Лабораторная работа 2. Вариационная задача

Цель работы

Цель настоящей работы – освоить средства моделирования задач нелинейного программирования. Решение простейшей вариационной задачи.

Ход работы

1. Ознакомиться со справочными сведениями.
2. Записать и решить уравнение Эйлера-Лагранжа для оптимизационного функционала.
3. Разработать программу, моделирующую алгоритм поиска оптимального решения для формализованной задачи, используя вычислительный пакет MatLab и/или язык программирования Python.
4. Подготовить и защитить отчет о работе.

Исходные данные: Варианты задач в Приложении 2 по номеру студента в списке.

Примеры решения вариационных задач с использованием символьных вычислений в MatLab можно найти в книгах Иглина С.П. (см. рекомендуемую литературу), некоторые материалы из которых доступны также в сети Интернет.

При использовании языка программирования Python, к примеру, можно воспользоваться пакетом для символьных вычислений SymPy.

Справочные сведения. Нелинейные задачи оптимизации.

1. Простые задачи нелинейного программирования условно делятся на два класса:

1) задачи безусловной оптимизации, в которых требуется нахождение экстремума (оптимума) нелинейной функции при отсутствии ограничений на значения ее переменных;

2) задачи условной оптимизации, в которой все ограничения являются равенствами (неравенствами).

В задачах нелинейного программирования рассматривают два вида оптимальных значений: локальные и глобальный.

Модели нелинейного программирования возникают в следующих прикладных областях: оптимальное управление; проектирование строительных конструкций; проектирование механических конструкций; электрические цепи; управление водными ресурсами; распределение ресурсов в условиях неполной информации и многих других.

В рамках лабораторной работы 2 рассмотрим важную задачу вариационного исчисления, широко применяемую на практике.

2. Задача вариационного исчисления. Основная цель задачи: исследование функционалов на экстремум. Классические задачи прикладной направленности, требующие привлечения аппарата вариационного исчисления:

- о брахистохроне (И. Бернулли, 1696) – плоской линии, по которой материальная точка быстрее всего попадает под действием силы тяжести из точки A в точку B (B ниже A и точки не лежат на одной вертикальной прямой);

- о геодезической линии – линии наименьшей длины, расположенной на заданной поверхности и соединяющей две данные точки;

- царевны Дидоны (Карфаген): ремешком фиксированной длины ограничить участок земли наибольшей площади;

- об экстремальности энтропии в теории информации: какими вероятностными характеристиками должен обладать сигнал для переноса максимального количества информации, и пр.

Постановка основной задачи вариационного исчисления. Для функционала $J(f)$ с областью определения $f \in D$ требуется найти элемент $f_0 \in D$, сообщающий функционалу экстремальное значение.

Экстремум функционала (в частности, функции) называется *условным*, если он достигнут при условии, что аргументы функционала (функции) связаны уравнением связи $\varphi(f)=0$.

Необходимое условие экстремума (для частного случая $f: R^n \to R,\ \varphi_i: R^n \to R^m, i=\overline{1,m}$*).*

Теорема 2.1. Если функционал (функция) f имеет в точке $a \in R^n$ условный экстремум при ограничениях $\varphi_i(x)=0, i=\overline{1,m}$, а ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j} \right\|_{m \times n}$ равен m, то существуют числа $\lambda_i, i=\overline{1,m}$, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=0,\ j=\overline{1,n}.$$

Здесь функционал (функция) $L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(x)$ называется *функцией Лагранжа* («лагранжианом»), а числа $\lambda_i, i=\overline{1,m}$ называются множителями Лагранжа.

Достаточное условие экстремума (для частного случая $f : R^n \to R,\ \varphi_i : R^n \to R, i = \overline{1,m}$).

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия:

1) $d\varphi_i = 0, i = \overline{1,m}$; $\varphi_i(a) = 0, i = \overline{1,m}$;
2) $f : R^n \to R,\ \varphi_i : R^n \to R, i = \overline{1,m}$- дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки $a \in R^n$;
3) $rang\left\| \dfrac{\partial \varphi_i(a)}{\partial x_j} \right\| = m$;
4) числа $\lambda_i, i = \overline{1,m}$, удовлетворяют системе уравнений $\dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j} = 0,\ j = \overline{1,n}$.

Тогда если квадратичная форма $d^2L(a,\lambda)$ знакопостоянна, то функционал (функция) f имеет в точке $a \in R^n$ строгий условный экстремум, причем строгий условный максимум (минимум) при $d^2L(a,\lambda) < 0$ $\left(d^2L(a,\lambda) > 0\right)$.

Если квадратичная форма $d^2L(a,\lambda)$ знакопеременна, то функционал (функция) f не имеет в точке $a \in R^n$ условный экстремум.

Простейшая задача вариационного исчисления - задача с закрепленными границами. Уравнение Эйлера.

Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до третьего порядка включительно. Среди всех непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, таких, что $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$ найти доставляющую слабый экстремум функционалу $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ (то есть в некоторой окрестности $U(y(x))$).

Теорема 2.3. Уравнение Эйлера-Лагранжа. Для того чтобы функционал $J(y)$, определенный на множестве непрерывно дифференцируемых функций $D=\{y(x)\}$, удовлетворяющих граничным условиям $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, достигал на функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0.$$

Интегральные кривые дифференциального уравнения Эйлера называются экстремалями. Уравнение Эйлера в развернутом виде после взятия полной производной $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)y'+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)y''-\frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

Пример 2.1. Найдем условный экстремум (тип вероятностного распределения, доставляющего максимум энтропии) функционала $H(\boldsymbol{p})$:

$$H(\boldsymbol{p})=-\sum_{i=1}^{N}p_i\log_2 p_i,\quad \sum_{i=1}^{N}p_i=1,\ \boldsymbol{p}=(p_1,...,p_N).$$

Воспользуемся методом неопределенного множителя Лагранжа для отыскания условного экстремума функции. Находим вспомогательную функцию:

$$F=-\sum_{i=1}^{N}p_i\log_2 p_i-\lambda.$$

Представим вспомогательную функцию F в виде (с учетом ограничения $\sum_{i=1}^{N}p_i=1$):

$$F=-\sum_{i=1}^{m}p_i\log_2 p_i-\lambda\sum_{i=1}^{m}p_i=-\sum_{i=1}^{m}[p_i\log_2 p_i+\lambda p_i]=-\sum_{i=1}^{m}F_i,\ F_i=p_i\log_2 p_i+\lambda p_i$$

.

Найдем максимум этой функции:

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_i} = \log_2 p_i + \log_2 e + \lambda = 0; \quad \log_2 p_i = -\log_2 e - \lambda \text{ (здесь учли } (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e\text{)}.$$

Величина вероятности p_i не зависит от i, а это может быть в случае, если все p_i равны, то есть $p_1=p_2=...=p_m=1/m$. При этом выражение для энтропии равновероятных, независимых элементов равно:

$$H_{\max}(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m}\log_2 \frac{1}{m} = \log_2 m.$$

Пример 2.2. Найти экстремальное значений функционала $J(y) = \int_0^1 \left(4y - y'^2 + 12x^2 y'\right)dx$ с граничными условиями: $y(0)=1, y(1)=4$.

Здесь уравнение Эйлера примет вид: $-2y'' + 24x - 4 = 0 \Rightarrow y'' = 12x - 2$.

Интегрирование этого уравнения приведет к выражению:

$$y = 2x^3 - x^2 + C_1 x + C_2.$$

С учетом условий на границы получаем $C_1 = 2, C_2 = 1$.

Итоговый вид экстремали $y = 2x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Решение примера 2.2 в MatLab.

Сначала подготовим рабочую среду:

```
% This code was tested in MatLab R2018a
clear all
clc
```

Объявляем символьные переменные `x` и `y`:

```
syms x y
```

Поскольку MatLab R2018a не умеет символьно брать частную производную по зависимой переменной $y(x)$, дополнительно объявляем первую производную $y' = \frac{dy}{dx}$ как отдельную независимую переменную d1y. При наличии в функционале производных более высоких порядков, для них также можно объявить дополнительные переменные.

```
syms d1y
```

В общем же случае следует сразу объявлять переменную y как символьную функцию от x командой syms y(x).

Задаем функционал F и находим частные производные по y и по y'.

```
F = 4*y - d1y^2 + 12 * x^2 * d1y;
dFdy = diff(F, y);
dFd1y = diff(F, d1y);
disp(dFdy)
disp(dFd1y)
```

Частные производные найдены. Теперь необходимо найти полную производную. Для этого все же придется задать переменную y как символьную функцию от x и заменить все вхождения переменной d1y на полноценную символьную производную от функции $y(x)$. Для удобства обозначим последнюю символьной переменной dy вместо d1y.

```
syms y(x)
dy = diff(y, x);
dFd1y_p = subs(dFd1y, {y, d1y}, {y(x), dy});
d_dFd1y_dx = diff(dFd1y_p, x);
disp(d_dFd1y_dx)
```

Наконец, находим уравнение Эйлера-Лагранжа как разность между двумя символьными выражениями, не забыв приравнять ее к нулю.

```
L = dFdy - d_dFd1y_dx == 0;
```

```
disp(L)
```

Аналитическое решение дифференциальных уравнений, заданных с помощью символьных переменных, осуществляется функцией dsolve.

```
sol = dsolve(L);
disp(sol)
```

Далее с помощью функции subs можно подставить в решение sol граничные условия. Получим систему из двух обычных уравнений. Решив эту систему уравнений с помощью функции solve (не путать с dsolve) найдем константы $C_1 = 2, C_2 = 1$.

Решение примера 2.2 с помощью пакета SymPy в Python. Отладка скрипта может производиться с использованием сервиса SymPy Live (live.sympy.org), позволяющего осуществлять символьные вычисления из браузера. Также с символьными вычислениями можно работать в обычной консоли, в IPython и т.д. Следует учитывать, что сервис SymPy Live имеет ограничения по времени выполнения каждой команды, поэтому для проведения сложных расчетов рекомендуется установить пакет SymPy локально.

Подготовка рабочей среды:

```
# this code requires SymPy v1.4
# следующие две строки не нужны при запуске кода на
live.sympy.org
from sympy import init_printing
init_printing()
from sympy import Symbol, Function, Derivative, dsolve,
solve
```

Задаем x как независимую символьную переменную, а y как символьную функцию от x. В SymPy нет сложностей с взятием частных производных, поэтому сразу объявляем dy как символьную производную от символьной функции y.

```
x = Symbol('x')
y = Function('y')(x)
dy = Derivative(y)
```

Задаем функционал F.

```
F = 4*y - dy**2 + 12 * x**2 * dy
print(F) # выводим выражение в машиночитаемом виде
F.doit() # ... и в человекочитаемом формате
dFdy = Derivative(F, y)
dFd1y = Derivative(F, dy)
dFdy.doit()
dFd1y.doit()
```

Теперь находим уравнение Эйлера-Лагранжа и решаем его уже знакомой функцией dsolve.

```
L = dFdy - Derivative(dFd1y, x)
sol = dsolve(L)
```

Подставляем граничные условия и решаем систему из двух уравнений.

```
eq1 = sol.subs({x:0, y:1})
eq2 = sol.subs({x:1, y:4})
coeffs = solve([eq1, eq2])
res = sol.subs(coeffs)
res.doit()
```

Рекомендуемая литература для лабораторной работы 2.

1. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.
2. Дэннис. Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер.с англ. М.: Мир, 1988.
3. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие. М.: Наука, 1989.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1991.
5. Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1988.
6. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1994.
7. Уайлд Д. Дж. Методы поиска оптимума. М.: Наука, 1997.
8. Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд во БГУ, 1988.
9. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1989.
10. Гилл Ф. и др. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1992.
11. Иглин С.П. Вариационное исчисление с применением MATLAB. ХПИ, Харьков, Украина, 2001, 112с.
12. Иглин С.П. Математические расчеты на базе MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 640 с.
13. Иглин С.П. Элементарная задача вариационного исчисления [в MatLab]: http://iglin.exponenta.ru/All/BookDisc/AllDocs/Part2/part2.html (дата обращения: 2020-03-22)
14. SymPy Live – интерактивный интерпретатор командной строки для работы с символьными вычислениями в браузере: https://live.sympy.org/ (дата обращения: 2020-03-22)
15. SymPy Documentation – официальная документация к пакету SymPy языка Python: https://docs.sympy.org

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Перечень задач к лабораторной работе 2

Решить простейшую вариационную задачу

Вариант	Постановка задачи
1	$V[y(x)] = \int_{-1}^{1} (y'^2(x) + 4y^2(x) - 8xy(x) + 2x^2)dx, \quad y(-1) = 3,\ y(1) = 1$
2	$V[y(x)] = \int_{0}^{2} (y'^2(x) - 4y'(x)e^{2x} + \sin^2 x)dx, \quad y(0) = 1,\ y(2) = -2$
3	$V[y(x)] = \int_{0}^{1} y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx, \quad y(0) = 2,\ y(1) = 3$
4	$V[y(x)] = \int_{-1}^{1} (y'^2(x) - 4y^2(x) + 2xy(x) - x^2)dx, \quad y(-1) = 2,\ y(1) = 4$
5	$V[y(x)] = \int_{0}^{2} (y'^2(x) - 4y'(x)\sin 2x - x^2)dx, \quad y(0) = 1,\ y(2) = -1$
6	$V[y(x)] = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{y(x)}dx, \quad y(0) = 2,\ y(1) = 1$
7	$V[y(x)] = \int_{1}^{3} \left(2y(x) - y(x)y'(x) + xy'^2(x)\right)dx, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 4;$
8	$V[y(x)] = \int_{0}^{1} \left(y'^2(x) + y^2(x) + 2e^{2x}y(x)\right)dx, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y(1) = \frac{1}{3}e^2;$
9	$V[y(x)] = \int_{-2}^{-1} \left(x^2y'^2(x) + 12y^2(x)\right)dx, \quad y(-2) = \frac{1}{16}, \quad y(-1) = 1;$
10	$V[y(x)] = \int_{0}^{\pi} \left((y'(x) + y(x))^2 + 2y(x)\sin x\right)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1;$
11	$V[y(x)] = \int_{-1}^{1} e^x \left(y'^2(x) + 6y^2(x)\right)dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = e^7 - e^{-3};$

12	$V[y(x)]=\int_1^2\left(y'^2(x)+\frac{6y^2(x)}{x^2}-32y(x)\ln x\right)dx,\quad y(1)=3,\quad y(2)=4(4\ln 2+3);$
13	$V[y(x)]=\int_0^3\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}dx,\quad y(0)=1,\quad y(3)=4;$
14	$V[y(x)]=\int_1^2\left(xy'^2(x)+y(x)y'(x)+xy(x)\right)dx,\quad y(1)=\frac{1}{8},\quad y(2)=\frac{1}{2}-\ln 2;$
15	$V[y(x)]=\int_1^2\frac{x^2y'^2(x)}{2x^3+1}dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=\frac{7}{2};$
16	$V[y(x)]=\int_1^2\left(\frac{3y^2(x)}{x^3}+\frac{y'^2(x)}{x}+8y(x)\right)dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=8\ln 2;$
17	$V[y(x)]=\int_1^2\left(x^2y'^2(x)+2y^2(x)+32x^2y(x)\ln x\right)dx,\quad y(1)=-5,\quad y(2)=4(4\ln 2-5);$
18	$V[y(x)]=\int_0^3\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}dx,\quad y(0)=1,\quad y(3)=4;$
19	$V[y(x)]=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(y(x)-\frac{1}{2}y'^2(x)\right)\sin x\,dx,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\ln\sqrt{2},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$
20	$V[y(x)]=\int_1^2\frac{x^2y'^2(x)}{2x^3+1}dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=\frac{7}{2};$
21	$V[y(x)]=\int_1^2\left(\frac{3y^2(x)}{x^3}+x^2+\frac{y'^2(x)}{x}\right)dx,\quad y(1)=2,\quad y(2)=8\frac{1}{2};$
22	$V[y(x)]=\int_1^4\left(\sqrt{x}y'^2(x)+\frac{y^2(x)}{2x\sqrt{x}}\right)dx,\quad y(1)=2,\quad y(4)=4\frac{1}{2};$
23	$V[y(x)]=\int_{-2}^{-1}\left(x^3y'^2(x)+3xy^2(x)\right)dx,\quad y(-2)=\frac{15}{8},\quad y(-1)=0;$

24	$V[y(x)]=\int_{-2}^{-1}\left(2y(x)y'(x)-x^2y'^2(x)\right)dx,\quad y(-2)=\frac{3}{2},\quad y(-1)=2;$
25	$V[y(x)]=\int_{0}^{1}\left(xy(x)y'(x)-2y'^2(x)\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\operatorname{ch}\frac{1}{2};$
26	$V[y(x)]=\int_{0}^{\pi/2}\left(y'^2(x)+2y(x)y'(x)+4y^2(x)\right)dx,\quad y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sh}\pi;$
27	$V[y(x)]=\int_{1}^{5}\frac{2y'^3(x)+y'^2(x)}{y'^4(x)+2}dx,\quad y(1)=2,\quad y(5)=14;$
28	$V[y(x)]=\int_{-2}^{-1}\left(x^3y'^2(x)+3xy^2(x)-\frac{6y(x)}{x}\right)dx,\quad y(-2)=\frac{1}{4},\quad y(-1)=1;$
29	$V[y(x)]=\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(y'^2(x)-6y(x)\sin x\right)\cos^2 x dx,\quad y\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1,\quad y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1;$
30	$V[y(x)]=\int_{0}^{1}\left(e^x(y'(x)-x)^2+2y(x)\right)dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\frac{1}{2};$