Задача 1-1 (15 баллов). Рассмотрим задачу слияния двух упорядоченных последовательностей длины m и n, $m \geqslant 2n$. Докажите (используя модель решающего дерева) нижнюю оценку $\Omega(n \log \frac{m}{n})$ на количество сравнений, необходимых для решения данной задачи в худшем случае.

Решение. При слиянии массивов нам нужно выбрать n позиций из $m+n$ для элементов из B, так как остальные позиции будут заняты элементами из A. Число способов выбрать n позиций из $m+n$ равно C_{n+m}^{n}, что равно количеству различных способов размещения элементов A и B в результирующей последовательности, а соответственно, минимально возможное количество листьев корректного дерева.

Из двоичного ветвления решающего дерева следует, что глубина дерева не меньше $\log(C_{n+m}^{n})$. Имея ввиду то, что $C_{n+m}^{n} \approx \frac{(n+m)^n}{n^n}$ по формуле Стирлинга, получаем, что

$$\Omega(\log(C_{n+m}^{n})) = \Omega(\frac{(n+m)^n}{n^n}) = \Omega((\frac{m}{n})^n) = \Omega(n \log \frac{m}{n}).$$