М. В. Фаттахова*
кандидат физико-математических наук, доцент
В. К. Чепусов*
магистрант кафедры компьютерных технологий и программной инженерии
*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Оптимизация цепей поставок древовидной структуры

В данной статье рассматривается алгоритм оптимизации цепи поставок древовидной структуры по критерию прибыли. Мы исследуем данный вопрос в контексте полиузловой цепочки поставок.

Ключевые слова: цепь поставок, древовидный граф, модель Курно, равновесие по Нэшу.

Рассмотрим древовидный граф. Внутри каждого из его узлов находятся несколько фирм, между которыми происходит конкуренция по модели Курно. В корневом узле или, говоря иначе, узле-дистрибьюторе, распределяется товар между дочерними узлами. В последующих узлах, если они не являются терминальными, происходит модернизация исходного продукта, после чего осуществляется продажа своим дочерним узлам. Терминальные узлы реализуют товар на рынках.

Данный способ устройства экономических отношений является наиболее распространённым в современном бизнесе. Поэтому без сомнения рассматриваемая задача является актуальной [1].

Введем ряд определений и понятий, чтобы упростить понимание дальнейших положений.

Определение 1. Будем рассматривать ориентированный граф $G = (X, U)$, где X – множество вершин, а U – множество ребер.

Определение 2. Если существует ребро $u_{ij} \in U$, связывающее вершины X^i и X^j, где $X^i, X^j \in X$, тогда вершина X^j называется дочерней вершиной X^i, а вершина X^j будет называться родительской по отношению к вершине X^i.

Определение 3. Обозначим через F_i множество индексов дочерних узлов, для вершины $i: F_i \subset I$, $i = \overline{1, L}$, $I = \{1, 2, .., L\}$, где L – количество узлов в графе.

Замечание 1. Если X^j является дочерней вершиной X^i, тогда $j \in F_i$.

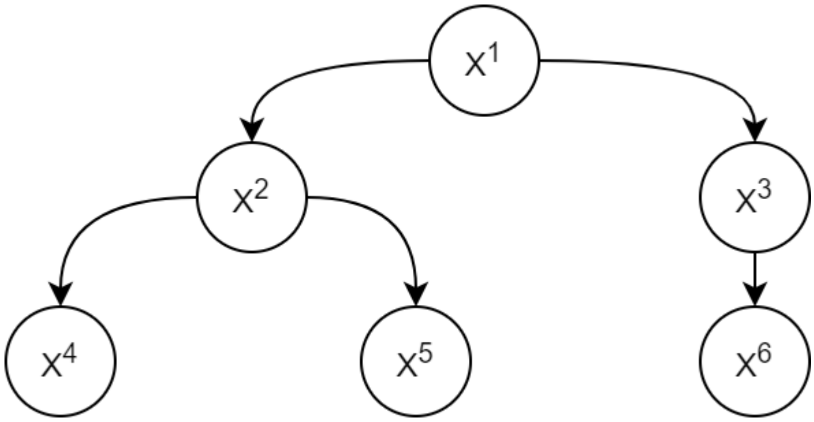


Рисунок 1 – Древовидная модель цепи поставок с номерными индексами.

Для цепи поставок, изображенной на рис. 1, имеем:

$$u_{12} = X^1, X^2,\ u_{13} = \left\{X^1, X^3\right\}, \text{тогда } F_1 = \{2,3\};$$

$$u_{24} = X^2, X^4,\ u_{25} = X^2, X^5,, \text{ тогда } F_2 = \{4,5\};$$

$$u_{36} = X^3, X^6, \text{тогда } F_3 = \{6\}.$$

Замечание 2. Если для $X^i \in X$, множество $F_i \neq \varnothing$ и существует некоторая вершина X^j такая, что $j \in F_i$, тогда можно реализовать следующую запись узла: X_i^j.

Дополним рисунок 1, исходя из уточнения 2.

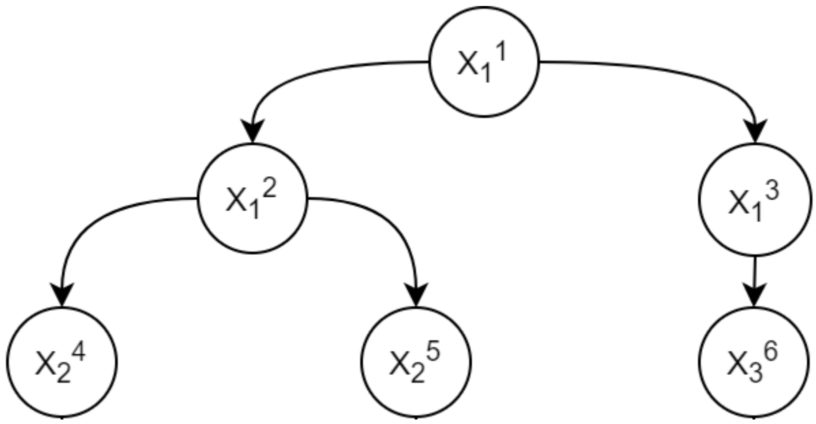


Рисунок 2 – Древовидная модель цепи поставок с номерными верхними индексами и нижними ссылками на родителей.

Для классификации узлов внутри цепи поставок введем ряд обозначений.

Обозначим корневую вершину через X_1^1: $X_{кор} = \{X_1^1\}$.

Множество <u>терминальных узлов</u> обозначим через $X_{терм}$:

$$X_{терм} = \{X_j^i \in X \mid F_i = \varnothing\}.$$

Множество <u>промежуточных узлов</u> обозначим через $X_{пром}$:

$$X_{пром} = \{X \setminus (X_{кор} \cup X_{терм})\}.$$

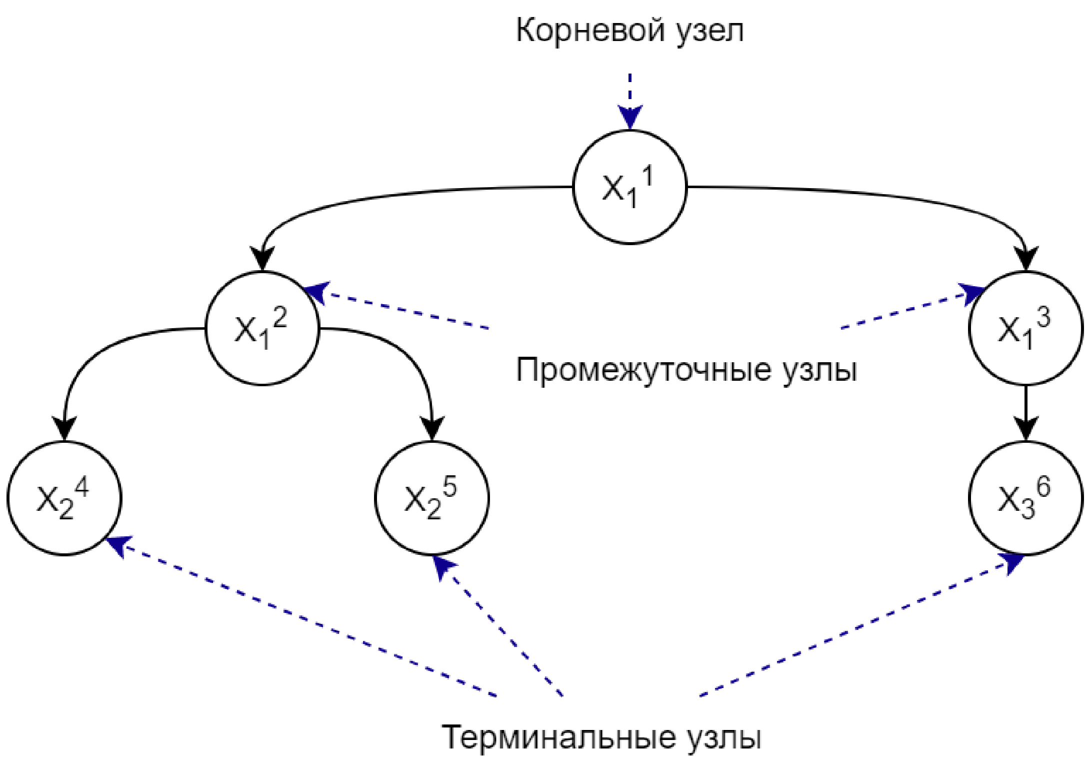


Рисунок 3 – Классификация узлов на примере

Определение 4. Под мощностью n_{ij} узла X_j^i будем понимать количество фирм в узле $n_{ij} = | X_j^i |$.

Опишем процесс принятия решения в рассматриваемой модели.

Шаг 1. Корневой узел определяет цену, по которой он продает товар *своим дочерним узлам*.

Шаг 2. Дочерние узлы корневого узла цепи поставок, если они не являются терминальными узлами, получая информацию от родителя, назначают цену товара уже *своим дочерним вершинам*.

Шаг 3. Терминальные узлы на основе цен, полученных от своих родителей, и функций спроса определяют объемы выпуска товара на рынок.

Шаг 4. Происходит процедура распределения объемов между фирмами в каждом из терминальных узлов.

Шаг 5. Информация об объемах поступает на все верх лежащие узлы и внутри каждого происходит процедура распределения объемов между фирмами.

Шаг 6. Происходит подсчет прибыли каждого из участников цепи поставок.

Данная процедура принятия решений может быть представлена многошаговой некооперативной иерархической игрой n лиц. Игроками являются фирмы, находящиеся в каждом из узлов. Стратегиями игроков, находящихся в корневом и промежуточных узлах, являются объемы производства и цены, по которым продается товар, а для игроков концевых вершин – только объёмы. Функции выигрыша – это функции прибыли каждой фирмы-игрока. При этом внутри каждого узла фирмы участники конкурируют по модели Курно [2]. В качестве принципа оптимальности было выбрано равновесие по Нэшу [3].

Конкуренция по Курно характеризуется следующими особенностями [4]:

1) линейные функции рыночного спроса и полных издержек n фирм;
2) однородность продукции на узле;
3) конкуренция объемами выпуска;
4) единая рыночная цена на узле;
5) отсутствие ограничений мощности фирм;
6) отсутствие коалиций;
7) максимизация прибыли каждой фирмой;
8) полная информация по п.1);
9) совершенное знание или рациональные ожидания фирм относительно пп. 2) – 8).

Опишем алгоритм построения оптимального решения.

1. Представим исходные данные в качестве древовидного графа, где в узлах хранится изначальная информация о количестве фирм и их издержек. Концевые узлы выходят на

рынки, где нам известная функция спроса на товар. Выразим из функции спроса функцию цены.

2. Будем производить обратный обход дерева:
   - 2.1. Если текущая вершина принадлежит к терминальному множеству:
     - 2.1.1. Функция цены нам уже известна.
     - 2.1.2. Формируем систему функций прибыли
     - 2.1.3. Применяем к системе условия максимума
     - 2.1.4. Из полученной системы производных выражаем функции оптимальных объемов фирм.
     - 2.1.5. Суммируем функции оптимальных объемов фирм, чтобы получить функцию объема текущего узла.
   - 2.2. Если текущая вершина принадлежит к промежуточному множеству:
     - 2.2.1. Применяем условие отсутствия дефицита и излишков.
     - 2.2.2. Выражаем функцию цены текущего узла.
     - 2.2.3. Формируем систему функций прибыли.
     - 2.2.4. Применяем к системе условия максимума.
     - 2.2.5. Из полученной системы производных выражаем функции оптимальных объемов фирм.
     - 2.2.6. Суммируем функции оптимальных объемов фирм, чтобы получить функцию объема текущего узла.
   - 2.3. Если текущая вершина принадлежит к корневому множеству:
     - 2.3.1. Применяем условие отсутствия дефицита и излишков.
     - 2.3.2. Выражаем функцию цены текущего узла.
     - 2.3.3. Формируем систему функций прибыли.
     - 2.3.4. Применяем к системе условия максимума.
     - 2.3.5. Получаем значения объемов фирм.
     - 2.3.6. Рассчитываем значение цены.
     - 2.3.7. Рассчитываем значения прибыли фирм.
3. Спускаясь по дереву вниз, рассчитываем значения цены, объёмов и прибыли для всех оставшихся узлов.

Рассмотрим теоретико-игровую модель цепи поставок с шестью узлами (рис. 4, табл. 2).

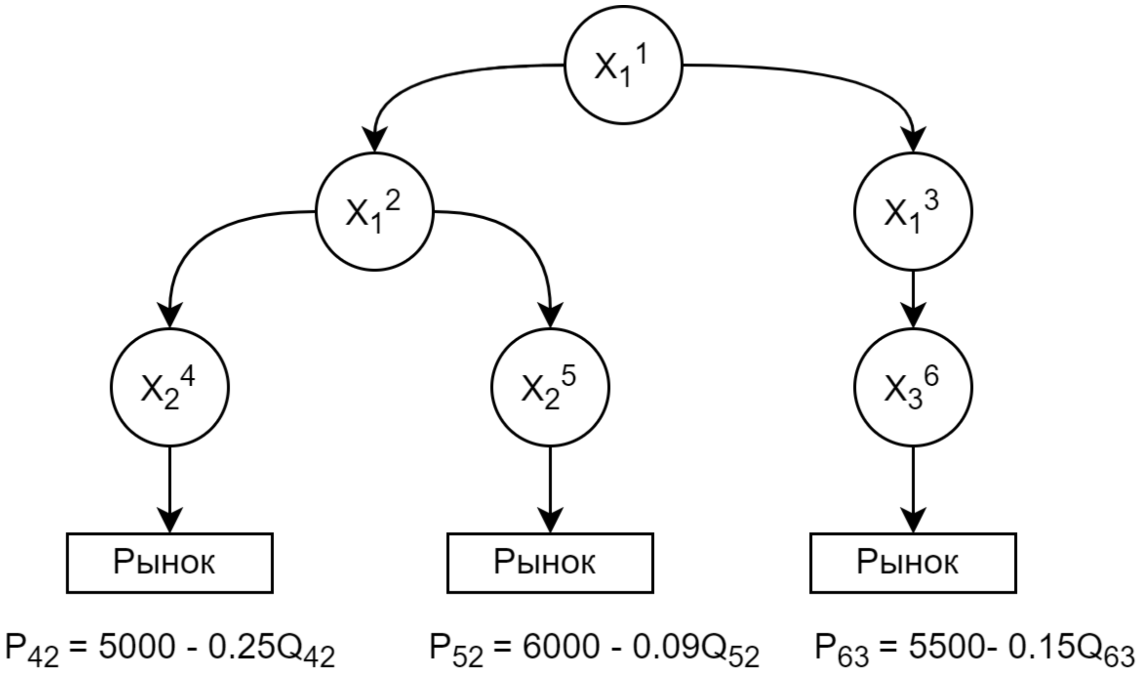


Рисунок 4 – Цепь поставок с одним узлом поставщиков, двумя узлами дистрибьюторов и тремя узлами ретейлеров

Таблица 1. Обозначения

Обозначения	Пояснение
X_j^i	Узел номер i с родителем j
x_{jk}^i	Фирм k внутри узла X_j^i
$Q_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} q_{ijk}$	Суммарный объём однородной продукции в узле X_j^i
q_{ijk}	Объем выпуска продукции фирмы k в узле X_j^i
π_{ijk}	Прибыль фирмы k в узле X_j^i
p_{ij}	Цена в узле X_j^i

Таблица 2. Исходные данные

Узел	X_1^1	X_1^2	X_1^3	X_2^4	X_2^5	X_3^6
Кол-во фирм в узле	$n_{11}=2$	$n_{21}=1$	$n_{31}=2$	$n_{42}=4$	$n_{52}=2$	$n_{63}=1$
Затраты	$C_{111}=1500$ $C_{112}=1505$	$C_{211}=700$	$C_{311}=720$ $C_{312}=710$	$C_{421}=342$ $C_{422}=340$ $C_{423}=338$ $C_{424}=345$	$C_{521}=120$ $C_{522}=122$	$C_{631}=200$

Представим формулы для вычисления прибылей фирм каждого узла, а также линейные функции цен и формулу условия отсутствия излишков и дефицита. Каждая из фирм стремится к максимизации собственной прибыли [5].

Функция прибыли для возможных множеств узлов:

$$\pi_{ijk}=\begin{cases} q_{11k}\left(p_{11}-c_{11i}\right),\text{ для } X_j^i\in X_{кор}, \\ q_{ijk}\left(a_{ij}-b_{ij}Q_{ij}-p_{jh}-c_{ijk}\right),\text{ для } X_j^i\in X_{терм}, \\ q_{ijk}\left(p_{ij}-p_{jh}-c_{ijk}\right),\text{ для } X_j^i\in X_{пром}. \end{cases} \tag{1}$$

Линейная функция цены:

$$p_{ij}=a_{ij}-b_{ij}Q_{ij}. \tag{2}$$

Функция условия отсутствия излишков и дефицита:

$$Q_{ij}=\sum_{k=1}^{n_{ij}}q_{ijk}=\sum_{h\epsilon F_i}Q_{hi}=\sum_{h\epsilon F_i}\sum_{t=1}^{n_{hi}}q_{hit}. \tag{3}$$

Для построения равновесия по Нэшу в рассматриваемой игре распишем функции прибыли для всех фирм из терминальных узлов:

$$\begin{cases} \pi_{421} = q_{421}\left(5000 - 0,25\sum_{i=1}^{4} q_{42i} - p_{21} - 342\right) \\ \pi_{422} = q_{422}\left(5000 - 0,25\sum_{i=1}^{4} q_{42i} - p_{21} - 340\right) \\ \pi_{422} = q_{422}\left(5000 - 0,25\sum_{i=1}^{4} q_{42i} - p_{21} - 340\right) \\ \pi_{424} = q_{424}\left(5000 - 0,25\sum_{i=1}^{4} q_{42i} - p_{21} - 345\right) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \pi_{521} = q_{521}\left(6000 - 0,09\sum_{i=1}^{2} q_{52i} - p_{21} - 120\right) \\ \pi_{522} = q_{522}\left(6000 - 0,09\sum_{i=1}^{2} q_{52i} - p_{21} - 122\right) \end{cases} \tag{5}$$

$$\pi_{631} = q_{631}\left(5500 - 0,15q_{621} - p_{31} - 200\right) \tag{6}$$

Применив к функциям (4), (5) и (6) необходимое условие максимума, получаем системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{421} \\ q_{422} \\ q_{423} \\ q_{424} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4658 - p_{21} \\ 4660 - p_{21} \\ 4662 - p_{21} \\ 4655 - p_{21} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} 0,18 & 0,09 \\ 0,09 & 0,18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{521} \\ q_{522} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5880 - p_{21} \\ 5878 - p_{21} \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$(0,3)(q_{631}) = (5300 - p_{31}) \tag{9}$$

В результате решения систем (7) – (9) получим выражения для объёма поставок $\left(q_{ijk}\right)$. Затем, исходя из условия отсутствия дефицита и излишков, получаем соотношение:

$$Q_{21} = q_{211} = Q_{42} + Q_{52} = \sum_{i=1}^{4} q_{42i} + \sum_{i=1}^{2} q_{52i} = 58456,1 - 10,6p_{21} \tag{10}$$

$$Q_{31} = q_{311} + q_{312} = Q_{63} = q_{631} = 17,666,67 - 3,3p_{31} \tag{11}$$

Из соотношения (10) выразим p_{21}:

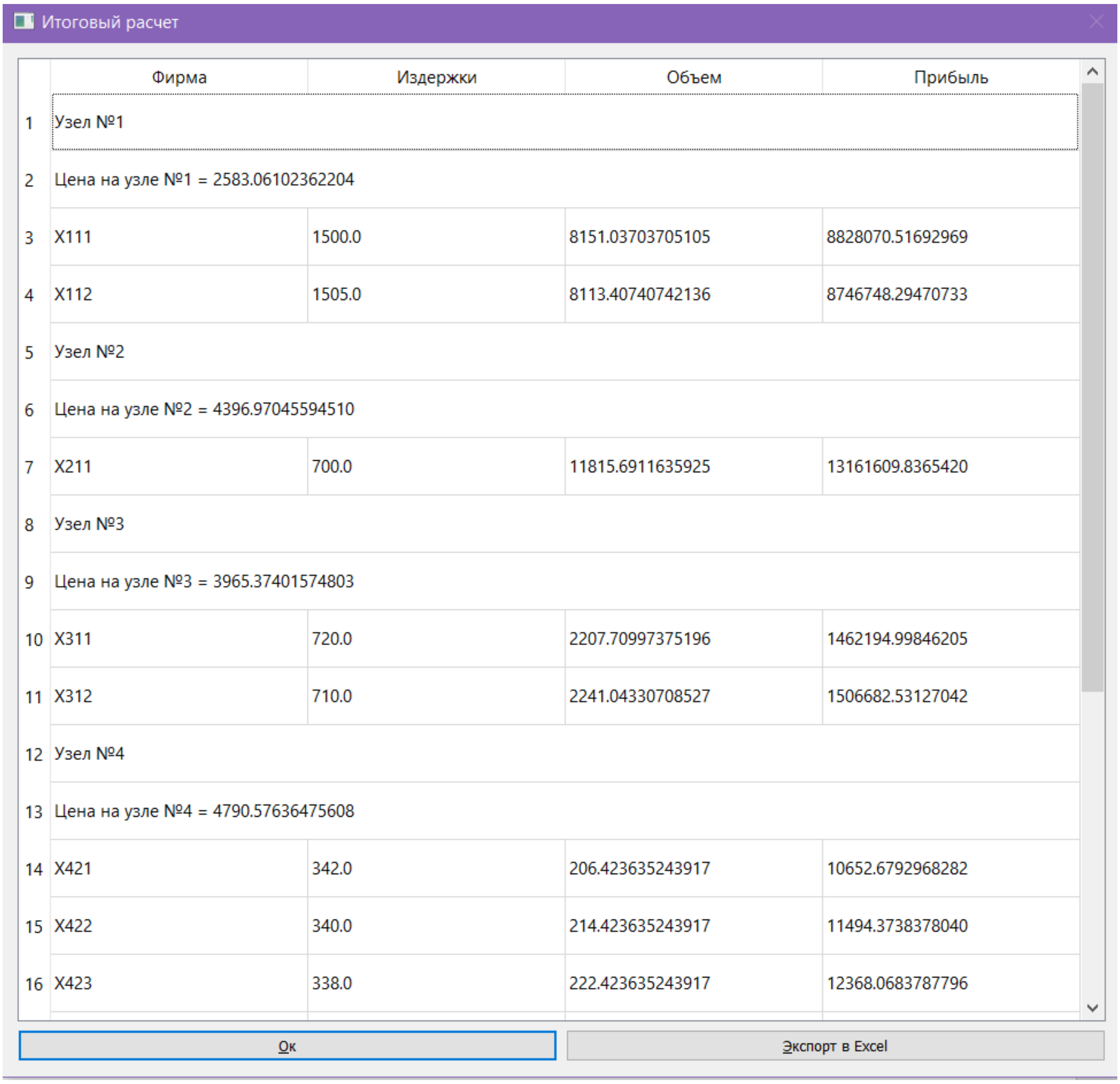
$$p_{21} = 5510,88 - \frac{q_{211}}{10,6}. \tag{12}$$

Из соотношения (11) выразим p_{31}:

$$p_{31} = 5300 - \left(\frac{q_{311}}{3,3} + \frac{q_{312}}{3,3} \right). \qquad (13)$$

Зная функции цен, мы можем выражать функции прибыли для фирм родительских узлов. Дальнейшие действия осуществляются по аналогии с приведенными, вплоть до множества корневых узлов, при достижении которого получаем численные значения объёмов для фирм корневого узла. Зная данные значения, подставляем их в ранее выведенные формулы для получения информации об объёмах и прибыли.

По представленному алгоритму был реализован программный продукт с графическим интерфейсом, написанный на языке Python. На рисунках 5-6 представлены результаты работы программы для рассматриваемого примера.



Итоговый расчет

	Фирма	Издержки	Объем	Прибыль
1	Узел №1			
2	Цена на узле №1 = 2583.06102362204			
3	X111	1500.0	8151.03703705105	8828070.51692969
4	X112	1505.0	8113.40740742136	8746748.29470733
5	Узел №2			
6	Цена на узле №2 = 4396.97045594510			
7	X211	700.0	11815.6911635925	13161609.8365420
8	Узел №3			
9	Цена на узле №3 = 3965.37401574803			
10	X311	720.0	2207.70997375196	1462194.99846205
11	X312	710.0	2241.04330708527	1506682.53127042
12	Узел №4			
13	Цена на узле №4 = 4790.57636475608			
14	X421	342.0	206.423635243917	10652.6792968282
15	X422	340.0	214.423635243917	11494.3738378040
16	X423	338.0	222.423635243917	12368.0683787796

Ок | Экспорт в Excel

Рисунок 5 – Результаты выполнения программы

Итоговый расчет

	Фирма	Издержки	Объем	Прибыль
9	Цена на узле №3 = 3965.37401574803			
10	X311	720.0	2207.70997375196	1462194.99846205
11	X312	710.0	2241.04330708527	1506682.53127042
12	Узел №4			
13	Цена на узле №4 = 4790.57636475608			
14	X421	342.0	206.423635243917	10652.6792968282
15	X422	340.0	214.423635243917	11494.3738378040
16	X423	338.0	222.423635243917	12368.0683787796
17	X424	345.0	194.423635243917	9450.13748536468
18	Узел №5			
19	Цена на узле №5 = 5011.98030396340			
20	X521	120.0	5500.10942242554	2722608.32927888
21	X522	122.0	5477.88720020332	2700652.33603363
22	Узел №6			
23	Цена на узле №6 = 4832.68700787402			
24	X631	200.0	4448.75328083990	2968710.86306756

Ок | Экспорт в Excel

Рисунок 6 – Результаты выполнения программы

Библиографический список

1. Deming Zhou Uday S. Karmarkar Competition in MultiEchelon Distributive Supply Chains with Linear Demand // International journal of production research, London,2015.31 с
2. Лонягина Ю., Никольченко Н., Зенкевич Н. Конкурентное и кооперативное поведение в распределительных сетях // Вклад в теорию игр и менеджмент. 2018. Т. 11. С. 73–102.
3. Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МГУ, 2005, 272 с.
4. Дюсуше О. М. Статичное равновесие Курно–Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек // Экономический журнал ВШЭ. 2006.

№1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/statichnoe-ravnovesie-kurno-nesha-i-refleksivnye-igry-oligopolii-sluchay-lineynyh-funktsiy-sprosa-i-izderzhek (дата обращения: 02.11.2022).

5. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. Изд. 2-е. СПБ.: БХВ-Петербург, 2014. 432 с