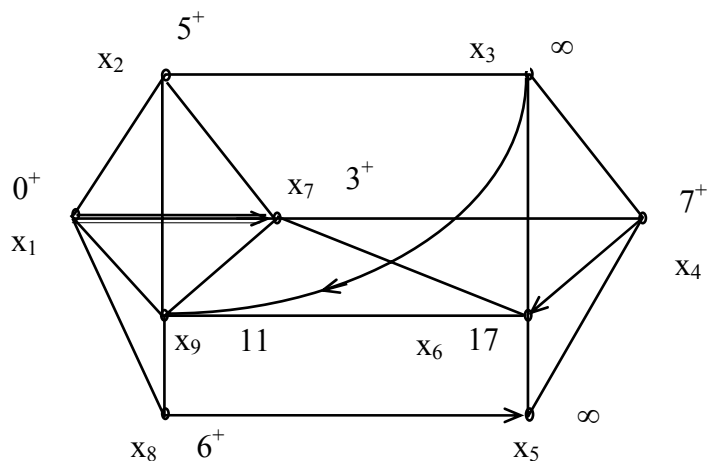


Рис. 30 Пометки в конце второй итерации

$$L(x_6) = 17, \quad L(x_8) = 6, \quad L(x_9) = 12.$$

Очевидно, что минимальную метку, равную 5, имеет вершина x_2 .

ШАГ 4. За следующую текущую метку принимаем вершину x_2 , т.е. $p = x_2$, а ее метка становится постоянной, $L(x_2) = 5^+$

ШАГ 5. Так как не все вершины графа имеют постоянные метки, переходим к шагу 2.

Третья итерация

Граф с текущими значениями меток вершин показан на рис. 30.

ШАГ 2. Находим $\Gamma(x_2) = \{x_1, x_3, x_7, x_9\}$. Метки вершин x_3 и x_9 временные, следовательно пересчитываем их значения:

$$L(x_3) = \min [\infty, 5+18] = 23,$$

$$L(x_9) = \min [12, 5+13] = 12,$$

ШАГ 3. На данном шаге итерации имеем следующие временные метки вершин:

$$L(x_3) = 23, \quad L(x_4) = 7, \quad L(x_5) = \infty,$$

$$L(x_6) = 17, \quad L(x_8) = 6, \quad L(x_9) = 12.$$

Очевидно, что минимальную метку, равную 6, имеет вершина x_8 .

ШАГ 4. За следующую текущую метку принимаем вершину x_8 , т.е. $p = x_8$, а ее метка становится постоянной, $L(x_8) = 6^+$.

ШАГ 5. Не все вершины графа имеют постоянные метки, поэтому переходим к шагу 2.

Четвертая итерация

ШАГ 2. Находим $\Gamma(x_8) = \{x_1, x_5, x_6, x_9\}$. Метки вершин x_5, x_6 и x_9 временные, следовательно пересчитываем их значения:

$$L(x_5) = \min [\infty, 6+23] = 29,$$

$$L(x_6) = \min [17, 6+15] = 17,$$

$$L(x_9) = \min [12, 6+5] = 11.$$

ШАГ 3. На данном шаге итерации имеем следующие временные метки вершин:
 $L(x_3) = 23, \quad L(x_4) = 7, \quad L(x_5) = 29, \quad L(x_6) = 17, \quad L(x_9) = 11.$

Очевидно, что минимальную метку, равную 7 имеет вершина x_4 .

ШАГ 4. За следующую текущую метку принимаем вершину x_4 , т.е. $p = x_4$, а ее метка становится постоянной, $L(x_4) = 7^+$

ШАГ 5. Так как не все вершины графа имеют постоянные метки, переходим к шагу 2.

Пятая итерация

ШАГ 2. Находим $\Gamma(x_4) = \{x_3, x_5, x_6, x_7\}$. Метки вершин x_3, x_5 и x_6 временные, следовательно пересчитываем их значения:

$$L(x_3) = \min [23, 7+25] = 23,$$

$$L(x_5) = \min [29, 7+5] = 12,$$

$$L(x_6) = \min [17, 7+16] = 17.$$

ШАГ 3. На данном шаге итерации имеем следующие временные метки вершин:
 $L(x_3)=23, \quad L(x_5)=12, \quad L(x_6)=17, \quad L(x_9)=11.$

Очевидно, что минимальную метку, равную 11 имеет вершина x_9 .

ШАГ 4. За следующую текущую метку принимаем вершину x_9 , т.е. $p = x_9$, а ее метка становится постоянной, $L(x_9)=11^+$

ШАГ 5. Так как не все вершины графа имеют постоянные метки, переходим к шагу 2.

шестая итерация

ШАГ 2. Находим $\Gamma(x_9)=\{x_1, x_2, x_6, x_7, x_8\}$. Метка вершины x_6 временная, следовательно пересчитываем ее значение:

$$L(x_6) = \min [17, 11+9] = 17.$$

ШАГ 3. На данном шаге итерации имеем следующие временные метки вершин:
 $L(x_3)=23, \quad L(x_5)=12, \quad L(x_6)=17.$

Очевидно, что минимальную метку, равную 12 имеет вершина x_5 .

ШАГ 4. За следующую текущую метку принимаем вершину x_5 , т.е. $p = x_5$, а ее метка становится постоянной, $L(x_5)=12^+$

ШАГ 5. Так как не все вершины графа имеют постоянные метки, переходим к шагу 2.

Седьмая итерация

ШАГ 2. Находим $\Gamma(x_5) = \{x_4, x_6\}$. Метка вершины x_6 временная, следовательно пересчитываем ее значение:

$$L(x_6) = \min [17, 12+10] = 17.$$

ШАГ 3. На данном шаге итерации имеем следующие временные метки :

$$L(x_3)=23, \quad L(x_6)=17.$$

Очевидно, что минимальную метку, равную 17 имеет вершина x_6 .

ШАГ 4. За следующую текущую метку принимаем вершину x_6 , т.е. $p = x_6$, а ее метка становится постоянной, $L(x_6)=17^+$.

ШАГ 5. Так как не все вершины графа имеют постоянные метки, переходим к шагу 2.

Восьмая итерация

ШАГ 2. Находим $\Gamma(x_6) = \{x_3, x_5, x_7, x_8, x_9\}$. Метка вершины x_3 временная, следовательно пересчитываем ее значение:

$$L(x_3) = \min [23, 17+20] = 23.$$

ШАГ 3. На данном шаге итерации имеем одну временную метку вершины:

$L(x_3)=23$, которая становится постоянной.

ШАГ 4. Все вершины имеют постоянные метки, поэтому алгоритм окончен.

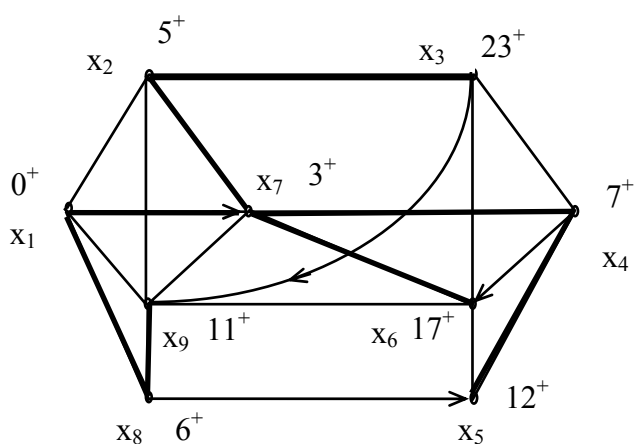


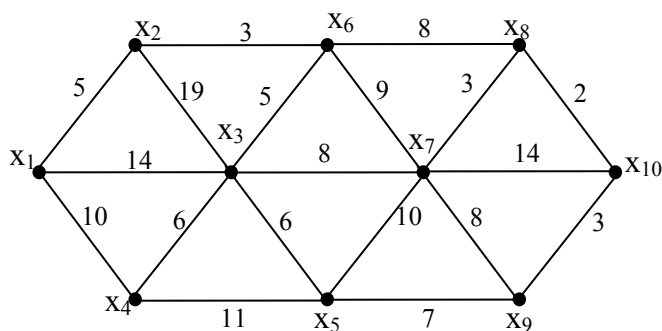
Рис. 31 Окончательные пометки и x_1 - база.

Для нахождения кратчайшего пути между вершинами, например x_2 и начальной x_1 последовательно используем соотношение (**): $L(x_2') + c(x_2', x_2) = L(x_2) = 5$, где вершина x_2' - это вершина, непосредственно предшествующая x_2 в кратчайшем пути от x_1 к x_2 . Единственной такой вершиной является вершина x_7 . Далее соотношение (**) применяем второй раз: $L(x_7') + c(x_7', x_7) = L(x_7) = 3$. Единственной такой вершиной является вершина x_1 . Поэтому кратчайший путь от x_1 к x_2 есть (x_1, x_7, x_2) . Вершина x_1 , называемая **базой** и дающая все кратчайшие пути от x_1 представляет дерево, показанное на рис. 31.

Упражнения к п. 5.4

1. Найти кратчайшие пути от вершины x_1 ко всем другим вершинам графа, представленного на рисунке. Построить также базу для вершины x_1 .

Решение.



Построим матрицу расстояний между вершинами

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
X1	0	5	14	10	0	0	0	0	0	0
X2	5	0	19	0	0	3	0	0	0	0
X3	14	19	0	6	6	5	8	0	0	0
X4	10	0	6	0	11	0	0	0	0	0
X5	0	0	6	11	0	0	10	0	7	0
X6	0	3	5	0	0	0	9	8	0	0
X7	0	0	8	0	10	9	0	3	8	14
X8	0	0	0	0	0	8	3	0	0	2
X9	0	0	0	0	7	0	8	0	0	3
X10	0	0	0	0	0	0	14	2	3	0

ШАГ1. $L(x_1)=0$, $L(x_2)=\infty$, $L(x_3)=\infty$, $L(x_4)=\infty$, $L(x_5)=\infty$, $L(x_6)=\infty$, $L(x_7)=\infty$, $L(x_8)=\infty$, $L(x_9)=\infty$, $L(x_{10})=\infty$

$$x_1 = p,$$

ШАГ2.

$$\Gamma(p) = \{x_2, x_3, x_4\},$$

$$L(x_2) = \min[\infty, 0+5] = 5,$$

$$L(x_3) = \min[\infty, 0+14] = 14,$$

$$L(x_4) = \min[\infty, 0+10] = 10.$$

ШАГ3.

$$L(x_2) = 5, \quad L(x_5) = \infty, \quad L(x_8) = \infty,$$

$$L(x_3) = 14, \quad L(x_6) = \infty, \quad L(x_9) = \infty,$$

$$L(x_4) = 10, \quad L(x_7) = \infty, \quad L(x_{10}) = \infty.$$

ШАГ4.

$$L(x_2) = 5^+.$$

ШАГ5.

$$P = x_2.$$

Вторая итерация.

ШАГ2.

$$\Gamma(p) = \{x_1, x_3, x_6\},$$

$$L(x_3) = \min[14, 5+19] = 14,$$

$$L(x_6) = \min[\infty, 5+3] = 8.$$

ШАГ3.

$$L(x_2) = 5^+, \quad L(x_5) = \infty, \quad L(x_8) = \infty,$$

$$L(x_3) = 14, \quad L(x_6) = 8, \quad L(x_9) = \infty,$$

$$L(x_4) = 10, \quad L(x_7) = \infty, \quad L(x_{10}) = \infty.$$

ШАГ4.

$$L(x_6) = 8^+.$$

ШАГ5.

$$P = x_6.$$

Третья итерация.

ШАГ2.

$$\Gamma(p) = \{x_2, x_3, x_7, x_8\},$$

$$L(x_3) = \min[14, 8+5] = 13,$$

$$L(x_7) = \min[\infty, 8+9] = 17,$$

$$L(x_8) = \min[\infty, 8+8] = 16.$$

ШАГ3.

$$L(x_2) = 5^+, \quad L(x_5) = \infty, \quad L(x_8) = 16,$$

$$L(x_3) = 13, \quad L(x_6) = 8^+, \quad L(x_9) = \infty,$$

$$L(x_4) = 10, \quad L(x_7) = 17, \quad L(x_{10}) = \infty.$$

ШАГ4.

$$L(x_4) = 10^+.$$

ШАГ5.

$$P = x_4.$$

Четвертая итерация.

ШАГ2.

$$\Gamma(p) = \{ \dots \},$$

$$L(x_3) = \min[\dots] = \dots,$$

$$L(x_5) = \min[\dots] = \dots,$$

ШАГ3.

$L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = \dots,$
 $L(x_3) = \dots, \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$
 $L(x_4) = \dots, \quad L(x_7) = \dots, \quad L(x_{10}) = \dots.$

ШАГ4.

$L(x_8) = \dots,$

ШАГ5.

$P = \dots,$

Пятая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p) = \{ \dots \}.$

$L(x_7) = \min[\dots] = \dots,$

$L(x_{10}) = \min[\dots] = \dots,$

ШАГ3.

$L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = \dots,$

$L(x_3) = \dots, \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$

$L(x_4) = \dots, \quad L(x_7) = \dots, \quad L(x_{10}) = \dots,$

ШАГ4.

$L(x_7) = \dots,$

ШАГ5.

$P = \dots,$

Шестая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p) = \{ \dots \},$

$L(x_5) = \min[\dots] = \dots,$

$L(x_9) = \min[\dots] = \dots,$

ШАГ3.

$L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = \dots,$

$L(x_3) = \dots, \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$

$L(x_4) = \dots, \quad L(x_7) = \dots, \quad L(x_{10}) = \dots$

ШАГ4.

$L(x_{10}) = \dots$

ШАГ5.

$P = \dots,$

Седьмая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p) = \{ \dots \},$

$L(x_9) = \min[\dots] = \dots$

ШАГ3.

$L(x_2) = \dots, \quad L(x_5) = \dots, \quad L(x_8) = \dots,$

$L(x_3) = \dots, \quad L(x_6) = \dots, \quad L(x_9) = \dots,$

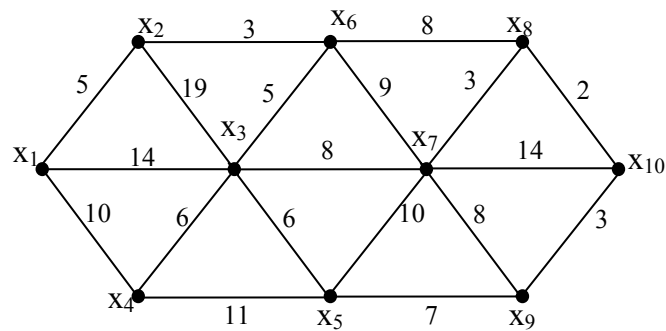
$L(x_4) = \dots, \quad L(x_7) = \dots, \quad L(x_{10}) = \dots,$

ШАГ4.

$L(x_9) = \dots$

База относительно вершины x_1 ,будет выглядеть следующим образом.

2. Построить базу относительно вершины x_7 для того же самого графа.



	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
X1	0	5	14	10	0	0	0	0	0	0
X2	5	0	19	0	0	3	0	0	0	0
X3	14	19	0	6	6	5	8	0	0	0
X4	10	0	6	0	11	0	0	0	0	0
X5	0	0	6	11	0	0	10	0	7	0
X6	0	3	5	0	0	0	9	8	0	0
X7	0	0	8	0	10	9	0	3	8	14
X8	0	0	0	0	0	8	3	0	0	2
X9	0	0	0	0	7	0	8	0	0	3
X10	0	0	0	0	0	0	14	2	3	0

Решение:

ШАГ1. $L(x_1)=\infty$, $L(x_2)=\infty$, $L(x_3)=\infty$, $L(x_4)=\infty$, $L(x_5)=\infty$, $L(x_6)=\infty$, $L(x_7)=0$, $L(x_8)=\infty$, $L(x_9)=\infty$, $L(x_{10})=\infty$

$x_7=p$,

ШАГ2.

$\Gamma(p)=\{x_3, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{10}\}$,

$L(x_3)=\min[\infty, 0+...] = \dots$,

$L(x_5)=\min[\infty, 0+\dots]=\dots,$
 $L(x_6)=\min[\infty, 0+\dots]=\dots$
 $L(x_8)=\min[\infty, 0+\dots]=\dots,$
 $L(x_9)=\min[\infty, 0+\dots]=\dots,$
 $L(x_{10})=\min[\infty, 0+\dots]=\dots$

ШАГ3.

$L(x_1)=\dots,$ $L(x_2)=\dots,$ $L(x_5)=\dots,$ $L(x_8)=\dots,$
 $L(x_3)=\dots,$ $L(x_6)=\dots,$ $L(x_9)=\dots,$
 $L(x_4)=\dots,$ $L(x_{10})=\dots$

ШАГ4.

$L(\dots)=\dots$

ШАГ5.

$P=\dots$

Вторая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p)=\{\dots\},$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots$

ШАГ3.

$L(x_1)=\dots,$ $L(x_2)=\dots,$ $L(x_5)=\dots,$ $L(x_8)=\dots,$
 $L(x_3)=\dots,$ $L(x_6)=\dots,$ $L(x_9)=\dots,$
 $L(x_4)=\dots,$ $L(x_{10})=\dots$

ШАГ4.

$L(\dots)=\dots$

ШАГ5.

$P=\dots$

Третья итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p)=\{\dots\},$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$

ШАГ3.

$L(x_1)=\dots,$ $L(x_2)=\dots,$ $L(x_5)=\dots,$ $L(x_8)=\dots,$
 $L(x_3)=\dots,$ $L(x_6)=\dots,$ $L(x_9)=\dots,$
 $L(x_4)=\dots,$ $L(x_{10})=\dots$

ШАГ4.

$L(x_4)=10^+$

ШАГ5.

$P=x_4$

Четвертая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p)=\{\dots\},$

$L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$

ШАГ3.

$L(x_1)=\dots,$ $L(x_2)=\dots,$ $L(x_5)=\dots,$ $L(x_8)=\dots,$
 $L(x_3)=\dots,$ $L(x_6)=\dots,$ $L(x_9)=\dots,$
 $L(x_4)=\dots,$ $L(x_{10})=\dots$

ШАГ4.

$L(x_8)=\dots,$

ШАГ5.

$P=\dots,$

Пятая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p)=\{ \dots \}.$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$

ШАГ3.

$L(x_1)=\dots,$ $L(x_2)=\dots,$ $L(x_5)=\dots,$ $L(x_8)=\dots,$
 $L(x_3)=\dots,$ $L(x_6)=\dots,$ $L(x_9)=\dots,$
 $L(x_4)=\dots,$ $L(x_{10})=\dots$

ШАГ4.

$L(\dots)=\dots,$

ШАГ5.

$P=\dots,$

Шестая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p)=\{ \dots \},$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$

ШАГ3.

$L(x_1)=\dots,$ $L(x_2)=\dots,$ $L(x_5)=\dots,$ $L(x_8)=\dots,$
 $L(x_3)=\dots,$ $L(x_6)=\dots,$ $L(x_9)=\dots,$
 $L(x_4)=\dots,$ $L(x_{10})=\dots$

ШАГ4.

$L(\dots)=\dots$

ШАГ5.

$P=\dots$

Седьмая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p)=\{ \dots \},$
 $L(\dots)=\min[\dots]=\dots,$

$L(\dots) = \min[\dots] = \dots$,
 $L(\dots) = \min[\dots] = \dots$,

ШАГ3.

$L(x_1) = \dots$, $L(x_2) = \dots$, $L(x_5) = \dots$, $L(x_8) = \dots$,
 $L(x_3) = \dots$, $L(x_6) = \dots$, $L(x_9) = \dots$,
 $L(x_4) = \dots$, $L(x_{10}) = \dots$

ШАГ4.

$L(x_9) = \dots$

Восьмая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p) = \{ \dots \}$,
 $L(\dots) = \min[\dots] = \dots$,
 $L(\dots) = \min[\dots] = \dots$,
 $L(\dots) = \min[\dots] = \dots$,

ШАГ3.

$L(x_1) = \dots$, $L(x_2) = \dots$, $L(x_5) = \dots$, $L(x_8) = \dots$,
 $L(x_3) = \dots$, $L(x_6) = \dots$, $L(x_9) = \dots$,
 $L(x_4) = \dots$, $L(x_{10}) = \dots$

ШАГ4.

$L(\dots) = \dots$

ШАГ5.

$P = \dots$

Девятая итерация.

ШАГ2.

$\Gamma(p) = \{ \dots \}$,
 $L(\dots) = \min[\dots] = \dots$,
 $L(\dots) = \min[\dots] = \dots$,
 $L(\dots) = \min[\dots] = \dots$,

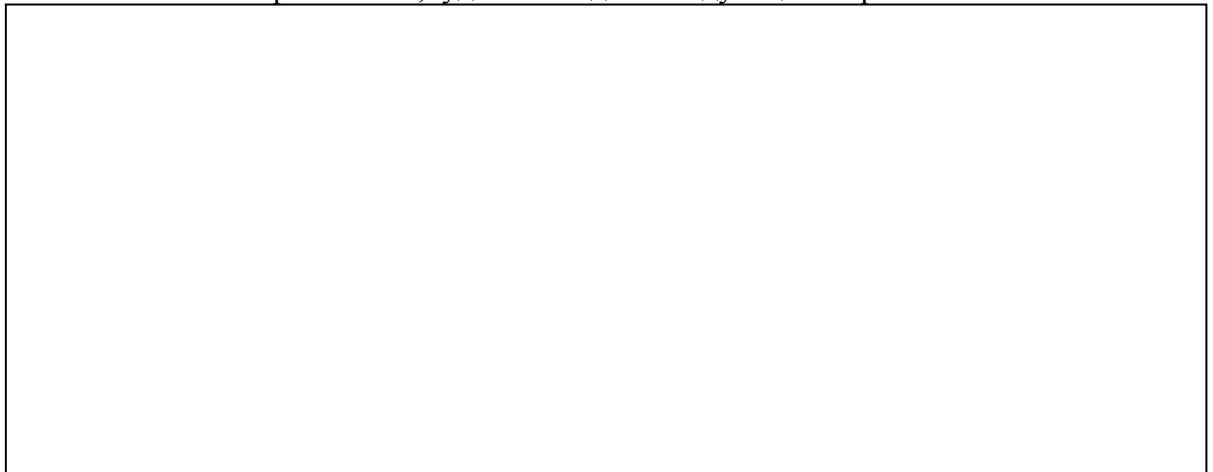
ШАГ3.

$L(x_1) = \dots$, $L(x_2) = \dots$, $L(x_5) = \dots$, $L(x_8) = \dots$,
 $L(x_3) = \dots$, $L(x_6) = \dots$, $L(x_9) = \dots$,
 $L(x_4) = \dots$, $L(x_{10}) = \dots$

ШАГ4.

$L(x_9) = \dots$

База относительно вершины x_7 будет выглядеть следующим образом.



3. Построить базу относительно вершины x_3 для предыдущего графа. Решение представить таблицей.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
∞	∞	0^+	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
14	19		6	6	5^+	8	∞	∞	∞

5.5. Орциклы и циклы

Особую группу составляют замкнутые пути. Путь a_1, a_2, \dots, a_q называется **замкнутым**, если в нем начальная вершина a_1 и конечная вершина a_q совпадают. Так, например, для графа на рис. 32. можно составить несколько замкнутых путей:

$M_1: a_3, a_6, a_{11}$

$M_2: a_{11}, a_3, a_4, a_7, a_1, a_{12}, a_9$

$M_3: a_3, a_4, a_7, a_{10}, a_9, a_{11}$

Пути M_1 и M_3 являются замкнутыми простыми орцепями, называемыми **контурами** или **простыми орциклами**. Поскольку в них одна и та же вершина используется только один раз (за исключением начальной и конечной). Путь M_2 не является контуром, так как вершина x_1 используется в нем дважды.

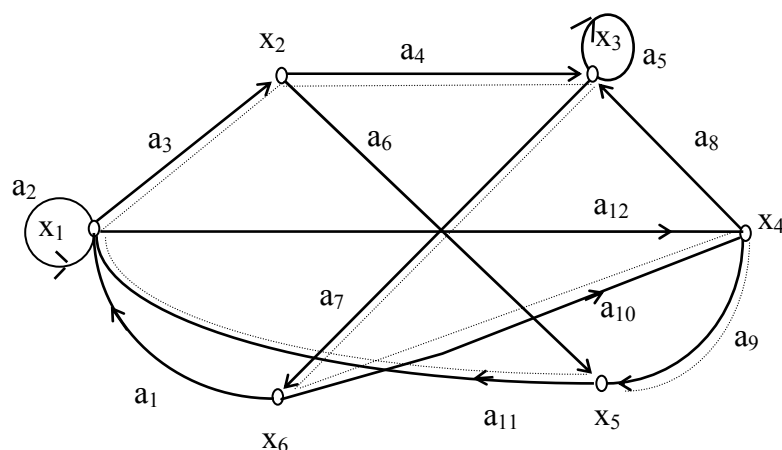


Рис.32 Орциклы в графе.

Контур, проходящий через все вершины графа, имеет особое название - **гамильтонов контур**. Путь M_3 является гамильтоновым контуром. Он показан штриховой линией на рис. 32.

Для неориентированного графа **замкнутым маршрутом** является неориентированный двойник замкнутого пути, т.е. замкнутым маршрутом является маршрут, в котором совпадают начальные и конечные вершины.

Для неориентированного графа понятия цикла и гамильтонова цикла аналогичны понятиям орцикла и гамильтонова контура в орграфе.

Эйлеровым циклом в графе называется цикл, содержащий все ребра графа. Граф, содержащий эйлеров цикл называется **эйлеровым графом**.

Основная теорема о существовании эйлерова цикла формулируется так.

ТЕОРЕМА: Связный неориентированный граф G содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда число вершин нечетной степени равно нулю (0 или 2).

Эйлер первым в своей знаменитой задаче о Кенигсбергских мостах поставил вопрос о существовании такого цикла.

На реке Преголя в Кенигсберге было два острова. Они соединялись между собой и с берегами реки семью мостами, как схематично показано на рис. 33. Задача заключалась в том, чтобы за одну прогулку обойти все семь мостов, проходя по каждому мосту только один раз, и вернуться в исходное место.

Если каждый берег реки и острова считать вершинами графа, а каждый мост - ребром, то карту рис. 33,а. можно представить в виде графа на рис. 33,б и

ответ на поставленный вопрос зависит теперь от существования эйлера цикла в этом графе. Эйлер установил, что указанный граф не содержит эйлера цикла, и этот результат ознаменовал рождение теории графов.

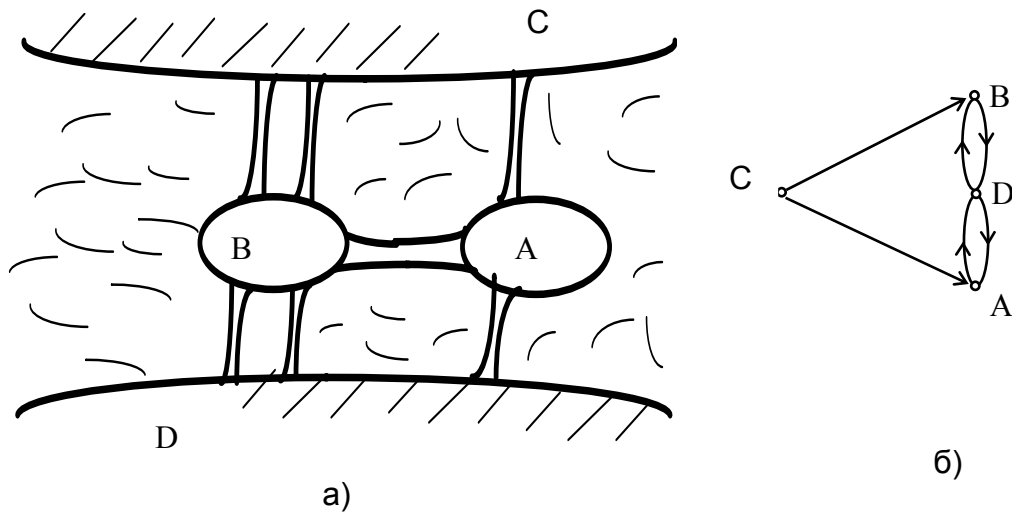


Рис.33 а) Схема Кенигсбергских мостов; б)Эквивалентный граф

Упражнения к п. 5.5

1. Для графа, представленного на рисунке, даны замкнутые пути:

$M_1: (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_7), (x_7, x_2);$

$M_2: (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6),$

$(x_6,$

$x_2) (x_2, x_3), (x_3, x_7), (x_7, x_2);$

$M_3: (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6),$

$(x_6,$

$x_2);$

$M_4: (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_3);$

$M_5: (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_6), (x_6,$

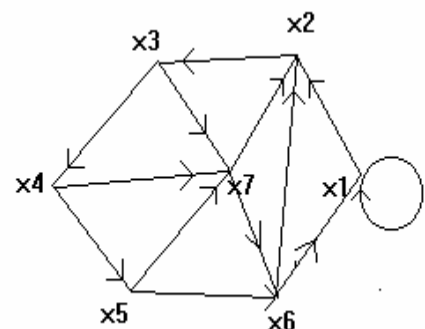
$x_1);$

$M_6: (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_7), (x_7,$

$x_6) (x_6, x_1);$

$M_7: (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_7), (x_7, x_6), (x_6, x_1), (x_1, x_2);$

а). Какие из этих путей являются контурами?



b). Какие из этих путей являются Гамильтоновыми контурами?

с). Какие из этих путей являются Эйлеровыми контурами?

Ответ: а). контурами являются:

b). Гамильтоновыми контурами являются:

с). Эйлеровыми контурами являются:

2. Построить Гамильтоновы и Эйлеровы циклы для графа на рисунке.

Ответ: Гамильтонов цикл —

.....,

Эйлеров цикл —

.....

.....

.....

3. Построить Гамильтоновы и Эйлеровы циклы для графа на рисунке.

Ответ: Гамильтонов цикл —

.....

.....

.....

Эйлеров цикл —

.....

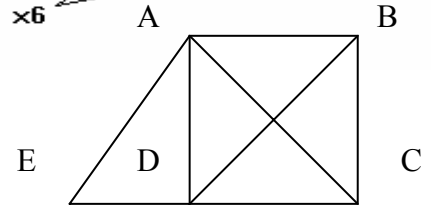
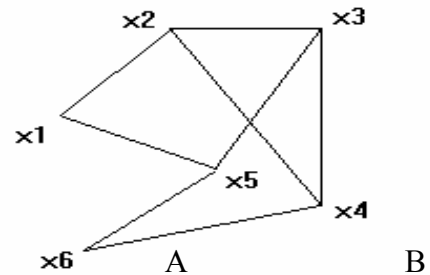
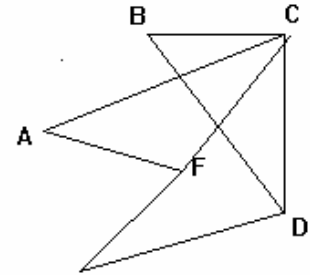
4. Построить Гамильтоновы и Эйлеровы циклы для графа на рисунке.

Ответ: Гамильтонов цикл —

.....

Эйлеров цикл —

.....



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разумеется, теория графов и сетей не исчерпывается изложенным в 5 главах материалом. Для тех, кто желает продолжить изучение теории графов, наметим направление для дальнейшего чтения.

Тому, кто интересуется чисто теоретическими вопросами, советуем посмотреть книгу Харари [13], которая является превосходным справочником по теории графов. Стоит прочитать работы Оре [8] о планарности и проблемах раскрашивания. Обсуждение различных приложений теории графов можно найти у Басакера и Саати [1], Бержа [2] или у Форда и Фалкersona [12]. Последняя книга обязательна для всех, кто хочет серьезно заняться теорией потоков в сетях.

В книге Кристофидеса [5] впервые достаточно полно представлены разнообразные алгоритмы, связанные с нахождением структурных и числовых характеристик объектов из теории графов. В частности, подробно рассматриваются различные алгоритмы поиска решения в задаче коммивояжера.

В книге специалистов из Канады и Индии [10] излагаются основы теории графов и ее приложения к сетям с сосредоточенными параметрами в электро- и вычислительной технике. Рассматриваются вопросы связности, цикломатики, устойчивости, вместимости и раскраски графов.

Эффективные алгоритмы решения задач большой размерности в теории графов имеют большое практическое значение. В книге Рейнгольда, Нивергельта и Део [9] излагаются несколько таких алгоритмов. В книге известного французского математика и педагога Кофмана [4] излагаются основы прикладной комбинаторики и теории графов.

Наиболее распространенными математическими моделями электронных схем являются графы и гиперграфы. Применительно к задачам САПР электронные модели графов и гиперграфов рассмотрены в работах Курейчика, Глушаня и Щербакова [6].

Много интересных работ по прикладным вопросам теории графов и сетей можно найти в математических и научно-технических журналах, таких как "Кибернетика", "Электронное моделирование", "Автоматика и вычислительная техника" и др.

В качестве учебного пособия для студентов вузов рекомендована книга Горбатого В. А. [3]. Конкретные алгоритмические решения некоторых задач на графах приведены в лабораторном практикуме [7], составленном Волченской Т.В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети.-М.:Наука,1974.
2. Бернс К. Теория графов и ее применение.-М.:ИЛ,1962.
3. Горбатов В.А. Основы дискретной математики.-М.:Высш. шк., 1986.
4. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику.-М.:Мир,1982.
5. Кристофидес Н. Теория графов.-М.:Мир, 1978.
6. Курейчик В.М., Глушань В.М., Щербаков Л.И. Комбинаторные аппаратные модели и алгоритмы в САПР.-М.:Радио и связь,1990.
7. Основы дискретной математики. Задачи на графах / Методические указания. Волченская Т.В.-Пенза:ППИ, 1991.
8. Оре О. Теория графов.-М.:Наука,1968.
9. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы.-М.:Мир,1980.
10. Свами М., Тхулалираман К. Графы, сети и алгоритмы.-М:Мир,1984.
11. Уилсон Р. Введение в теорию графов.-М.:Мир,1977.
12. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях.-М.:Мир,1966.
13. Харари Ф. Теория графов.-М.:Мир,1973.

Приложение 1

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕРШИН ГРАФА.

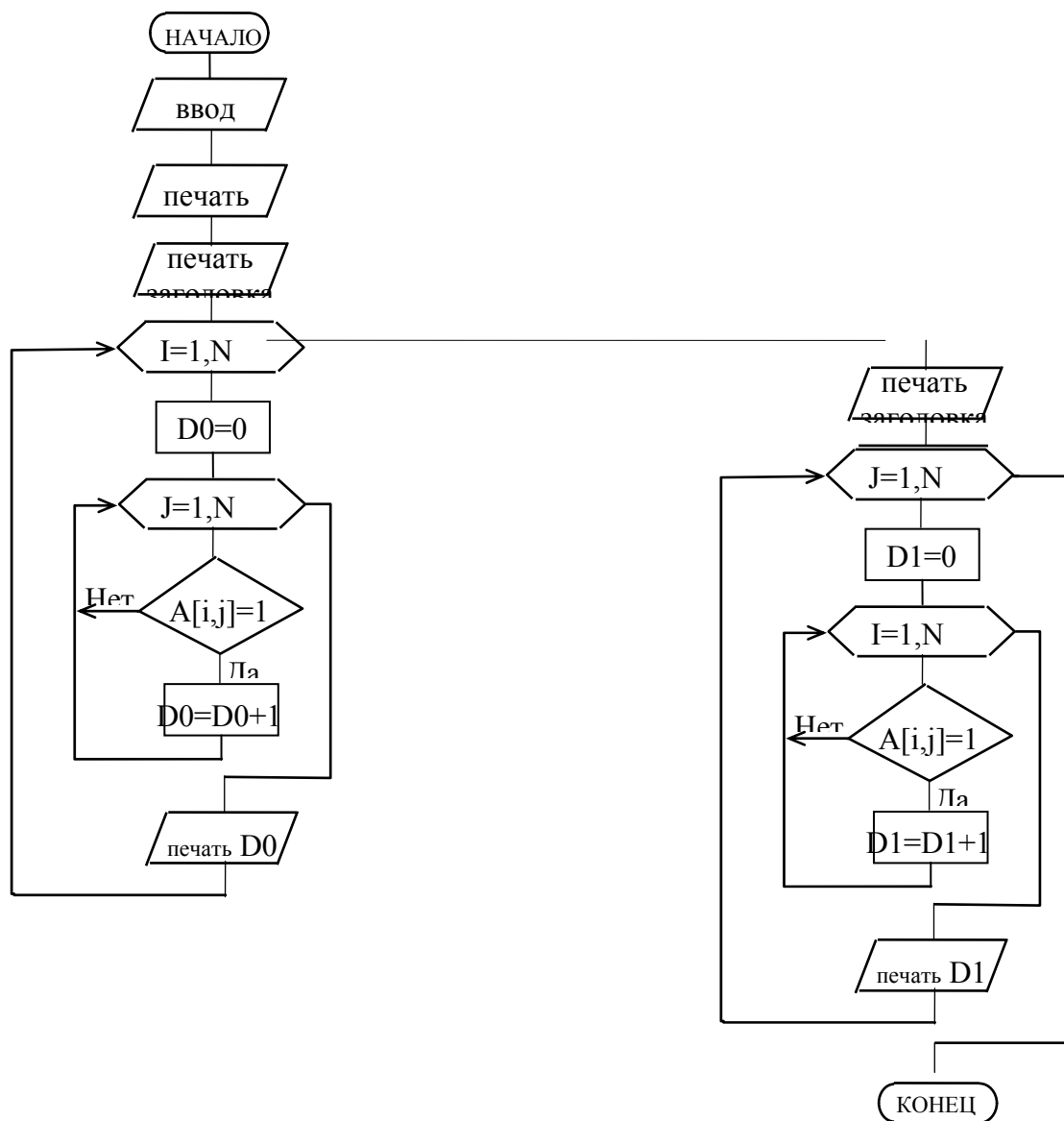
Введенные обозначения:

A - матрица смежности графа,

N - количество вершин графа,

D0 - полустепень исхода вершины,

D1 - полустепень захода вершины.



' НАХОЖДЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕРШИН ГРАФА'

```

    type
    tmas=array[1..10,1..10]of integer;
var
    K,i,j,d0,d1:integer;a:tmas;

Begin
writeln('enter K:');
read(K);
writeln('enter matr:');
for i:=1 to K do
for j:=1 to K do read(a[i,j]);
writeln('полустепени исхода вершин');
for i:=1 to K do
    begin
        d0:=0;
        for j:=1 to K do
            if a[i,j]<>0 then d0:=d0+1;
        writeln('d0(x',i,')=',d0);
    end;
writeln('полустепени захода вершин');
for j:=1 to K do
    begin
        d1:=0;
        for i:=1 to K do
            if a[i,j]<>0 then d1:=d1+1;
        writeln('d1(x',j,')=',d1);
    end;
end.

```


Приложение 2

Построение транзитивных замыканий

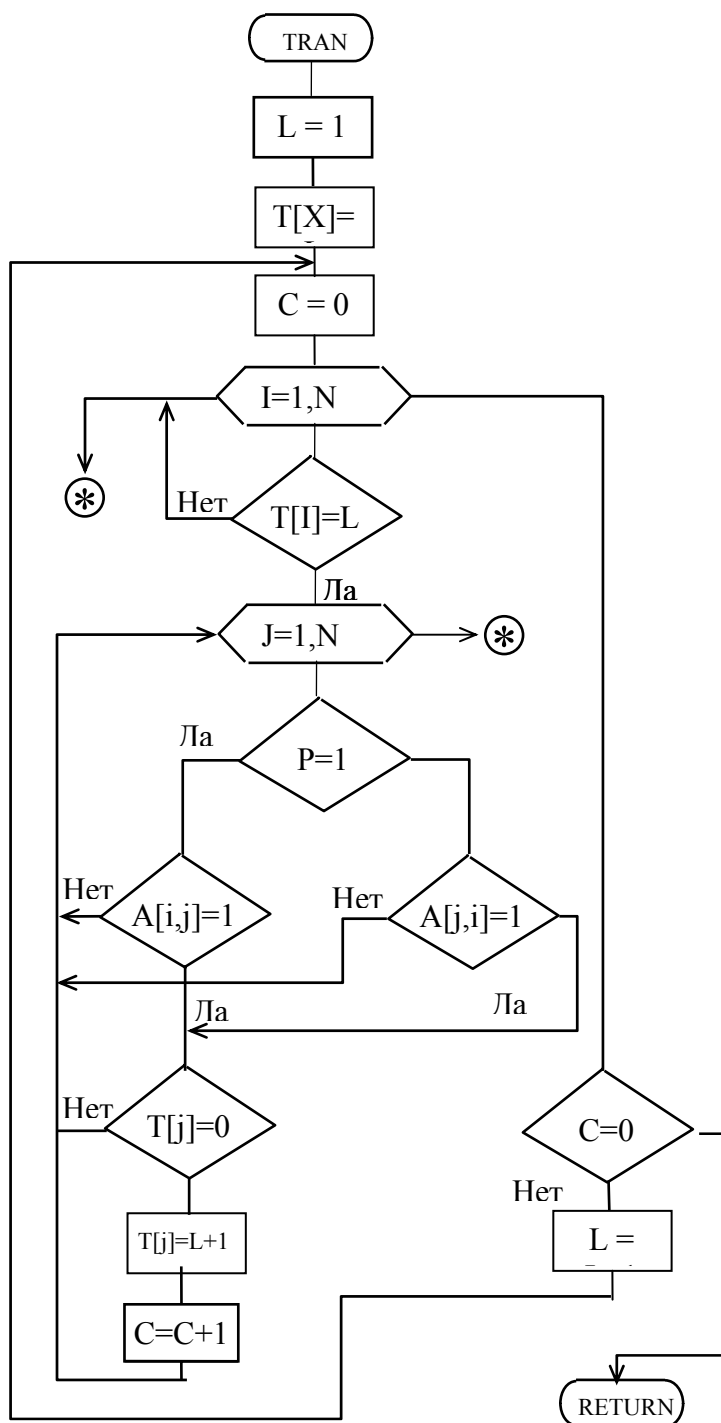
Обозначения:

X - номер вершины для которой ищется транзитивное замыкание;

T(N) - массив транзитивного замыкания;

C - счетчик добавления вершин в транзитивное замыкание ;

P - признак: P = 1 при формировании T^+ , P = 0 при формировании T^- .



```

USES CRT;
label n1,n2;
var
  A : array[1..15,1..15] of integer;
  b, t : array[1..15] of integer;
n,l,x,c,i,j : integer;

Begin
  clrscr;
  writeln('введите количество вершин графа n ');
  read(n);
  writeln('введите матрицу смежности ');
  for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do read(A [ i, j ] );
  writeln('введите номер вершины графа x ');
  read(x);
  l:=1;
  t [ x ]:=l;
n1:  writeln ('Прямое отображение ',l,'-ого порядка ');
  c:=0;
  for i:=1 to n do
    begin
      if t [ i ]=1 then
        begin
          for j:=1 to n do
            begin
              if A[j,i]=1 then
                begin
                  writeln (j,' ');
                  if t [ j ]=0 then
                    begin t [ j ]:=l+1; c:=c+1; end;
                end;
            end;
          end;
        end;
      end; end; end;
  if c<>0 then begin l:=l+1; goto n1; end;

```

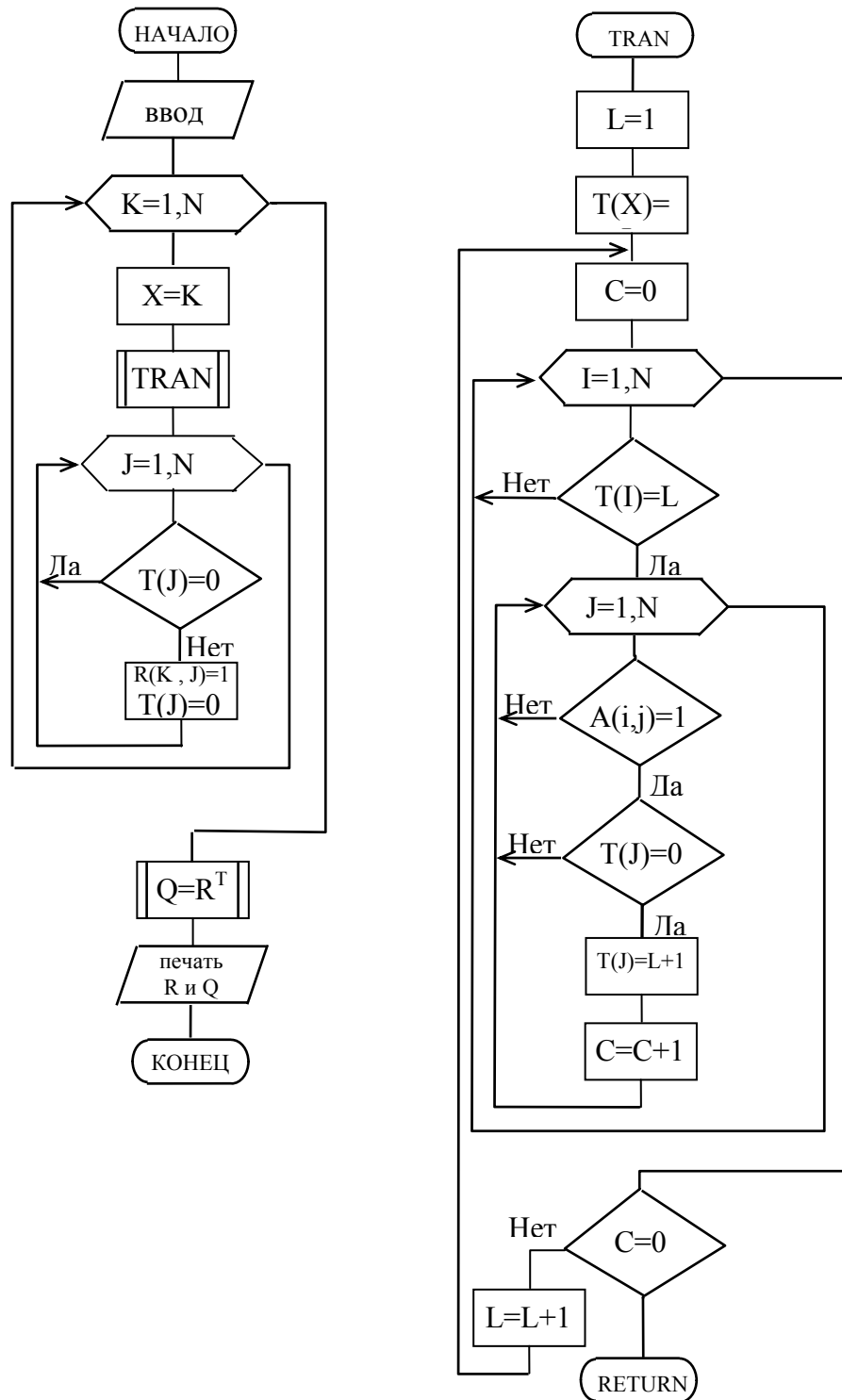
```

    l:=1; b[ x ]:=1;
n2:  writeln ('Обратное отображение ' ,l,'-ого порядка');
c:=0;
    for i:=1 to n do
begin
    if b[ i ]=1 then
begin
    for j:=1 to n do
begin
    if A [ i, j ]=1 then begin    write ( ' ',j);
        if b[ j ]=0 then begin
            b[ j ]:=1+1; c:=c+1;
        end;    end;
    end;
end;
end;
if c<>0 then begin l:=l+1; goto n2;    end;
    writeln('Транзитивные замыкания:');
    for i:=1 to n do
begin
    for j:=1 to n do
write ( ' ',A[ i,j ] );
writeln ( ' ',t[ i ] );
end;
writeln ( ' ');
for i:=1 to n do write ( ' ',b[i] );
end.

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Построение матриц достижимости и контрдостижимости



ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Разбиение графа на подграфы по методу Мальгранжа.

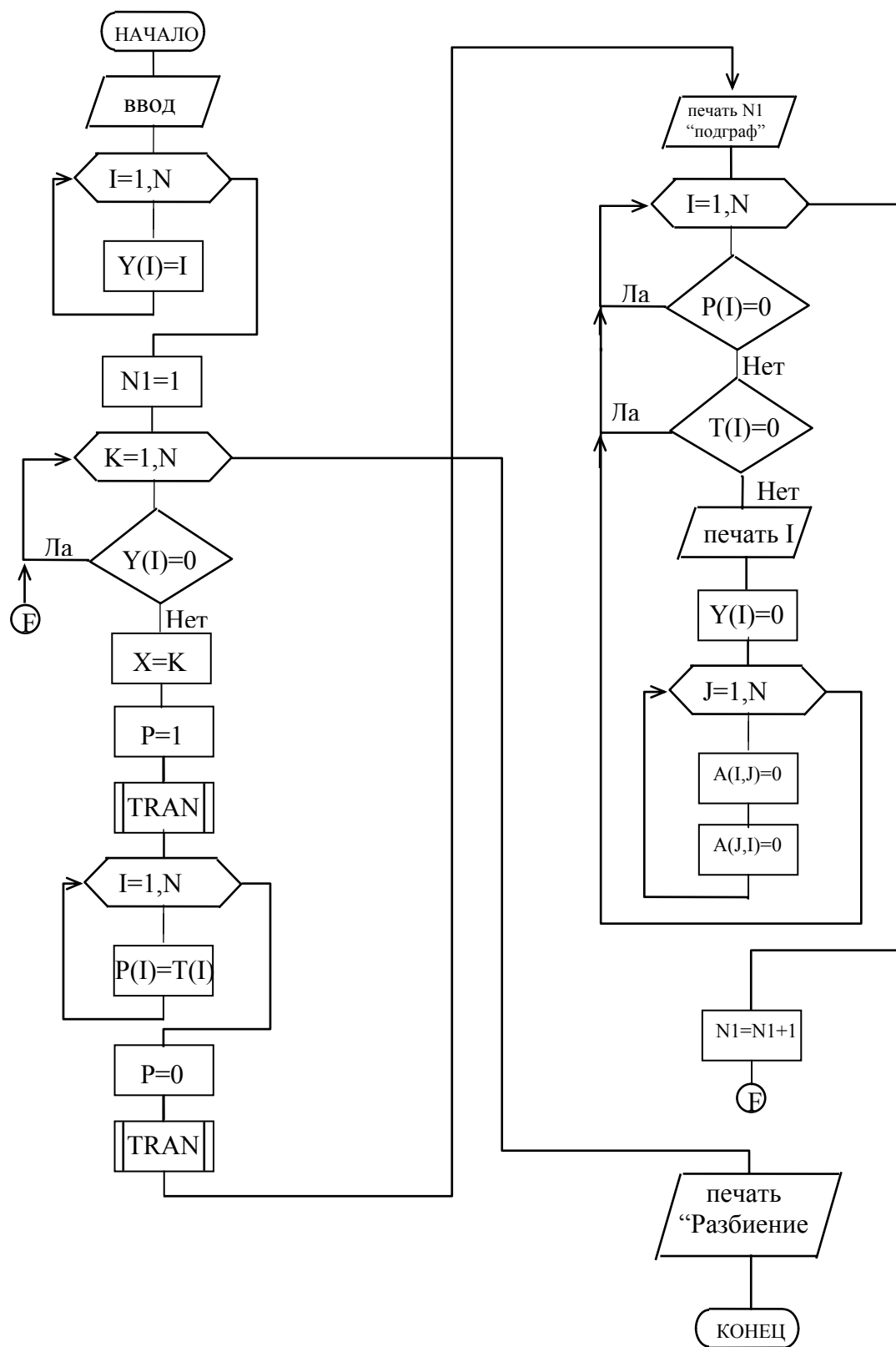
Изучение метода показывает, что в его основе лежит задача нахождения прямого и обратного транзитивного замыканий для некоторой вершины. Блок-схема нахождения прямого транзитивного замыкания ("TRAN") показана в приложении 2. Эту подпрограмму можно использовать и для нахождения обратного транзитивного замыкания, введя небольшие добавления, а именно :

признак **p**:

P=1, если, необходимо найти прямое транзитивное замыкание,
P=0, если, ищется обратное транзитивное замыкание.

В зависимости от значения признака **p** будем просматривать в матрице **A** строку или столбец.

В блок-схеме алгоритма разбиения графа на подграфы обратите внимание, что прежде, чем вызывается подпрограмма "TRAN", задается значение признака **p**, а после того как прямое транзитивное замыкание найдено, содержимое массива **T** переписывается в массив **P**. Все используемые обозначения в блок-схеме совпадают с введенными ранее. После того, как определено, что *i*-ый элемент входит в подграф, номер элемента выводится на печать, обнуляется номер в списке элементов **Y** (блок 19) и обнуляются *i*-ая строка и *i*-ый столбец в матрице **A**. Номер выделяемого подграфа N_1 увеличивается на 1 (блок 23) и процесс разбиения продолжается.



Приложение 5
Матричный метод разбиения.

Блок-схема алгоритма решения задачи разбиения графа на максимальные сильносвязные подграфы базируется на решении задачи нахождения матриц достижимости R и контрдостижимости Q , поэтому используется подпрограмма "RQ" построения матриц R и Q . Так как нахождение матриц R и Q производится 1 раз, то ее не обязательно оформлять подпрограммой.

Кроме ранее определенных обозначений введены следующие:

$Y(N)$ - массив-указатель вершин еще не вошедших ни в какой подграф. Первоначально в него записаны номера всех вершин графа
 N_1 - переменная, указывающая номер выделяемого подграфа;
 M - номер строки, с которой начинается поиск в матрице S .

