Лекція 3

Аксіоматика теорії ймовірностей

1. Поняття ймовірносного простору. Властивості ймовірності

Побудова теорії ймовірностей, основаній на точному аксіоматичному фундаменті, вперше була здійснена в 1933 році А.М.Колмогоровим (1903-1987). В аксіоматичній теорії ймовірностей випадкові події розглядаються як деякі множини, а відповідні їм ймовірності є визначеною на них нормованою мірою. Математичне сподівання в цій теорії є лебегівським інтегралом. Поставивши теорію ймовірностей на фундамент теорії множин і теорії міри, Колмогоров дав не тільки логічно задовільне обґрунтування теорії ймовірностей, а і включив її в систему сучасної математики.

Клас множин U_0 називається ***алгеброю***, заданою на Ω, якщо виконані три умови:

1) $\Omega \in U_0$;

2) якщо $A, B \in U_0$ то $A \cup B \in U_0$;

3) якщо $A \in U_0$, то $\bar{A} \in U_0$.

Приклад: 1) $U_0 = \{\varnothing, \Omega\}$; 2) $U_0 = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\}$, 3) $U_0 = 2^{\Omega}$

Клас множин U називається σ- ***алгеброю,*** заданою на Ω, якщо виконані три умови:

1) $\Omega \in U$;

2) якщо $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in U$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U$;

3) якщо $A \in U$, то $\bar{A} \in U$.

Множини $A \in U$ будемо називати ***подіями.***

Числову функцію $P(\cdot)$, визначену на подіях $A \in U$, будемо називати ***ймовірністю,*** якщо виконані наступні аксіоми:

1) аксіома ***невід'ємності*:** для довільного $A \in U$, $P(A) \geq 0$;

2) аксіома ***нормованості*:** $P(\Omega) = 1$;

3) аксіома σ - ***адитивності*:** для довільної послідовності $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in U$,

$A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Трійка (Ω, U, P) називається ***ймовірносним простором.***

Н а с л і д о к 1. Мають місце наступні співвідношення:

1) якщо $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

2) якщо $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$;

3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

4) $P(\varnothing) = 0$;

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

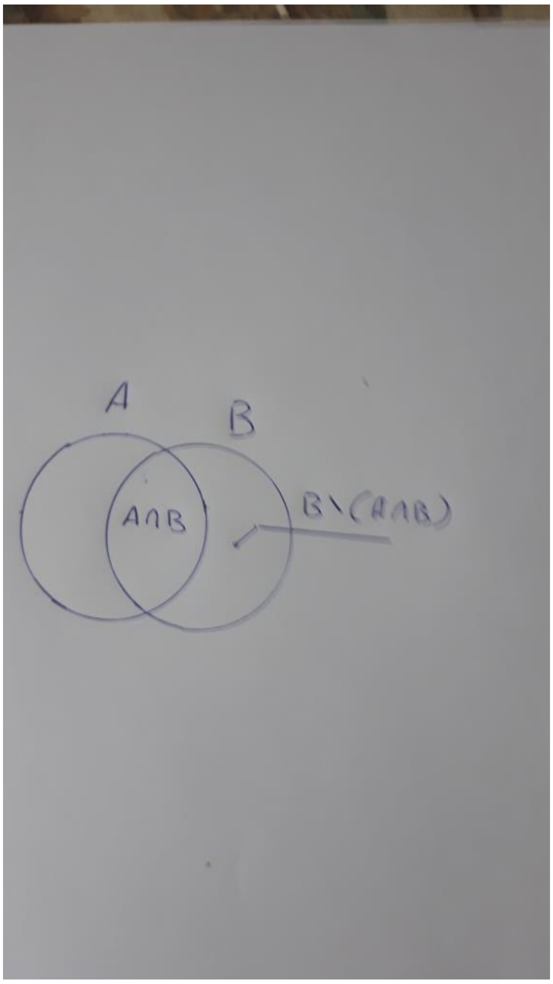
6) якщо $A_n \downarrow \varnothing$ (тобто $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$), то

$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$ (неперервність імовірності).

Доведення. Із співвідношення $A \subseteq B$ випливає $B = A \cup B \setminus A$ і $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, що означає 1). Оскільки $P(B \setminus A) \geq 0$, то з 1) випливає 2). Співвідношення 3) є наслідком 1), якщо покласти $B = \Omega$. В свою чергу 4) є наслідком 3), якщо $A = \Omega$.

Розглянемо співвідношення 5). Подамо $A \cup B$, у вигляді

$$A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)].$$

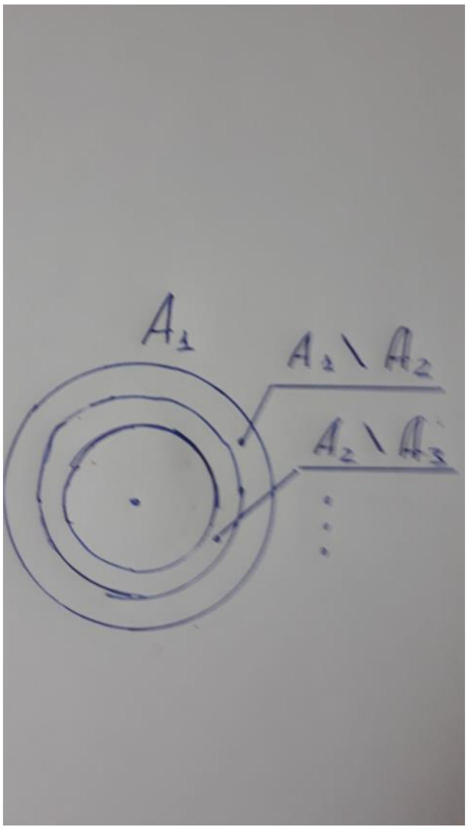


Візьмемо $P(\cdot)$ від обох боків цієї рівності. Використовуючи аксіому σ-адитивності і доведену властивість 1), знаходимо

$$P(A \cup B) = P(A) + [P(B) - P(A \cap B)],$$

що означає 5).

Нарешті розглянемо 6). З того, що $A_n \downarrow \varnothing$, випливає $A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \setminus A_{k+1})$.



Аксіома σ-адитивності і властивість 1) приводить до наступного

$$P(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left[P(A_k) - P(A_{k+1}) \right] = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(A_n) .$$

Таким чином $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Наслідок доведено.

Н а с л і д о к 2.

1) Якщо $A_1, ..., A_n$ - довільні події, то $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$;

2) Якщо $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$;

3) Якщо $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, то $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Пункти 2), 3) є варіантними властивості неперервності імовірності і доводяться так само, як пункт 6) наслідку 2.1. Нерівність 1) можна встановити методом математичної індукції.