Тема 4. Система уравнений

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -17 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Из третьей строки:

$-2x_3 + 3x_4 = 4$

Система имеет множество решений. Выразив x_4 через параметр:

$x_4 = c$; $-2x_3 + 3c = 4 \Rightarrow x_3 = \frac{3c-4}{2}$

Из второй строки:

$-x_2 + \frac{3c-4}{2} - 3c = -2$

$-x_2 = 3c - \frac{3c-4}{2} - 2$

$x_2 = -\frac{3c}{2}$

Из первой строки:

$x_1 - \frac{3c}{2} - \frac{3c-4}{2} - 2c = 0$

$x_1 = 5c - 2$

2) a. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) -3 \; + \; =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -8 & 0 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\text{Rank}\, A = \text{Rank}\, \tilde{A} = n = 3$$

$\Rightarrow$ Система имеет единственное решение

b. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) -2 \; =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

По первой и третьей строке можно сделать вывод, что система несовместная

c. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) -3 =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array}\right)$$

$\text{Rank}\, A = \text{Rank}\, \tilde{A} < n$

Система совместная неопределённая

3) $$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$\text{Rank}\, A = \text{Rank}\, \tilde{A} = n = 4$

Система совместная, определённая имеет 4 решения

4) $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$

Несовместной система будет если $\mathrm{Rank}\, A \neq \mathrm{Rank}\, \tilde{A}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -4 \\ -7 \end{array} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2 \end{array} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & 0 & 0 & c-7a-2b+8a \end{array}\right)$$

При $c-7a-2b+8a \neq 0$ система несовместна, т.к. $\mathrm{Rank}\, A$ будет $=2$, а $\mathrm{Rank}\, \tilde{A} = 3$.

$c + a - 2b \neq 0$

$c \neq 2b - a$

$a \neq 2b - c$

$b \neq \frac{c+a}{2}$

5) a. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2 \neq 0$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4}{2} = 2$$

b. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = +21 - 8 + 30 = 43$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 130 + 1 - 45 = 86$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -40 + 11 - 14 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 41 - 18 + \cancel{4}20 = 43$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{86}{43} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{43}{43} = 1$$