Тема № 11. Алгоритм Б. Ху пошуку лінійної моделі найменшої розмірності.

Алгоритм Б. Ху (B. Hung) – це метод синтезу повністю керованих та повністю спостережних представлень, у яких використовується імпульсна перехідна матриця (тобто дані, які можуть бути отримані в результаті спостереження виходу системи за спеціальним входом).

Алгоритм Б. Ху більш наглядний і простий для дискретних за часом систем. Тому із них і почнемо.

11.1. Алгоритм Б. Ху для дискретних систем.

Розглядаємо дискретну за часом систему, перехідна функція якої описується співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ k = 0,1,2,..., \\ &x \in R^n,\ u \in R^m, \end{aligned} \qquad (1)$$

а функція виходу – таким співвідношенням:

$$y(k) = Cx(k),\ k = 0,1,2,...,\quad y \in R^l. \qquad (2)$$

Із формул (1), (2) отримуємо, що реакція $y(k)$ на вхід $u(\cdot)$ описується наступним чином:

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx(k) = C(Ax(k-1) + Bu(k-1)) = C(A(Ax(k-2) + Bu(k-2)) + Bu(k-1)) = \\ &= C(A(A(Ax(k-3) + Bu(k-3)) + Bu(k-2)) + Bu(k-1)) = \\ &= C(A^3x(k-3) + A^2Bu(k-3) + ABu(k-2) + A^0Bu(k-1)) = \\ &= C(A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i)),\ k = 1,2,... \end{aligned} \qquad (3)$$

Позначимо $CA^k x(0)$ через $y_0(k)$ і нехай $D_i = CA^{i-1}B,\ i = 1,2,...$

Тоді представлення (3) можна переписати у вигляді:

$$y(k) = y_0(k) + \sum_{i=0}^{k-1} D_{k-i}u(i) = y_0(k) + D_k u(0) + D_{k-1}u(1) + ... + D_1 u(k-1). \qquad (4)$$

Послідовність $\{D_i\}$ називають *імпульсною перехідною матрицею* дискретної за часом системи.

Надалі будемо вважати, що нам задається деяка послідовність $\{D_i\}$.

Поставимо у відповідність послідовності $\{D_i\}$ поліном відносно λ^{-1} вигляду:

$$Z_d(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} D_k = \frac{D_1}{\lambda^1} + \frac{D_2}{\lambda^2} + \ldots + \frac{D_k}{\lambda^k} + \ldots$$

Якщо для заданої послідовності $\{D_i\}$ існують такі матриці A, B, C, що $CA^{i-1}B = D_i$, $i = 1, 2, \ldots$, то маємо:

$$Z_d(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-k} CA^{k-1}B = C\lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A^k B = C\lambda^{-1}\left(I - \lambda^{-1}A\right)^{-1} B =$$
$$= C(\lambda I - A)^{-1} B$$

Матриця $Z_d(\lambda)$ називається *передавальною матрицею* лінійної дискретної системи з матрицями A, B, C.

Отже вважається, що трійка матриць A, B, C невідома, а імпульсна перехідна матриця $\{D_i\}$ або задається апріорно, або одержується в результаті експерименту на реальній системі. Тобто, якщо на систему, що знаходиться у стані спокою (а значить виконується тотожність $y_0(k) \equiv 0$) подати вхід $u(\cdot)$ такий, що $u(0) = e^j$ (тут $e^j - j$ -й орт) та $u(k) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$, то із представлення (4) одержуємо:

$$y(k) = D_k u(0) = D_k e^j, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

тобто на виході будемо спостерігати j -й стовпець імпульсної перехідної матриці. Провівши такий експеримент для кожного $j = \overline{1, m}$ та $k = 1, 2, \ldots,$ одержимо матричну послідовність $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Тепер розглянемо таку задачу: за відомою послідовністю $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ побудувати такі матриці A, B, C, щоб при кожному $k = 1, 2, \ldots$ виконувалась рівність

$$CA^{k-1}B = D_k,$$

причому пара матриць $(A,B)-$ повністю керована, а пара $(C,A)-$ повністю спостережна.

Самостійна робота. Записати критерії повністю керованої та повністю спостережної лінійної стаціонарної системи (на лекції я їх озвучив).

Будемо позначати матрицю F з m рядками та n стовпцями через F_n^m.

Уведемо до розгляду такі матриці:

$$H=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \dots \\ D_2 & D_3 & \dots \\ D_3 & D_4 & \dots \\ . & . & . \end{pmatrix}; \qquad H_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_\alpha \\ D_2 & D_3 & \dots & D_{\alpha+1} \\ D_3 & D_4 & \dots & D_{\alpha+2} \\ . & . & . & \\ D_\beta & D_{\beta+1} & \dots & D_{\beta+\alpha-1} \end{pmatrix};$$

$$H^{(k)}=\begin{pmatrix} D_{k+1} & D_{k+2} & \dots \\ D_{k+2} & D_{k+3} & \dots \\ D_{k+3} & D_{k+4} & \dots \\ . & . & . \end{pmatrix}; \qquad E_n^m=\begin{cases} \left(I_m^m, O_{n-m}^m\right), & при \quad m<n, \\ \begin{pmatrix} I_n^n \\ O_n^{m-n} \end{pmatrix}, & при \quad m>n, \\ I_m^m, & при \quad m=n. \end{cases}$$

Тут I_m^m- одинична квадратна матриця.

Надалі будемо розглядати тільки такі послідовності $\{D_k\}$, що для кожної із них існує відповідне скінчено вимірне представлення.

Нехай

$$\varphi(\lambda)=\lambda^{r^0}+a_{r_0-1}^0\lambda^{r^0-1}+\ldots+a_0^0$$

являється мінімальним поліномом матриці $\hat{A}$. Оскільки матриця $\hat{A}$ невідома, то й поліном $\varphi(\lambda)$ також невідомий. Проте в самому алгоритмі Б. Хо поліном

$\varphi(\lambda)$ не використовується, а потрібний лише факт його існування.
Ураховуючи співвідношення :

$$\hat{A}^{r^0} = -a_0^0 I - \ldots - a_{r^0-1}^0 \hat{A}^{r^0-1},$$

маємо:

$$D_{k+r^0} = -\sum_{i=0}^{r^0-1} a_i^o D_{k+i}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Таким чином, якщо послідовність $\{D_i\}$ має скінчено вимірне представлення, то існують такі числа : $a_0^0, a_1^0, \ldots, a_{r^0-1}^0$, що матриці $D_{r^0}, D_{r^0+1}, \ldots$ зв'язані співвідношенням (6). Відмітимо, що якщо для деяких чисел: $a_0, a_1, \ldots, a_{r^0-1}$ має місце співвідношення (6) , то існують такі числа $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$, де $r > r^0$, що виконуються рівності:

$$D_{k+r} = -\sum_{i=0}^{r-1} a_i D_{k+i}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Можна, наприклад , взяти:

$$\begin{aligned} a_i &= a_i^0, \quad i = \overline{0, r^0 - 1}; \\ a_i &= 0, \quad i = r^0, r^0 + 1, \ldots, r - 1. \end{aligned}$$

Ця обставина буде корисною далі, оскільки в алгоритмі Б. Хо потрібна оцінка числа r^0, яке апріорі невідоме, бо невідомим є поліном $\varphi(\lambda)$.

Уведемо до розгляду $(l \cdot r \times l \cdot r)$- матрицю

$$K = \begin{pmatrix} O_l & I_l & O_l & \ldots & O_l \\ O_l & O_l & I_l & \ldots & O_l \\ . & . & . & & \\ O_l & O_l & O_l & \ldots & I_l \\ -a_0 I_l & -a_1 I_l & -a_2 I_l & \ldots & -a_{r-1} I_l \end{pmatrix}.$$

Справедливі такі співвідношення:

$$KH_{rr}=\begin{pmatrix} D_2 & D_3 & \dots & D_{r+1} \\ D_3 & D_4 & \dots & D_{r+2} \\ . & . & . & \\ D_{r+1} & D_{r+2} & \dots & D_{2r} \end{pmatrix}=H_{rr}^{(1)};$$

$$K^k H_{rr}=H_{rr}^{(k)}, \quad k=2,3,\dots$$

Нехай $(l\cdot r\times l\cdot r)$- матриця P зі скалярними елементами та $(m\cdot r\times m\cdot r)$-матриця Q такі, що :

$$\det P\neq 0, \quad \det Q\neq 0,$$

$$PH_{rr}Q=\begin{pmatrix} I_n^n & O_{m\cdot r}^n \\ O_n^{l\cdot r-n} & O_{m\cdot r-n}^{l\cdot r-n} \end{pmatrix}=E_n^{l\cdot r}E_{m\cdot r}^n. \qquad (8)$$

Приведення H_{rr} до такого вигляду може бути здійснене за допомогою елементарних матричних операцій (алгоритм повертань Якобі).

Відмітимо, що із визначення матриць $H^{(k)}$ та $H_{\alpha\beta}$ випливає, що при усіх $i\geq 1$ виконуються рівності:

$$E_{l\cdot r}^l H_{rr}^{(i-1)}=E_m^{m\cdot r}=D_i\,.$$

Алгоритм Б. Хо полягає в знаходженні за матрицею H_{rr} матриць P та Q, натурального числа $r\geq n$ і обчисленні шуканих матриць A,B,C за такими формулами:

$$\begin{aligned} A&=E_{l\cdot r}^n PH_{rr}^{(1)}QE_n^{m\cdot r}, \\ B&=E_{l\cdot r}^n PH_{rr}E_m^{m\cdot r}, \\ C&=E_{l\cdot r}^l H_{rr}QE_n^{m\cdot r}. \end{aligned} \qquad (9)$$

Наголошуємо,що потрібно вибирати $r\geq n$.

11.2. Алгоритм Б. Ху для неперервних систем.

Наведений вище метод синтезу мінімальних представлень може бути використаний в задачах, у яких початковими даними являються передавальні матриці $Z(\lambda)$. Щоби для цих цілей використати алгоритм Б. Хо , необхідно знайти за матрицею $Z(\lambda)$ відповідну їй послідовність $\{D_k\}$, яка служить для побудови матриць A,B,C.

І так, нехай дана передавальна матриця $Z(\lambda)$ і нехай $\psi(\lambda)=\lambda^r+a_{r-1}\lambda^{r-1}+...+a_0$ – найменший спільний знаменник її елементів. Тоді матриця $\psi(\lambda)Z(\lambda)$ являється поліноміальною, тобто:

$$\psi(\lambda)Z(\lambda)=G_0+G_1\lambda+...+G_{r-1}\lambda^{r-1},$$

де G_i – відомі постійні $(l\times m)$- матриці.

Розглянемо тепер задачу знаходження такої послідовності $\{D_i\}$, щоби виконувалась рівність:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}D_i=Z(\lambda). \tag{8}$$

Помножимо обидві частини рівності (8) на $\psi(\lambda)$ і отримаємо:

$$\begin{aligned}
&G_0+G_1\lambda+...+G_{r-1}\lambda^{r-1}=\left(a_0+a_1\lambda+...+a_{r-1}\lambda^{r-1}+\lambda^r\right)\left(\lambda^{-1}D_1+\lambda^{-2}D_2+...+\lambda^{-r}D_r+...\right)=\\
&=a_1D_1+a_2D_2+...+a_{r-1}D_{r-1}+D_r+\left(a_2D_1+a_3D_2+...+a_{r-1}D_{r-2}+D_{r-1}\right)\lambda+...\\
&+\left(a_{r-2}D_1+a_{r-1}D_2+D_3\right)\lambda^{r-3}+\left(a_{r-1}D_1+D_2\right)\lambda^{r-2}+D_1\lambda^{r-1}+\\
&+\left(a_0D_1+a_1D_2+...+a_{r-1}D_r+D_{r+1}\right)\lambda^{-1}+\\
&+\left(a_0D_2+a_1D_3+...+a_{r-1}D_{r+1}+D_{r+2}\right)\lambda^{-2}+...\\
&+\left(a_0D_k+a_1D_{k+1}+...+a_{r-1}D_{r+k-1}+D_{r+k}\right)\lambda^{-k}+...
\end{aligned} \tag{9}$$

Прирівнявши у рівності (9) матричні коефіцієнти при однакових степенях λ, для визначення $D_1,D_2,...,D_r$ отримуємо такі співвідношення:

$$\begin{cases}
D_1= & G_{r-1},\\
a_{r-1}D_1+D_2= & G_{r-2},\\
a_{r-2}D_1+a_{r-1}D_2+D_3= & G_{r-3},\\
.\quad .\quad . & \\
a_2D_1+a_3D_2+...+a_{r-1}D_{r-2}+D_{r-1}= & G_1,\\
a_1D_1+a_2D_2+...+a_{r-1}D_{r-1}+D_r= & G_0.
\end{cases}$$

Із цих співвідношень матриці $D_1,D_2,...,D_r$ визначаються однозначно. А матриці $D_{r+1},D_{r+2},...$ згідно (9) , знаходяться через r попередніх D_{r+i} за формулами:

$$D_{r+k}=-\sum_{i=0}^{r-1}a_iD_{k+i},\quad k=1,2,... \tag{10}$$

Таким чином послідовність $\{D_i\}$ повністю визначена.
Використовуючи алгоритм Б. Хо , на основі послідовності $\{D_i\}$ можна знайти мінімальне представлення A, B, C і тоді отримаємо:

$$C(\lambda I - A)^{-1} B = Z(\lambda).$$

Матриці $D_1, D_2, \ldots$ називають *марківськими параметрами* передавальної матриці $Z(\lambda)$.

Відмітимо, що поведінка дискретної системи з матрицями A, B, C відрізняється від поведінки неперервної системи з тими ж матрицями A, B, C. Якщо матриці $\{D_k\}$ отримані із неперервного процесу у квантовані моменти часу $t_k = hk,\ \ k = 0,1,2,\ldots$ і (A, B, C) – мінімальне дискретне представлення цієї послідовності, то при певних умовах система:

$$\frac{dx}{dt} = \hat{A}x + \hat{B}u,$$
$$y = \hat{C}x$$

реалізує послідовність $\{D_k\}$ у моменти часу t_k, якщо матриці $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ такі:

$$\hat{C} = C,\ \ \hat{A} = h^{-1} \ln A, \quad \hat{B} = -h^{-1}(\ln A)(I - A)^{-1} B.$$

11.3. Алгоритм Б. Ху для спеціальних дискретних систем.

Досліджується дискретна система:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ x(0) = x^0 \in R^n,\ u(k) \in R^1,\ k = 0,1,\ldots$$
$$y(k) = Cx(k),\ y(k) \in R^1.$$

Невідомими вважаються матриці A, B, C та параметр n – розмірність вектора стану системи (більш точно: B є вектор-стовпець розмірності n, а C є вектор-рядок розмірності n). Потрібно на основі вхідної та вихідної інформації побудувати лінійну математичну модель системи найменшої розмірності (тобто знайти трійку матриць A, B, C та параметр n).

Будемо вважати, що у момент $k = 0$ система знаходиться у стані спокою, тобто $y(k) = 0$ при $k = 0$. Нехай на вхід системи подається:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = 0, \\ 0 & \text{при} \quad k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Вибираємо натуральне число r , яке задовольняє нерівність $r \geq n$. Спостерігаємо виходи системи $y(1), y(2), y(3), ..., y(r), ..., y(2r)$ і використаємо їх для побудови двох допоміжних симетричних матриць розмірності $(r \times r)$:

$$H_{rr} = \begin{pmatrix} y(1) & y(2) & y(3) & \dots & y(r) \\ y(2) & y(3) & y(4) & \dots & y(r+1) \\ . \; . \; . & & & & \\ y(r) & y(r+1) & y(r+2) & \dots & y(2r-1) \end{pmatrix}$$

та

$$H_{rr}^{(1)} = \begin{pmatrix} y(2) & y(3) & y(4) & \dots & y(r+1) \\ y(3) & y(4) & y(5) & \dots & y(r+2) \\ . \; . \; . & & & & \\ y(r+1) & y(r+2) & y(r+3) & \dots & y(2r) \end{pmatrix}.$$

Матриця H_{rr} має назву «*матриця Хенкеля*».

Тепер знаходяться такі не вироджені квадратні матриці P та Q розмірності $(r \times r)$, для яких виконується:

$$PH_{rr}Q = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \dots & 0 \\ . \; . \; . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_r \end{pmatrix}, \tag{11}$$

де

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & при \quad i = \overline{1, n}, \\ 0, & при \quad i = \overline{n+1, r}. \end{cases}$$

Це здійснюється з допомогою загальновідомого алгоритму повертань Якобі для діагоналізації симетричної матриці. Таким чином, можемо стверджувати, що з представлення (11) отримується шукане значення натурального параметра n.

Позначимо через $(\Pi)_{s_1}^{s_2}$ матрицю, яка стоїть на перетині перших s_2 рядків і перших s_1 стовпців деякої матриці Π. Тоді шукані матриці A, B, C обчислюють на основі відомих матриць $H_{rr}, H_{rr}^{(1)}, P, Q$ та параметра n за такими формулами:

$$A = \left(PH_{rr}^{(1)}Q\right)_n^n;$$

$$B = \left(PH_{rr}\right)_1^n;$$

$$C = \left(H_{rr}Q\right)_n^1.$$