

На правах рукописи

Кривошеев Юрий Вячеславович

ИЗМЕРЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АНТЕНН В ЗОНЕ ФРЕНЕЛЯ  
НА РАЗРЕЖЕННОЙ СЕТКЕ УГЛОВ

Специальность 05.12.07 - Антенны, СВЧ-устройства и их технологии

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
кандидат технических наук  
Шишлов А.В.

Москва, 2014

## Оглавление

Список используемых сокращений .....	4
Введение .....	5
Глава 1. Обзор литературы по измерениям в зоне Френеля .....	13
1.1. Ранние работы, посвящённые измерениям в зоне Френеля (1965-1985 гг.).	13
1.2. Метод восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов. ....	15
1.3. Другие методы измерения в зоне Френеля. ....	22
1.4. Сравнение методов. ....	22
1.5. Выводы.....	25
Глава 2. Метод восстановления ДН по полю, измеренному на разреженной сетке углов в зоне Френеля. ....	27
2.1. Математическая модель. ....	27
2.2. Вывод основных соотношений. ....	29
2.3. Измерения на цилиндрической поверхности.....	36
2.4. Вычисление коэффициентов разложения ....	37
2.5. Условия применимости метода. ....	40
2.6. Эквивалентность методов. ....	41
2.7. Сравнение шага между отсчётами поля для двух методов восстановления ДН .....	45
2.8. Примеры восстановления диаграммы направленности.....	48
2.9. Выводы.....	53
Глава 3. Асимптотика соотношений для восстановления ДН по измерениям в ближней зоне на цилиндре применительно к измерениям в зоне Френеля .....	54
3.1. Основные соотношения для восстановления ДН по измерениям в ближней зоне на цилиндре.....	55
3.2. Асимптотика в двумерном случае ....	59
3.3. Асимптотика в трёхмерном скалярном случае.....	65
3.4. Асимптотика в трёхмерном векторном случае.....	76

3.5. Соотношения для измерений на сфере .....	80
3.6. Выводы.....	87
Глава 4. Практические аспекты применения метода.....	88
4.1. Определение энергетических характеристик .....	88
4.2. Несовпадение центра апертуры и центра вращения .....	90
4.3. Определение ДН как непрерывной функции двух переменных по дискретным отсчётам в зоне Френеля. ....	95
4.4. Выбор числа сечений поля в зоне Френеля. ....	101
4.5. Влияние ошибок измерений .....	107
4.6. Измерительный стенд и разработанная программа .....	121
4.7. Погрешности восстановления ДН для стенда ОАО «Радиофизика» .....	124
4.8. Эксперименты по проверке метода .....	126
4.9. Примеры измерения ДН антенн .....	131
4.10. Выводы.....	135
Заключение .....	136
Приложение. Интерфейс разработанной программы для восстановления ДН. ...	137
Литература .....	140

## Список используемых сокращений

БПФ	быстрое преобразование Фурье
БЭК	безэховая камера
ГО	геометрическая оптика
ДН	диаграмма направленности
ДПФ	дискретное преобразование Фурье
КНД	коэффициент направленного действия
КУ	коэффициент усиления
ОПУ	опорно-поворотное устройство
РПМ	радиопоглощающий материал
УБЛ	уровень боковых лепестков
ЭИИМ	эквивалентная изотропно излучаемая мощность
ЭПР	эффективная поверхность рассеяния

## Введение

Методы измерения характеристик антенн на расстояниях, меньших расстояния дальней зоны, стали активно разрабатываться и использоваться на практике с середины прошлого века. К подобным методам можно отнести метод перефокусировки, коллиматорный метод и амплифазометрический (голографический) метод. Использование таких методов позволяет преодолеть известные недостатки, присущие методу дальней зоны [1-3], связанные с удалённостью источника излучения от испытываемой антенны.

Рассмотрим основные свойства указанных методов. Метод перефокусировки имеет ограничение на тип и конструкцию измеряемой антенны: в основном этот метод применим к зеркальным антеннам и фазированным антенным решёткам. При этом конструкция антенны должна позволять проводить перефокусировку антенны. Известно, что перефокусировка приводит к искажению измеряемой диаграммы направленности (ДН) [2,3]. Преимуществом метода является возможность проведения измерений на стенде, предназначенном для измерения методом дальней зоны.

Коллиматорный метод лишён указанных недостатков метода перефокусировки. Однако он предполагает наличие дорогостоящего коллиматора, размеры которого должны заметно превышать размеры измеряемой антенны. Достоинством метода является возможность использования методик измерения, применяемых при работе в дальней зоне [2,3]. Коллиматорный метод также нашёл широкое применение для измерения характеристик рассеяния объектов [4].

Амплифазометрический метод измерения в ближней зоне также требует наличия специального дорогостоящего оборудования. Преимуществом метода является возможность измерения характеристик неподвижной испытываемой антенны, что актуально для крупногабаритных антенн, размещение которых на опорно-поворотных устройствах (ОПУ) проблематично. Также метод может быть использован для дефектоскопии антенн [2,3].

В данной работе рассматривается частный случай амплифазометрического метода – амплифазометрический метод измерений в зоне Френеля. Наиболее важным его отличием является возможность измерений на стенде, предназначенном для измерений в дальней зоне. При этом должна быть предусмотрена возможность измерений как амплитуды, так и фазы поля. Это обстоятельство позволяет значительно расширить возможности существующих стендов для измерения методом дальней зоны (т.е. измерять характеристики антенн большего размера) при соответствующей модернизации стенда. Причём такая модернизация, заключающаяся главным образом в организации фазовых измерений, значительно дешевле по сравнению с созданием или покупкой стенда для измерения в ближней зоне. Однако, в отличие от измерений в ближней зоне, испытываемая антенна размещается на ОПУ.

Другой возможной областью применения метода являются измерения на открытых полигонах. В этом случае измерения в зоне Френеля могут применяться для уменьшения расстояния между испытываемой и вспомогательной антеннами.

Метод измерения в зоне Френеля обладает рядом свойств, присущих методу дальней зоны. В отличие от измерений в ближней зоне, при измерении в зоне Френеля, как правило, не требуется учитывать направленные свойства вспомогательной антенны. Также, при необходимости восстановления ДН в ограниченном секторе углов, требуемый объём измерений существенно меньше, чем при измерении в ближней зоне.

Впервые амплифазометрические измерения в зоне Френеля, по-видимому, стали применять в СССР с середины 1960-х годов при измерении поля на сферической поверхности. Проведение измерений в зоне Френеля позволяло упростить алгоритм работы по сравнению с измерениями в ближней зоне и, в частности, организовать вычисления с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ), что делало возможной реализацию алгоритма на имеющихся вычислительных средствах. Метод восстановления ДН основывался на интегрировании поля в зоне Френеля [3].

В середине 1980-х метод измерения в зоне Френеля получил дальнейшее развитие. Был предложен ряд новых алгоритмов для восстановления ДН, характеризующихся проведением измерений на разреженной сетке углов. Также было предложено использовать метод измерения в зоне Френеля для расширения возможностей уже существующих стендов, предназначенных для измерения методом дальней зоны. Ряд статей по данному методу был опубликован в 1990-х и 2000-х гг.

Многие результаты, относящиеся к измерениям в зоне Френеля, были получены независимо разными авторами. Как следствие, существует несколько вариантов алгоритма измерения и обработки данных, однако какая-либо информация о сравнении их характеристик отсутствует. Также в литературе не рассматривался вопрос о сравнении эффективности методов измерения в зоне Френеля и методов измерения в ближней зоне, хотя методы ближней зоны применимы и при измерении в зоне Френеля.

Также представляет интерес сопоставление и систематизация результатов по методу измерения на разреженной сетке углов, полученных различными авторами, и описание метода в наиболее общем виде. Кроме того, в известных работах по данному методу отсутствуют удобные для применения соотношения для определения энергетических характеристик антенны, приводятся противоречивые оценки требуемого объема измерений и отсутствует анализ погрешности восстановления.

### **Цели и задачи работы**

Целями работы является рассмотрение теоретических и практических особенностей метода измерения в зоне Френеля на разреженной сетке углов, разработка алгоритма и программы восстановления ДН по измерениям в зоне Френеля для измерительных стендов, в частности, для использования в составе стенда ОАО «Радиофизика». В работе решены следующие задачи:

- обобщение известных соотношений для восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов (пересчет поля из зоны Френеля в произвольную точку в зону Френеля или в дальнюю зону);
- сравнение и установление связи между известными методами измерения в зоне Френеля;
- сравнение и установление связи между методами измерения в зоне Френеля и методами измерения в ближней зоне;
- нахождение соотношений для определения энергетических характеристик антенны при измерениях в зоне Френеля;
- определение минимального необходимого числа измеряемых сечений поля в зоне Френеля;
- оценка погрешности восстановления;
- разработка алгоритма и программы восстановления ДН для измерительных стендов.

### **Методы исследования**

В работе использовалось описание электромагнитного поля в приближении Кирхгофа и с помощью метода разложения поля по собственным модам волнового уравнения в сферической и цилиндрической системах координат. Для решения поставленных задач применялась теория рядов Фурье и функций с ограниченным спектром. Численное моделирование проводилось на примере зеркальных антенн в приближении Кирхгофа с использованием программы Design 2.

**Научная новизна** работы заключается в следующем:

1. Показано, что формулы для восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля являются эквивалентными формулам, основанным на интегрировании поля, при использовании в последних интерполяции поля рядом Котельникова.



2. Получена асимптотика строгого представления ДН через значения поля в ближней зоне на цилиндрической поверхности. Показано, что это асимптотическое соотношение справедливо в зоне Френеля и совпадает с формулой пересчета поля, измеренного на разреженной сетке углов.
3. Получены соотношения для определения энергетических характеристик антенны по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля и предложена методика измерения этих величин.
4. Получена оценка минимального числа сечений поля в зоне Френеля, необходимого для восстановления центрального сечения диаграммы направленности.

### **Практическая значимость**

Показано, что метод измерения на разреженной сетке углов является более эффективным, чем метод, основанный на интегрировании поля в зоне Френеля, т.к. позволяет уменьшить объём измерений при одинаковой точности восстановления ДН.

Показано, что метод измерения на разреженной сетке и метод измерения в ближней зоне требуют одинакового объёма измерений и обеспечивают одинаковую точность при измерении в зоне Френеля, однако в первом используются более простые соотношения. Таким образом, показано, что метод измерения на разреженной сетке углов является наиболее удобным и эффективным при проведении измерений в зоне Френеля.

Получены обобщенные формулы для пересчёта поля из зоны Френеля в любую точку зоны Френеля или в дальнюю зону, а также соотношения для определения энергетических характеристик антенны и описана методика измерения этих величин. Приведены оценки числа сечений в зоне Френеля. Получены оценки погрешности восстановления. Таким образом, разработан эффективный алгоритм измерений антенн в зоне Френеля.

Показано, что применение рассмотренного метода измерений в зоне Френеля позволяет более чем на порядок увеличить размеры измеряемых антенн по сравнению с методом измерений в дальней зоне при выбранном расстоянии между измеряемой и вспомогательной антеннами.

На основе полученных теоретических результатов была написана компьютерная программа для восстановления ДН по измерениям в зоне Френеля. На программу получено авторское свидетельство.

### **Внедрение**

Разработанная программа для восстановления ДН по измерениям в зоне Френеля установлена на управляющем компьютере измерительного стенда в ОАО «Радиофизика» и используется для обработки результатов измерений, что подтверждается актом о внедрении.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается результатами численного моделирования на основе известных алгоритмов расчета характеристик антенн, а также результатами экспериментов, проведённых в ОАО «Радиофизика». Эксперименты состояли в измерении ДН с помощью метода измерения на разреженной сетке углов в зоне Френеля и с помощью известных методов измерения в дальней зоне и в ближней зоне. Полученные в результате эксперимента ДН совпали с погрешностью не более 1-1,5 дБ до уровней -25...-35 дБ, что свидетельствует о высокой точности метода.

### **Структура и объём диссертационной работы**

Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и приложения. Общий объём диссертации – 146 страниц, включая 68 рисунков и 2 таблицы. Список цитированной литературы содержит 67 наименований.

### **Публикации по теме диссертации**

По теме диссертации опубликовано 10 печатных работ, в том числе 2 публикации в изданиях, рекомендованных ВАК, и авторское свидетельство на программу для ЭВМ.

### **Апробация**

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

- 4, 5 и 7 всероссийская конференция «Радиолокация и радиосвязь», 2010, 2011 и 2013 гг.,
- 54, 55 и 56 научная конференция МФТИ, 2011, 2012 и 2013 гг.,
- международная конференция «Advanced Electromagnetics Symposium (AES)», 2012, Париж,
- международная конференция «International conference on mathematical methods in electromagnetic theory (MMET)», 2012, Харьков,
- международная конференция «International conference on antenna theory and techniques (ICATT)», 2013, Одесса.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Эквивалентность формул для восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля, и соотношений, основанных на интегрировании поля, при использовании в последних интерполяции поля рядом Котельникова.
2. Асимптотика строгого представления ДН через значения поля в ближней зоне на цилиндрической поверхности. Применимость этого асимптотического соотношения в зоне Френеля и его эквивалентность с формулой пересчета поля, измеренного на разреженной сетке углов.

3. Соотношения для определения энергетических характеристик антенны по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля и методика измерения этих величин.
4. Оценка минимального числа сечений поля в зоне Френеля, необходимого для восстановления центрального сечения диаграммы направленности.

### **Благодарности**

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю к.т.н. Шишлову А.В. за постоянную помощь при подготовке диссертации, ценные советы и обсуждение полученных результатов. Также автор выражает благодарность Виленко И.Л., Сусерову Ю.А. и Тоболеву А.К. за помощь при разработке и внедрении программы и обсуждение результатов.

## Глава 1. Обзор литературы по измерениям в зоне Френеля.

### 1.1. Ранние работы, посвящённые измерениям в зоне Френеля (1965-1985 гг.).

Впервые амплифазометрическими измерениями в зоне Френеля, по-видимому, начали заниматься в середине 1960-х годов в Советском Союзе [2,3,5-14] с началом активного развития методов измерения в ближней зоне.

В работах [5, 6] предложен голографический метод восстановления ДН антенн по измерениям в зоне Френеля. Поле антенны регистрируется голографическим способом, после чего ДН восстанавливается в результате оптической обработки. Схема оптической обработки строится таким образом, чтобы компенсировать квадратичную фазовую ошибку, возникающую при измерениях в зоне Френеля. Отметим, что при оптической обработке неизбежны ошибки, связанные с искажениями, вносимыми элементами оптической системы, переносом голограммы поля на оптическую плёнку и т.п. [7, 8]. Вследствие этого с развитием вычислительной техники и появлением БПФ оптическая обработка стала менее актуальна.

В работах [7, 8] предложено использовать компьютерную обработку голограммы поля, зарегистрированного на сфере в зоне Френеля. Измерение поля в зоне Френеля позволило упростить алгоритмы компьютерной обработки, по сравнению с измерениями в ближней зоне. В данных работах рассмотрен скалярный случай в параксиальном приближении (в приближении малых углов от осевого направления антенны), т.е. поле в зоне Френеля описывается следующим выражением:

$$E(u, v, r_1) = \iint g(x, y) \exp \left\{ -i\pi \frac{x^2 + y^2}{r_1 \lambda} + 2\pi i \frac{ux + vy}{\lambda} \right\} dx dy, \quad (1)$$

где  $u = \sin \alpha$ ,  $v = \cos \alpha \sin \beta$  – направляющие косинусы угла наблюдения,  $\beta$  и  $\alpha$  – азимут и угол места (апертура антенны и система координат показаны на рис.1),  $g(x, y)$  – распределение поля в раскрыве антенны,  $r_1$  – расстояние наблюдения в зоне Френеля.

Для восстановления ДН предложено путём прямого преобразования Фурье от (1) и компенсации квадратичного набега фазы определить поле в раскрыве  $g(x, y)$ , после чего обратным преобразованием Фурье получить ДН:

$$g(x, y) = \exp\left\{i\pi \frac{x^2 + y^2}{r_1 \lambda}\right\} \iint E(u, v, r_1) \exp\left\{-2\pi i \frac{ux + vy}{\lambda}\right\} du dv, \quad (2)$$

$$E_\infty(u, v) = \iint g(x, y) \exp\left\{2\pi i \frac{ux + vy}{\lambda}\right\} dx dy. \quad (3)$$

Данные операции предложено объединить в одну с помощью свёртки. В результате ДН определяется по формуле:

$$E_\infty(u, v) = \iint E(u', v', r_1) \exp\left\{-i\pi \frac{r_1}{\lambda} \left((u' - u)^2 + (v' - v)^2\right)\right\} du' dv'. \quad (4)$$

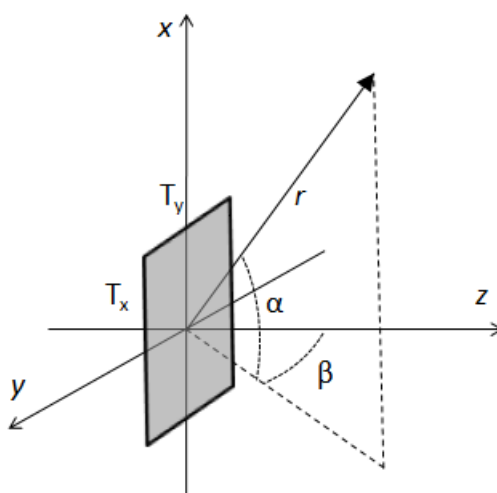


Рис. 1. Апертура антенны и система координат.

Для вычисления (4) на компьютере предложено перейти от интегрирования к суммированию подынтегральной функции в эквидистантной сетке отсчётов. Согласно [9], шаг между отсчётами поля составляет

$$\Delta u = \frac{\lambda}{r_1 \left( u_B + v \frac{\lambda}{T_x} \right)}, \quad (5)$$

где  $u_B$  – угловой сектор, в котором восстанавливается ДН,  $v$  – параметр, регулирующий точность восстановления и имеющий значение около 20.

Вычисление дискретизованного выражения (4) реализовывалось с помощью БПФ.

В работах [9-13] рассмотрены систематические и случайные ошибки метода, даны оценки сектора углов для измерения поля в зоне Френеля, шага между отсчётами поля, определены требования к измерительной аппаратуре. Основные результаты, полученные в СССР по амплифазометрическим методам и, в частности, по методу измерения в зоне Френеля, приведены в монографиях [14] и [3].

В западных странах в 1960-е–1980-е годы также шло развитие амплифазометрических методов измерения в ближней зоне [15-18]. Однако измерениям в зоне Френеля практически не уделялось внимания. Из известных автору западных работ этого периода, посвящённых измерениям в зоне Френеля, можно отметить американскую статью [19] и технический отчёт из Эйндховенского технологического университета (Голландия) [20]. В первой работе говорится о принципиальной возможности амплифазометрических или амплитудных измерений в зоне Френеля для восстановления ДН, однако конкретные формулы не приводятся. О дальнейшем развитии этой работы автору не известно. Во второй работе рассматривается применение методов, описанных в советских работах, к измерению ДН зеркальных антенн в зоне Френеля.

### ***1.2. Метод восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов.***

В 1983-1984 гг. в работах [21, 22] предложен метод восстановления ДН по измерениям на сфере в зоне Френеля, основанный на применении псевдоотсчётов (pseudosampling) [23]. В отличие от [7,8], данный метод позволяет определять ДН по измерениям на разреженной сетке отсчётов поля в зоне Френеля, что приводит к уменьшению требуемого объёма измерений. Кроме того, предложенные формулы для пересчёта поля не требуют дискретизации интеграла, что исключает ошибку, связанную с дискретизацией интеграла в методе [7,8]. В [21] ДН определяется как линейная комбинация отсчётов поля в зоне Френеля с коэффициентами, которые определяются в результате решения системы

уравнений. В [22] получено явное выражение для коэффициентов линейной комбинации.

Рассмотрим последний метод более подробно, не вдаваясь в особенности понятия псевдоотсчётов. В [22] поле определяется в параксиальном приближении с использованием векторного потенциала. С учётом параксиального приближения можно, не внося существенных ошибок, перейти от векторного потенциала к скалярным формулам (1) для горизонтальной и вертикальной компонент поля. Как и в методе [7,8], вначале восстанавливается распределение поля в апертуре антенны. При этом, учитывая, что апертура антенны ограничена прямоугольником размером  $T_x$  на  $T_y$  (рис.1), поле в апертуре, умноженное на квадратичный фазовый множитель, представляется в виде ряда Фурье:

$$\tilde{g}(x, y) = g(x, y) \exp \left\{ -i\pi \frac{x^2 + y^2}{r_1 \lambda} \right\} = \sum_{m,n} G_{mn} \exp \left\{ -im \frac{2\pi}{T_x} x - in \frac{2\pi}{T_y} y \right\}, \quad (6)$$

$$G_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \iint_{T_x \times T_y} \tilde{g}(x, y) \exp \left\{ im \frac{2\pi}{T_x} x + in \frac{2\pi}{T_y} y \right\} dx dy. \quad (7)$$

Учитывая (1), коэффициенты ряда Фурье пропорциональны отсчётам поля в зоне Френеля:

$$G_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} E\left(m \frac{\lambda}{T_x}, n \frac{\lambda}{T_y}, r_1\right). \quad (8)$$

Далее (6) и (8) подставляются в выражение для поля в дальней зоне (3):

$$\begin{aligned} E_\infty(u, v) &= \iint \tilde{g}(x, y) \exp \left\{ i\pi \frac{x^2 + y^2}{r_1 \lambda} \right\} \exp \left\{ 2\pi i \frac{ux + vy}{\lambda} \right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{T_x T_y} \sum_{m,n} E\left(m \frac{\lambda}{T_x}, n \frac{\lambda}{T_y}, r_1\right) \times \\ &\times \iint \exp \left\{ -im \frac{2\pi}{T_x} x - in \frac{2\pi}{T_y} y \right\} \exp \left\{ i\pi \frac{x^2 + y^2}{r_1 \lambda} \right\} \exp \left\{ 2\pi i \frac{ux + vy}{\lambda} \right\} dx dy = \\ &= \sum_{m,n} k_{mn} E\left(m \frac{\lambda}{T_x}, n \frac{\lambda}{T_y}, r_1\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где



$$k_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} \exp \left\{ i \frac{\pi}{r_1 \lambda} x^2 + i \frac{2\pi u}{\lambda} x - i m \frac{2\pi}{T_x} x \right\} dx \times \int_{-T_y/2}^{T_y/2} \exp \left\{ i \frac{\pi}{r_1 \lambda} y^2 + i \frac{2\pi u}{\lambda} y - i n \frac{2\pi}{T_y} y \right\} dy. \quad (10)$$

Таким образом, ДН определяется как линейная комбинация отсчётов поля в зоне Френеля с шагом

$$\Delta u = \lambda / T_x, \Delta v = \lambda / T_y, \quad (11)$$

а коэффициенты линейной комбинации (10) выражаются через интегралы Френеля.

Описанный метод преобразования поля удобен и в вычислительном, и в практическом плане. По сравнению с методами измерения в ближней зоне, он позволяет сократить время проведения испытаний за счёт уменьшения объёма измерений и упрощения алгоритма восстановления ДН. Однако он не получил широкого распространения (автору не известны случаи использования метода на практике). К недостаткам работы [22] можно отнести возможность восстановления ДН только в направлениях, близких к нормали апертуры, в силу использования параксиального приближения. Кроме того, в работе не рассмотрены границы применимости метода, требуемый объём измерений и ошибки восстановления ДН.

Схожий метод описан в работе [24], где приводится описание испытаний четырёхметровой зеркальной антенны С-диапазона в зоне Френеля. В работе кратко описана методика измерений, согласно которой поле в зоне Френеля измеряется с шагом, определяемым формулой (11), после чего с помощью преобразования Фурье восстанавливается поле в апертуре антенны с квадратичным фазовым множителем. Далее фазовый множитель компенсируется, и с помощью второго преобразования Фурье восстанавливается ДН антенны. В статье даётся ссылка на более подробное описание метода в трудах конференции IREECON в 1983 г. в Сиднее.

В [25, 26] был также независимо от [22] предложен метод, основанный на разложении экспоненты фазы интегрального представления поля в одномерный ряд Фурье. По сути это похожий метод, только ограниченный на двумерный случай. Основным его отличием является использование углов вместо направляющих косинусов, а также возможность восстанавливать ДН в любом направлении в передней полуплоскости линейной апертуры (параксиальное приближение не использовалось). Однако автор использовал неоптимальный угловой шаг между отсчётами поля:  $\Delta\alpha = \sqrt{\lambda / 4\pi r_1}$  вместо  $\Delta\alpha = \lambda / T_x$ , что несколько снизило эффективность метода. Таким образом, формулы пересчёта поля согласно [25, 26] имеют вид:

$$E_\infty(\alpha) = \sum_n k_n E(\alpha + n\sqrt{\lambda / 4\pi r_1}, r_1), \quad (12)$$

где

$$k_n = \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} e^{j\frac{\pi}{\lambda r_1} x^2} e^{-jn\frac{2\pi}{W}x} dx, \quad W = \sqrt{4\pi\lambda r_1}. \quad (13)$$

Полученное разложение удобно для применения и получило распространение на практике. Отметим, что автор работ [25, 26] трактовал представленный метод измерения как метод корректировки измеренной диаграммы поля для случая, когда измерения проводятся ближе границы дальней зоны. Для проведения измерений он предложил использовать стандартный стенд для измерений методом дальней зоны, с дополнительной возможностью измерения фазы поля, что сделало метод удобным для практического применения. К недостаткам метода можно отнести то, что он применим только для линейных антенн или антенн, вытянутых в одном направлении, для которых в одной плоскости выполняется условие дальней зоны, что значительно ограничивает класс измеряемых антенн.

В работе [27] предложено обобщение метода [25] на трёхмерный случай в предположении, что амплитудно-фазовое распределение поля в апертуре антенны обладает круговой симметрией. Представление поля в дальней зоне получено на

основе разложения в ряд по функциям Бесселя. Для восстановления ДН достаточно провести измерение поля в зоне Френеля в одном сечении. Однако требование круговой симметрии значительно ограничивает применимость метода для практического использования.

В работе [27] также рассмотрена двумерная задача и получена формула для восстановления поля в произвольном направлении при использовании равномерного шага по  $u$ , а также рассмотрено восстановление поля на произвольном расстоянии  $r_2$  в зоне Френеля или дальней зоне:

$$E(u, r_2) = \sum k_n E(u + n\lambda / T_x, r_1), \quad (14)$$

где

$$k_n = \frac{1}{T_x} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)x^2(1-u^2)} e^{-jn\frac{2\pi}{T_x}x} dx. \quad (15)$$

Метод в такой формулировке использован в нескольких практических работах (например, [28, 29]).

Другой попыткой обобщения метода [25] на трёхмерный случай стала работа [30], где рассматривается круглая апертура с произвольным амплитудно-фазовым распределением. Разложение также проводится на основе функций Бесселя. Однако оно неудобно для использования на практике из-за того, что сетка углов, в которой требуется провести измерения, образует сложную нерегулярную структуру.

В [31] было предложено обобщение метода [25] на трёхмерный случай, основанное на разложении фазовой функции интегрального представления поля в двумерный ряд Фурье. Получены формулы для восстановления поля в дальней зоне по измерениям на равномерной азимутально-угломестной сетке углов:

$$E_\infty(\alpha, \beta) = \sum_{m,n} k_{mn} E(\alpha + m\Delta\alpha, \beta + n\Delta\beta, r_1), \quad (16)$$

где

$$k_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{j\frac{k}{2r_1}x^2} e^{-jm\frac{2\pi}{T_x}x} dx \int_{-T_y/2}^{T_y/2} e^{j\frac{k}{2r_1}y^2} e^{-jn\frac{2\pi}{T_y}y} dy, \quad (17)$$

$\Delta\alpha=\lambda/T_x$ ,  $\Delta\beta=\lambda/T_y$  – угловой шаг между отсчётами.

Данные формулы справедливы для точек с произвольным азимутом при условии малого угла места. Видно, что формулы (16), (17) совпадают с формулами (9), (10) с точностью до замены направляющих косинусов  $u$  и  $v$  на углы  $\alpha$  и  $\beta$  и сдвига угловой сетки. Преимущество формулы (16) относительно (9) состоит в том, что она может использоваться при произвольном азимуте в передней полуплоскости.

Для практической реализации данного метода предложено измерять поле в зоне Френеля в нескольких азимутальных или угломестных сечениях. Измерительный стенд, работающий согласно описанному методу, реализован в ОАО «Радиофизика» и описан в [31]. Важной особенностью стенда является то, что он является модернизацией имевшегося стенда для измерения методом дальней зоны. Доработка состояла в том, что наряду с измерениями амплитуд, организованы и фазовые измерения. Измерительный стенд используется для измерения характеристик крупноапертурных антенн в безэховой камере (БЭК) ОАО «Радиофизика» (длина трассы 75 м).

В [31] также рассмотрены особенности практической реализации метода, наиболее важными из которых являются компенсация параллакса, связанного с несовпадением центра вращения с центром апертуры, и оценка минимального числа сечений поля в зоне Френеля, необходимого для восстановления одного сечения поля в дальней зоне:

$$M_{\min} = 2 \left[ \frac{T_x^2}{2\lambda r_1} \right] + 1. \quad (18)$$

Метод [31] получил дальнейшее развитие в работах [32, 33] (ETRI, Корея). В [32] рассмотрена возможность измерений на цилиндрической поверхности с применением того же приёма, что использовался в [31] для компенсации параллакса. В [33] метод развит для пересчёта поля на другое расстояние в зоне Френеля. Также в [32, 33] предложено использовать число сечений поля в зоне

Френеля, равное числу коэффициентов (15) с уровнем выше -15 дБ относительно наибольшего коэффициента  $k_n$ .

Рассматривая метод восстановления ДН, основанный на разложении в ряд Фурье, необходимо также упомянуть работу [34]. В ней рассмотрен вопрос восстановления ДН при облучении антенны неплоской волной в общем случае и получены формулы, аналогичные (14), (15). Теория основана на преобразованиях Фурье, что эквивалентно использованию разложений в ряд Фурье. Для двумерного случая для восстановления ДН были получены следующие формулы:

$$E_{\infty}(u) = \sum k_n E(u + n\lambda / D), \quad (19)$$

где

$$k_n = \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{1}{g(x)} e^{-jn\frac{2\pi}{D}x} dx, \quad (20)$$

$g(x)$  – функция, характеризующая отклонение облучающего поля от плоской волны,  $D$  – размер антенны.

Из этих формул несложно получить (14) и (15). Действительно, рассмотрим задачу измерений в зоне Френеля как задачу на приём. Тогда испытываемая антенна будет облучаться неплоской волной, которая отличается от плоской фазовым множителем:

$$g(x) = e^{-j\frac{k}{2r_1}x^2(1-u^2)}. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (20), получаем формулы (14) и (15) при  $r_2 \rightarrow \infty$ .

Для трёхмерного случая аналогичные формулы для произвольной неплоской волны описаны в [3]. Однако авторы применяли полученные формулы только для задачи измерений антенны в поле неплоской волны коллиматора.

В дальнейшем результаты [34] были использованы для решения схожей задачи – задачи восстановления эффективной поверхности рассеяния (ЭПР) по измерениям в зоне Френеля [35, 36]. Приведённые в [35] результаты экспериментальной проверки говорят о работоспособности предложенного метода восстановления ЭПР.

### ***1.3. Другие методы измерения в зоне Френеля.***

Помимо рассмотренных выше методов, существуют и другие методы восстановления ДН по амплитудно-фазовым измерениям в зоне Френеля. В работах [37, 38] рассматривается метод синтеза плоской волны (plane wave synthesis). В [37] плоская волна в пределах апертуры испытуемой антенны синтезируется с помощью алгоритма «последовательного проецирования». В [38] плоская волна формируется с помощью «виртуального синтезированного коллиматора». При этом расчётная формула совпадает с (4).

В работе [39] предложен метод восстановления ДН линейных антенн за счёт промежуточного определения амплитудно-фазового распределения поля в апертуре с использованием среднеквадратичной оптимизации. Согласно приведённым результатам, метод обеспечивает восстановление ДН, однако при наличии даже небольших ошибок определения поля в зоне Френеля, распределение поля в апертуре восстанавливается неверно.

В недавней работе [40] рассмотрен алгоритм восстановления ДН линейных антенн по измерениям в зоне Френеля с применением разложений по сферическим и цилиндрическим функциям. В статье рассмотрена возможность учёта направленных свойств вспомогательной антенны и возможность фильтрации шумов и переотражений.

### ***1.4. Сравнение методов.***

В заключение главы приведём результаты сравнения двух основных рассмотренных методов: метода, основанного на интегрировании поля в зоне Френеля по формуле (4), и метода восстановления по измерениям на разреженной сетке углов по формулам (14), (16). Заметим, что данные методы были предложены независимо, и сравнение их характеристик в известных публикациях не проводилось.

Для сравнения методов использовался численный эксперимент. Расчёты проведены с помощью скалярного приближения Кирхгофа. Рассмотрена

равномерно возбуждённая линейная апертура размером  $50\lambda$  (расстояние дальней зоны  $2D^2/\lambda = 5000\lambda$ ), поле в зоне Френеля определено на расстоянии  $200\lambda$  и  $2000\lambda$ . ДН восстановлена в секторе  $\pm 6^\circ$ . Поле в зоне Френеля определено в секторе  $\pm 16^\circ$  и  $\pm 8^\circ$  для  $r_1 = 200\lambda$  и  $r_1 = 2000\lambda$  соответственно, что соответствует рекомендациям из [9]. Угловой шаг составил  $1,1^\circ$  для метода восстановления по измерениям на разреженной сетке и  $0,45^\circ$  и  $0,045^\circ$  для метода, основанного на интегрировании поля, для  $r_1 = 200\lambda$  и  $r_1 = 2000\lambda$  соответственно.

Результаты восстановления ДН приведены на следующих рисунках и в таблицах 1 и 2.

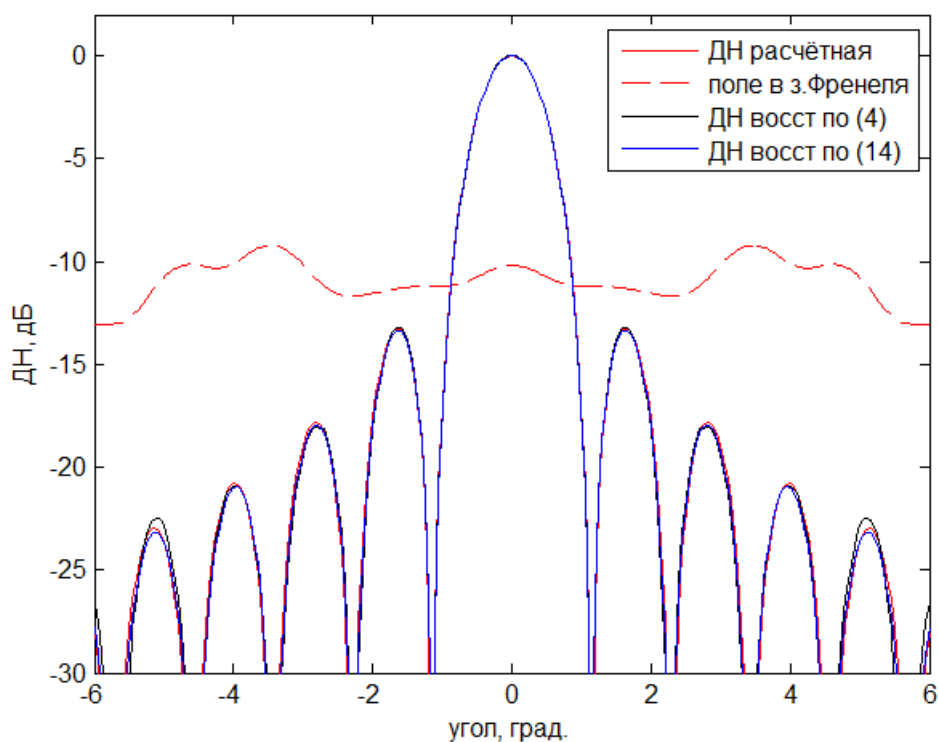
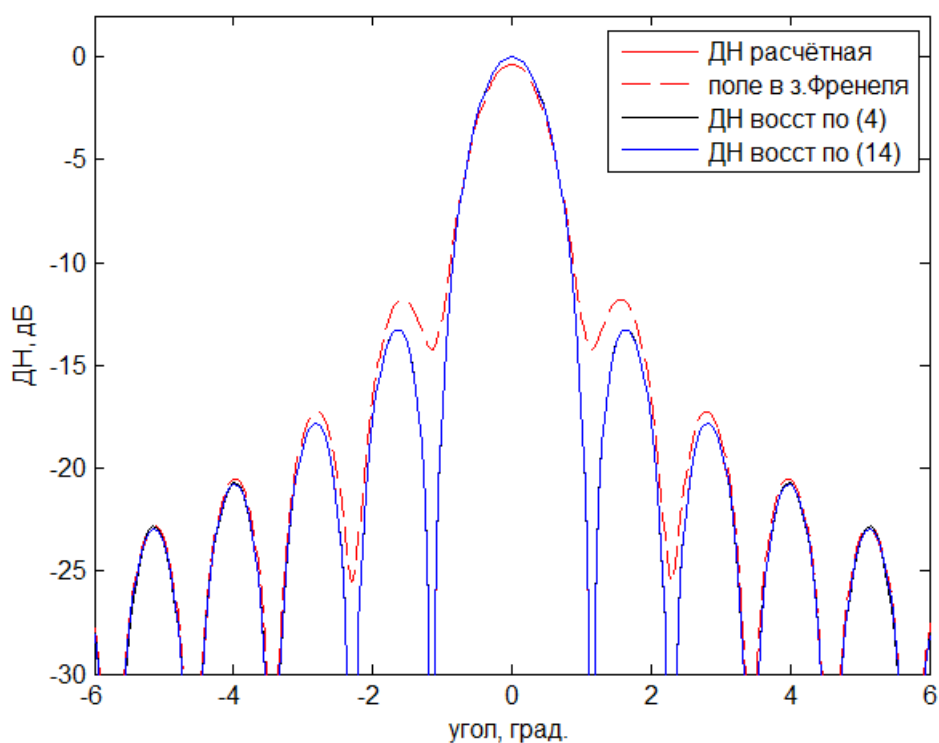


Рис.2. Результаты восстановления ДН,  $r_1 = 200\lambda$ .

Рис.3. Результаты восстановления ДН,  $r_1=2000\lambda$ .Таблица 1. Основные результаты восстановления ДН,  $r_1=200\lambda$ .

Метод	Угловой шаг, град.	Ошибка макс. ДН, дБ	Ошибка 1-го БЛ, дБ	Ошибка 2-го БЛ, дБ	Ошибка 3-го БЛ, дБ	Ошибка 4-го БЛ, дБ
(4)	0,45	0,03	0,03	0,2	0,1	0,5
(14)	1,1	0,01	0,1	0,1	0,1	0,2

Таблица 2. Основные результаты восстановления ДН,  $r_1=2000\lambda$ .

Метод	Угловой шаг, град.	Ошибка макс. ДН, дБ	Ошибка 1-го БЛ, дБ	Ошибка 2-го БЛ, дБ	Ошибка 3-го БЛ, дБ	Ошибка 4-го БЛ, дБ
(4)	0,045	<0,01	<0,01	0,02	0,1	0,2
(14)	1,1	<0,01	<0,01	<0,01	<0,01	<0,01



Видно, что оба метода позволили достаточно точно восстановить ДН. При этом метод восстановления по измерениям на разреженной сетке углов позволил использовать угловой шаг в 2,4 и 24 раз больше, чем метод, основанный на интегрировании поля, для  $r_1 = 200\lambda$  и  $r_1 = 2000\lambda$  соответственно.

### **1.5. Выводы.**

Таким образом, в литературе было предложено несколько методов восстановления ДН по измерениям в зоне Френеля, многие из которых были получены независимо друг от друга. Характерной особенностью методов, начиная с работы [25], является их применение для расширения возможностей измерительных стендов, спроектированных для измерения методом дальней зоны. Предложенные методы можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы восстановления ДН, основанные на интегрировании поля в зоне Френеля (например, [7, 8, 38]). Ко второй – методы восстановления по измерениям на разреженной сетке углов (например, [22, 25, 27, 31]). Причём сравнение методов из первой и второй группы в известных публикациях не проводилось.

В данной главе представлены результаты численного эксперимента по восстановлению ДН с помощью метода, основанного на интегрировании поля, и метода измерения на разреженной сетке углов. Результаты показали, что методы позволяют восстанавливать ДН с примерно одинаковой точностью. При этом для метода измерения на разреженной сетке углов в зоне Френеля требовался меньший объём измерений, чем для метода, основанного на интегрировании поля.

Однако для определения преимуществ и недостатков методов необходимо проведение более детального сравнения методов. Наиболее полно на эти вопросы можно ответить, сравнив аналитические свойства методов.

Также представляет интерес сравнение метода измерения на разреженной сетке углов в зоне Френеля с известными методами измерений в ближней зоне, основанными на разложении по собственным функциям волнового уравнения, т.к. эти методы также могут использоваться при измерении в зоне Френеля.

Кроме того, в литературе не рассматривается ряд практически важных вопросов, касающихся метода измерения антенн на разреженной сетке углов в зоне Френеля, а именно, определение их энергетических характеристик и анализ ошибок восстановления. В литературе приводятся различные оценки числа сечений, в которых проводятся измерения в зоне Френеля, без анализа влияния этого параметра на точность восстановленной ДН, поэтому требуется уточнение необходимого числа сечений.

Также отметим, что метод измерения на разреженной сетке углов был предложен независимо различными авторами, вследствие чего существует несколько вариантов метода, каждый из которых обладает рядом ограничений. Например, в [25,27] рассмотрена двумерная задача, в [22,31,33] метод применим только в параксиальном приближении либо для малых углов места, в [22,25,31] метод применим только для пересчёта поля в дальнюю зону. Таким образом, представляет интерес описание метода в наиболее общем виде, учитывающем преимущества и недостатки вариантов метода, описанных в различных работах.

## Глава 2. Метод восстановления ДН по полю, измеренному на разреженной сетке углов в зоне Френеля.

В данной главе изложен метод восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля, обобщающий известные результаты, полученные различными авторами. А именно, получены соотношения для определения поля в произвольной точке в дальней зоне или зоне Френеля по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля, справедливые в широком секторе углов и учитывающие векторный характер поля. В основе метода лежит приближение Кирхгофа и теория рядов Фурье. Проводится сравнение полученных формул с соотношениями, основанными на интегрировании поля в зоне Френеля.

### 2.1. Математическая модель.

Рассмотрим некоторую антенну размером не менее нескольких длин волн. Пусть антенна находится в левой полуплоскости непосредственно перед плоскостью  $z=0$ . Выделим в плоскости  $z=0$  прямоугольник  $T_x \times T_y$  (рис.1), несколько превышающий по размерам рассматриваемую антенну. Будем считать, что антенна расположена так, что центр прямоугольника совпадает с началом координат.

Для определения поля при  $z>0$  будем использовать приближение Кирхгофа, т.е. будем полагать, что поле в плоскости  $z=0$  за пределами прямоугольника  $T_x \times T_y$  равно нулю. Для математического описания поля будем пользоваться интегралом Кирхгофа с функцией Грина, обеспечивающей отсутствие члена с производной поля, либо отсутствие члена с полем [41]. Тогда электрическое поле в произвольной точке в правой полуплоскости при  $kr \gg 1$  выражается через поле на плоскости  $z=0$  следующим образом:

$$\mathbf{E}(u, v, r) = j \iint_{T_x \times T_y} \mathbf{E}(x, y, 0) \frac{W(x, y) e^{-jkR(x, y)}}{\lambda R(x, y)} dx dy \quad (22)$$

или

$$\mathbf{E}(u, v, r) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{T_x \times T_y} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}(x, y, 0) \frac{e^{-jkR(x, y)}}{R(x, y)} dx dy, \quad (23)$$

где  $\mathbf{E}(x, y)$  – комплексная амплитуда поля в апертуре;  $\lambda$  – длина волны,  $k=2\pi/\lambda$ ;  $u=\sin\alpha$ ,  $v=\cos\alpha \sin\beta$ ,  $w=\cos\alpha \cos\beta$  – направляющие косинусы направления наблюдения,  $\beta$  и  $\alpha$  – азимут и угол места направления наблюдения,  $r$  – расстояние от начала координат до точки наблюдения;  $R$  – длина вектора, проведённого из точки интегрирования в точку наблюдения,  $W$  – направляющий косинус этого вектора в направлении оси  $z$ .

При выполнении условия  $kR \gg 1$  ошибка формул (22) и (23) определяется интегралом того же выражения по области  $\mathbb{R}^2 \setminus T_x \times T_y$ . Известно, что при пересчёте поля в дальнюю зону из плоскости в ближней зоне [3, 42] размеры прямоугольника  $T_x \times T_y$  влияют на диапазон углов, в котором интеграл Кирхгофа (22), (23) верно описывает поле в дальней зоне. Так, для того, чтобы (22), (23) верно описывали поле в диапазоне углов  $\pm u_0$ , необходимо, чтобы выполнялось условие

$$T_x \geq D_x + 2z_0 u_0 + \sqrt{2\lambda z_0}, \quad (24)$$

где  $D_x$  – вертикальный размер антенны,  $z_0$  – расстояние от антенны до плоскости, по которой вычисляется интеграл (22), (23).

Из (24) следует, что размеры  $T_x$ ,  $T_y$  необходимо увеличивать при увеличении сектора углов, в котором измеряется поле и восстанавливается ДН. Также размеры  $T_x$ ,  $T_y$  необходимо увеличивать при увеличении  $z_0$  (например, для офсетных зеркальных антенн  $T_x$ ,  $T_y$  должны быть больше, чем для осесимметричных).

В работах [21, 22] предлагается выбирать величины  $T_x$ ,  $T_y$  на 20% больше геометрических размеров антенны, что, как правило, является достаточным.

В последующих выкладках будем исходить из формулы (23). Выкладки можно проводить и на основе формулы (22). При этом, как будет показано, результат изменится незначительно.

Сделаем упрощение формул для случая, когда можно ограничиться первой и второй степенями разложения фазовой функции в ряд Тейлора на прямоугольнике  $T_x \times T_y$ , т.е. для зоны Френеля. Данное приближение справедливо для произвольных  $u, v$  при выполнении условия [31]:

$$\frac{\pi D^3}{8\lambda r_1^2} \ll 1. \quad (25)$$

В этом случае формулу (23) можно переписать в виде:

$$\mathbf{E}(u, v, r) = -\frac{e^{-jkr}}{2\pi r} \iint_{T_x \times T_y} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}(x, y, 0) e^{-j\Phi_r(x, y, u, v)} dx dy, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_r(x, y, u, v) &= k\sqrt{(ru - x)^2 + (rv - y)^2 + r^2(1 - u^2 - v^2)} - kr \approx -k(xu + yv) + \\ &+ \frac{k}{2r} \left( x^2(1 - u^2) + y^2(1 - v^2) - 2xyuv \right) = \Phi^{(1)}(x, y, u, v) + \Phi_r^{(2)}(x, y, u, v), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\Phi^{(1)}(x, y, u, v) = -k(xu + yv), \quad (28)$$

$$\Phi_r^{(2)}(x, y, u, v) = \frac{k}{2r} \left( x^2(1 - u^2) + y^2(1 - v^2) - 2xyuv \right). \quad (29)$$

## 2.2. Вывод основных соотношений.

Рассмотрим следующую задачу: по значениям поля на сфере радиуса  $r_1$  в зоне Френеля или в дальней зоне необходимо определить значения поля на сфере радиуса  $r_2$ . При этом задача пересчёта поля из зоны Френеля в дальнюю зону получается из исходной при  $r_2 \rightarrow \infty$ .

Запишем экспоненту фазовой функции из формулы (26) для сферы радиусом  $r_2$  через аналогичное выражение для сферы радиусом  $r_1$  [43]:

$$e^{-j\Phi_{r_2}(x, y, u, v)} = g(x, y, u, v) e^{-j\Phi_{r_1}(x, y, u, v)}, \quad (30)$$

где

$$g(x, y, u, v) = \exp \left( j \frac{k}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \left( x^2(1 - u^2) + y^2(1 - v^2) - 2xyuv \right) \right). \quad (31)$$

Разложим (31) в ряд Фурье как функцию от  $(x, y)$  на прямоугольнике  $[-T_x/2, T_x/2] \times [-T_y/2, T_y/2]$  для фиксированных  $u$  и  $v$ :

$$g(x, y, u, v) = \sum_{m,n} k_{mn}(u, v) e^{jm \frac{2\pi}{T_x} x} e^{jn \frac{2\pi}{T_y} y}, \quad (32)$$

где

$$k_{mn}(u, v) = \frac{1}{T_x T_y} \iint_{T_x \times T_y} e^{j \frac{k}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) (x^2 (1-u^2) + y^2 (1-v^2) - 2xyuv)} e^{-jm \frac{2\pi}{T_x} x} e^{-jn \frac{2\pi}{T_y} y} dx dy. \quad (33)$$

Подставляем (32) в (30). С учётом обозначений (28) и (29) имеем:

$$\begin{aligned} e^{-j\Phi_{r_2}(x, y, u, v)} &= \sum_{m,n} k_{mn}(u, v) e^{jm \frac{2\pi}{T_x} x} e^{jn \frac{2\pi}{T_y} y} e^{-j\Phi_{r_1}(x, y, u, v)} \approx \\ &\approx \sum_{m,n} k_{mn}(u, v) e^{-j\Phi^{(1)}(x, y, u+m\Delta u, v+n\Delta v)} e^{-j\Phi_{r_1}^{(2)}(x, y, u, v)}. \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\Delta u = \lambda / T_x, \quad \Delta v = \lambda / T_y. \quad (35)$$

Для  $r_1$ , соответствующего зоне Френеля, в некоторой окрестности  $u$ ,  $v$  справедливо:

$$\Delta\Phi_{r_1}^{(2)} = |\Phi_{r_1}^{(2)}(x, y, u, v) - \Phi_{r_1}^{(2)}(x, y, u + m\Delta u, v + n\Delta v)| \ll 1, \quad (36)$$

т.е.  $\Phi_{r_1}^{(2)}$  как функцию от  $u$ ,  $v$  можно заменить константой в пределах нескольких  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  для всех  $x$ ,  $y$ , принадлежащих апертуре антенны.

Условие (36) должно выполняться как минимум для  $m$ ,  $n$ , которые будут вносить основной вклад в представление поля на сфере радиуса  $r_2$  через поле на сфере радиуса  $r_1$ . В [31] показано, что число значимых слагаемых можно оценить выражением (18). Покажем, что (36) выполняется для  $m$ ,  $n$  из диапазона (18). Перепишем  $\Delta\Phi_{r_1}^{(2)}$  из выражения (36) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{r_1}^{(2)} &= \frac{k}{2r_1} \left| x^2 \left( (u + m\Delta u)^2 - u^2 \right) + y^2 \left( (v + n\Delta v)^2 - v^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2xy \left( (u + m\Delta u)(v + n\Delta v) - uv \right) \right|. \end{aligned} \quad (37)$$

Покажем, что слагаемое с  $x^2$  мало. Для  $m$  из диапазона (18) и  $|x| \leq T_x/2$  можно сделать следующую оценку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{k}{2r_1} x^2 ((u + m\Delta u)^2 - u^2) \right| &\leq \frac{k}{2r_1} \left( \frac{T_x}{2} \right)^2 \left| ((u + m\Delta u)^2 - u^2) \right| \leq \\ &\leq \frac{k}{2r_1} \left( \frac{T_x}{2} \right)^2 (2|u| + m_{\max} \Delta u) m_{\max} \Delta u = \frac{\pi T_x^3 |u|}{4\lambda r_1^2} + \frac{\pi T_x^4}{16\lambda r_1^3}. \end{aligned} \quad (38)$$

Учитывая условие (25), выражение (38) много меньше единицы. Аналогично можно показать, что слагаемые с  $y^2$  и  $xu$  в выражении (37) малы. Отсюда следует справедливость выражения (36).

Далее, с учётом (36), соотношение (34) можно переписать как

$$e^{-j\Phi_{r_2}(x, y, u, v)} \approx \sum_{m, n} k_{mn}(u, v) e^{-j\Phi_{r_1}(x, y, u + m\Delta u, v + n\Delta v)}. \quad (39)$$

Подставим выражение (39) в (26). Меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем:

$$\mathbf{E}(u, v, r_2) \approx e^{-jk(r_2 - r_1)} \frac{r_1}{r_2} \sum_{m, n} k_{mn}(u, v) \mathbf{E}(u + m\Delta u, v + n\Delta v, r_1). \quad (40)$$

В сумме (40) достаточно ограничиться несколькими членами. Более подробно вопрос выбора числа членов разложения будет рассмотрен в главе 4.

Рассмотрим случай, когда угловые координаты интересующей точки  $u_2, v_2$  находятся между узлами сетки  $u_1 + m\Delta u, v_1 + n\Delta v$ . Будем считать, что узел  $u_1, v_1$  является ближайшим узлом из указанной сетки углов к точке  $u_2, v_2$ . Перепишем выражение (30) в виде:

$$e^{-j\Phi_{r_2}(x, y, u_2, v_2)} = g(x, y, u_1, v_1, u_2, v_2) e^{-j\Phi_{r_1}(x, y, u_1, v_1)}. \quad (41)$$

Проводя преобразования, аналогичные (32)-(40), получаем [43,44]:

$$\mathbf{E}(u_2, v_2, r_2) \approx e^{-jk(r_2 - r_1)} \frac{r_1}{r_2} \sum_{m, n} k_{mn}(u_1, v_1, u_2, v_2) \mathbf{E}(u_1 + m\Delta u, v_1 + n\Delta v, r_1), \quad (42)$$

где

$$k_{mn}(u_1, v_1, u_2, v_2) = \frac{1}{T_x T_y} \iint_{T_x \times T_y} e^{j\Phi_{r1}^{(2)}(x, y, u_1, v_1) - j\Phi_{r2}^{(2)}(x, y, u_2, v_2)} e^{jk(x(u_2 - u_1) + y(v_2 - v_1))} e^{-jm\frac{2\pi}{T_x}x} e^{-jn\frac{2\pi}{T_y}y} dx dy. \quad (43)$$

Отметим, что в (42) наибольший вклад в сумму вносят отсчёты поля в районе точки  $(u_2, v_2)$ , т.к. коэффициенты (43) имеют в этом районе наибольшие значения, убывающие по мере отдаления от этой точки.

Приведём график коэффициентов (43) для случая  $u_1=v_1=u_2=v_2=0$ , частота 10 ГГц, диаметр антенны 70 см (граница дальней зоны – 30 м), шаг между отсчётами  $\Delta u=\Delta v=0,042$ , расстояние измерения 3 м:

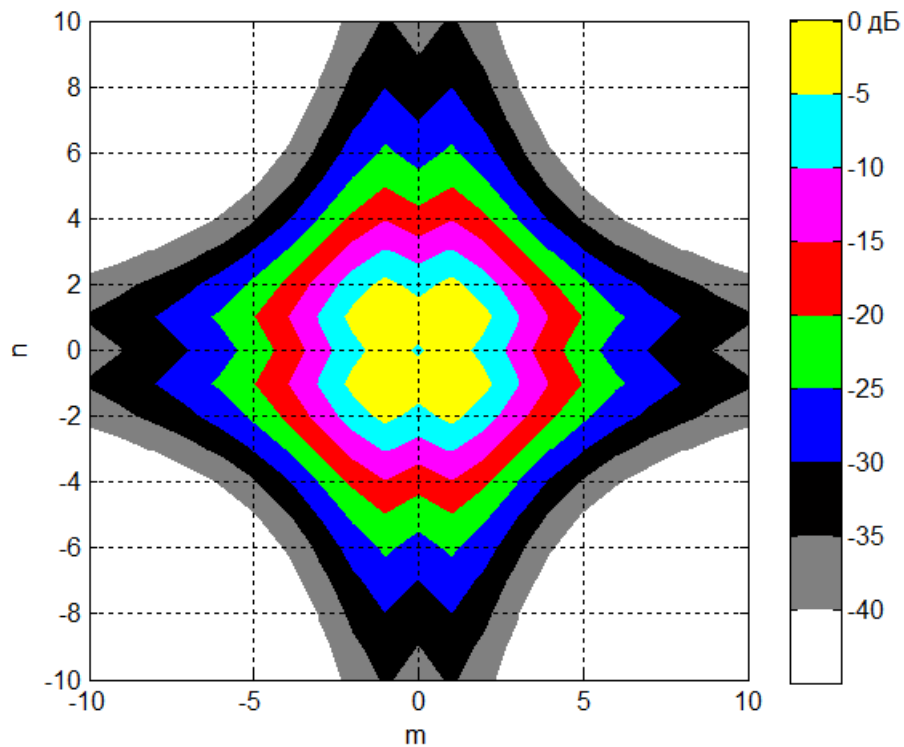


Рис.4. Картограмма коэффициентов  $k_{mn}$ .

На следующем рисунке приводится сравнение коэффициентов  $k_{m0}$  ( $n=0$ ) для аналогичного случая с расстоянием измерения 3 м и 30 м.



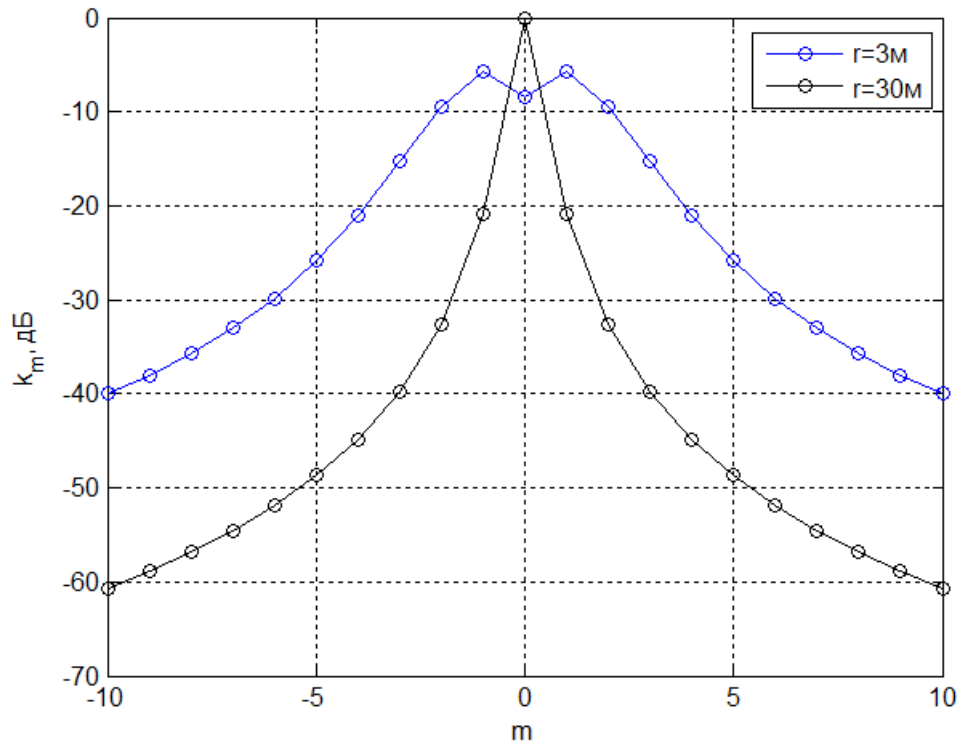


Рис.5. Сравнение коэффициентов  $k_{m0}$  для двух расстояний измерения.

Из (42), (43) следует, что по значениям поля на сетке углов  $u_1 + m\Delta u$ ,  $v_1 + n\Delta v$  на сфере в зоне Френеля или в дальней зоне антенны можно восстановить поле во всех точках полупространства в зоне Френеля или в дальней зоне, что является наиболее общей формулировкой метода измерения на разреженной сетке углов в зоне Френеля, обобщающей известные результаты.

Заметим, что если проводить вывод соотношений на основе формулы (22) вместо (23), то формула (42) перейдет в

$$\mathbf{E}(u_2, v_2, r_2) \approx e^{-jk(r_2 - r_1)} \frac{r_1}{r_2} \sum_{m,n} \frac{w_2}{w_{1,mn}} k_{mn}(u_1, v_1, u_2, v_2) \mathbf{E}(u_1 + m\Delta u, v_1 + n\Delta v, r_1), \quad (44)$$

где

$$w_{1,mn} = \sqrt{1 - (u_1 + m\Delta u)^2 - (v_1 + n\Delta v)^2}. \quad (45)$$

При этом формула для расчёта коэффициентов разложения останется прежней – (43). Однако видно, что формула (44) мало отличается от (42)

(отношение  $w_2/w_{1,mn}$  близко к 1), и, как показывают расчёты, формулы дают близкие результаты.

Полученные формулы можно применять и для случая, когда известны отсчёты поля на равномерной сетке углов в азимутально-угломестных координатах. Покажем это для случая, когда восстанавливается поле в сечении  $\alpha \approx 0$  или  $\beta \approx 0$ . В этом случае в фазовой функции отсутствует член  $xu$ , поэтому двумерный интеграл (43) распадается на два одномерных, и формулы принимают наиболее простой вид.

Рассмотрим случай  $\alpha \approx 0$  (азимутальное сечение). Тогда значения поля заданы на прямоугольной сетке углов по  $\alpha$  и  $\beta$ , т.е.

$$\alpha = \alpha_1 + m\Delta u, \beta = \beta_1 + n\Delta v, \alpha_1 \approx 0. \quad (46)$$

Эти углы соответствуют следующим значениям  $u$  и  $v$ :

$$u \approx \alpha_1 + m\Delta u, v \approx \sin(\beta_1 + n\Delta v), \quad (47)$$

откуда следует, что шаг по  $v$  уменьшается с увеличением азимута пропорционально  $\cos\beta$ . Исходя из (35), для получения уменьшенного шага по  $v$  необходимо проводить интегрирование на увеличенной области:  $\tilde{T}_y = T_y / \cos\beta$ .

Подставляя это выражение в (43), получим [31]:

$$k_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)x^2 + jkx(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{-jm\frac{2\pi}{T_x}x} dx \int_{-T_y/2}^{T_y/2} e^{j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)y^2 + jky(\beta_2 - \beta_1)} e^{-jn\frac{2\pi}{T_y}y} dy. \quad (48)$$

Аналогичным образом можно получить формулу для угломестного сечения  $\beta \approx 0$ :

$$k_{mn} = \frac{1}{T_x T_y} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)x^2 + jkx(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{-jm\frac{2\pi}{T_x}x} dx \times \\ \times \int_{-T_y/2}^{T_y/2} e^{j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)y^2 / \cos^2 \alpha_1 + jky(\beta_2 - \beta_1) / \cos \alpha_1} e^{-jn\frac{2\pi}{T_y}y} dy. \quad (49)$$

Полученные формулы для пересчёта поля записаны в векторном виде. Однако измерение всех трёх компонент поля необязательно. Во-первых, нет необходимости мерить радиальную компоненту, т.к. в зоне Френеля она мала и,

кроме того, её влияние на поле в дальней зоне ещё более уменьшается за счёт того, что в сумме (42) радиальные компоненты поля в зоне Френеля почти ортогональны поперечным компонентам поля в дальней зоне.

Кроме того, можно применять формулу (42) отдельно для основной и поперечной компонент поля. Это также связано с тем, что в сумму (42) входят только точки с близкими угловыми направлениями, и базисные вектора основной и кросс поляризаций остаются практически ортогональными друг другу, независимо от направления, в котором восстанавливается ДН.

Для проведения измерений ОПУ вращается по сечениям, и измеряется несколько азимутальных или угломестных сечений поля в зоне Френеля. На практике бывает достаточно определить только центральные сечения ДН в азимутальной и угломестной плоскости. Схема таких измерений показана на рис.6. Сечения поля в зоне Френеля измеряются с одинаковым угловым шагом независимо от расстояния измерения ( $r_{1,a}$  или  $r_{1,b}$ ). Далее восстанавливается центральное сечение ДН. При необходимости можно восстановить несколько сечений ДН или ДН как функцию двух переменных.

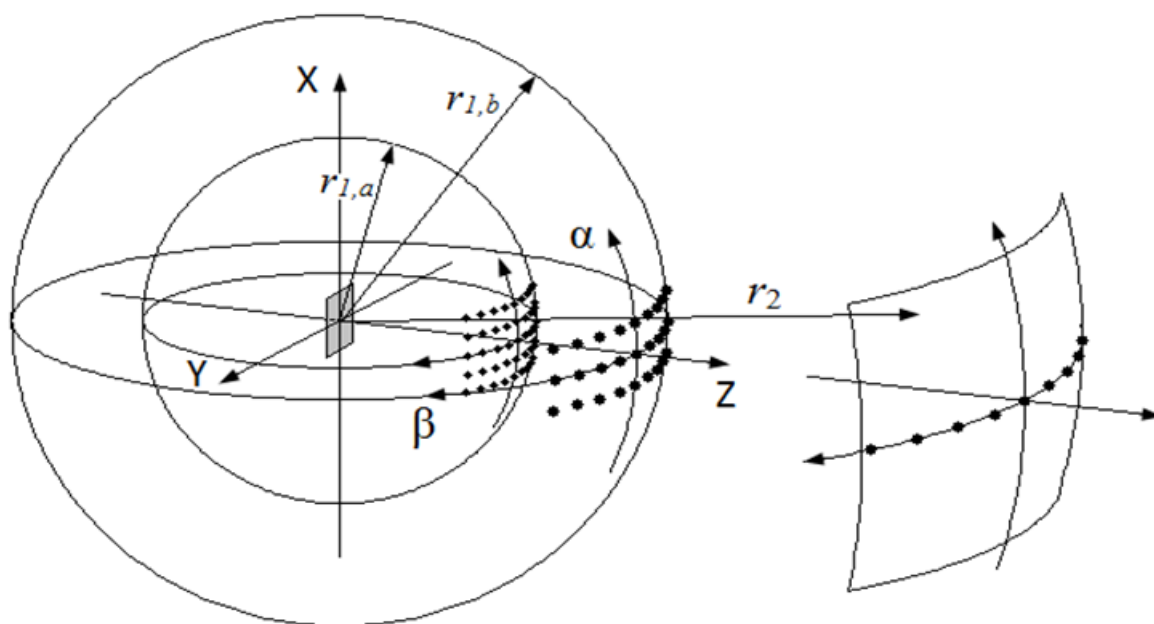


Рис.6. Измеряемые сечения поля в зоне Френеля и восстановленное сечение ДН.

### 2.3. Измерения на цилиндрической поверхности

Рассмотренные формулы относятся к случаю, когда измерения проводятся на сферической поверхности. Однако формулы легко обобщаются и на случай, когда измерения проводятся на цилиндре или плоскости. Случай с измерениями на цилиндре был рассмотрен в [32], где использовался метод корректировки фазы из работы [31]. Приведём краткое описание метода, поскольку эти результаты будут использоваться в следующей главе.

Основная идея метода состоит в том, чтобы аппроксимировать поле на сферической поверхности по результатам измерений на цилиндрической поверхности, после чего воспользоваться формулами для восстановления ДН по измерениям на сфере. Поле определяется на сфере, вписанной в цилиндр, на котором проводятся измерения (рис.7).

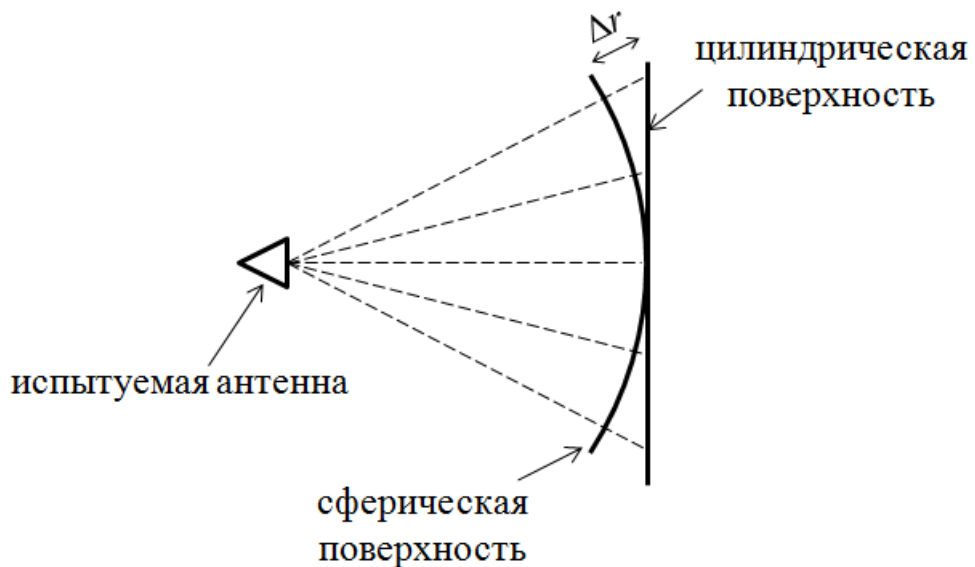


Рис.7. Цилиндрическая и сферическая поверхности.

Для определения поля на сфере воспользуемся тем, что в зоне Френеля в малой окрестности произвольной точки поле имеет характер плоской волны. В силу этого, значения поля на сфере можно определить по значениям поля на цилиндре в соответствующей точке, изменив фазу на величину  $k\Delta r$  (рис.7), то есть по законам геометрической оптики (ГО). Таким образом, формула для

определения поля на сфере радиусом  $r_2$  по измерениям на цилиндре записывается в виде:

$$\mathbf{E}(u_2, v_2, r_2) \approx e^{-jk(r_2-r_1)} \frac{r_1}{r_2} \sum_{m,n} e^{jk\Delta r} k_{mn} \mathbf{E}_{cyl}(\varphi_1 + m\Delta\varphi, h_1 + n\Delta h, r_1), \quad (50)$$

где коэффициенты  $k_{mn}$  определяются по формуле (48).

Заметим, что (50) справедливо для малых углов  $u_2$  (малых  $h_1$ ), т.к. в противном случае использованная аппроксимация поля плоской волной будет не верна, поскольку это приближение в зоне Френеля справедливо только при малых  $\Delta r$ , а при увеличении  $u_2$  увеличивается и  $\Delta r$ .

#### 2.4. Вычисление коэффициентов разложения

Формулы (48) и (49), используемые при расчёте коэффициентов разложения при малом азимуте или малом угле места, очевидно, могут быть выражены через интегралы Френеля. Для примера рассмотрим интеграл по  $x$  из выражения (48). Выделим линейный и квадратичный члены в экспоненте подынтегрального выражения:

$$f(x) = e^{i(Ax^2 + Bx)}, \quad (51)$$

где

$$A = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \quad B = k(\alpha_2 - \alpha_1) - m \frac{2\pi}{T_x}. \quad (52)$$

Выделим в аргументе экспоненты (51) полный квадрат:

$$f(x) = e^{i(a(x-b)^2 + c)} \quad (53)$$

где

$$a = A, \quad b = B / 2A, \quad c = -B^2 / 4A. \quad (54)$$

Делая замену переменной  $t = \sqrt{|a|}(x-b)$ , выразим исходный интеграл следующим образом:

$$I = \frac{e^{ic}}{\sqrt{|a|}} \int_{t_1}^{t_2} e^{i \operatorname{sign}(a)t^2} dt, \quad (55)$$

где

$$t_1 = (-T_x / 2 - b)\sqrt{|a|}, \quad t_2 = (T_x / 2 - b)\sqrt{|a|}. \quad (56)$$

В результате при  $a \neq 0$  интеграл равен

$$I = \frac{e^{ic}}{\sqrt{|a|}} (C(t_2) - C(t_1) + i \operatorname{sign}(a)(S(t_2) - S(t_1))), \quad (57)$$

где  $C(t)$  и  $S(t)$  – интегралы Френеля:

$$C(t) = \int_0^t \cos x^2 dx, \quad S(t) = \int_0^t \sin x^2 dx. \quad (58)$$

Случай  $a=0$  соответствует пересчёту поля на ту же сферу, на которой проводились измерения, т.е. интерполяции поля в зоне Френеля. При этом рассматриваемый интеграл выражается как

$$I = \frac{T_x \sin\left(\frac{kT_x}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) - m\pi\right)}{\frac{kT_x}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) - m\pi}. \quad (59)$$

Формула (59) представляет собой выражение вида  $\sin(x)/x$  и соответствует коэффициентам линейной комбинации при интерполяции функции с ограниченным спектром по теореме Котельникова. Таким образом, мы получили, что поле в зоне Френеля можно считать функцией с ограниченным пространственным спектром. Заметим, что этот вывод был также сделан в работе [45].

Рассмотрим вычисление коэффициентов (33) и (43). Поскольку в аргументе экспоненты присутствует член  $xu$ , интеграл не может быть представлен в виде произведения двух одномерных интегралов. Аналитически интегралы (33) и (43) не вычисляются, поэтому для их определения необходимо использовать численные методы. Поскольку размеры испытываемых антенн могут составлять десятки или сотни длин волн, то вычисление двумерных интегралов стандартными методами численного интегрирования (например, методом Симпсона) может занимать достаточно много времени.

Однако, учитывая характер подынтегральной функции, можно предложить более оптимальный алгоритм численного интегрирования, основанный на двумерном аналоге метода Филона. В работе [46] этот метод вычисления двумерных интегралов от быстроосциллирующих функций был предложен для расчёта ДН зеркальных антенн методом физической оптики. Поверхность интегрирования разбивается на треугольники, и в каждом треугольнике фаза подынтегральной экспоненты аппроксимируется линейной функцией. Далее внутри каждого треугольника интеграл вычисляется аналитически.

При вычислении выражений (33) и (43) интегрирование проводится по прямоугольной области, вследствие чего можно проводить разбиение поверхности интегрирования на прямоугольники. (В [46] используется разбиение на треугольники в связи с тем, что областью интегрирования являлся круг или более сложная фигура.) Запишем основные соотношения данного метода численного интегрирования на примере вычисления интеграла (33). Область интегрирования разбивается на  $P$  частей по  $x$  размером  $T_x/P$  и  $Q$  частей по  $y$  размером  $T_y/Q$ . В каждом из  $PQ$  прямоугольников аргумент экспоненты представляется в виде линейной части ряда Тейлора:

$$\varphi_{pq} = \varphi_{0,pq} + (x - x_{pq})\varphi_{x,pq} + (y - y_{pq})\varphi_{y,pq}, \quad (60)$$

где

$$\varphi_{0,pq} = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \left( x_{pq}^2 (1 - u^2) + y_{pq}^2 (1 - v^2) - 2x_{pq}y_{pq}uv \right) - m \frac{2\pi}{T_x} x_{pq} - n \frac{2\pi}{T_y} y_{pq}, \quad (61)$$

$$\varphi_{x,pq} = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \left( 2x_{pq}(1 - u^2) - 2y_{pq}uv \right) - m \frac{2\pi}{T_x}, \quad (62)$$

$$\varphi_{y,pq} = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \left( 2y_{pq}(1 - v^2) - 2x_{pq}uv \right) - n \frac{2\pi}{T_y}, \quad (63)$$

$$x_{pq} = T_x \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{P} \left( p - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (64)$$

$$y_{pq} = T_y \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{Q} \left( q - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (65)$$

Далее на каждом из  $PQ$  прямоугольников интеграл вычисляется аналитически:

$$\begin{aligned} I_{pq} &= \int_{\Pi_{pq}} \exp(i(\varphi_{0,pq} + (x - x_{pq})\varphi_{x,pq} + (y - y_{pq})\varphi_{y,pq})) dx dy = \\ &= e^{i\varphi_{0,pq}} \frac{4}{\varphi_{x,pq} \varphi_{y,pq}} \sin(\varphi_{x,pq} \frac{T_x}{2P}) \sin(\varphi_{y,pq} \frac{T_y}{2P}). \end{aligned} \quad (66)$$

Значение интеграла по всей области определяется как сумма интегралов по каждому прямоугольнику:

$$I = \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q I_{pq}. \quad (67)$$

## 2.5. Условия применимости метода.

При выводе метода использовалось условие малости третьей степени разложения фазовой функции (25), которое определяет применимость метода в общем случае. Заметим, что, в принципе, можно не ограничиваться только линейным и квадратичным членами разложения фазовой функции в (27). Но добавление следующих членов разложения не приводит к улучшению точности восстановления, т.к. условие (25) также требуется для выполнения (36). (Расчёты показывают, что добавление следующих членов разложения в (27), наоборот, приводит к ухудшению точности.)

Однако при восстановлении ДН для малых  $u$ ,  $v$  можно использовать менее строгий критерий применимости, чем (25). При малых  $u$ ,  $v$  третья степень разложения фазовой функции мала независимо от выполнения (25), а условия (36) выполняются в силу того, что при малых  $u$ ,  $v$  можно пренебречь зависимостью второй степени разложения (29) от  $u$ ,  $v$  (это также видно из выражения (38)). Таким образом, при малых  $u$ ,  $v$  можно пользоваться критерием малости четвёртой степени:



$$\frac{D^4}{50\lambda r_1^3} \ll 1. \quad (68)$$

Заметим, что аналогичная оценка была получена в [3, 24, 47] для определения ближней границы зоны Френеля в параксиальном приближении (т.е. для малых углов отклонения от нормали к апертуре).

Приведённые рассуждения относились к формулам (42), (43). При переходе от равномерной сетки в направляющих косинусах  $u$ ,  $v$  к равномерной сетке в угловых переменных  $\alpha$ ,  $\beta$  и использовании коэффициентов (48) критерий применимости несколько меняется. Как показано в главе 3, критерий (68) в этом случае применим при малом угле места и произвольном азимуте. Также там будет уточнено, что именно понимается под «малым» углом места. (При использовании представления поля с помощью приближения Кирхгофа это показать достаточно трудно.)

Отметим, что критерии применимости (25) и (68) не являются принципиальным ограничением метода. Они относятся только к указанным формулам для расчёта коэффициентов разложения, при нахождении которых использовались эти условия. Для восстановления ДН по измерениям на более близком расстоянии, чем следует из приведённых критериев, можно воспользоваться методом, приведённым в работе [21], либо использовать методы, разработанные для измерений в ближней зоне.

Сектор углов, в котором требуется восстанавливать ДН, как правило, можно уменьшить за счёт того, что в области дальнего бокового излучения ДН формируется на более близком расстоянии, чем главный максимум и первые боковые лепестки. Поэтому в этой области измерения в зоне Френеля даже без дополнительной обработки дают достаточно точное представление о ДН [3].

## **2.6. Эквивалентность методов.**

Покажем, что полученное в разделе 2.2 представление поля в зоне Френеля и в дальней зоне может быть получено исходя из метода, основанного на интегрировании поля в зоне Френеля по формуле (4), описанного в [3, 7, 8]. Для

этого воспользуемся свойством ограниченности пространственного спектра поля на сфере в зоне Френеля [45], проведя интерполяцию согласно теореме Котельникова [48]:

$$E(u, v, r_1) = \sum_{m,n} E(m\Delta u, n\Delta v, r_1) \frac{\sin((u - m\Delta u)\pi / \Delta u)}{(u - m\Delta u)\pi / \Delta u} \frac{\sin((v - n\Delta v)\pi / \Delta v)}{(v - n\Delta v)\pi / \Delta v}. \quad (69)$$

Согласно [45], угловой шаг  $\Delta u, \Delta v$  в (69) совпадает с угловым шагом (35).

Рассмотрим случай, когда восстанавливается поле в дальней зоне и  $u_1=v_1=0$ . Подставляем (69) в (4) и меняем порядок суммирования и интегрирования:

$$E_\infty(u, v) = \sum_{m,n} k_{mn,uv} E(m\Delta u, n\Delta v, r_1), \quad (70)$$

где

$$k_{mn,uv} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sin((u' - m\Delta u)\pi / \Delta u)}{(u' - m\Delta u)\pi / \Delta u} \frac{\sin((v' - n\Delta v)\pi / \Delta v)}{(v' - n\Delta v)\pi / \Delta v} \times \\ \exp\left\{-i\pi \frac{r_1}{\lambda} ((u' - u)^2 + (v' - v)^2)\right\} du' dv'. \quad (71)$$

Видно, что интеграл (71) можно представить в виде произведения двух одномерных интегралов. Рассмотрим интеграл по  $u'$ :

$$k_{m,u} = \int_{-1}^1 \frac{\sin((u' - m\Delta u)\pi / \Delta u)}{(u' - m\Delta u)\pi / \Delta u} \exp\left\{-i\pi \frac{r_1}{\lambda} (u' - u)^2\right\} du'. \quad (72)$$

Расширим пределы интегрирования в (72) до бесконечности. Поскольку для  $|u'| > 1$  подынтегральная функция является быстроосциллирующей и имеет существенно меньшую амплитуду, чем в максимуме, такая операция практически не повлияет на значение интеграла. (Вообще говоря, границы интегрирования от -1 до 1 тоже выбраны весьма условно, т.к. при  $|u| \approx 1$  или  $|v| \approx 1$  интерполяция по формуле (69) становится достаточно грубой, особенно рассматривая вклад отсчётов поля с малыми  $u$  и  $v$ .) Рассмотрим  $k_{m,u}$  как функцию, зависящую от  $u$  ( $m$  является параметром):

$$k_m(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin((u' - m\Delta u)\pi / \Delta u)}{(u' - m\Delta u)\pi / \Delta u} \exp\left\{-i\pi \frac{r_1}{\lambda} (u - u')^2\right\} du', \quad (73)$$

Найдём преобразование Фурье от (73). Видно, что выражение (73) является свёрткой двух функций, поэтому по теореме о свёртке преобразование Фурье может быть представлено в виде произведения преобразований Фурье каждой из функций. Преобразования Фурье выражаются следующим образом:

$$F\left[\frac{\sin((t - m\Delta u)\pi / \Delta u)}{(t - m\Delta u)\pi / \Delta u}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Delta u e^{-i\omega m\Delta u} \text{rect}\left(\frac{\omega\Delta u}{2\pi}\right), \quad (74)$$

$$F\left[\exp\left\{-i\pi \frac{r_1}{\lambda} t^2\right\}\right] = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi r_1}} \exp\left(i \frac{\omega^2 \lambda}{4\pi r_1} - i \frac{\pi}{4}\right), \quad (75)$$

где  $\text{rect}(x)=1$  для  $|x|<1/2$  и  $\text{rect}(x)=0$  для  $|x|>1/2$ .

Согласно теореме о свёртке, преобразование Фурье от  $k_m(u)$  равно

$$F[k_m(u)] = \Delta u \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi r_1}} e^{-i\omega m\Delta u} \exp\left(i \frac{\omega^2 \lambda}{4\pi r_1} - i \frac{\pi}{4}\right) \text{rect}\left(\frac{\omega\Delta u}{2\pi}\right). \quad (76)$$

Теперь представим  $k_m(u)$  в виде обратного преобразования Фурье от (76):

$$\begin{aligned} k_m(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F[k_m(u)] e^{i\omega u} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/\Delta u}^{\pi/\Delta u} \Delta u \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi r_1}} e^{-i\omega m\Delta u} \exp\left(i \frac{\omega^2 \lambda}{4\pi r_1} - i \frac{\pi}{4}\right) e^{i\omega u} d\omega. \end{aligned} \quad (77)$$

Проведём замену переменной  $\omega = x \cdot 2\pi/\lambda$ . Тогда с учётом (35):

$$\begin{aligned} k_m(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\pi}{\lambda} \Delta u \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi r_1}} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{-ikxm\Delta u} \exp\left(i \frac{x^2 \pi}{\lambda r_1} - i \frac{\pi}{4}\right) e^{ikxu} dx = \\ &= \frac{1}{T_x} \sqrt{\frac{\lambda}{r_1}} e^{-i\pi/4} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{i \frac{k}{2r_1} x^2} e^{ikxu} e^{-im \frac{2\pi}{T_x} x} dx. \end{aligned} \quad (78)$$

Полученное выражение совпадает с одномерными интегралами из выражения (48) с точностью до постоянного множителя (при выборе  $r_2 \rightarrow \infty$  и  $\alpha_1=0$  в (48)). Амплитудный множитель  $\sqrt{\lambda/r_1}$  возникает из-за того, что исходное выражение для поля (4) не было нормировано. Фазовый множитель  $e^{-i\pi/4}$  возникает из-за того, что в выражении (4) пренебрегли множителем  $e^{i\pi/2}$  как

несущественной константой (ещё один множитель  $e^{-i\pi/4}$  возникает в интеграле по  $\nu'$ ).

Покажем, что расширение пределов интегрирования, которое использовалось при переходе от (72) к (73) вносит пренебрежимо малую ошибку. Для этого сравним коэффициенты по формулам (72) и (78) (формулы (73) и (78), как было показано, являются эквивалентными) для случая  $\Delta u = 0,042$ , частота 10 ГГц, диаметр антенны 70 см, расстояние измерения 3 м. Зависимость коэффициентов от  $m$  при восстановлении ДН в направлении  $u=0$  показана на следующем рисунке:

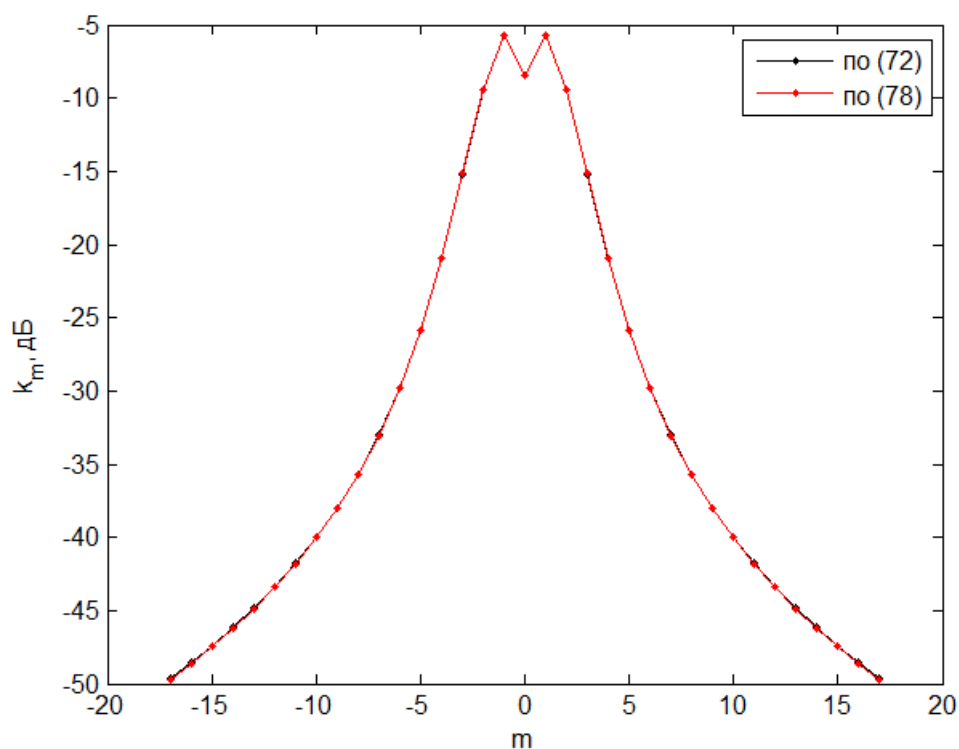


Рис. 8. Сравнение коэффициентов по формулам (72) и (78).

Как видно из рисунка, коэффициенты совпадают с графической точностью (ошибка 0,15 дБ на уровне -50 дБ), что подтверждает справедливость сделанного приближения.

Для интеграла по  $\nu'$  в формуле (71) получается выражение, аналогичное (78), и формула (71) сводится к виду:

$$k_{mn,uv} = \frac{1}{T_x T_y} \frac{\lambda}{r_1} e^{-i\pi/2} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{i\frac{k}{2r_1}x^2} e^{ikxu} e^{-im\frac{2\pi}{T_x}x} dx \int_{-T_y/2}^{T_y/2} e^{i\frac{k}{2r_1}y^2} e^{ikyv} e^{-im\frac{2\pi}{T_y}y} dy. \quad (79)$$

С учётом сделанных ранее замечаний по поводу постоянных множителей, полученная формула эквивалентна формулам, полученным ранее при использовании разложения в ряд Фурье.

Заметим, что можно также показать справедливость формулы (4) исходя из формул (42), (48). Для этого нужно устремить  $T_x$ ,  $T_y$  к бесконечности в формулах (42), (48). При этом шаг между отсчётами поля устремляется к нулю и суммирование переходит в интегрирование. Причём полученный интеграл совпадает с (4). При этом теряется информация о том, что апертура находится внутри конечного прямоугольника, что приводит к увеличению необходимого объёма измерений.

## ***2.7. Сравнение шага между отсчётами поля для двух методов восстановления ДН***

Проведём сравнение углового шага между отсчётами поля для метода, основанного на интегрировании поля в зоне Френеля [3, 7, 8], и метода измерения на разреженной сетке. Отметим, что угловой сектор, в котором необходимо измерять поле в зоне Френеля, одинаков для обоих методов в силу показанной в предыдущем разделе эквивалентности методов. Поэтому для сравнения требуемого объёма измерений достаточно сравнить угловые шаги отсчётов, используемые в этих методах.

В методе восстановления по измерениям на разреженной сетке угловой шаг зависит только от электрического размера антенны и определяется выражением (35). В методе, основанном на интегрировании поля, шаг зависит от электрического размера антенны, расстояния измерения и диапазона углов, в котором восстанавливается ДН, как следует из формулы (5). Для сравнения углового шага (35) и (5) рассмотрим случай, когда ДН восстанавливается в районе

главного максимума и первых боковых лепестков, и угловой сектор равен 10 ширинам луча (часто именно эта область ДН представляет наибольший интерес):

$$u_B = 10 \frac{\lambda}{D} . \quad (80)$$

Тогда угловой шаг (5) равен

$$\Delta u_u = \frac{D}{30r_1} . \quad (81)$$

Выразим  $r_1$  через число Френеля, определяемое выражением [9]:

$$m = \frac{2D^2}{r_1 \lambda} . \quad (82)$$

(Число Френеля показывает, во сколько раз  $r_1$  меньше расстояния дальней зоны).

Тогда  $r_1$  равен:

$$r_1 = \frac{2D^2}{m\lambda} , \quad (83)$$

а угловой шаг определяется выражением:

$$\Delta u_u = \frac{m}{60} \frac{\lambda}{D} . \quad (84)$$

Таким образом, при  $m < 60$  угловой шаг метода измерения на разреженной сетке углов больше шага метода, основанного на интегрировании поля. Причём при  $m$  порядка нескольких единиц (т.е. при измерении на достаточно большом расстоянии) шаги различаются в десятки раз. С другой стороны, при  $m > 60$  шаг метода, основанного на интегрировании поля, больше шага метода измерения на разреженной сетке, при условии, что ДН восстанавливается в небольшом секторе углов, порядка (80).

Условие  $m > 60$  может выполняться, когда проводятся измерения электрически больших антенн около ближней границы зоны Френеля. Например, для восстановления ДН антенны размером  $150\lambda$  в секторе  $\pm 2^\circ$  и измерении на расстоянии  $400\lambda$  (ближняя граница зоны Френеля (68)),  $m=113$  и угловой шаг метода, основанного на интегрировании поля, больше шага метода измерения на разреженной сетке примерно в 2 раза (шаги  $0,72^\circ$  и  $0,37^\circ$  соответственно). Ниже

приводятся результаты моделирования двумерной задачи для этого случая с использованием приближения Кирхгофа. Антенна имеет равномерное амплитудное распределение. Для восстановления ДН с помощью метода измерения на разреженной сетке используются формулы (14) (равномерный шаг по направляющим косинусам) и (16) (равномерный шаг по углам).

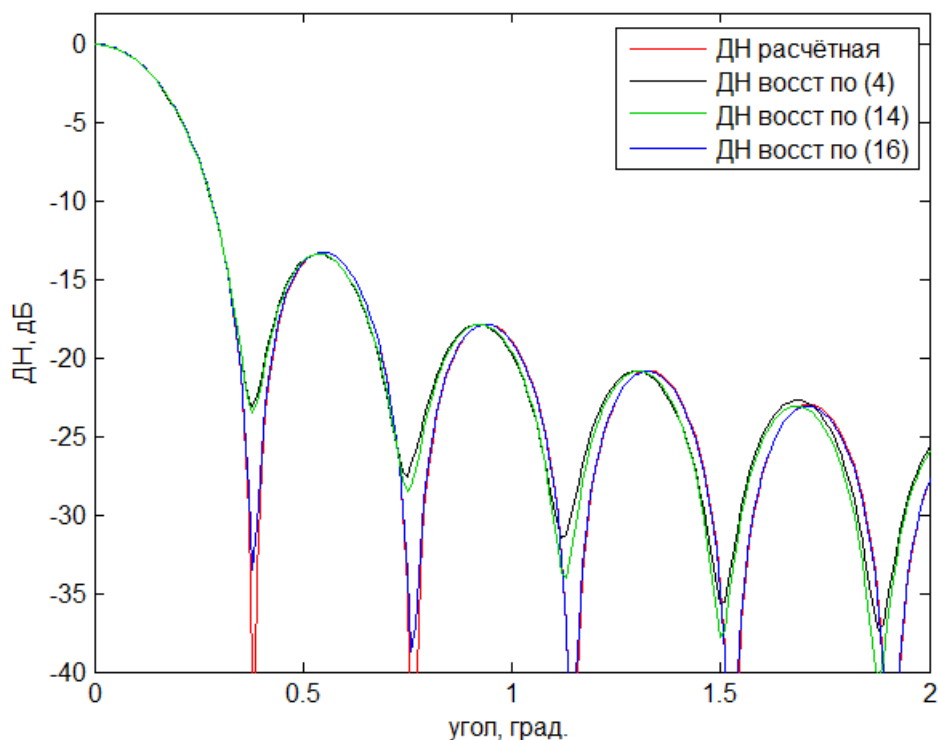


Рис.9. Сравнение расчётной и восстановленной ДН.

Из рис.9 видно, что все три метода позволили восстановить ДН. Заметим, что ДН, восстановленные по формулам (4) и (14), приводят к одинаковой систематической ошибке (смещению боковых лепестков), что объясняется доказанной в предыдущем разделе эквивалентностью этих формул. Более высокая точность ДН, восстановленной по формуле (16), объясняется выводами, полученными в главе 3.

Отметим, что возможность использования шага большего  $\lambda/D$  в методе, основанном на интегрировании поля, связана с ограничением области, в которой восстанавливается ДН, при использовании такого шага. Данная возможность

также отмечалась в работе [8]. Построение метода, использующего одновременно свойство ограниченности пространственного спектра поля и возможность увеличения шага между отсчётами при необходимости восстановления ДН в ограниченном секторе углов, является отдельной задачей, выходящей за рамки данной работы.

## **2.8. Примеры восстановления диаграммы направленности**

Приведём примеры численных экспериментов по восстановлению ДН с помощью метода измерения на разреженной сетке углов. В качестве примера рассмотрим осесимметричную однозеркальную антенну диаметром 1,5 м, фокусное расстояние 0,7 м, частота 10 ГГц ( $\lambda=3$  см), горизонтальная поляризация. Для проверки метода восстановления ДН вычислим поле антенны в зоне Френеля и воспользуемся формулами (40) и (48) для восстановления ДН. Далее сравним восстановленную ДН с результатами прямых расчётов.

Вычисление поля в зоне Френеля и в дальней зоне проводится с помощью метода физической оптики. Модель антенны показана на рис.10.

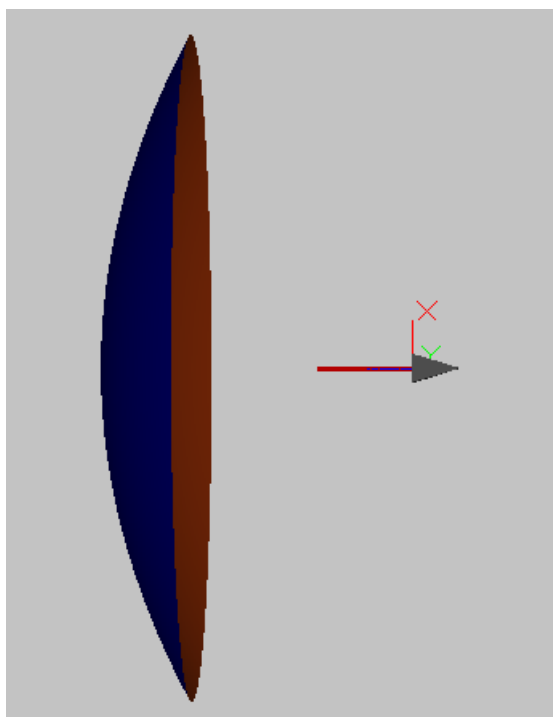


Рис.10. Модель антенны.



Расстояние дальней зоны данной антенны составляет 150 м, минимальное расстояние измерения по критерию (25) составляет 21 м, по критерию (68) – 3,2 м.

Рассмотрим случай, когда измерения проводятся на сфере радиусом 30 м. Шаг между сечениями –  $1,1^\circ$  (в соответствии с (35)), вычисляется 7 сечений в зоне Френеля. Амплитуда поля в зоне Френеля и в дальней зоне показаны на рис.11.

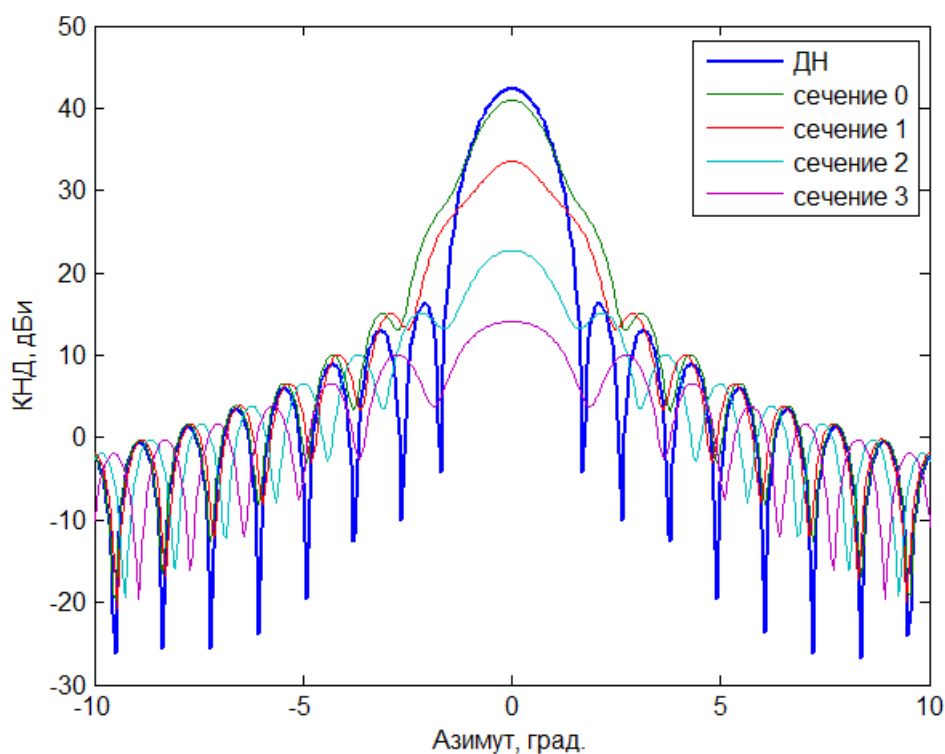


Рис.11. Распределение поля в зоне Френеля (30 м) и в дальней зоне.

Коэффициенты (48), используемые для восстановления ДН, показаны на следующем рисунке ( $k_{m0}$ , т.е.  $k_{mn}$  при  $n=0$ ).

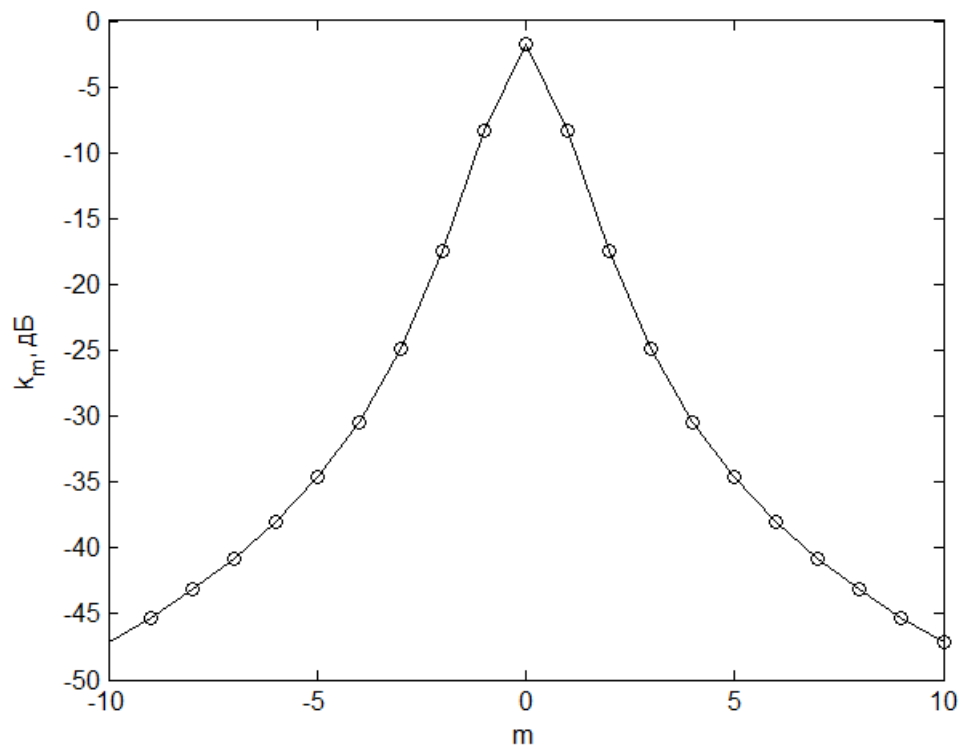


Рис.12. Коэффициенты для восстановления ДН при  $r=30$  м.  
Восстановленная ДН (центральное сечение) показана на рис.13.

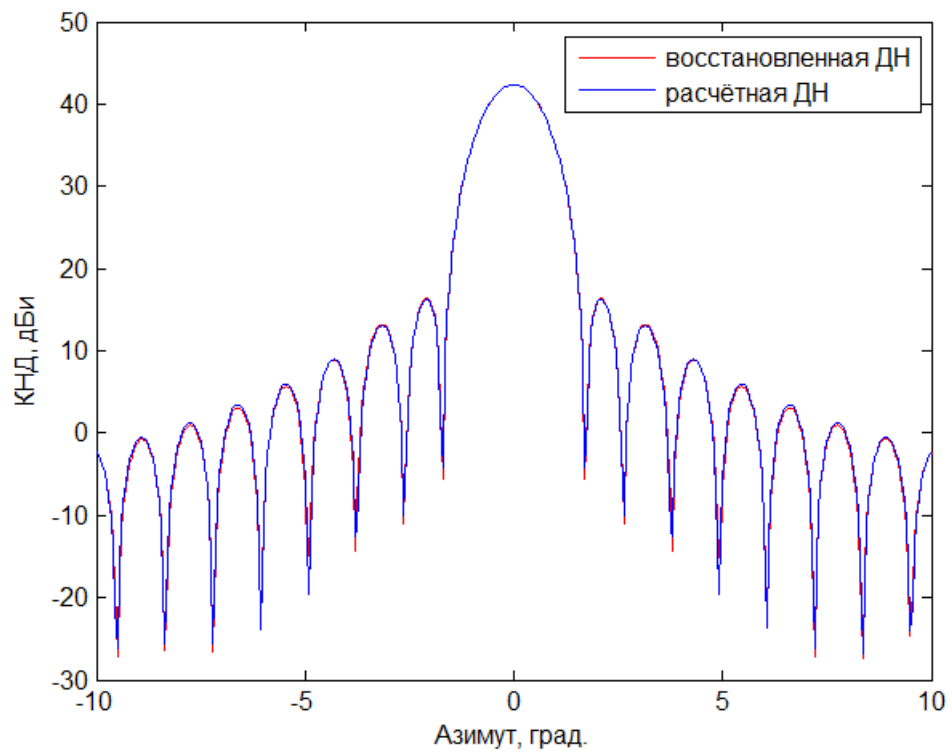


Рис.13. Сравнение расчётной и восстановленной ДН при  $r=30$  м.

Ошибка определения коэффициента направленного действия (КНД) составила менее 0,01 дБ. Ошибка определения уровня первых боковых лепестков – 0,15 дБ (уровень первых боковых лепестков составляет -26 дБ).

Теперь рассмотрим случай, когда измерения проводятся на сфере радиусом 5 м, т.е. критерий (25) не выполнен, но критерий (68) выполнен. Для восстановления ДН используется 25 сечений в зоне Френеля, шаг также  $1,1^\circ$ . Амплитуда поля в зоне Френеля и в дальней зоне показаны на рисунке ниже:

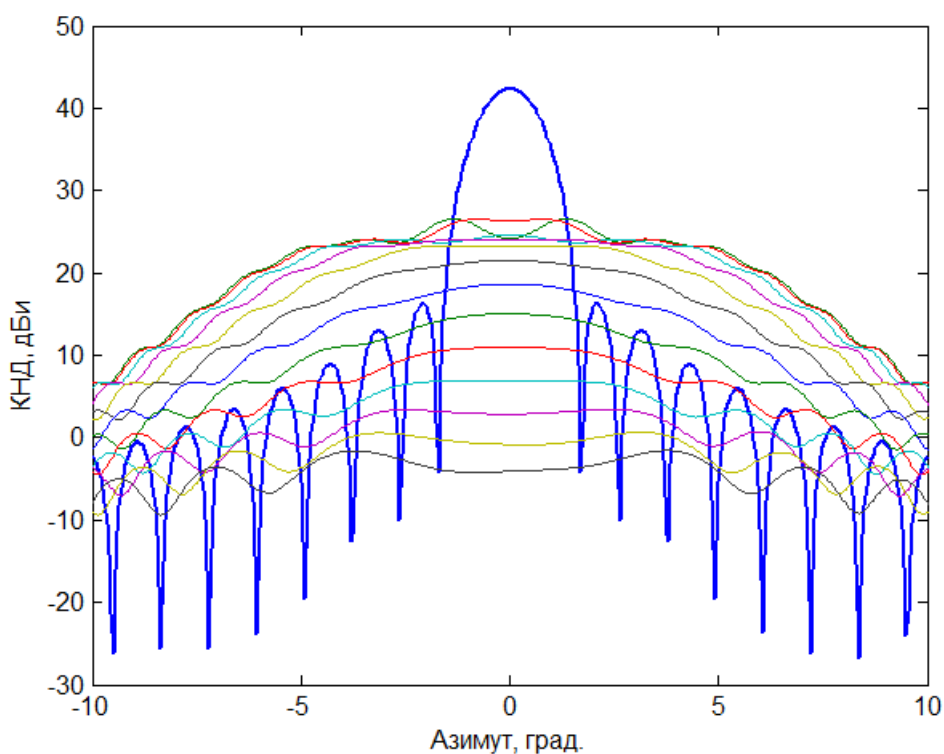


Рис.14. Распределение поля в зоне Френеля (5 м) и в дальней зоне (выделено распределение в дальней зоне).

Коэффициенты по формуле (48), используемые для восстановления ДН, показаны на следующем рисунке.

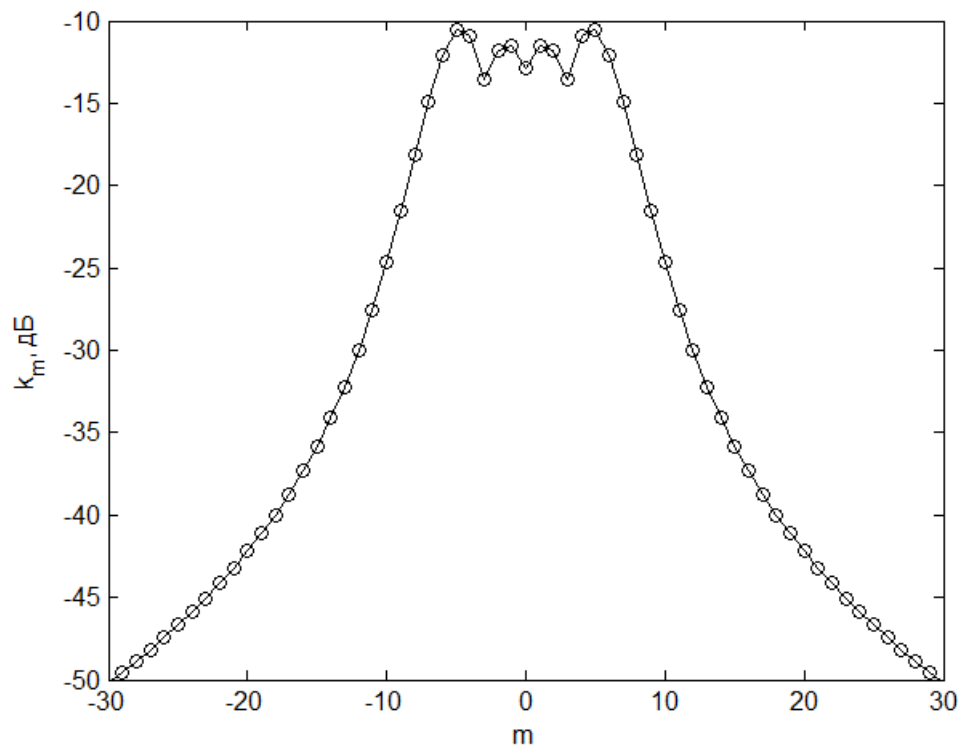


Рис.15. Коэффициенты для восстановления ДН при  $r=5$  м.  
Восстановленная ДН показана на рис.16.

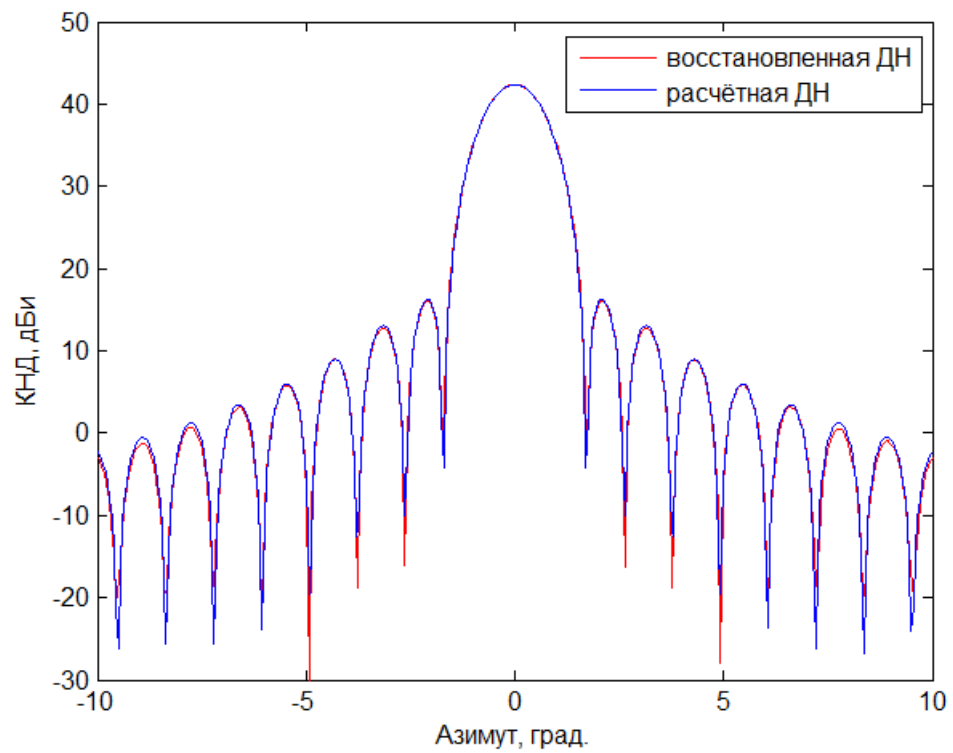


Рис.16. Сравнение расчётной и восстановленной ДН при  $r=5$  м.

Ошибка определения КНД также составила менее 0,01 дБ. Ошибка определения уровня первых боковых лепестков – 0,13 дБ. Таким образом, видно, что метод позволяет восстанавливать центральное сечение ДН, если критерий (25) не выполнен, но критерий (68) выполнен.

## **2.9. Выводы**

В данной главе изложен метод восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля. Полученные соотношения записаны в векторном виде, справедливы для произвольных углов восстановления ДН в переднем полупространстве антенны и позволяют восстанавливать поле как в дальней зоне, так и на произвольном расстоянии в зоне Френеля, что является наиболее общей формой записи метода.

Показано, что аналогичные формулы могут быть получены на основе метода, основанного на интегрировании поля в зоне Френеля [3, 8], при использовании разложения поля в зоне Френеля в ряд Котельникова. Таким образом, методы являются эквивалентными и позволяют восстанавливать ДН с одинаковой точностью, но при измерениях на разреженной сетке углов удаётся сократить объём измерений за счёт использования аналитических свойств электромагнитного поля, связанных с ограниченностью пространственного спектра.

Показано, что критерий малости четвертой степени разложения фазовой функции обеспечивает малую погрешность предложенного метода. Приведены результаты численных экспериментов по восстановлению ДН с помощью описанного метода.

### Глава 3. Асимптотика соотношений для восстановления ДН по измерениям в ближней зоне на цилиндре применительно к измерениям в зоне Френеля

Наряду с методами определения характеристик антенн по измерениям в зоне Френеля в настоящее время хорошо развиты методы измерений в ближней зоне. В частности, это измерения на плоскости, на цилиндре и на сфере. Представляет интерес установить связи между методами измерений в ближней зоне и рассмотренным выше методом измерений в зоне Френеля. Для решения этой задачи в настоящей главе рассмотрены соотношения для преобразования поля из ближней зоны в дальнюю зону и показано, что при перемещении поверхности измерений из ближней зоны в зону Френеля, эти соотношения могут быть преобразованы к соотношениям, полученным для зоны Френеля.

Соотношения для пересчета поля с цилиндрической поверхности в дальнюю зону получены на основе решения волнового уравнения в виде разложения по цилиндрическим функциям [16,49-52]. В работах [16,49-51] использован угловой шаг по  $\varphi$  около  $\lambda/D$  и шаг по  $z$  около  $\lambda/2$  независимо от радиуса цилиндра. При этом указано на возможность увеличения шага по  $z$  при восстановлении ДН в ограниченном секторе углов. В [52] показано, что шаг измерений по  $z$  может быть увеличен при увеличении радиуса цилиндра (при фиксированном размере антенны) независимо от сектора углов, в котором восстанавливается ДН, и может составлять около  $\lambda r/D$ , что соответствует угловому шагу  $\lambda/D$ .

Соотношения для пересчёта поля со сферической поверхности в дальнюю зону основываются на решении волнового уравнения в виде разложения по сферическим функциям [53]. При этом угловой шаг между отсчётами поля должен составлять около  $\lambda/D$ .

Для измерений в зоне Френеля на цилиндре или сфере значение шага также составляет около  $\lambda/D$  [31, 32]. Это обстоятельство позволяет предположить, что метод восстановления ДН по измерениям в зоне Френеля является частным случаем метода ближней зоны.

Для подтверждения этого предположения ниже рассмотрена асимптотика соотношений, используемых для восстановления ДН по измерениям в ближней зоне. Эту асимптотику необходимо сравнить с соотношениями, полученными в главе 2 для зоны Френеля. Анализ проведён для случая, когда поле измеряется на цилиндрической поверхности. Также приводятся основные результаты для случая, когда измерения проводятся на сфере.

### **3.1. Основные соотношения для восстановления ДН по измерениям в ближней зоне на цилиндре**

Рассмотрим основные соотношения, используемые при восстановлении ДН по измерениям в ближней зоне на цилиндре. В следующих разделах будет проводиться анализ этих соотношений для случая, когда измерения поля проводятся в зоне Френеля.

Наиболее распространённый способ восстановления ДН по измерениям в ближней зоне на цилиндре основывается на использовании разложения поля по собственным модам волнового уравнения в цилиндрической системе координат [54]. Как правило, используется векторный вариант данного разложения, описанный в [55]. Согласно этому представлению, поле в произвольной точке пространства вне наименьшего цилиндра, охватывающего антенну, имеет вид:

$$\mathbf{E}(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (a_n(h) \mathbf{M}_{nh}(r, \varphi, z) + b_n(h) \mathbf{N}_{nh}(r, \varphi, z)) dh, \quad (85)$$

где

$$\mathbf{M}_{nh}(r, \varphi, z) = \left( \hat{r} \frac{jn}{r} H_n^{(2)}(\Lambda r) - \hat{\varphi} \Lambda \frac{dH_n^{(2)}(\Lambda r)}{d(\Lambda r)} \right) e^{jn\varphi} e^{-jhz}, \quad (86)$$

$$\mathbf{N}_{nh}(r, \varphi, z) = \left( -\hat{r} \frac{jh\Lambda}{k} \frac{dH_n^{(2)}(\Lambda r)}{d(\Lambda r)} + \hat{\varphi} \frac{nh}{kr} H_n^{(2)}(\Lambda r) + \hat{z} \frac{\Lambda^2}{k} H_n^{(2)}(\Lambda r) \right) e^{jn\varphi} e^{-jhz}, \quad (87)$$

$a_n(h)$ ,  $b_n(h)$  – коэффициенты разложения (модальные коэффициенты),  $H_n^{(2)}(\Lambda r)$  – функции Ханкеля 2 рода,  $\Lambda = (k^2 - h^2)^{1/2}$  для  $|h| < k$  и  $\Lambda = -j(h^2 - k^2)^{1/2}$  для  $|h| \geq k$ ,  $\hat{r}$ ,  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{z}$  – соответствующие единичные векторы (геометрия задачи показана на рис.17).

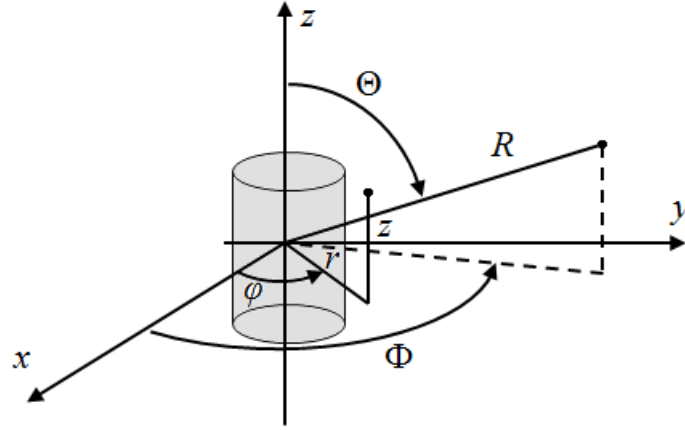


Рис. 17. Геометрия задачи: наименьший цилиндр, охватывающий антенну, и точки наблюдения на цилиндре и на сфере.

В силу ортогональности функций, входящих в разложение (85), модальные коэффициенты могут быть определены через тангенциальные компоненты поля на цилиндре произвольного радиуса  $r$ :

$$a_n(h) = \frac{1}{4\pi^2 \Lambda \frac{\partial H_n^{(2)}(\Lambda r)}{\partial(\Lambda r)}} \times \left( - \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz E_{\varphi}(r, \varphi, z) e^{-jn\varphi} e^{jhz} + \frac{nh}{r\Lambda^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(r, \varphi, z) e^{-jn\varphi} e^{jhz} \right), \quad (88)$$

$$b_n(h) = \frac{k}{4\pi^2 \Lambda^2 H_n^{(2)}(\Lambda r)} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(r, \varphi, z) e^{-jn\varphi} e^{jhz}. \quad (89)$$

Поле в дальней зоне определяется в результате асимптотической оценки выражения (85) при  $kr \rightarrow \infty$  и может быть записано в сферических координатах (рис.17) следующим образом [16]:

$$\mathbf{E}(R, \Theta, \Phi) = \frac{-2k \sin \Theta e^{-jkR}}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n e^{jn\Phi} (\hat{\Phi} a_n(k \cos \Theta) + \hat{\Theta} j b_n(k \cos \Theta)). \quad (90)$$

Использование векторной формы разложения по цилиндрическим функциям удобно тем, что поле определяется двумя коэффициентами (функциями  $a_n(h)$  и  $b_n(h)$ ), тогда как в скалярной форме поле определяется тремя функциями – для каждой декартовой компоненты. Однако скалярная форма в нашем случае



представляет интерес, т.к. похожая форма использовалась в главе 2 (каждая декартова компонента обрабатывалась независимо). При использовании скалярной формы записи каждая декартова компонента может быть представлена в виде разложения [56]:

$$f(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(h) e^{jn\varphi} H_n^{(2)}(\Lambda r) e^{-jhz} dh. \quad (91)$$

Учитывая ортогональность функций, входящих в (91), модальные коэффициенты  $a_n(h)$  могут быть определены через значения  $f$  на цилиндре радиуса  $r$  следующим образом:

$$a_n(h) = \frac{1}{4\pi^2 H_n^{(2)}(\Lambda r)} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz f(r, \varphi, z) e^{-jn\varphi} e^{jhz}. \quad (92)$$

Получим для скалярного случая формулу для определения поля в дальней зоне исходя из соотношения (91), аналогичную соотношению (90) для векторного случая. Для этого выпишем основной член асимптотики функции Ханкеля при большом значении аргумента [57]:

$$H_n^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left\{ -j \left( x - \left( \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} \right) \pi \right) \right\}. \quad (93)$$

Подставим (93) в (91):

$$f(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(h) \sqrt{\frac{2}{\pi \Lambda r}} e^{jn\varphi} \exp \left\{ -j \left( \Lambda r - \left( \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} \right) \pi \right) \right\} e^{-jhz} dh. \quad (94)$$

Перепишем полученное выражение в сферических координатах, перегруппировав множители:

$$f(R, \Theta, \Phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Phi} j^n e^{j\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi R \sin \Theta}} \int_{-\infty}^{\infty} a_n(h) \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} e^{-jR(\Lambda \sin \Theta + h \cos \Theta)} dh. \quad (95)$$

Интеграл в выражении (95) можно вычислить с помощью метода стационарной фазы [58]. В качестве большого параметра выступает  $kR$ . Стационарной точкой является:

$$h_0 = k \cos \Theta. \quad (96)$$

Вторая производная аргумента подынтегральной экспоненты равна (исключая множитель  $jkR$ ):

$$F''(h_0) = \frac{1}{k^2 \sin^2 \theta}. \quad (97)$$

Вторая производная имеет положительное значение, поэтому согласно методу стационарной фазы значение интеграла в (95) при  $kR \rightarrow \infty$  равно:

$$I_n = a_n(k \cos \Theta) \sqrt{\frac{2\pi \sin \Theta}{R}} e^{-jkR + j\pi/4}. \quad (98)$$

Подставляя (98) в (95), получаем:

$$f(R, \Theta, \Phi) = \frac{2je^{-jkR}}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(k \cos \Theta) e^{jn\Phi} j^n. \quad (99)$$

Также нам потребуются аналогичные выражения для двумерного случая (когда отсутствует зависимость поля от  $z$ ). При использовании скалярного вида поле на произвольном конечном расстоянии выражается как

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\varphi} H_n^{(2)}(kr). \quad (100)$$

При этом модальные коэффициенты можно определить через значения  $f$  на некоторой окружности радиуса  $r$  следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{2\pi H_n^{(2)}(kr)} \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \varphi) e^{-jn\varphi} d\varphi \quad (101)$$

Асимптотика поля в дальней зоне выражается формулой

$$f(r, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-jkr} e^{j\pi/4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\varphi} j^n. \quad (102)$$

Важной особенностью представлений (85), (91), (100) является возможность ограничить суммирование по  $n$  за счёт того, что моды с большим значением  $n$  затухают значительно быстрее при увеличении  $r$ , чем моды с малым  $n$  [49]. При этом граничным значением  $n$  является значение  $k\rho$ , где  $\rho$  – это радиус наименьшего цилиндра, охватывающего антенну. На практике суммирование по  $n$  обычно ограничивают величиной [54]

$$N = [k(\rho + \lambda)], \quad (103)$$

что обеспечивает достаточную точность для задач антенных измерений.

Учитывая ограничение (103), видно, что поле имеет ограниченный спектр по  $\varphi$ . Это свойство позволяет при вычислении модальных коэффициентов переходить от интегрирования по  $\varphi$  к суммированию, используя примерно  $2N$  отсчётов поля по  $\varphi$ .

Для дискретизации интегралов, определяющих модальные коэффициенты, по переменной  $z$  было предложено использовать свойство ограниченности пространственного спектра поля [52]. Это свойство может также использоваться и при дискретизации по переменной  $\varphi$ . Более подробно вопросы вычисления интегралов будут рассмотрены в следующих разделах.

### 3.2. Асимптотика в двумерном случае

Рассмотрим соотношения для определения ДН по измерениям в ближней зоне в двумерном случае. Геометрия задачи представлена на рис.18. На рисунке используются следующие обозначения:  $\rho$  – радиус минимального цилиндра, охватывающего антенну;  $r$  – радиус цилиндра, на котором измеряется поле;  $R$  – расстояние до точки, в которой восстанавливается поле;  $\varphi$  и  $\Phi$  – соответствующие полярные углы.

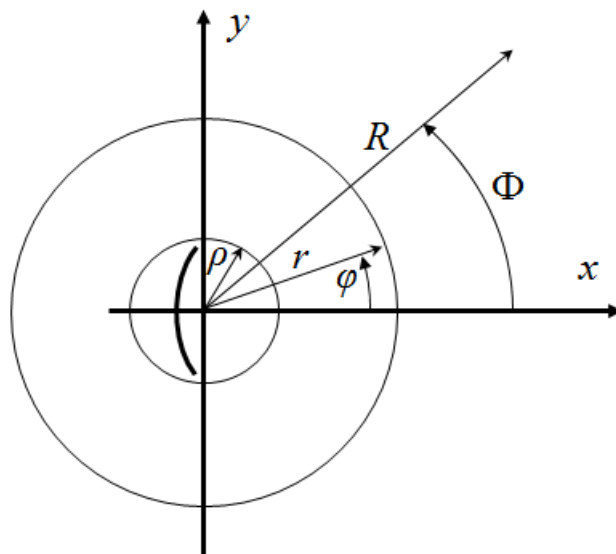


Рис.18. Геометрия задачи.

Вначале рассмотрим случай произвольного  $r > \rho$ , и затем определим асимптотику полученных выражений для больших  $r$ .

В известных работах (например, [16,50-52,54]) для определения ДН вначале определяются модальные коэффициенты (формулы (88) и (89) для трёхмерного случая), которые затем подставляются в формулу (90) для определения ДН. Прделаем эти же операции для двумерного случая.

Для определения модальных коэффициентов  $a_n$  необходимо вычислить интеграл (101). Проведём дискретизацию интеграла с учётом того, что модальными коэффициентами с индексом, большим (103), можно пренебречь. Рассмотрим отсчёты  $f$  по  $\varphi$  при фиксированном  $r$  с шагом по  $\varphi$ , равным

$$\Delta\varphi = 2\pi / (2N + 1). \quad (104)$$

Составим систему уравнений для определения  $a_n$ :

$$f(r, m\Delta\varphi) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{jmn\Delta\varphi} H_n^{(2)}(kr), m=-N...N. \quad (105)$$

Видно, что  $f$  определяется как дискретное преобразование Фурье (ДПФ) от  $a_n H_n^{(2)}(kr)$ , вследствие чего  $a_n$  могут быть определены с помощью обратного преобразования и деления на  $H_n^{(2)}(kr)$ :

$$a_n = \frac{\Delta\varphi}{2\pi H_n^{(2)}(kr)} \sum_{m=-N}^N f(r, m\Delta\varphi) e^{-jmn\Delta\varphi}. \quad (106)$$

Далее модальные коэффициенты, рассчитанные по (106), можно подставить в (102) и определить ДН. Однако для получения формул, аналогичных формулам из главы 2, нужно выразить поле в дальней зоне через отсчёты поля в ближней зоне. Для этого нужно подставить выражение (106) в (102) и перегруппировать выражение, выделив в нём отсчёты поля в ближней зоне. В более общем случае можно подставить (106) в (100) и определить поле в произвольной точке пространства по отсчётам поля в ближней зоне. Рассмотрим данный случай, т.е. будем полагать, что  $R$  – произвольное число большее  $\rho$ . Прделывая подстановку (106) в (100) и перегруппировку слагаемых, получаем:

$$f(R, \Phi) = \sum_{m=-N}^N k_m f(r, m\Delta\varphi), \quad (107)$$

где

$$k_m = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^{-jmn\Delta\varphi} e^{jn\Phi} \frac{H_n^{(2)}(kR)}{H_n^{(2)}(kr)}. \quad (108)$$

Теперь определим асимптотику полученного выражения для коэффициентов при больших  $r$  и  $R$ . Формально задачу можно определить следующим образом: нахождение асимптотики (108) при  $kr \rightarrow \infty$  и  $kR \rightarrow \infty$ . Однако при этом будут рассматриваться не только главные члены асимптотики, которые характеризовали бы только пересчёт поля между двумя поверхностями в дальней зоне, но и члены более высоких порядков.

Воспользуемся асимптотической формулой для функции Ханкеля, в которой выделяются амплитудная и фазовая составляющие [57]:

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( 1 + \frac{4n^2 - 1}{16x^2} + \dots \right) \times \\ \times \exp \left\{ -j \left( x - \left( \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} \right) \pi + \frac{4n^2 - 1}{8x} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 25)}{384x^3} + \dots \right) \right\}. \quad (109)$$

Для дальнейших выкладок будем использовать главный член этой асимптотики и первый поправочный член фазы:

$$H_n^{(2)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left\{ -j \left( x - \left( \frac{1}{2}n + \frac{1}{4} \right) \pi + \frac{4n^2 - 1}{8x} \right) \right\}. \quad (110)$$

Асимптотика (110) применима, когда отброшенные члены асимптотики (109) малы (т.е. первый отброшенный член амплитуды и первый отброшенный член фазы). Отброшенные члены должны быть малы при всех значениях  $n$ . Как было показано выше, максимальное значение  $n$  определяется по формуле (103). Таким образом, асимптотика (110) применима при выполнении условий:

$$\frac{4N^2 - 1}{16x^2} \approx \frac{D^2}{16r^2} \ll 1, \quad (111)$$

$$\frac{(4N^2 - 1)(4N^2 - 25)}{384x^3} \approx \frac{\pi D^4}{192\lambda r^3} \ll 1, \quad (112)$$

где  $D=2r$  – диаметр наименьшего цилиндра, охватывающего антенну.

Аналогичные условия должны выполняться и для расстояния  $R$ . (Заметим, что при  $r \approx R$  можно использовать менее строгие условия, т.к. в выражении (108) используется отношение функций Ханкеля, и требуется асимптотика именно отношения функций Ханкеля.)

Подставляем асимптотику (110) в выражение для коэффициентов (108):

$$k_m = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^{-jmn\Delta\varphi} e^{jn\Phi} \sqrt{\frac{r}{R}} \exp \left\{ -j \left( k(R-r) + \frac{4n^2-1}{8k} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right) \right\}. \quad (113)$$

Для вычисления полученного выражения воспользуемся формулой суммирования Пуассона:

$$k_m = \frac{1}{2N+1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-N-0.5}^{N+0.5} e^{-jmt\Delta\varphi} e^{-j2\pi pt} e^{jt\Phi} \sqrt{\frac{r}{R}} \times \\ \times \exp \left\{ -j \left( k(R-r) + \frac{4t^2-1}{8k} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right) \right\} dt. \quad (114)$$

Проведём замену переменной  $t=ks$  и вынесем постоянные множители из суммирования и интегрирования:

$$k_m = \frac{k}{2N+1} \sqrt{\frac{r}{R}} e^{-jk(R-r)} \exp \left\{ \frac{j}{8k} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right\} \times \\ \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jmk s \Delta\varphi} e^{-j2\pi p k s} e^{j k s \Phi} \exp \left\{ -j \left( \frac{4k^2 s^2}{8k} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right) \right\} ds, \quad (115)$$

где

$$T = \lambda / \Delta\varphi. \quad (116)$$

Заметим, что исходя из (104) и (103)  $T \approx D$ .

С учётом соотношений (104) и (116) формулу (115) можно преобразовать к следующему виду:

$$k_m = \sqrt{\frac{r}{R}} e^{-jk(R-r)} \exp \left\{ \frac{j}{8k} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right\} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \tilde{k}_{m+p(2N+1)}, \quad (117)$$

где

$$\tilde{k}_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-jm\frac{2\pi}{T}s} e^{jks\Phi} e^{j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)s^2} ds. \quad (118)$$

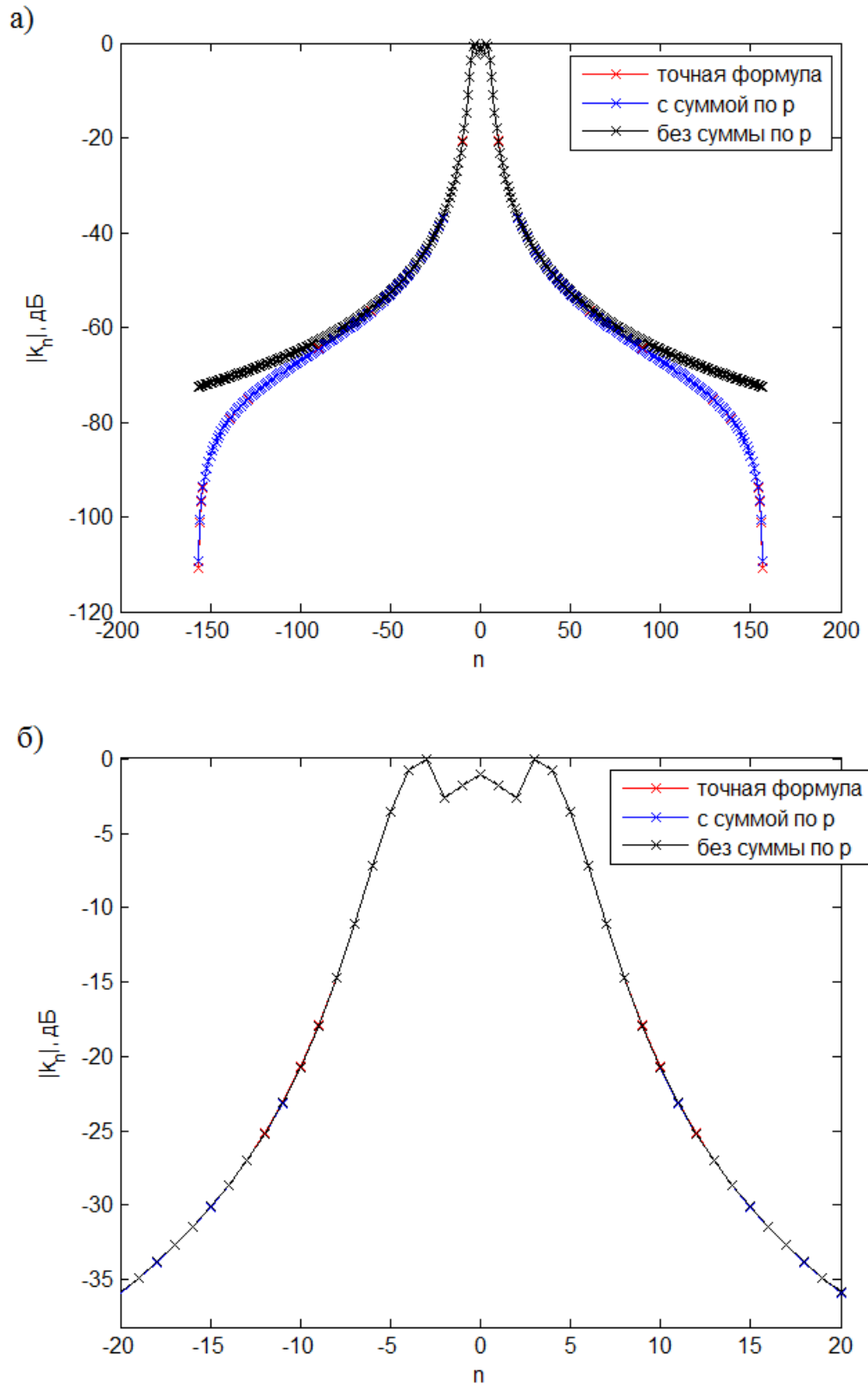
В выражении (117) имеется ряд отличий от соответствующих выражений из главы 2. Рассмотрим их.

Во-первых, в выражении присутствует корень из отношения расстояний, тогда как в главе 2 отношение расстояний было без корня. Это обстоятельство является следствием того, что в данном разделе рассматривается двумерная задача, и амплитуда поля спадает пропорционально корню из расстояния.

Во-вторых, в (117) присутствует фазовый множитель  $\exp\left\{\frac{j}{8k}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\right\}$ . Как нетрудно заметить, этим множителем можно пренебречь, поскольку подразумевается, что  $kr \gg 1$ . Например, уже при  $r=10\lambda$  этот множитель будет приводить к изменению фазы всего на  $0,1^\circ$ .

В-третьих, коэффициенты (117) определяются в виде ряда от интегралов (118), тогда как в выражении (48) участвовал только один интеграл. Это отличие также мало влияет на результат, т.к. коэффициенты (118) достаточно быстро спадают.

Приведём результаты расчётов коэффициентов для случая  $N=157$  ( $T \approx 50\lambda$ ),  $r=200\lambda$ ,  $kR \rightarrow \infty$  и  $\Phi=0$  по формулам (108) (точная формула), (117) (асимптотика с учётом суммирования по  $p$  – с учётом первых двадцати одного члена ряда) и (118) (асимптотика без учёта суммирования по  $p$ ).





Приведённые рисунки подтверждают сделанные ранее выводы о том, что из ряда по  $p$  в (117) можно использовать только первый член. При этом расхождение возникает при больших  $n$ , таких, что уровень  $k_n$  низкий и их можно не учитывать при восстановлении поля. Также заметим, что коэффициенты, посчитанные с помощью выражения (117), достаточно точно повторяют поведение коэффициентов, посчитанных с помощью точной формулы (108), даже при больших  $n$ .

Таким образом, асимптотика разложения по цилиндрическим функциям в двумерном случае совпадает с разложением, найденным с использованием приближения Кирхгофа.

Рассмотрим критерии применимости разложения. Условие (111), как нетрудно видеть, выполняется, если расстояние измерения по крайней мере равно диаметру антенны. Условие (112) эквивалентно условию (68), которое означает малость четвёртой степени разложения фазовой функции. Заметим, что в главе 2 это условие было получено при использовании параксиального приближения. Для формул, полученных в данном разделе, такого ограничения нет.

### ***3.3. Асимптотика в трёхмерном скалярном случае***

При рассмотрении трёхмерного случая будем использовать такую же схему, как и в двумерном случае. Вначале определим модальные коэффициенты через отсчёты поля в ближней зоне. Затем перегруппируем их, выделив весовые коэффициенты у отсчётов поля, и определим асимптотику этих коэффициентов при  $kr \rightarrow \infty$  [59]. В отличие от двумерного случая будем рассматривать задачу восстановления поля в дальней зоне, т.к. восстановление поля в произвольной точке (т.е. на конечном расстоянии) в трёхмерном случае приведёт к усложнению выкладок.

Для определения модальных коэффициентов воспользуемся методом, предложенным в работе [52]. Метод основывается на свойстве ограниченности пространственного спектра электромагнитного поля, возбуждённого источниками, занимающими ограниченный объём [60].

Будем считать, что источники электромагнитного поля находятся внутри сферы радиусом  $\rho$  (рис.20).

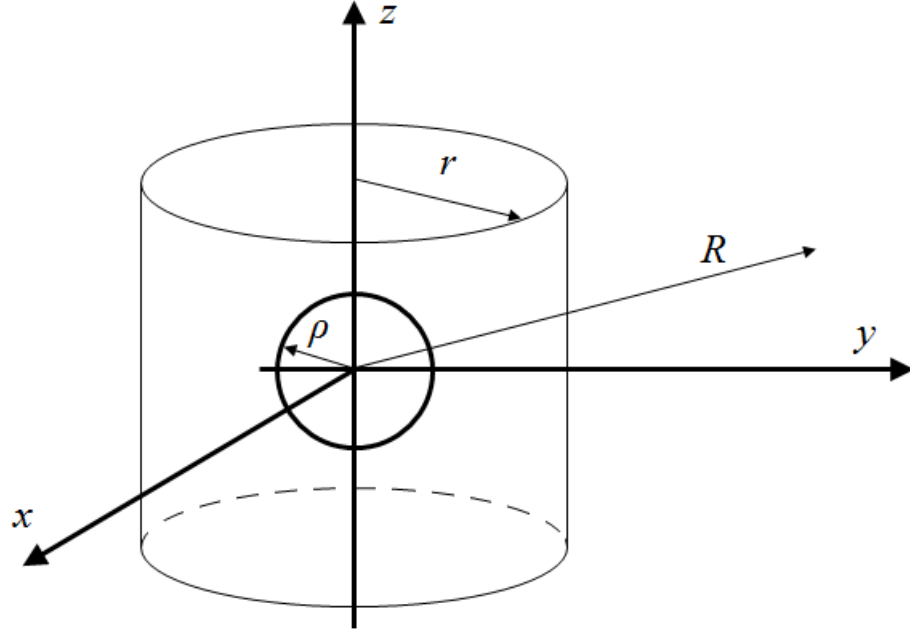


Рис.20. Геометрия задачи.

Следуя [52], выделим в поле  $f$  на цилиндре, на котором проводятся измерения, фазовый множитель  $e^{-jk\sqrt{r^2+z^2}}$ , введя функцию

$$g(\phi, z) = f(r, \phi, z)e^{jk\sqrt{r^2+z^2}}. \quad (119)$$

Согласно [60], функция (119) имеет практически ограниченный спектр по каждой из переменных, причём ширину спектра можно оценить как

$$W_\phi(z) = \chi k \rho / \sqrt{1 + (z/r)^2}, \quad (120)$$

$$W_z = \chi k \rho / r, \quad (121)$$

где  $\chi$  – это число немного больше единицы, определяющее точность аппроксимации функции (119) с помощью функций с ограниченным спектром.

Заметим, что для антенн, вытянутых в направлении  $z$  можно оценить спектр по  $\phi$  следующим образом:

$$W_\phi = \chi k \rho_{cyl}, \quad (122)$$

где  $\rho_{cyl}$  – радиус наименьшего цилиндра, охватывающего антенну.

По теореме Котельникова функция с ограниченным спектром может быть определена по своим отсчётам. Воспользуемся этим для представления функции по дискретным отсчётам по переменной  $z$ :

$$g(\phi, z) = \sum_{m=-M}^M g(\phi, z_m) \text{sinc}(W_z z - m\pi), \quad (123)$$

где  $z_m = m\Delta z = m\pi/W_z$ ,  $M = [LW_z/2\pi]$ ,  $L$  – длина цилиндра, на котором проводятся измерения,  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$  – функция отсчётов.

Заметим, что теоретически можно использовать более редкий шаг по  $z$  за счёт использования алгоритма интерполяции, учитывающего локальные изменения спектра функции  $g$  [61]. Шаг в районе  $z=0$  останется прежним, но будет увеличиваться при увеличении  $|z|$ .

Для представления  $g$  через дискретные отсчёты по переменной  $\phi$  разложим функцию  $g(\phi, z_m)$  в ряд Фурье:

$$g(\phi, z_m) = \sum_{n=-N_m}^{N_m} G_{mn} e^{jn\phi}, \quad (124)$$

где

$$G_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi, z_m) e^{-jn\phi} d\phi, \quad (125)$$

$$N_m \geq [W_\phi(z_m)]. \quad (126)$$

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при выводе формулы (106), проведём дискретизацию выражения (125):

$$G_{mn} = \frac{1}{2N_m + 1} \sum_{p=-N_m}^{N_m} g(\phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}}, \quad (127)$$

где  $\phi_{mp} = p\Delta\phi_m = 2\pi p/(2N_m + 1)$ .

Подставляя выражения (127) и (124) в (123), получаем формулу для выражения функции  $g$  по своим отсчётам:

$$g(\phi, z) = \sum_{m=-M}^M \text{sinc}(W_z z - m\pi) \frac{1}{2N_m + 1} \sum_{n=-N_m}^{N_m} e^{jn\phi} \sum_{p=-N_m}^{N_m} g(\phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}}. \quad (128)$$

Подставляя (128) в (119), можно определить функцию  $f$  через дискретные отсчёты функции  $g$ :

$$f(r, \phi, z) = e^{-jk\sqrt{r^2+z^2}} \sum_{m=-M}^M \text{sinc}(W_z z - m\pi) \frac{1}{2N_m + 1} \times \sum_{n=-N_m}^{N_m} e^{jn\phi} \sum_{p=-N_m}^{N_m} g(\phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}}. \quad (129)$$

Далее, отсчёты  $g(\phi_{mp}, z_m)$  также выражаются через отсчёты  $f(\phi_{mp}, z_m)$  по формуле (119), и в результате  $f$  определяется через свои отсчёты следующим образом:

$$f(r, \phi, z) = e^{-jk\sqrt{r^2+z^2}} \sum_{m=-M}^M \text{sinc}(W_z z - m\pi) \frac{1}{2N_m + 1} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \times \sum_{n=-N_m}^{N_m} e^{jn\phi} \sum_{p=-N_m}^{N_m} f(\phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}}. \quad (130)$$

Полученное выражение подставляется в выражение (92), определяющее модальные коэффициенты через значения  $f$  на цилиндрической поверхности:

$$a_l(h) = \frac{1}{4\pi^2 H_l^{(2)}(\Lambda r)} \sum_{m=-M}^M \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(W_z z - m\pi) e^{-jk\sqrt{r^2+z^2}} e^{jhz} dz \times \times \frac{1}{2N_m + 1} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \sum_{n=-N_m}^{N_m} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jl\phi} e^{jn\phi} d\phi \sum_{p=-N_m}^{N_m} f(\phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}}. \quad (131)$$

Вычислим интегралы, входящие в выражение (131). В силу ортогональности комплексных экспонент, интеграл по  $\phi$  равен

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jl\phi} e^{jn\phi} d\phi = 2\pi \delta_{nl}, \quad (132)$$

где  $\delta_{nl}$  - символ Кронекера.

Интеграл по  $z$ , входящий в (131), является преобразованием Фурье от произведения двух функций, поэтому его можно записать как свёртку преобразований Фурье этих функций. Преобразование Фурье функции  $\text{sinc}$  равно:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(W_z z - m\pi) e^{jhz} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{W_z} e^{-jmh\pi/W_z} \text{rect}\left(\frac{h}{2W_z}\right). \quad (133)$$

Преобразование Фурье второй функции может быть записано в виде [52]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jk\sqrt{r^2+z^2}} e^{jhz} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{kr}{\sqrt{k^2-h^2}} H_0^{(2)'} \left( r\sqrt{k^2-h^2} \right). \quad (134)$$

Применяя теорему о свёртке, интеграл по  $z$  (с учётом множителя  $1/2\pi$ ) записывается в виде:

$$\begin{aligned} I_{mh} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(W_z z - m\pi) e^{-jk\sqrt{r^2+z^2}} e^{jhz} dz = \\ &= \frac{kr}{4W_z} \int_{-W_z}^{W_z} \frac{H_0^{(2)'} \left( r\sqrt{k^2-(h-\tau)^2} \right)}{\sqrt{k^2-(h-\tau)^2}} e^{jm\pi\tau/W_z} d\tau. \end{aligned} \quad (135)$$

Учитывая выражения для интегралов (132) и (135) и заменяя индекс  $l$  на  $n$ , выражение (131) записывается в виде:

$$a_n(h) = \frac{1}{H_n^{(2)}(\Lambda r)} \sum_{m=-M_n}^{M_n} \frac{1}{2N_m+1} I_{mh} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \sum_{p=-N_m}^{N_m} f(r, \phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}}, \quad (136)$$

где  $M_n$  – это наибольший  $m$ , такой что  $N_m \geq |n|$ . Изменение пределов суммирования по  $m$  связано с тем, что при  $m > M_n$  интеграл по  $\phi$  (132) равен нулю при всех значениях индекса суммирования от  $-N_m$  до  $N_m$ . (Заметим, что величины  $N_m$  уменьшаются с ростом  $m$  в силу соотношений (120) и (126). Также заметим, что  $a_n=0$  при  $n > N_0$  в силу того, что (132) будет равен нулю для всех значений индекса суммирования.)

Теперь подставим выражение (136) в формулу (99), определяющую поле в дальней зоне через модальные коэффициенты, с учётом того, что суммирование по  $n$  может быть ограничено значением  $N_0$  (в силу сказанного выше):

$$\begin{aligned} f(R, \Theta, \Phi) &= \frac{2je^{-jkR}}{R} \sum_{n=-N_0}^{N_0} e^{jn\Phi} j^n \frac{1}{H_n^{(2)}(k \sin \Theta r)} \times \\ &\times \sum_{m=-M_n}^{M_n} \frac{1}{2N_m+1} I_{mh} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \sum_{p=-N_m}^{N_m} f(r, \phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}}. \end{aligned} \quad (137)$$

Изменим порядок суммирования в полученном выражении и вынесем сумму по  $n$  в отдельное выражение:

$$f(R, \Theta, \Phi) = \frac{j2e^{-jkR}}{R} \sum_{m=-M}^M I_{mh} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \sum_{p=-N_m}^{N_m} S_{mph\Phi} f(r, \phi_{mp}, z_m), \quad (138)$$

где

$$S_{mph\Phi} = \frac{1}{2N_m + 1} \sum_{n=-N_m}^{N_m} e^{jn\Phi} e^{-jn\phi_{mp}} j^n \frac{1}{H_n^{(2)}(\Lambda r)} \quad (139)$$

и  $h = k \cos \Theta$ ,  $\Lambda = k \sin \Theta$ .

Заметим, что при изменении порядка суммирования изменились пределы суммирования по  $m$  и  $n$ , что связано с тем, что исходный предел суммирования по  $m$  зависел от  $n$ .

Выражение (138) позволяет определить поле в дальней зоне по отсчётам поля в ближней зоне, причём коэффициенты пропорциональности выражаются через выражения (135) и (139). Теперь определим асимптотику полученных формул при  $kr \rightarrow \infty$ . Как и в предыдущем разделе, будем рассматривать главный член асимптотики и первые поправочные члены, чтобы выражение было применимо в зоне Френеля. Формально эти операции можно описать следующим образом: вначале найден главный член асимптотики при  $kR \rightarrow \infty$  (формулы (135), (138), (139)), после чего определяется асимптотика полученного выражения при  $kr \rightarrow \infty$  с учётом главного и первых поправочных членов по параметру  $kr$ .

Рассмотрим асимптотику выражения (139) при  $kr \rightarrow \infty$ . Асимптотика получена аналогично асимптотике формулы (108). Функция Ханкеля заменяется асимптотическим выражением (110). Условие применимости этой замены является малость следующих поправочных членов в амплитуде и фазе асимптотического разложения. Это условие отличается от условий (111) и (112), т.к. отличаются выражения, определяющие аргумент функции Ханкеля и максимальный  $n$ . С учётом этих отличий условия записываются в виде:

$$\frac{4N_m^2 - 1}{16(\Lambda r)^2} \approx \frac{D^2}{16r^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \Theta (1 + (z_m / r)^2)} \ll 1, \quad (140)$$

$$\frac{(4N_m^2 - 1)(4N_m^2 - 25)}{384(\Lambda r)^3} \approx \frac{\pi D^4}{192\lambda r^3} \cdot \frac{1}{\sin^3 \Theta (1 + (z_m / r)^2)^2} \ll 1. \quad (141)$$

Подставляя асимптотику функции Ханкеля в (139), получаем:

$$S_{mph\Phi} = \frac{1}{2N_m + 1} \sum_{n=-N_m}^{N_m} e^{-jn\phi_{mp}} e^{jn\Phi} \sqrt{\frac{\pi\Lambda r}{2}} e^{j\Lambda r} e^{-j\pi/4} \exp\left\{j\frac{4n^2 - 1}{8\Lambda r}\right\}. \quad (142)$$

Видно, что полученное выражение имеет такой же вид, как и (113). Для его вычисления также воспользуемся формулой суммирования Пуассона и проведём замену переменной интегрирования  $t = k \sin \Theta s$ , в результате чего получаем:

$$S_{mph\Phi} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_{p+(2N_m+1)l}, \quad (143)$$

где

$$S_p = \sqrt{\frac{\pi k \sin \Theta r}{2}} e^{jk \sin \Theta r} e^{-j/8k \sin \Theta r - j\pi/4} \frac{1}{T_{\phi, mh}} \int_{-T_{\phi, mh}/2}^{T_{\phi, mh}/2} e^{jks^2 \sin \Theta / 2r} e^{jks \sin \Theta \Phi} e^{-jps 2\pi / T_{\phi, mh}} ds, \quad (144)$$

$$T_{\phi, mh} = \frac{2N_m + 1}{k \sin \Theta} \approx \frac{\chi D}{\sin \Theta \sqrt{1 + (z_m / r)^2}}. \quad (145)$$

Полученное выражение обладает теми же свойствами, что и соответствующее выражение, полученное при решении двумерной задачи: в сумме (143) можно ограничиться только первым членом, а в выражении (144) можно пренебречь малым фазовым множителем  $e^{-j/8k \sin \Theta r}$ .

Перейдём к определению асимптотики выражения (135). Проведём замену переменной  $\tau = kt / r$  и введём обозначение

$$T_z = 2W_z r / k. \quad (146)$$

Подставляя (121) в (146), получаем

$$T_z = 2(\chi k \rho / r)r / k = 2\chi \rho = \chi D. \quad (147)$$

С учётом введённого обозначения и замены переменной, выражение (135) можно записать в виде

$$I_{mh} = \frac{k^2}{4W_z} \int_{-T_z/2}^{T_z/2} \frac{H_0^{(2)'}\left(r\sqrt{k^2 - (h - kt / r)^2}\right)}{\sqrt{k^2 - (h - kt / r)^2}} e^{jm 2\pi t / T_z} dt. \quad (148)$$

Воспользуемся следующим тождеством для производной функции Ханкеля  $H_0^{(2)'}(x) = -H_1^{(2)}(x)$ , и заменим функцию Ханкеля главным членом её асимптотического разложения (93):

$$H_1^{(2)}(r\sqrt{k^2 - (h - kt/r)^2}) \approx je^{j\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi r \sqrt{k^2 - (h - kt/r)^2}}} e^{-jr\sqrt{k^2 - (h - kt/r)^2}}. \quad (149)$$

Далее представим выражение  $\sqrt{k^2 - (h - kt/r)^2}$  в виде разложения в ряд Тейлора по переменной интегрирования  $t$ . Выделим основной член разложения, а также выпишем разложение до членов второго порядка:

$$\sqrt{k^2 - (h - kt/r_1)^2} \approx k \sin \Theta, \quad (150)$$

$$\sqrt{k^2 - (h - kt/r_1)^2} \approx k \sin \Theta + kt \operatorname{ctg} \Theta / r_1 - kt^2 / (2r_1^2 \sin^3 \Theta). \quad (151)$$

Разложение (151) будет использоваться в комплексной экспоненте из (149), а разложение (150) – в амплитудных множителях.

Рассмотрим условия применимости приближений (149)-(151). Для применимости (149) необходимо, чтобы первый отброшенный член разложения был мал, т.е.

$$\frac{4 \cdot 1^2 - 1}{8x} \approx \frac{3}{8kr \sin \Theta} \ll 1. \quad (152)$$

Поскольку рассматривается случай  $kr \gg 1$ , то условие (152) выполняется.

Для применимости (150) нужно, чтобы член с  $t$  (в первой степени) был много меньше основного члена (150) при наибольшем значении  $t$ , которое, как видно из (148) и (147), примерно равно  $D/2$ , т.е.

$$\frac{kt_{\max} \operatorname{ctg} \Theta / r_1}{k \sin \Theta} \approx \frac{D \cos \Theta}{2r \sin^2 \Theta} \ll 1. \quad (153)$$

Видно, что левая часть выражения (153) обращается в ноль при  $\Theta = \pi/2$  (т.е. при нулевом угле места), поэтому для  $\Theta \approx \pi/2$  применимость выражения (150) определяется условием малости следующего члена разложения по отношению к основному члену:



$$\frac{kt^2 / 2r^2 \sin^3 \Theta}{k \sin \Theta} \approx \frac{D^2}{8r^2} \ll 1. \quad (154)$$

Разложение (151) используется в комплексной экспоненте из (149), поэтому для его применимости член разложения с  $t^3$ , умноженный на  $r$ , должен быть мал по отношению к единице:

$$\frac{kr \cos \Theta t_{\max}^3}{2r^3 \sin^5 \Theta} \approx \frac{\pi \cos \Theta D^3}{8\lambda r^2 \sin^5 \Theta} \ll 1. \quad (155)$$

Левая часть выражения (155) также обращается в ноль при  $\Theta=\pi/2$ , поэтому для  $\Theta \approx \pi/2$  необходимо потребовать выполнения аналогичного условия для члена с  $t^4$ :

$$\frac{kr(\sin^4 \Theta + 6\cos^2 \sin^2 \Theta + 5\cos^4 \Theta)t_{\max}^4}{8r^4 \sin^8 \Theta} \approx \frac{\pi D^4}{64\lambda r^3} \ll 1. \quad (156)$$

Подставим приближения (150), (151) в формулу (149):

$$H_1^{(2)}(x) = je^{j\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr \sin \Theta}} e^{-jkr \sin \Theta} e^{-jkt \operatorname{ctg} \Theta} e^{jkt^2/2r \sin^3 \Theta}. \quad (157)$$

Далее, с учётом  $H_0^{(2)'}(x) = -H_1^{(2)}(x)$ , подставим (150) и (157) в (148):

$$I_{mh} = -\frac{k^2}{4W_z k \sin \Theta} \int_{-T_z/2}^{T_z/2} je^{j\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr \sin \Theta}} e^{-jkr \sin \Theta} e^{-jkt \operatorname{ctg} \Theta} e^{jkt^2/2r \sin^3 \Theta} e^{jm2\pi t/T_z} dt. \quad (158)$$

Подставляя (146) в (158), выражение записывается в виде:

$$I_{mh} = -e^{-jkr \sin \Theta} e^{j3\pi/4} \frac{1}{T_z} \sqrt{\frac{r}{2\pi k \sin^3 \Theta}} \int_{-T_z/2}^{T_z/2} e^{jkt^2/2r \sin^3 \Theta} e^{-jkt \operatorname{ctg} \Theta} e^{jmt2\pi/T_z} dt. \quad (159)$$

Далее выражения (143) (учитывая только первый член разложения) и (159) подставляются в (138), в результате чего получается окончательное выражение для поля в дальней зоне:

$$f(R, \Theta, \Phi) = \frac{re^{-jkR}}{R \sin \Theta} \sum_{m=-M}^M \sum_{p=-N_m}^{N_m} k_m^{(z)} k_{mp}^{(\phi)} f(r, \phi_{mp}, z_m), \quad (160)$$

где

$$k_m^{(z)} = e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \frac{1}{T_z} \int_{-T_z/2}^{T_z/2} e^{jkt^2/2r\sin^3\Theta} e^{-jkt\operatorname{ctg}\Theta} e^{jmt2\pi/T_z} dt, \quad (161)$$

$$k_{mp}^{(\phi)} = \frac{1}{T_{\phi,mh}} \int_{-T_{\phi,mh}/2}^{T_{\phi,mh}/2} e^{jks^2\sin\Theta/2r} e^{jks\sin\Theta\Phi} e^{-jps2\pi/T_{\phi,mh}} ds. \quad (162)$$

В выражении (161) можно перейти к интегрированию по  $(-t)$ , в результате чего выражение будет определяться как

$$k_m^{(z)} = e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \frac{1}{T_z} \int_{-T_z/2}^{T_z/2} e^{jkt^2/2r\sin^3\Theta} e^{jkt\operatorname{ctg}\Theta} e^{-jmt2\pi/T_z} dt. \quad (163)$$

Таким образом, поле в дальней зоне выражается через отсчёты поля в ближней зоне с весами, выражающимися через интегралы Френеля. При  $\Theta \approx \pi/2$  (т.е. при малом угле места) справедливо  $\sin\Theta \approx 1$ ,  $\operatorname{ctg}\Theta \approx \pi/2 - \Theta = \beta$ , и формулы для коэффициентов становятся аналогичными формуле (50) для восстановления ДН по измерениям на цилиндрической поверхности [32]. Формулы (162), (163) отличаются от формулы (48) дополнительным фазовым множителем  $e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}}$ , который, как было показано в главе 2, возникает из-за разности фазы поля на цилиндре и на сфере, вписанной в цилиндр. Как было показано в предыдущих разделах, коэффициенты (162), (163) достаточно быстро убывают, и в суммировании (160) можно отбросить слагаемые с малыми коэффициентами.

Заметим, что в (48) и в (50) полагалось, что шаг по  $\phi$  постоянен, тогда как в (160)-(163) шаг по  $\phi$  уменьшается при увеличении  $z$ . При желании иметь постоянный шаг по  $\phi$  можно выбрать значение  $N_m$  (учитывая условие (126)) постоянным и равным наибольшему значению  $[W_\phi(z_m)]$  при всех  $z$ , т.е.

$$N_m = N = [W_\phi(z_0)]. \quad (164)$$

Тогда значения  $\Delta\phi_m$  и  $T_{\phi,mh}$  также не будут зависеть от  $z$ :

$$\phi_p = p\Delta\phi = 2\pi p / (2N + 1), \quad (165)$$

$$T_{\phi,h} = \frac{2N + 1}{k \sin \Theta} \approx \frac{\chi D}{\sin \Theta}. \quad (166)$$

Выбрав равномерный шаг по  $\phi$ , выражение (160) может быть переписано в виде:

$$f(R, \Theta, \Phi) = \frac{re^{-jkR}}{R \sin \Theta} \sum_{m=-M}^M \sum_{p=-N}^N k_m^{(z)} k_p^{(\phi)} f(r, \phi_p, z_m), \quad (167)$$

где  $k_m^{(z)}$  определяется по формуле (163), а  $k_p^{(\phi)}$  - по следующей формуле:

$$k_p^{(\phi)} = \frac{1}{T_{\phi,h}} \int_{-T_{\phi,h}/2}^{T_{\phi,h}/2} e^{jks^2 \sin \Theta / 2r} e^{jks \sin \Theta \Phi} e^{-jps 2\pi / T_{\phi,h}} ds. \quad (168)$$

Заметим, что, если не ограничиваться случаем  $\Theta \approx \pi/2$ , коэффициенты (168) зависят от  $\Theta$ , что соответствует формуле (49) из предыдущей главы для восстановления ДН в направлении, где нельзя считать угол места малым. При использовании формул (160)-(163) и неравномерного шага по  $\phi$ , коэффициенты (162) зависят от  $\Theta$  и от  $z$ .

Возможность увеличивать шаг по  $\phi$  появляется вследствие того, что в данном разделе рассматривается случай, когда антенна находится внутри сферы диаметром  $D$ , тогда как в [32] рассматривалась прямоугольная излучающая апертура.

Рассмотрим критерий применимости полученной асимптотики. При получении асимптотики использованы условия (140), (141), (153)-(156). В условия (140), (153), (154) входит отношение диаметра антенны к радиусу цилиндра, и они выполняются, когда радиус цилиндра составляет несколько диаметров антенны.

Условие (155) соответствует критерию (25) с точностью до множителя  $\cos \Theta / \sin^5 \Theta$ . Этот множитель мал при  $\Theta \approx \pi/2$ , равен единице при  $\Theta \approx \pi/2 \pm \pi/6$  (т.е. для угла места  $\pm 30^\circ$ ), и быстро возрастает за пределами  $\Theta \approx \pi/2 \pm \pi/6$ . Таким образом, при выполнении условия (25) найденная асимптотика позволяет восстанавливать ДН для углов места  $\pm 30^\circ$ .

Поскольку при  $\Theta = \pi/2$  условие (155) выполняется независимо от значений других параметров, то для  $\Theta \approx \pi/2$  применимость асимптотики определяется оставшимися условиями - (141) и (156). Эти условия соответствуют условию

малости четвёртой степени разложения фазовой функции (68). Можно считать, что условие (68) определяет применимость асимптотики, пока левые части выражений (141) и (156) меньше левых частей оставшихся условий. Приравнявая левые части условий, получаем, что при выполнении (68) асимптотика позволяет восстанавливать ДН для углов  $\Theta \approx \pi/2 \pm D/8r$ .

### 3.4. Асимптотика в трёхмерном векторном случае

Определим асимптотику соотношений для восстановления ДН при использовании векторного разложения по цилиндрическим модам (85)-(90). Вывод асимптотики в целом совпадает с выводом в трёхмерном скалярном случае, поэтому будем обращать внимание только на отличия между ними. Согласно [60], азимутальная и  $z$ -компоненты поля также могут быть представлены с помощью функций с ограниченным спектром, аналогичных (119). Таким образом, выражение (130) также справедливо для азимутальной и  $z$ -компонент поля. Это выражение подставляется в выражения для модальных коэффициентов (88), (89), и проводятся преобразования, аналогичные преобразованиям из предыдущего раздела:

$$a_n(h) = \frac{1}{\Lambda H_n^{(2)'}(\Lambda r)} \left( \frac{nh}{r\Lambda^2} \sum_{m=-M_n}^{M_n} \frac{1}{2N_m+1} I_{mh} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \sum_{p=-N_m}^{N_m} E_z(\phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}} - \right. \\ \left. \sum_{m=-M_n}^{M_n} \frac{1}{2N_m+1} I_{mh} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \sum_{p=-N_m}^{N_m} E_\phi(\phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}} \right), \quad (169)$$

$$b_n(h) = \frac{k}{H_n^{(2)}(\Lambda r)\Lambda^2} \sum_{m=-M_n}^{M_n} \frac{1}{2N_m+1} I_{mh} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \sum_{p=-N_m}^{N_m} E_z(\phi_{mp}, z_m) e^{-jn\phi_{mp}}. \quad (170)$$

Видно, что выражение (170) совпадает с (136) с точностью до множителя  $k/\Lambda^2$ . Выражение (169) отличается тем, что в него входят две компоненты поля, и тем, что функция Ханкеля заменяется её производной.

Далее выражения для модальных коэффициентов подставляются в (90). Рассмотрим сначала  $\Theta$ -компоненту поля в дальней зоне. Как нетрудно видеть, выражение для  $\Theta$ -компоненты совпадает с выражением для декартовых

компонент с точностью до множителя, не зависящего от индексов суммирования. Таким образом, повторяя преобразования из предыдущего раздела, можно получить следующее выражение для  $\Theta$ -компоненты:

$$E_{\Theta}(R, \Theta, \Phi) = -\frac{re^{-jkR}}{R \sin^2 \Theta} \sum_{m=-M}^M \sum_{p=-N_m}^{N_m} k_m^{(z)} k_{mp}^{(\phi)} E_z(r, \phi_{mp}, z_m). \quad (171)$$

Видно, что выражение отличается от выражения из предыдущего раздела только множителем  $(-1/\sin\Theta)$ , который соответствует определению  $\Theta$ -компоненты через  $z$ -компоненту.

Теперь рассмотрим азимутальную компоненту. Повторяя рассуждения из предыдущего раздела, необходимо представить производную функции Ханкеля в виде асимптотического разложения. Выпишем разложения, аналогичные (109) и (110):

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n^{(2)}(x)}{\partial x} &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( 1 + \frac{4n^2 - 3}{16x^2} + \dots \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -j \left( x - \left( \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} \right) \pi + \frac{4n^2 + 3}{8x} + \frac{16n^4 + 184n^2 - 63}{384x^3} + \dots \right) \right\}, \end{aligned} \quad (172)$$

$$\frac{\partial H_n^{(2)}(x)}{\partial x} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left\{ -j \left( x - \left( \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} \right) \pi + \frac{4n^2 + 3}{8x} \right) \right\}. \quad (173)$$

Видно, что члены, отбрасываемые из асимптотики (172) при переходе к (173) имеют такие же значения с точностью до несущественных констант, как и отбрасываемые члены в выражении (109), что означает, что критерий применимости (172) такой же, как у (110). Отличия между (172) и (110) заключаются в изменении  $j\pi/4$  и  $j/8x$  на  $-j\pi/4$  и  $-3j/8x$  в аргументе экспоненты. Изменение  $j\pi/4$  на  $-j\pi/4$  компенсируется тем, что в выражении для азимутальной компоненты в (90) отсутствует множитель  $j$ . Изменение  $j/8x$  на  $-3j/8x$  не повлияет на результат, т.к. этот член приводит к появлению малого фазового множителя, которым, как было показано ранее, можно пренебречь.

Для вычисления азимутальной компоненты поля в дальней зоне модальные коэффициенты (169) и асимптотика (173) подставляются в выражение для

азимутальной компоненты из (90), после чего меняется порядок суммирования. Полученное выражение состоит из двух частей –  $\phi$ - и  $z$ -компонент ближнего поля. Нетрудно видеть, что выражение с  $\phi$ -компонентой ближнего поля аналогично выражению из предыдущего раздела и в результате преобразований оно принимает вид (160). Выражение с  $z$ -компонентой отличается тем, что в суммировании появляется множитель  $nh/r\Lambda^2$ , зависящий от индекса суммирования  $n$ , вследствие чего результат будет отличаться от (160). Проведём соответствующие вычисления. Подставляя слагаемые с  $z$ -компонентой из (169) в выражение для азимутальной компоненты из (90) и изменяя порядок суммирования, получаем:

$$E_{\Phi,z}(R, \Theta, \Phi) = \frac{-2e^{-jkR}}{R} \frac{\cos \Theta}{rk \sin^2 \Theta} \sum_{m=-M}^M I_{mh} e^{jk\sqrt{r^2+z_m^2}} \times \sum_{p=-N_m}^{N_m} E_z(\phi_{mp}, z_m) \frac{1}{2N_m+1} \sum_{n=-N_m}^{N_m} j^n e^{jn\Phi} (H_n^{(2)'}(\Lambda r))^{-1} n e^{-jn\phi_{mp}}. \quad (174)$$

Выделяем множитель у  $E_z$  в суммировании по  $p$  в отдельное выражение, аналогичное (139):

$$S_{mph\Phi}^{\Phi,z} = \frac{1}{2N_m+1} \sum_{n=-N_m}^{N_m} n e^{jn\Phi} e^{-jn\phi_{mp}} j^n (H_n^{(2)'}(\Lambda r))^{-1}. \quad (175)$$

Видно, что полученное выражение отличается от (139) наличием множителя  $n$  в суммировании. Для вычисления этого выражения также воспользуемся формулой суммирования Пуассона. Проводя преобразования, аналогичные преобразованиям из предыдущего раздела, получаем:

$$S_{mph\Phi}^{\Phi,z} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} S_{p+(2N_m+1)l}^{\Phi,z}, \quad (176)$$

где

$$S_p^{\Phi,z} = \sqrt{\frac{\pi k^3 \sin^3 \Theta r}{2}} e^{jk \sin \Theta r} e^{3j/8k \sin \Theta r + j\pi/4} \times \frac{1}{T_{\phi,mh}} \int_{-T_{\phi,mh}/2}^{T_{\phi,mh}/2} s e^{jks^2 \sin \Theta/2r} e^{jks \sin \Theta \Phi} e^{-jps 2\pi/T_{\phi,mh}} ds. \quad (177)$$

По аналогии с предыдущим разделом, пренебрегаем фазовым множителем  $e^{3j/8k \sin \Theta r}$ , близким к единице, и ограничиваемся только первым членом суммы (176). Далее полученное выражение и выражение (159) подставляются в (174), в результате чего определяется зависимость азимутальной компоненты поля в дальней зоне от  $z$ -компоненты поля в зоне Френеля. Объединяя этот результат с полученным ранее результатом для зависимости азимутальной компоненты поля в дальней зоне от азимутальной компоненты поля в зоне Френеля, получаем окончательное выражение:

$$E_{\Phi}(R, \Theta, \Phi) = \frac{re^{-jkR}}{R \sin \Theta} \sum_{m=-M}^M \sum_{p=-N_m}^{N_m} \left( k_m^{(z)} k_{mp}^{(\phi)} E_{\phi}(r, \phi_{mp}, z_m) + k_m^{(z)} k_{mp}^{(\phi, z\Phi)} E_z(r, \phi_{mp}, z_m) \right), \quad (178)$$

где

$$k_{mp}^{(\phi, z\Phi)} = -\frac{\cos \Theta}{r \sin \Theta} \frac{1}{T_{\phi, mh}} \int_{-T_{\phi, mh}/2}^{T_{\phi, mh}/2} s e^{jks^2 \sin \Theta/2r} e^{jks \sin \Theta \Phi} e^{-jps 2\pi/T_{\phi, mh}} ds. \quad (179)$$

Видно, что зависимость азимутальной компоненты поля в дальней зоне от азимутальной компоненты поля в зоне Френеля совпадает с зависимостью, полученной в предыдущем разделе. Однако, в отличие от  $\Theta$ -компоненты, здесь появляется зависимость от второй компоненты поля в ближней зоне с коэффициентами (163) и (179).

Рассмотрим коэффициенты (179). Как нетрудно видеть, эти коэффициенты могут быть выражены через интегралы Френеля и комплексные экспоненты (для этого необходимо провести интегрирование по частям). Поскольку переменная интегрирования  $s$  имеет порядок  $\rho = D/2$ , а комплексные экспоненты в выражении (179) совпадают с комплексными экспонентами из (162), то отношение этих выражений можно оценить как  $\rho \cos \Theta / r \sin \Theta$ . Отсюда видно, что зависимостью азимутальной компоненты дальнего поля от  $z$ -компоненты поля в зоне Френеля можно пренебречь, когда  $\Theta \approx \pi/2$  (т.е. при малом угле места), либо когда радиус цилиндра значительно превосходит размер измеряемой антенны  $r \gg \rho$ .

### 3.5. Соотношения для измерений на сфере

Применим подход, использованный в предыдущих разделах для измерений на цилиндрической поверхности, к случаю, когда измерения проводятся на сфере. Наиболее распространённый способ определения ДН по измерениям в ближней зоне на сфере основывается на использовании разложения поля по собственным модам волнового уравнения в сферической системе координат [53]. При этом угловой шаг между отсчётами поля составляет около  $\lambda/D$ .

Рассмотрим данную задачу для скалярного случая (для произвольной декартовой компоненты поля). В этом случае поле в произвольной точке пространства вне минимальной сферы, охватывающей антенну, представляется в виде [53,62]:

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{mn} \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) e^{jm\varphi} h_n^{(2)}(kr), \quad (180)$$

где  $\bar{P}_n^{|m|}(x)$  – нормированные присоединённые полиномы Лежандра [53],  $h_n^{(2)}(x)$  – сферические функции Ханкеля 2 рода,  $a_{mn}$  – модальные коэффициенты.

Суммирование по  $n$  на практике можно ограничить максимальным значением  $n$ , равным примерно  $N = [k(\rho + \lambda)]$ , где  $\rho$ , как и прежде, – радиус наименьшей сферы, охватывающей антенну. Такое представление можно использовать для поля в произвольной точке пространства, находящейся вне наименьшей сферы, охватывающей антенну, и не ближе нескольких длин волн от неё [49].

Проведём следующие выкладки. Сначала выразим коэффициенты  $a_{mn}$  через отсчёты поля на сфере радиусом  $r_1$  в ближней зоне, после чего подставим эти коэффициенты в (180) для произвольной точки  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  и, перегруппировав выражение, получим поле в произвольной точке пространства как линейную комбинацию отсчётов поля в ближней зоне. Поле в дальней зоне можно определить, устремив  $r_2$  к бесконечности. (Рассмотрение поля в произвольной точке пространства, как будет видно из дальнейших выкладок, не приводит к усложнению формул по сравнению со случаем, когда рассматривается задача восстановления поля только в дальней зоне.)



Для определения коэффициентов  $a_{mn}$  воспользуемся методом, изложенным в [53], принимая во внимание то, что рассматривается скалярная задача без учёта направленных свойств вспомогательной антенны. Сгруппируем (180) в следующем виде, учитывая, что суммирование по  $n$  ограничено значениями  $\pm N$  (вследствие чего суммирование по  $m$  также ограничено значениями  $\pm N$ ):

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=-N}^N f_m(r, \theta) e^{jm\varphi}, \quad (181)$$

где

$$f_m(r, \theta) = \sum_{n=|m|}^N a_{mn} \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) h_n^{(2)}(kr). \quad (182)$$

Из (181) видно, что  $f_m$  – это коэффициенты разложения функции  $f$  в ряд Фурье по  $\varphi$ , поэтому:

$$f_m(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta, \varphi) e^{-jm\varphi} d\varphi. \quad (183)$$

Рассматривая  $f$  как функцию от  $\varphi$ , видно, что она определяется конечным числом членов ряда Фурье. Используя результаты, полученные для таких функций в предыдущих разделах, можно записать  $f_m$  через дискретные отсчёты следующим образом:

$$f_m(r, \theta) = \frac{1}{N_\varphi} \sum_{p=0}^{N_\varphi-1} f(r, \theta, p\Delta\varphi) e^{-jmp\Delta\varphi}, \quad (184)$$

где  $N_\varphi \geq 2N+1$ ,  $\Delta\varphi = 2\pi/N_\varphi$ .

Далее задача сводится к решению системы (182) относительно  $a_{mn}$ . Для этого воспользуемся ортогональностью присоединённых полиномов Лежандра. Умножим правую и левую части (182) на присоединённый полином Лежандра и  $\sin\theta$  и проинтегрируем:

$$a_{mn} h_n^{(2)}(kr) = \int_0^\pi f_m(r, \theta) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (185)$$

Для перехода от интеграла к дискретной сумме воспользуемся свойством ограниченности спектра присоединённых полиномов Лежандра как функций от  $\theta$

(это следует из того, что присоединённые полиномы Лежандра выражаются как конечная линейная комбинация  $\sin n_i \theta$  и  $\cos n_i \theta$  [56]). Функции  $f_m$  выражаются как линейная комбинация присоединённых полиномов Лежандра (182), поэтому у них также сохраняется свойство ограниченности спектра. Однако согласно формуле (184) функции  $f_m$  определены по переменной  $\theta$  только на интервале  $(0, \pi)$ .

В [53] функции  $f_m$  доопределяются на  $(\pi, 2\pi)$ , после чего переход от интеграла к сумме становится точным. Такой подход удобен при вычислении  $a_{mn}$ , но он приводит к усложнению выражения для поля в дальней зоне через отсчёты в ближней зоне, что в данном случае нежелательно, т.к. целью является получение асимптотики в зоне Френеля. В связи с этим воспользуемся приближённым подходом, предложенным в работе [63], и приводящим к упрощению формул по сравнению с [53]. Суть подхода в том, что подынтегральная функция (185) может быть чётным образом продолжена на  $(-\pi, 0)$ . Тогда она будет иметь «почти» ограниченный спектр, и замена интегрирования суммированием будет вносить незначительную ошибку:

$$a_{mn} h_n^{(2)}(kr) \approx \frac{\pi}{N_\theta} \sum_{q=1}^{N_\theta-1} f_m(r, q\Delta\theta) \bar{P}_n^{|m|}(\cos q\Delta\theta) \sin q\Delta\theta. \quad (186)$$

где  $N_\theta \geq N+1$ ,  $\Delta\theta = \pi / N_\theta$ . В суммировании не участвуют крайние точки, т.к. в них всё равно синус равен нулю.

(Отметим, что сделанное приближение из работы [63] влияет на результаты очень незначительно. При использовании точных и более громоздких формул из работы [53] все сделанные ниже выводы остаются верными, что подтверждается результатами проведённого численного моделирования.)

Таким образом, с помощью формул (184) и (186) можно определить коэффициенты  $a_{mn}$  исходя из отсчётов поля в дискретной сетке углов.

Далее будем использовать выражение (186) для того, чтобы определить поле в произвольной точке  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  через линейную комбинацию отсчётов поля на сфере радиусом  $r_1$ . Подставим (186) в (180) с учётом (184):

$$f(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \left( \frac{\pi}{N_\theta} \sum_{q=1}^{N_\theta-1} \left( \frac{1}{N_\varphi} \sum_{p=0}^{N_\varphi-1} f(r_1, q\Delta\theta, p\Delta\varphi) e^{-jmp\Delta\varphi} \right) \times \right. \\ \left. \times \bar{P}_n^{|m|}(\cos q\Delta\theta) \sin q\Delta\theta \right) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta_2) e^{jm\varphi_2} h_n^{(2)}(kr_2) / h_n^{(2)}(kr_1). \quad (187)$$

Перегруппируем выражение, выделив отсчёты поля на сфере радиусом  $r_1$ :

$$f(r_2, \theta_2, \varphi_2) = \frac{\pi}{N_\theta N_\varphi} \sum_{q=1}^{N_\theta-1} \sum_{p=0}^{N_\varphi-1} f(r_1, q\Delta\theta, p\Delta\varphi) \times \\ \times \left( \sin q\Delta\theta \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n e^{-jmp\Delta\varphi} \bar{P}_n^{|m|}(\cos q\Delta\theta) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta_2) e^{jm\varphi_2} h_n^{(2)}(kr_2) / h_n^{(2)}(kr_1) \right). \quad (188)$$

Таким образом, коэффициенты разложения определяются по формуле

$$k_{pq} = \frac{\pi}{N_\theta N_\varphi} \sin q\Delta\theta \times \\ \times \sum_{n=0}^N \left( h_n^{(2)}(kr_2) / h_n^{(2)}(kr_1) \right) \sum_{m=-n}^n e^{-jmp\Delta\varphi} \bar{P}_n^{|m|}(\cos q\Delta\theta) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta_2) e^{jm\varphi_2}. \quad (189)$$

Поскольку присоединённые полиномы Лежандра имеют индексы  $m$  и  $n$ , то суммирование по  $m$  и  $n$  не разделяется, и коэффициенты не могут быть представлены в виде произведения  $k_{pq} = k_{(m)}k_{(n)}$ . Нахождение асимптотики выражения (189) является трудоёмкой задачей. Однако можно проанализировать это выражение и сравнить его с коэффициентами (48) с помощью численных методов.

Вначале рассмотрим случай  $r_1=r_2$ , т.е. задачу интерполяции поля на сфере по отсчётам в дискретной сетке углов. В этом случае коэффициенты определяются по формуле

$$k_{pq} = \frac{\pi}{N_\theta N_\varphi} \sin q\Delta\theta \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n e^{-jmp\Delta\varphi} \bar{P}_n^{|m|}(\cos q\Delta\theta) \bar{P}_n^{|m|}(\cos \theta_2) e^{jm\varphi_2}. \quad (190)$$

Заметим, что коэффициенты не меняются в зависимости от радиуса сферы, на которой проводится интерполяция поля.

Построим зависимость  $k_{pq}$  от  $p$  для  $\theta_2=90^\circ$ ,  $\varphi_2=0^\circ$  и  $\rho=25\lambda$  (рис.21).

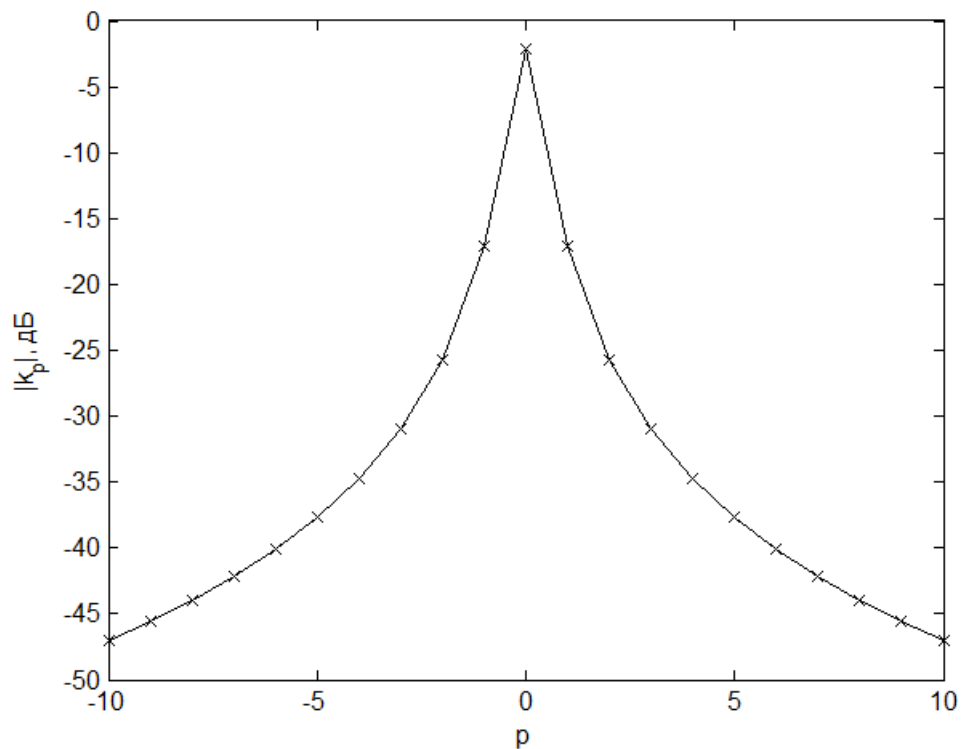


Рис.21. Коэффициенты для интерполяции поля (зависимость от  $p$ ).

Поведение коэффициентов для интерполяции поля, показанных на данном рисунке отличается от поведения коэффициентов для интерполяции поля, определённых в главе 2: рассматривая коэффициенты (48) для задачи интерполяции поля при  $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0$ , нетрудно видеть, что коэффициент  $k_{00}$  равен единице, а остальные коэффициенты равны нулю.

Далее сравним коэффициенты (189) и (48), проведя восстановление ДН зеркальной антенны, рассмотренной в главе 2 (диаметр 1,5 м, частота 10 ГГц). Для восстановления ДН используется один и тот же набор отсчётов поля в зоне Френеля, но разные коэффициенты разложения – (189) и (48).

Рассмотрим случаи  $r_1=30$  м и  $r_1=10$  м. Ниже приведены графики с коэффициентами разложения и центральными сечениями поля в дальней зоне (восстановленные ДН и расчётная ДН) и в зоне Френеля.

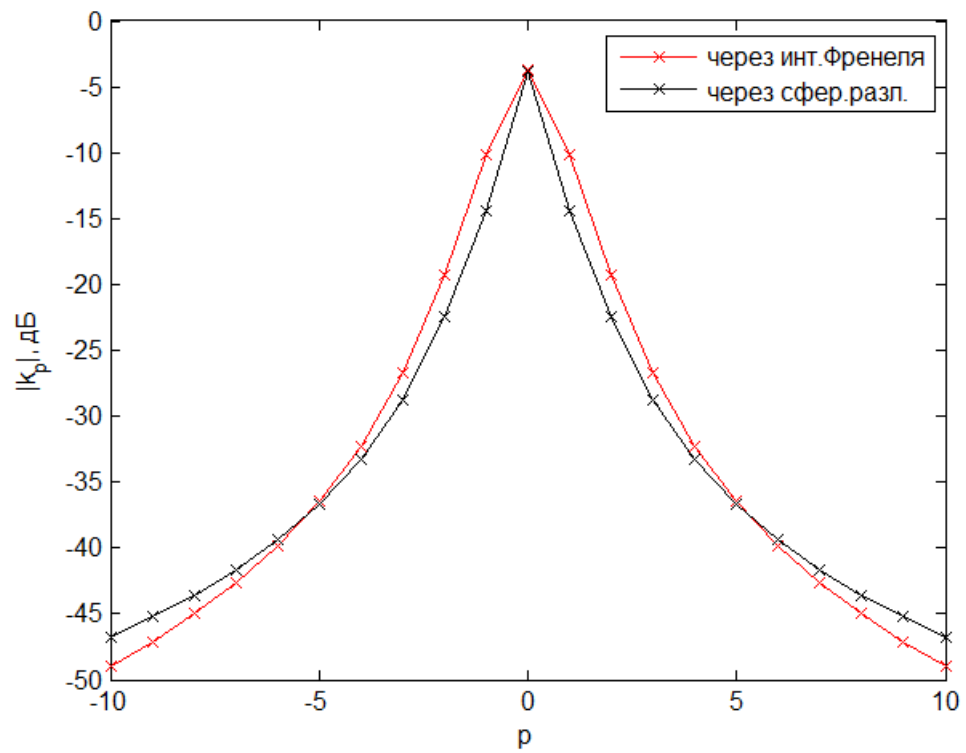


Рис.22. Коэффициенты в азимутальной плоскости,  $r_1=30$  м.

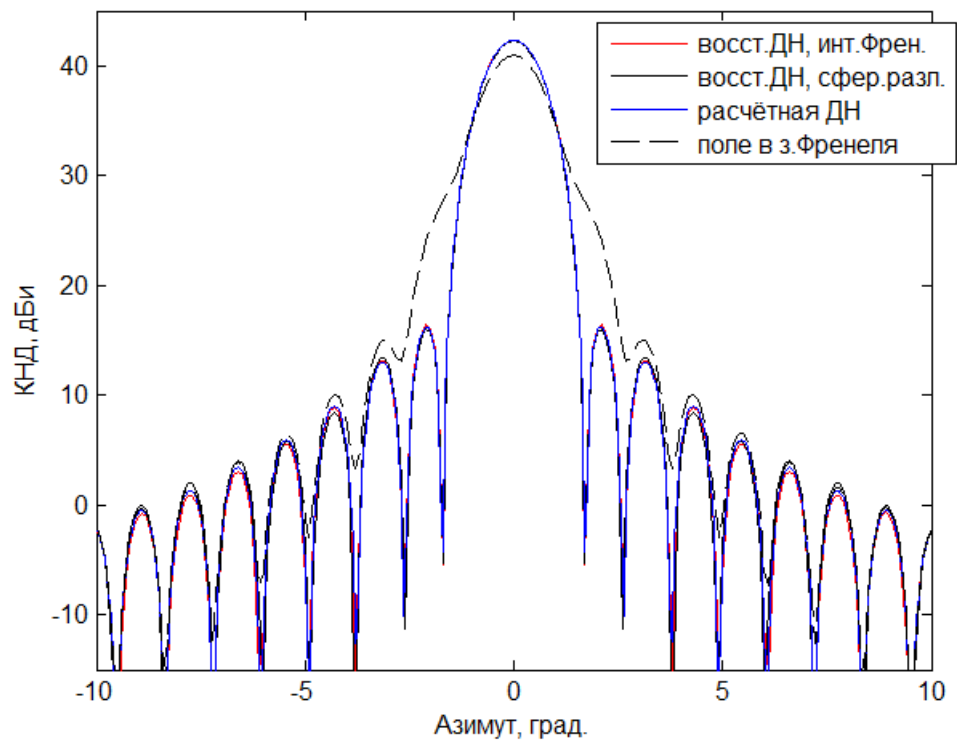


Рис.23. Сравнение восстановленных ДН и расчётной ДН,  $r_1=30$  м.

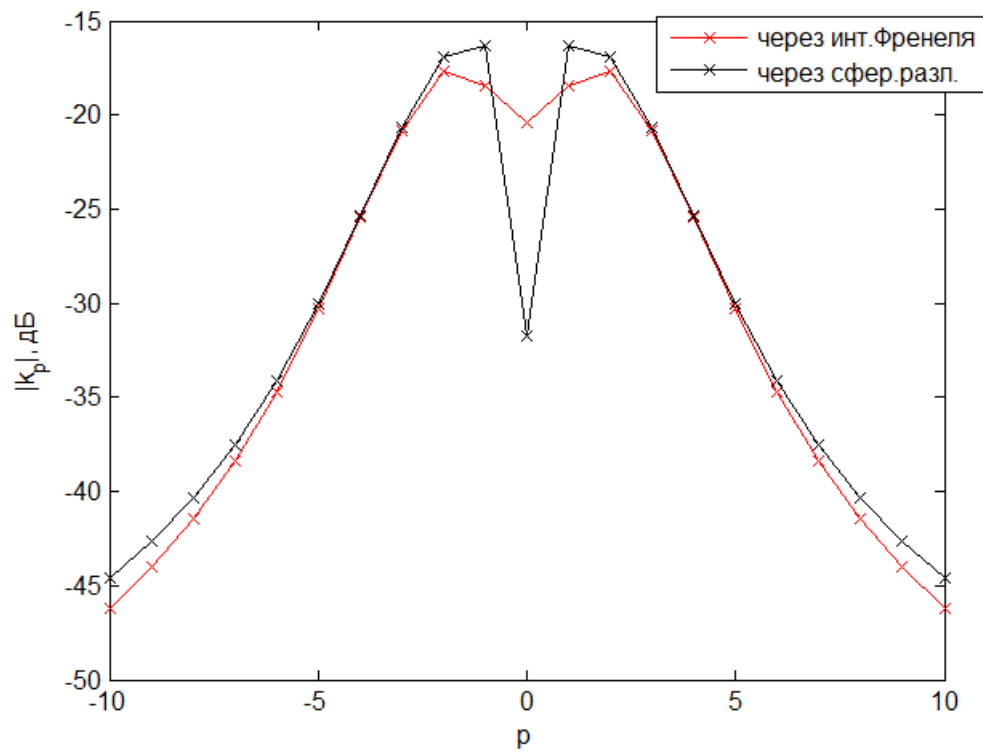


Рис.24. Коэффициенты в азимутальной плоскости,  $r_1=10$  м.

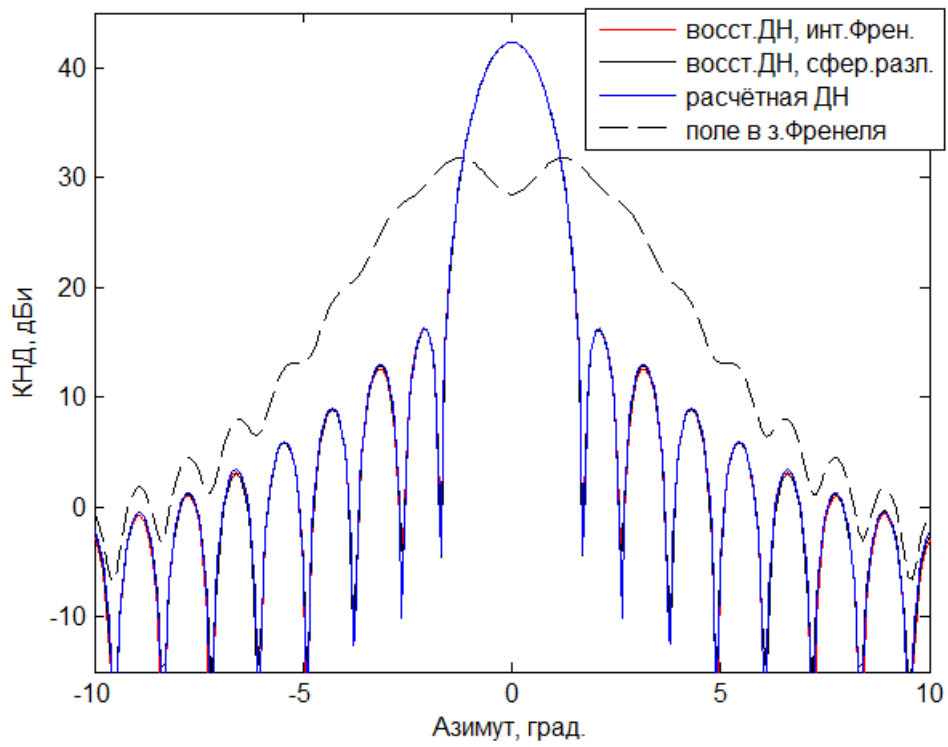


Рис.25. Сравнение восстановленных ДН и расчётной ДН,  $r_1=10$  м.

Как видно из рис.22 и 24, коэффициенты (189) и (48) существенно отличаются, т.е. (48) не являются асимптотикой (189). Однако оба набора коэффициентов позволяют по одному и тому же набору данных в зоне Френеля восстановить ДН с хорошей точностью (ошибка определения уровня первых боковых лепестков составила менее 0,2 дБ во всех случаях). Из этого следует, что набор отсчётов поля в зоне Френеля, определённый с шагом  $\Delta\theta, \Delta\varphi \approx \lambda/D$ , обладает некоторой избыточностью, т.е. отсчёты поля не являются линейно независимыми.

### **3.6. Выводы**

В данной главе рассмотрен метод восстановления ДН по измерениям на цилиндрической поверхности в ближней зоне. Найдена асимптотика соотношений для восстановления ДН при увеличении радиуса цилиндра до размеров, соответствующих критерию зоны Френеля. Показано, что асимптотика совпадает с формулами для восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля, полученными в главе 2. В частности, это означает, что при проведении измерений в зоне Френеля метод измерения на разреженной сетке углов требует такого же объёма измерений, что и метод измерения в ближней зоне, но первый имеет более простые соотношения. Также уточнён критерий применимости соотношений для восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля.

Рассмотрены соотношения для восстановления ДН по измерениям на сфере в ближней зоне и с помощью численного моделирования показано, что формулы из главы 2 не являются асимптотикой этих соотношений. Последнее обстоятельство представляет интерес с теоретической точки зрения.

## Глава 4. Практические аспекты применения метода

В данной главе рассматриваются вопросы практического применения метода восстановления ДН по измерениям в зоне Френеля на разреженной сетке углов. Предложен способ определения энергетических характеристик антенны. Рассмотрены методы учёта параллакса и методы определения ДН как функции двух переменных (т.е. не только центрального сечения ДН). Определено минимальное необходимое число измеряемых сечений поля в зоне Френеля. Проведена оценка ошибки восстановления. Рассмотрен измерительный стенд ОАО «Радиофизика» и приведены результаты экспериментов по проверке метода и результаты измерений ДН антенн с помощью данного метода.

### 4.1. Определение энергетических характеристик

Полученные в предыдущих главах формулы позволяют вычислить поле в дальней зоне антенны с учётом нормировки, т.е. позволяют определить такие характеристики как коэффициент усиления (КУ) и эквивалентную изотропно излучаемую мощность (ЭИИМ). О возможности определения КУ сказано в [32], однако пригодных для практического применения формул в данной работе не приводится.

Проведём ряд преобразований для определения энергетических характеристик через измеряемые величины. Выразив вектор Пойнтинга в дальней зоне как  $\Pi = |E|^2 / (240\pi)$ , можно определить КУ антенны:

$$G(u, v) = \frac{4\pi r_2^2 \Pi}{P} = \frac{|E(u, v, r_2)|^2 r_2^2}{60P}, \quad (191)$$

где  $P$  – мощность, подведённая к антенне. Также здесь полагается, что  $r_2 \rightarrow \infty$ .

Подставляя (42) в (191), имеем [43,44]:

$$G(u, v) = \frac{\left| r_1 \sum_{m,n} k_{mn} E(u_1 + m\Delta u, v_1 + n\Delta v, r_1) \right|^2}{60P}. \quad (192)$$



В формулах (191), (192) символом  $E$  обозначена амплитуда поля на интересующей поляризации, выраженная в В/м,  $P$  – мощность в ваттах. Поскольку на практике удобнее измерять поле в относительных единицах, для калибровки поля можно использовать вспомогательную эталонную антенну с известным КУ.

Для этого проще использовать такую антенну, расстояние дальней зоны для которой не превышает  $r_1$ . В этом случае необходимо наряду с испытуемой антенной использовать эталонную антенну, позиционируя её таким образом, чтобы направление на измерительный зонд соответствовало максимуму её ДН. После этого измеряется амплитуда поля  $E$ , возбуждаемого на измерительном зонде испытуемой антенной, нормируемая относительно амплитуды  $E_0$ , соответствующей возбуждению эталонной антенной. Тогда угловая зависимость КУ испытуемой антенны будет выражаться следующим образом:

$$G(u, v) = \frac{P_0 G_0}{P} \left| \frac{1}{E_0} \sum_{m,n} k_{mn} E(u + m\Delta u, v + n\Delta v, r_1) \right|^2, \quad (193)$$

где  $P_0$ ,  $G_0$ , – входная мощность и КУ вспомогательной антенны,  $E/E_0$  – измеренное относительное значение поля.

В случае если испытуемая антенна является активной и измерить мощность нельзя, можно определить ЭИИМ антенны:

$$PG(u, v) = P_0 G_0 \left| \frac{1}{E_0} \sum_{m,n} k_{mn} E(u + m\Delta u, v + n\Delta v, r_1) \right|^2. \quad (194)$$

Формулы (193), (194) записаны для случая, когда испытуемая антенна работает на передачу. Аналогичную формулу для КУ можно записать и для случая, когда антенна работает на приём (согласно принципу взаимности, измерения можно проводить и на приём, и на передачу). В этом случае КУ выражается следующим соотношением:

$$G(u, v) = G_0 \left| \frac{1}{E_0} \sum_{m,n} k_{mn} E(u + m\Delta u, v + n\Delta v, r_1) \right|^2. \quad (195)$$

Для приёмной активной антенны также можно определить отношение  $G/T$  [64]:

$$\frac{G(u, v)}{T} = \frac{4\pi k \Delta f}{\lambda^2} \frac{4\pi r_1^2}{P_t G_t} \frac{1}{2N} \left| \sum_{m,n} k_{mn} E(u + m\Delta u, v + n\Delta v, r_1) \right|^2, \quad (196)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $\Delta f$  – эффективная ширина диапазона,  $P_t$  и  $G_t$  – мощность и КУ вспомогательной антенны,  $N$  – мощность шумов, принятых испытываемой антенной.

Заметим, что при использовании последнего соотношения нужно учитывать, что распределение яркостной температуры при проведении измерений может отличаться от распределения в рабочих условиях. Например, если при измерениях максимум ДН направлен на вспомогательную антенну, расположенную вблизи линии горизонта, то влияние шумов земли велико, тогда как при ориентации максимума ДН той же антенны в направления, близкие к зениту, указанные шумы оказывают существенно меньшее влияние. Ещё хуже обстоит дело при измерениях в БЭК, все поверхности которой имеют яркостную температуру около 300 К, что существенно выше, чем при работе в условиях открытого неба. Вследствие этого измерения  $G/T$  в БЭК по указанной методике не проводятся.

#### **4.2. Несовпадение центра апертуры и центра вращения**

Рассмотрим ситуацию, когда центр вращения антенны на ОПУ не совпадает с центром апертуры антенны, что достаточно часто возникает на практике в связи с особенностями механизмов крепления антенн. Применение формул, полученных в предыдущих главах, в данном случае приведёт к значительным ошибкам при восстановлении ДН. Основные способы решения данной проблемы были рассмотрены в работе [31]. Проведём более подробный анализ предложенных в [31] способов, с использованием более строгих обоснований и приводя условия применимости предложенных подходов.

### *Сдвиг центра вращения в направлении нормали к апертуре*

Рассмотрим случай, когда центр вращения сдвинут относительно центра апертуры в направлении нормали к апертуре. Как указано в [31], в этом случае необходимо уменьшать шаг между отсчётами в связи с увеличением эффективного размера антенны. Поясним это обстоятельство на основе выводов, полученных при рассмотрении асимптотики соотношений для расчёта ДН по измерениям на цилиндрической поверхности в ближней зоне.

В главе 3 рассмотрен случай, когда антенна находится внутри сферы, с центром в начале координат. При этом было показано, что шаг между отсчётами поля определяется исходя из радиуса наименьшей из таких сфер, примерно как  $\lambda/2\rho$ , где  $\rho$  – это радиус сферы. Будем считать, что антенна имеет круглую апертуру (например, зеркальная антенна). Тогда при совпадении центра вращения (начала координат) и центра апертуры радиус минимальной сферы равен  $\rho=D/2$ , где  $D$  – диаметр антенны (рис.26а), и угловой шаг между отсчётами примерно равен  $\lambda/D$ . Если антенна сдвинута относительно центра вращения в направлении нормали к апертуре, то радиус минимальной сферы равен (рис.26б)

$$\rho = \sqrt{(D/2)^2 + h^2} \approx D/2 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{D/2}, \quad (197)$$

что приводит к уменьшению углового шага в соответствии с формулой

$$\Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{2\sqrt{(D/2)^2 + h^2}} \approx \frac{\lambda}{D} \left( 1 - \frac{2h^2}{D^2} \right). \quad (198)$$

Если антенна имеет прямоугольную апертуру, то необходимо использовать модель из главы 2. В этом случае необходимость уменьшения шага можно показать с помощью метода, который излагается в следующей секции.

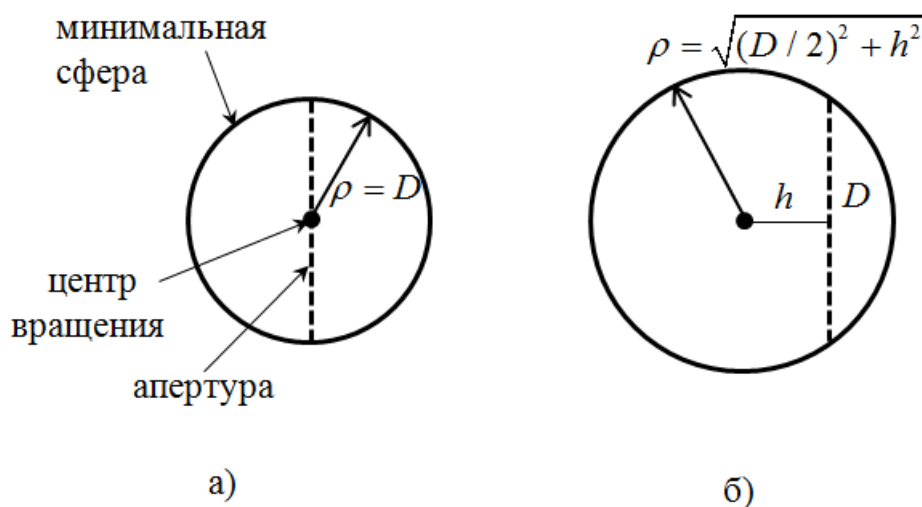


Рис.26. Размер минимальной сферы в зависимости от сдвига апертуры в направлении нормали: а) без сдвига, б) сдвиг на расстояние  $h$ .

#### *Сдвиг в плоскости апертуры*

Перейдём к рассмотрению случая, когда центр вращения сдвинут относительно центра апертуры в плоскости апертуры. Наиболее важным с практической точки зрения является случай, когда имеет место сдвиг в вертикальном направлении, т.к. в горизонтальном направлении, как правило, антенна и система крепления являются симметричными. Поэтому будем рассматривать сдвиг в вертикальном направлении (сдвиг в горизонтальном направлении можно учесть аналогичным образом).

В [31] было предложено два метода учёта вертикального сдвига. Рассмотрим эти методы, давая им несколько иную трактовку.

При наличии вертикального сдвига поле измеряется на сфере, сдвинутой в вертикальном направлении относительно сферы с центром в середине апертуры. Положение сфер показано на рис.27а. Закрашенными кружками обозначены точки, в которых измеряется поле. Поскольку измерения проводятся в зоне Френеля, то в небольшой окрестности произвольной точки поле имеет характер плоской волны. Это обстоятельство позволяет определить поле на сфере с

центром, совпадающим с центром апертуры, в точках, обозначенных на рис.27 крестиками, подкорректировав фазу с учётом геометрической разности хода. На основе изложенного строится первый метод учёта сдвига.

Определим угол места указанных точек и ГО разность хода. Для этого введём обозначения, показанные на рис.27б. Неизвестные величины  $\Delta$  и  $\beta$  могут быть определены из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} r \cos \alpha = (r + \Delta) \cos \beta, \\ r \sin \alpha = (r + \Delta) \sin \beta - h. \end{cases} \quad (199)$$

Заметим, что данные уравнения справедливы при любом значении азимута.

Решая систему, получаем следующие выражения при условии малых  $h/r$  и  $\alpha$ :

$$\Delta = \sqrt{r^2 + h^2 + 2rh \sin \alpha} - r \approx \frac{h^2}{2r} + h \sin \alpha, \quad (200)$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{r \sin \alpha + h}{r + \Delta}\right) \approx \alpha + \frac{h}{r}. \quad (201)$$

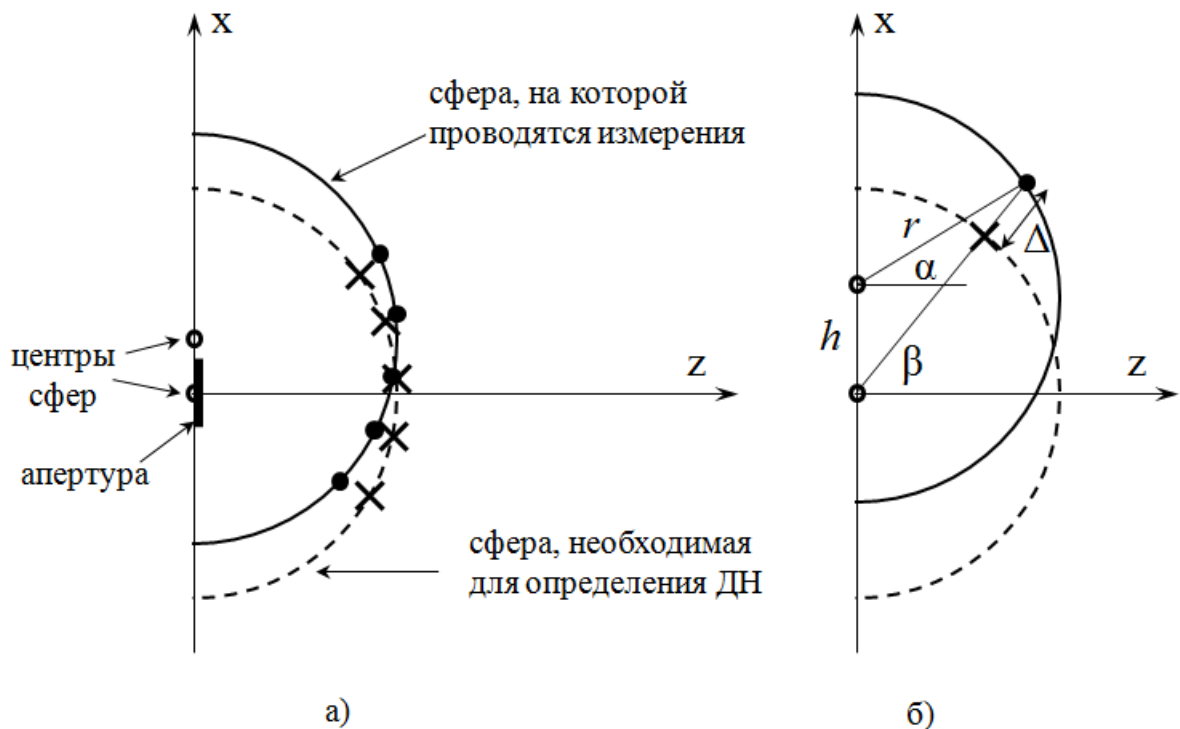


Рис.27. Положение точек, в которых проводятся измерения, и точек, по которым восстанавливается ДН, при наличии вертикального сдвига.

Таким образом, при наличии вертикального сдвига можно проводить измерения поля в азимутальных сечениях с шагом между сечениями около  $\lambda/D$ . Из этих данных можно определить значения поля на сфере с центром, совпадающим с центром апертуры, в азимутальных сечениях с таким же шагом, но сдвинутых на угол  $h/r$ , причём фаза поля отличается от исходной на величину  $k\Delta$ . После этого можно использовать формулы для восстановления ДН, полученные в предыдущих главах, применительно к отсчётам поля в зоне Френеля с подкорректированной фазой.

Второй метод учёта сдвига, по сути, основан на том, что при вертикальном сдвиге также можно пользоваться исходными формулами, используя уменьшенный шаг, как это было при сдвиге в направлении нормали к апертуре. Заметим, что это приводит к более значительному уменьшению углового шага и, следовательно, к более значительному увеличению объёма измерений в связи с тем, что размер минимальной сферы возрастает линейно с величиной сдвига (рис.28), в отличие от квадратичной зависимости (197).

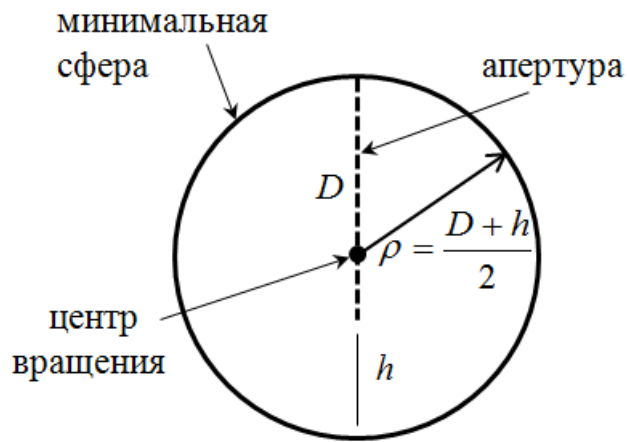


Рис.28. Размер минимальной сферы при вертикальном сдвиге (без использования формул для компенсации фазовой ошибки).

Заметим, что сдвиг в плоскости апертуры можно также учесть в формулах (42), (43). В этом случае интеграл в выражении (43) необходимо вычислять на прямоугольнике, сдвинутом относительно начала координат.

### *Разнос осей вращения*

На практике также возможна ситуация, когда оси вращения ОПУ не пересекаются, вследствие чего измерения проводятся не на сферической поверхности. В этом случае можно также воспользоваться методом, описанным в предыдущей секции, и аппроксимировать поле на сфере, ближайшей к поверхности, на которой проводятся измерения. После этого можно использовать формулы для восстановления ДН по измерениям на сферической поверхности.

### ***4.3. Определение ДН как непрерывной функции двух переменных по дискретным отсчётам в зоне Френеля.***

В главах 2 и 3 были получены формулы, позволяющие определять ДН как непрерывную функцию двух переменных по отсчётам в редкой сетке углов. Также в [31] был описан метод, позволяющий определять ДН как непрерывную функцию с использованием одного набора коэффициентов  $k_{mn}$ . В данном разделе будет проводиться сравнение этих методов.

Вначале рассмотрим более подробно метод, изложенный в [31], и определим условия его применимости.

В [31] был рассмотрен частный случай формул, выведенных в главе 2, когда  $\alpha_1 = \alpha_2$  и  $\beta_1 = \beta_2$  (согласно обозначениям из главы 2; например в формуле (48)). Следовательно, ДН может восстанавливаться только в направлениях, в которых проводилось измерение поля в зоне Френеля. Рассматриваемый метод строится на основе этого ограничения.

Отметим, что при использовании условий  $\alpha_1 = \alpha_2$  и  $\beta_1 = \beta_2$  можно ожидать улучшение точности метода по сравнению с произвольными  $\alpha$  и  $\beta$ , проводя аналогию с выводами работы [27], где рассматривалась двумерная задача.

Рассмотрим случай, когда ДН восстанавливается в направлении с углом места, не совпадающим с углом места точек, в которых измеряется поле в зоне Френеля. Аналогичные рассуждения могут применяться и для угла азимута. Пусть  $D$  – вертикальный размер апертуры,  $\Delta\alpha$  – шаг по углу места (измерения

проводятся в равномерной азимутально-угломестной сетке углов),  $T_x = \lambda / \Delta\alpha$ , причём  $T_x > D$ ,  $\alpha_1$  – угол места центрального сечения в зоне Френеля. Будем считать, что центр апертуры совпадает с центром вращения. Тогда ДН может быть восстановлена в направлении  $\alpha_2 = \alpha_1$ . (Если измерено достаточно много сечений, то можно восстановить ДН и в направлениях  $\alpha_2 = \alpha_1 + n\Delta\alpha$ ).

Пользуясь результатами, полученными в разделе 4.2, определим поле на сфере, смещённой в вертикальном направлении относительно исходной сферы, на которой проводились измерения (рис.29). Затем перенесём начало координат в центр смещённой сферы (рис.30) и будем восстанавливать ДН по отсчётам поля на этой сфере. Исходя из (201), получаем, что ДН будет восстановлена в направлении  $\alpha_2^* = \alpha_1 - h/r$ .

Для того чтобы формулы были применимы, необходимо, чтобы реальная (физическая) апертура антенны находилась в пределах  $\pm T_x/2$  по координате  $x$  в новой системе координат. Это приводит к следующему условию (см. рис.30):

$$|h| + \frac{D}{2} < \frac{T_x}{2}, \quad (202)$$

или

$$|h| < \frac{T_x - D}{2} = \frac{\lambda}{2\Delta\alpha} - \frac{D}{2}. \quad (203)$$

Аналогично можно записать диапазон углов места, в котором можно восстанавливать ДН с помощью этого метода:

$$\alpha_2^* \in \alpha_1 \pm \Delta\alpha_{2,\max}, \quad (204)$$

где

$$\Delta\alpha_{2,\max} = \frac{T_x - D}{2r} = \frac{\lambda}{2\Delta\alpha r} - \frac{D}{2r}. \quad (205)$$



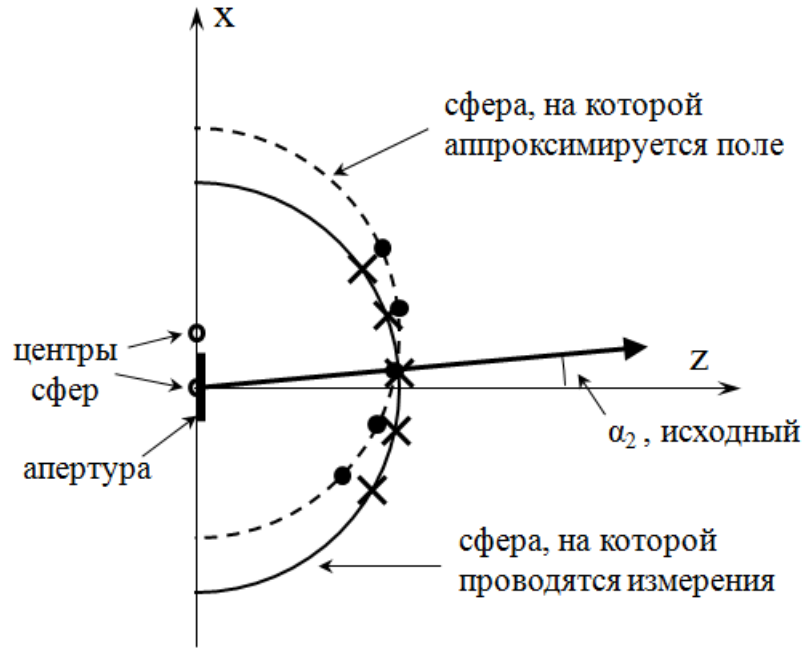


Рис.29. Исходная и смещённая сферы.

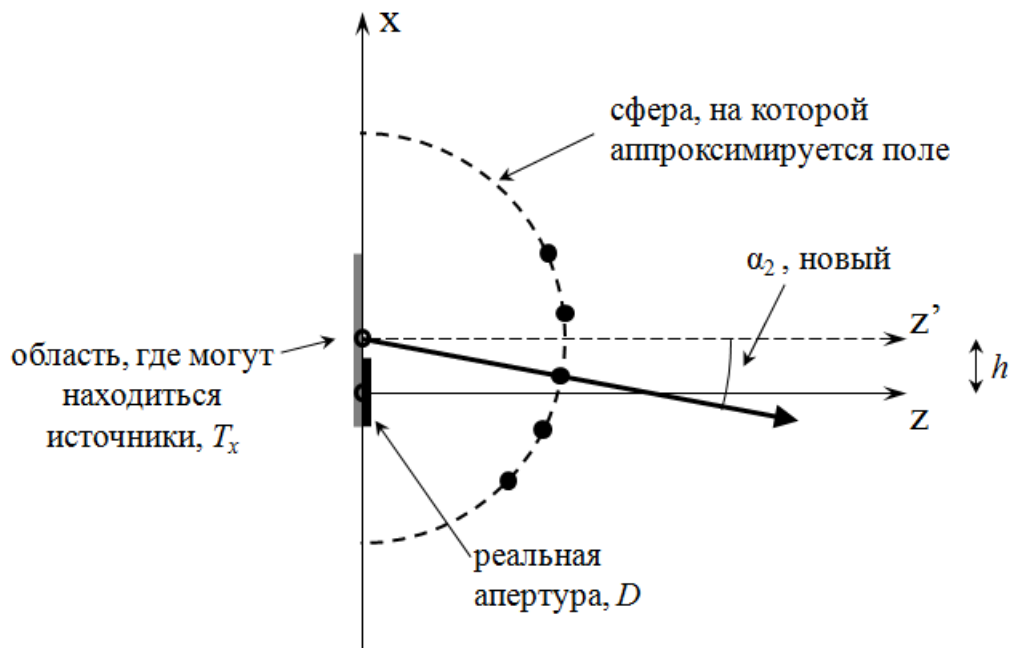


Рис.30. Смещённая сфера.

Для восстановления ДН в направлениях с углом места, отличающимся от  $\alpha_1$  больше, чем на  $0,5\Delta\alpha$ , можно использовать в качестве «центрального» угла места значения  $\alpha_1 + n\Delta\alpha$ . Следовательно, для того, чтобы с помощью данного метода

можно было восстановить ДН для произвольного угла места, необходимо, чтобы выполнялось условие  $\Delta\alpha_{2,\max} \geq \Delta\alpha$ , из чего следует следующее условие:

$$T_x \geq \frac{D + \sqrt{D^2 + 4\lambda r}}{2}. \quad (206)$$

Аналогичное условие можно записать и для  $\Delta\alpha$ :

$$\Delta\alpha \leq \frac{2\lambda}{D + \sqrt{D^2 + 4\lambda r}}. \quad (207)$$

Заметим, что  $T_x$  возрастает с ростом  $r$ . Для расстояния  $r=D^2/\lambda$  (половина расстояния дальней зоны)  $T_x=1,6D$ , т.е. угловой шаг необходимо уменьшить в 1,6 раза. Для меньших  $r$  увеличение  $T_x$  будет меньше.

Проведём численное сравнение восстановления ДН двумя методами, используя модель зеркальной антенны, рассмотренную в главе 2 (диаметр 1,5 м, частота 10 ГГц, расстояние дальней зоны 150 м). Рассмотрим случай, когда измерения проводятся на расстоянии 30 м и необходимо восстановить ДН в пределах  $\pm 3^\circ$  по углу места. Распределение поля на расстоянии 30 м и в дальней зоне показаны на следующих рисунках.

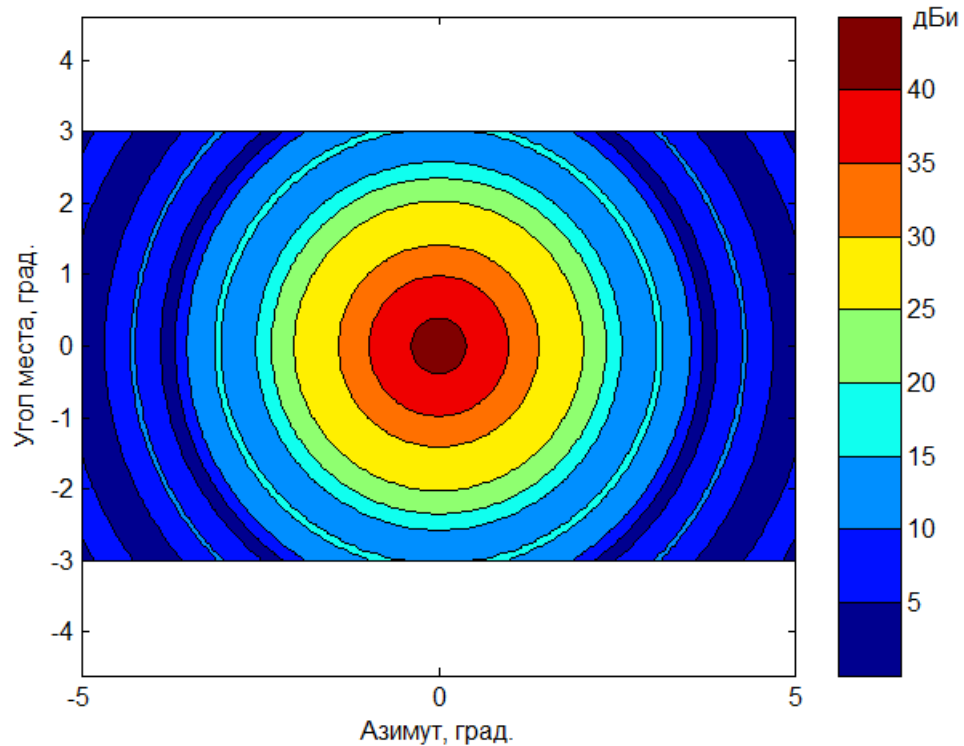


Рис.31. Распределение поля на расстоянии 30 м.

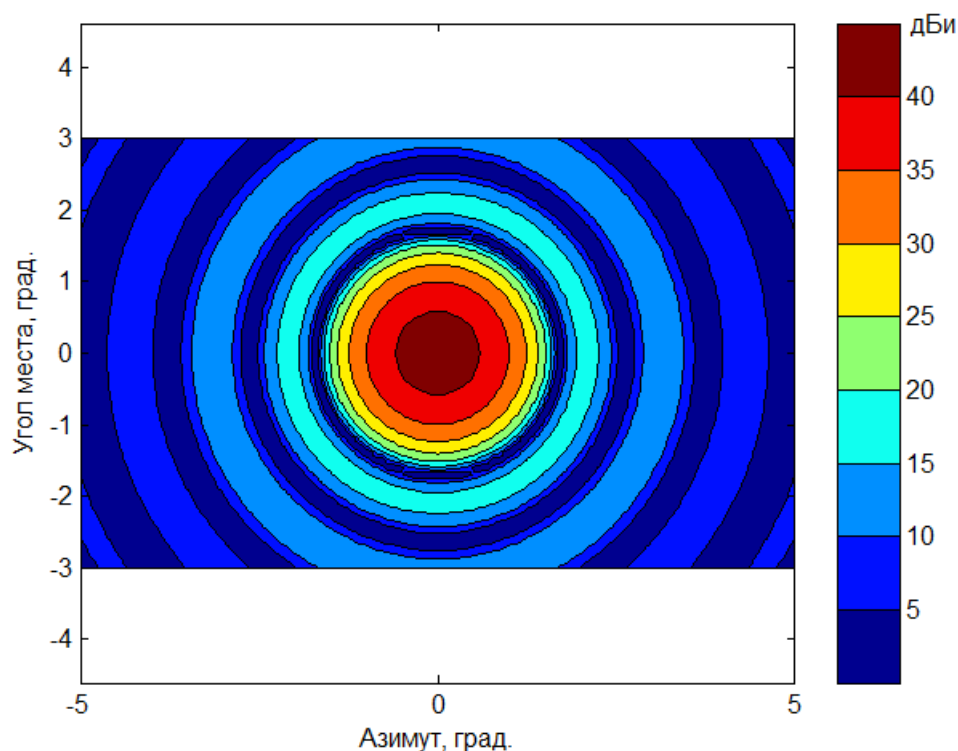


Рис.32. Распределение поля в дальней зоне.

Для восстановления ДН используется несколько азимутальных сечений поля. При использовании метода, основанного на результатах глав 2 и 3 (т.е. при использовании различных наборов коэффициентов  $k_{mn}$ ), шаг по углу места между азимутальными сечениями определяется в соответствии с (35) и составляет  $1,1^\circ$ . При использовании метода, предложенного в [31], необходимо использовать соотношение (207), и шаг между сечениями составляет  $0,85^\circ$ .

Как показывают расчёты, оба метода позволяют решить поставленную задачу (восстановленная ДН показана на рис.33,34). Однако при использовании первого метода достаточно 9 сечений в зоне Френеля, а при использовании второго – 11 сечений, т.е. при использовании первого метода объём измерений несколько уменьшается. Это связано с тем, что в первом методе используется больший шаг между сечениями, чем во втором.

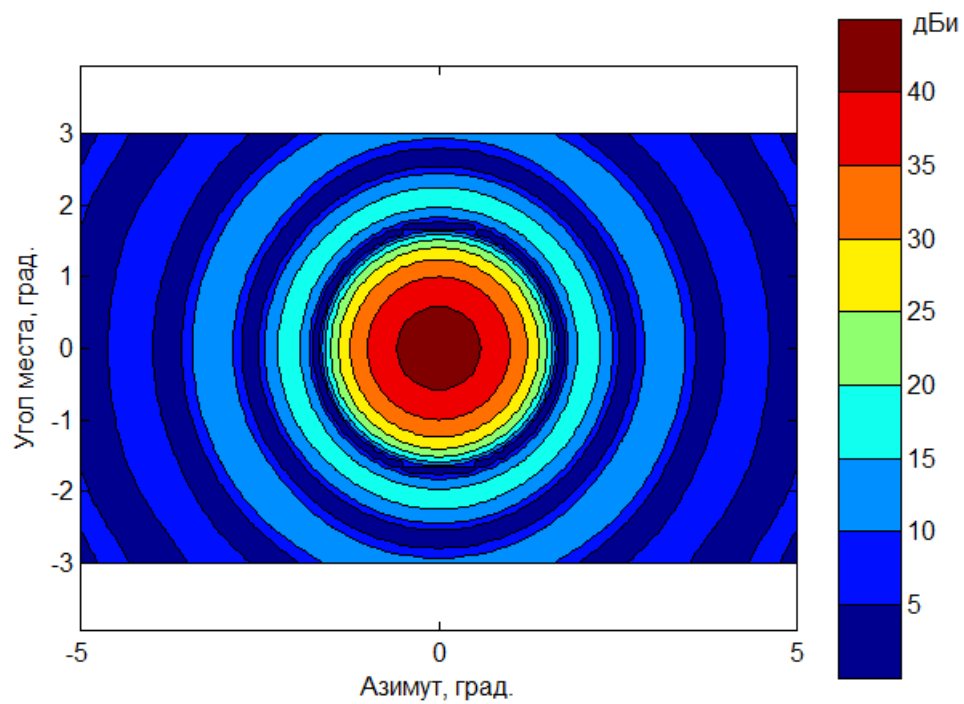


Рис.33. Восстановленная ДН (первый метод).

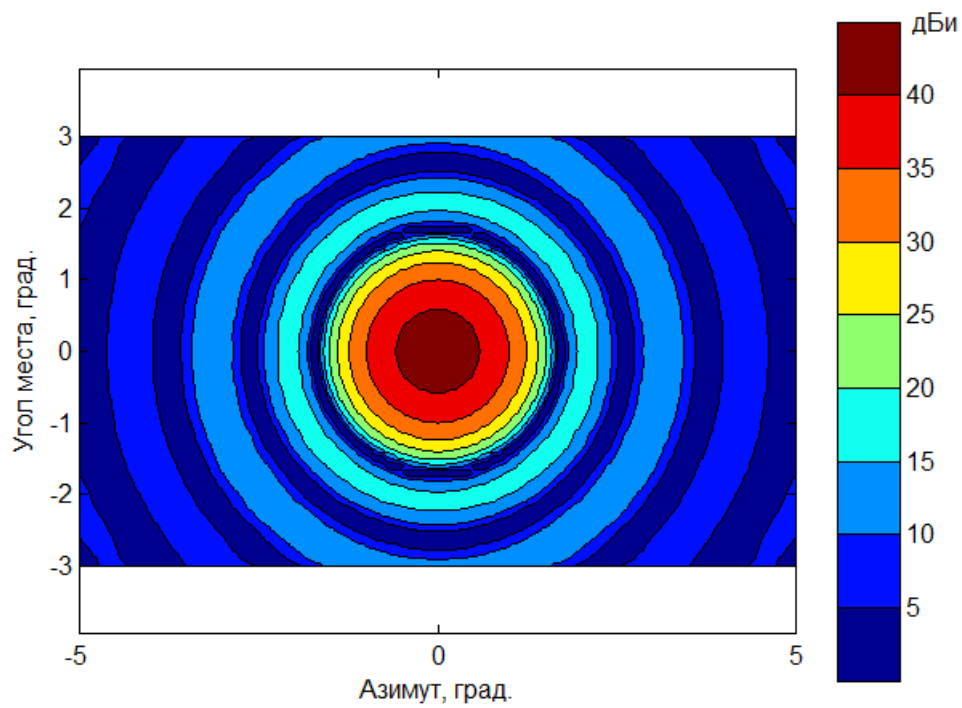


Рис.34. Восстановленная ДН (второй метод).

На следующем рисунке показаны угломестные сечения ДН, восстановленной двумя методами, и расчётной ДН. Из рисунка видно, что ДН восстановлена с хорошей точностью (точность определения уровня первых боковых лепестков составляет в обоих случаях 0,1 дБ).

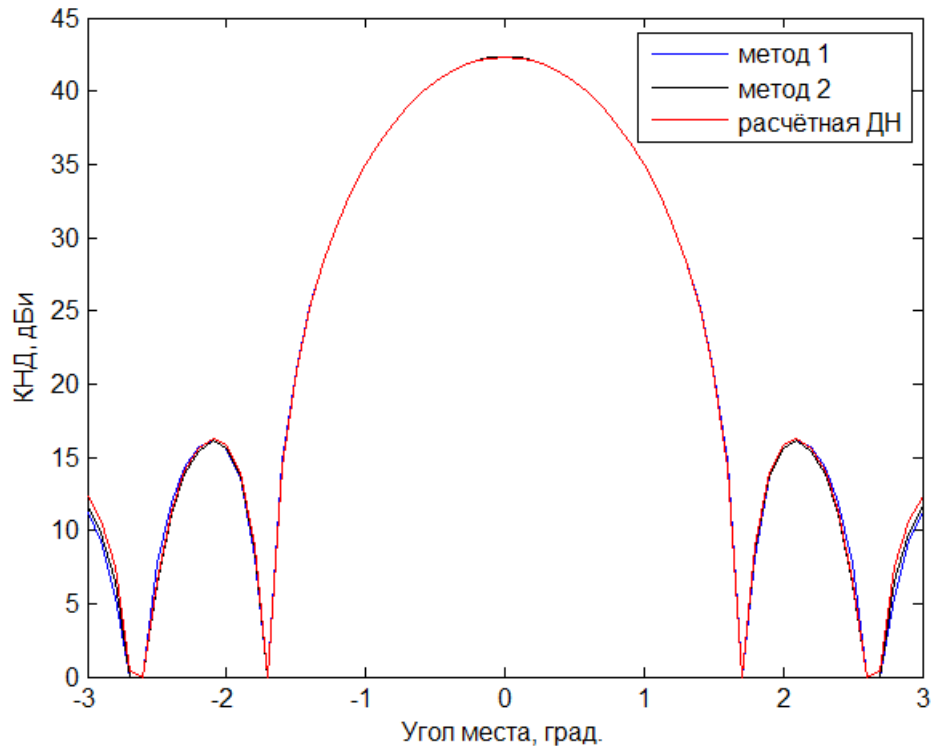


Рис.35. Угломестное сечение восстановленной и расчётной ДН.

#### **4.4. Выбор числа сечений поля в зоне Френеля.**

Рассмотрим, какой объём измерений в зоне Френеля необходим для восстановления ДН в заданном секторе. Как было сказано ранее, коэффициенты (48) убывают с ростом  $m$  и  $n$ , вследствие чего в сумме (44) можно ограничиться небольшим числом членов.

Рассмотрим случай, когда необходимо восстановить центральное азимутальное сечение ДН, т.е. сечение, проходящее через максимум ДН. В этом случае необходимо провести измерение нескольких азимутальных сечений в зоне Френеля. Определим число сечений и диапазон углов, в котором должны проводиться измерения в каждом сечении, если ДН необходимо восстановить в пределах углов  $\pm\beta_{\max}$ .

В работе [31] на основе метода стационарной фазы была получена оценка (18) для числа сечений в зоне Френеля. Однако, как указано в [32], такого числа сечений может быть недостаточно, и добавление ещё нескольких сечений может существенно улучшить точность восстановленной ДН. В качестве альтернативного критерия в [32] было предложено учитывать только те слагаемые в сумме (44), у которых коэффициенты  $k_{mn}$  имеют уровень не ниже -15 дБ относительно максимального значения  $k_{mn}$ . Однако эта оценка является эмпирической и может также приводить к ухудшению точности или к избыточности объёма измерений.

Проведём аналогичную оценку на основе физического содержания задачи. Такая оценка была сделана в [13] для двумерной задачи для случая, когда ДН восстанавливается с помощью соотношений вида (4). Было показано, что для восстановления ДН в секторе углов  $\pm u_0$  необходимо проводить измерения в зоне Френеля в секторе углов  $\pm u'_0$ , который определяется из условия

$$u'_0 \geq \frac{D}{2r_1} + u_0 + \tilde{n} \sqrt{\frac{\lambda}{2r_1}}, \quad (208)$$

где  $\tilde{n}$  – число от 1 до 2. Заметим, что в [10] была получена похожая оценка, причём было использовано  $\tilde{n}=1,5$ .

Применим оценку (208) к рассматриваемой задаче. Возможность применения этой оценки следует как из чисто физических соображений, так и из доказанной в главе 2 эквивалентности рассматриваемых методов восстановления ДН. Поскольку нас интересует восстановление только центрального сечения ДН, то для оценки числа сечений можно положить  $u_0=0$ . Разделив удвоенное значение  $u'_0$  на шаг между сечениями и взяв целую часть выражения, получаем оценку для числа сечений (используя  $\tilde{n}=1,5$ ) [44,65]:

$$M_{\min} = 2 \left[ \frac{T_x^2}{2\lambda r_1} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{T_x^2}{2\lambda r_1}} \right] + 1. \quad (209)$$

При этом диапазон углов, в котором необходимо проводить измерения в каждом сечении в зоне Френеля, определяется выражением (208), где в качестве параметра  $D$  выступает горизонтальный размер антенны  $T_y$ .

Заметим, что количество слагаемых по  $n$  не следует ограничивать оценкой, аналогичной (209). Это связано с вкладом точек из максимума излучения в зоне Френеля в суммы (40), (42) для точек, расположенных достаточно далеко от максимума в дальней зоне. У этих слагаемых значения  $k_{mn}$  малые, но значения  $E(u+m\Delta u, v+n\Delta v, r_1)$  большие, поэтому их вклад также следует учитывать.

Аналогичный эффект появляется, когда требуется восстановить сечение, не проходящее через максимум ДН антенны: в этом случае может потребоваться измерить дополнительно к (209) те сечения, которые проходят через максимум поля в зоне Френеля. Также оценка (209) может быть неверна для расфазированных антенн, у которых угловой размер максимума поля в зоне Френеля больше, чем у сфокусированных антенн: в этом случае необходимо измерять большее число сечений, в зависимости от степени расфазировки.

Приведём сравнение точности восстановления ДН при использовании рассмотренных выше критериев применимости. Для расчётов будем использовать рассмотренную ранее модель однозеркальной антенны (диаметр 1,5 м, частота 10 ГГц, расстояние дальней зоны 150 м). При  $r=30$  м количество сечений по критерию (18) равно 3, по критерию [32] – 5 сечений, по критерию (209) – 7 сечений. Восстановленные ДН по 3, 5, 7 и 9 сечениям поля в зоне Френеля приведены на рисунках ниже.

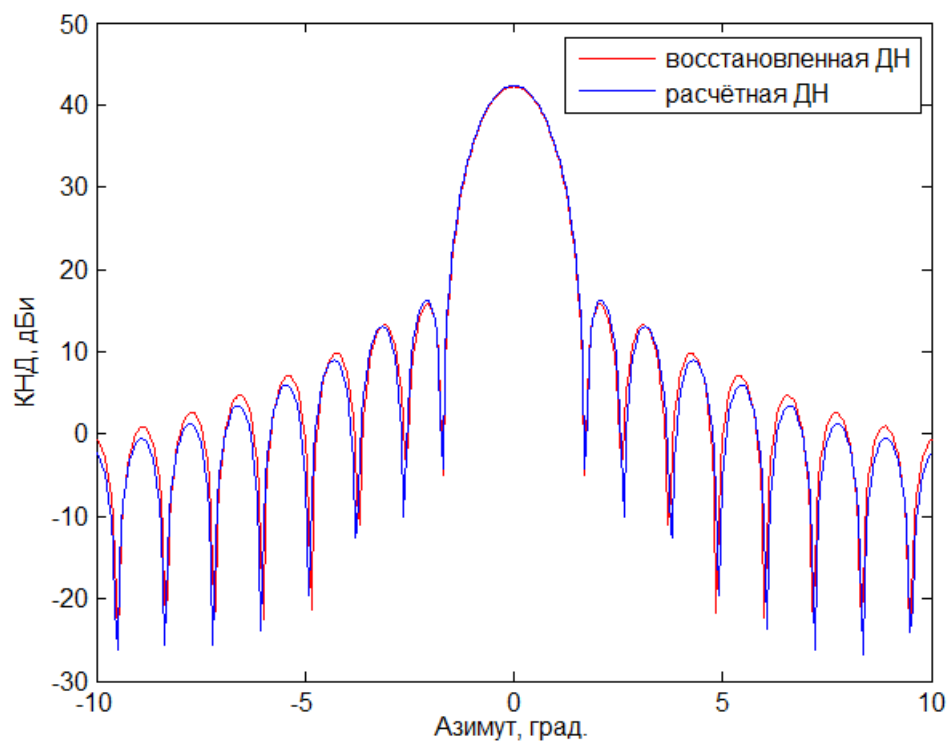


Рис.36. Восстановленная ДН (3 сечения) и расчётная ДН.

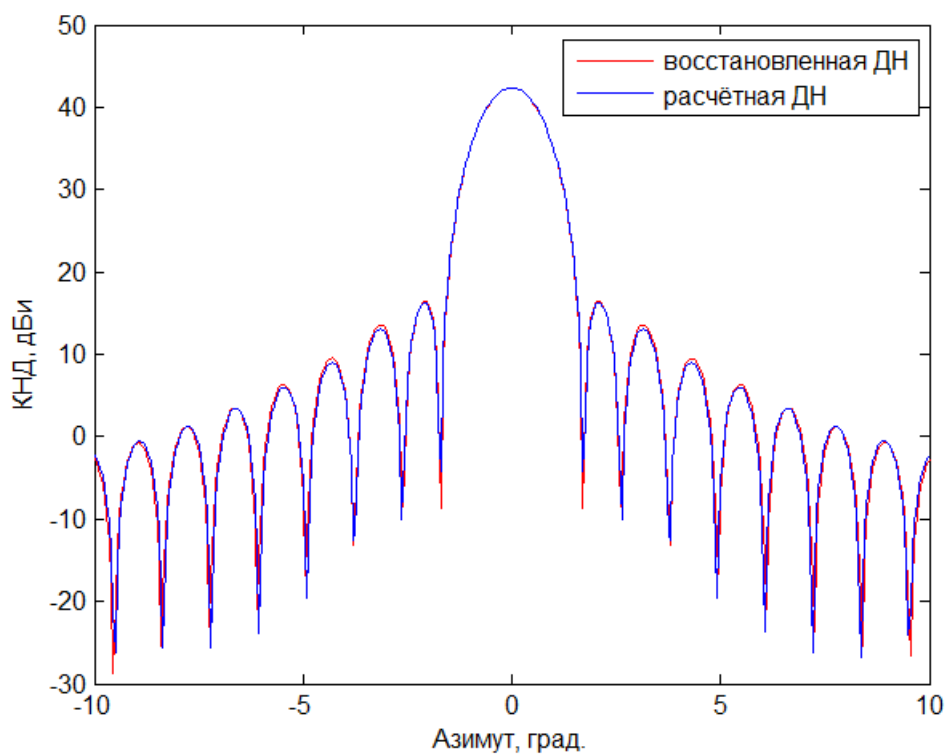


Рис.37. Восстановленная ДН (5 сечений) и расчётная ДН.



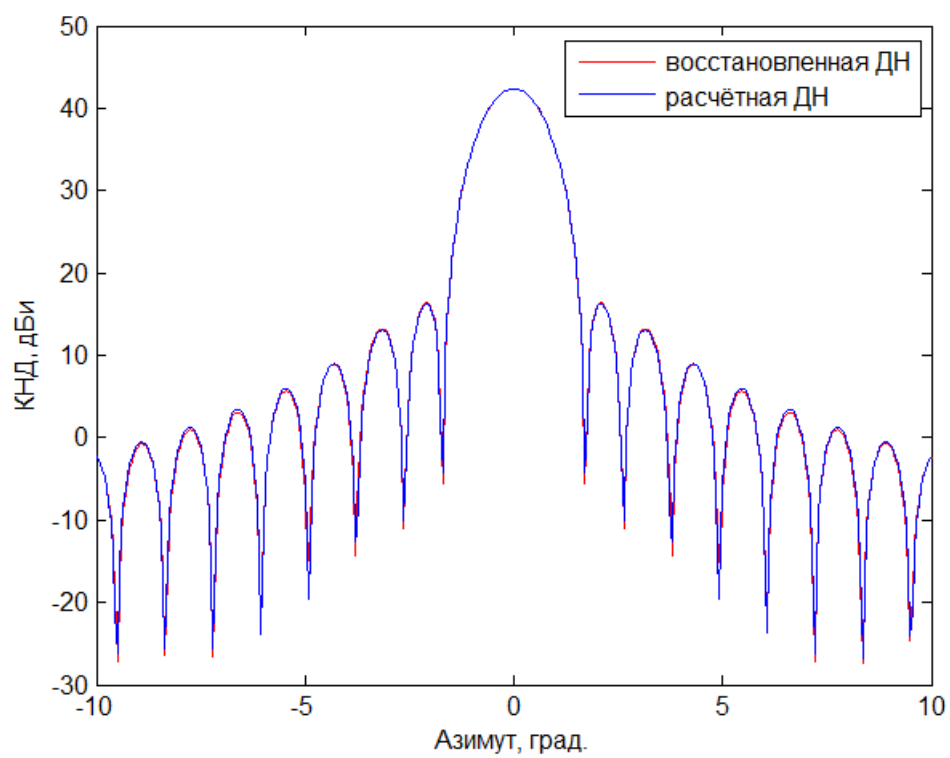


Рис.38. Восстановленная ДН (7 сечений) и расчётная ДН.

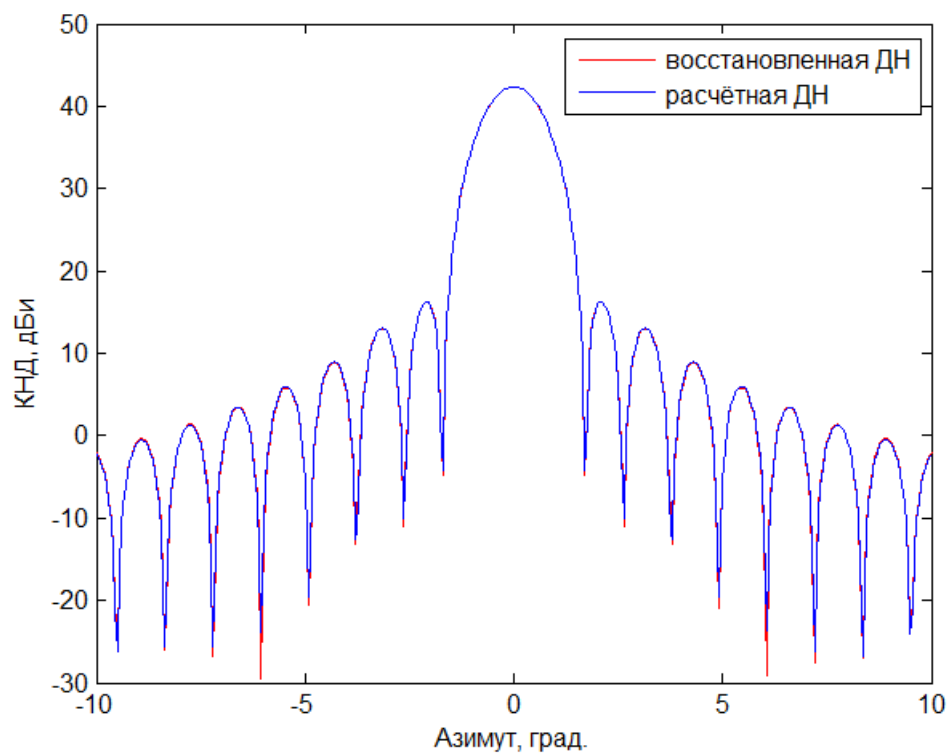


Рис.39. Восстановленная ДН (9 сечений) и расчётная ДН.

Из рисунков видно, что точность восстановления улучшается при увеличении числа сечений. При использовании 3 сечений точность восстановления первого бокового лепестка составила 0,5 дБ, при использовании 5 и более сечений – 0,1-0,15 дБ. Точность восстановления второго и третьего бокового лепестка при использовании 5 сечений составила 0,5 дБ, при использовании 7 и 9 сечений – около 0,1 дБ.

При  $r=40$  м количество сечений по критерию (18) равно 3, по критерию [32] – 3, по критерию (209) – 5. Точность восстановления первого бокового лепестка составила 0,3 дБ при использовании 3 сечений и 0,1 дБ при использовании 5 сечений. Точность восстановления второго и третьего бокового лепестка составила 0,5 дБ при использовании 3 сечений и 0,3 дБ при использовании 5 сечений.

При  $r=5$  м количество сечений по критерию (18) равно 17, по критерию [32] – 21, по критерию (209) – 25 сечений. Точность восстановления первого бокового лепестка, как и при  $r=5$  м, составила 0,5 дБ при использовании числа сечений по критерию (18) и 0,1 дБ при использовании других двух критериев. Точность восстановления второго и третьего бокового лепестка составила 0,5 дБ при использовании 21 сечения и 0,35 дБ при использовании 25 сечений.

Таким образом, при использовании критерия (209) точность определения уровня первого бокового лепестка составила около 0,1 дБ (на уровне -25 дБ), а второго и третьего боковых лепестков – около 0,3 дБ. Причём при увеличении числа сечений точность практически не улучшается. При использовании критерия (18) точность определения уровня первого бокового лепестка ухудшается до 0,5 дБ. Использование критерия [32] позволяет несколько уменьшить объём измерений по сравнению с критерием (209), однако может приводить к ухудшению точности восстановления ДН.

При рассмотрении ряда других зеркальных антенн точность определения уровня первого бокового лепестка при различных расстояниях измерения

оказывается не хуже 0,2-0,3 дБ. Остальные выводы по критериям выбора числа сечений при проведении расчётов подтверждаются.

#### **4.5. Влияние ошибок измерений**

В данном разделе рассматривается влияние ошибок измерения амплитуды и фазы и ошибок позиционирования антенны на ОПУ на точность восстановления ДН. Данные вопросы детально рассмотрены в работах [3,9,11,12,14] применительно к методу, основанному на интегрировании поля в зоне Френеля. Применительно к методу измерения на разреженной сетке углов вопросы погрешностей восстановления кратко рассмотрены в [27] для двумерного случая. Ниже приводятся оценки влияния ошибок измерения на определение КУ и УБЛ для трёхмерного случая.

##### *Влияние относительных ошибок измерения амплитуды и фазы*

Ошибки измерения можно разделить на относительные (мультипликативные) и абсолютные (аддитивные) [9]. Вначале рассмотрим относительные ошибки. Такие ошибки связаны, например, с погрешностями определения амплитуды и фазы в векторном анализаторе.

При рассмотрении относительных ошибок измеренную комплексную амплитуду поля в зоне Френеля удобно представить в следующем виде:

$$E_{mn} = E_{mn}^0 (1 + \Delta_{mn}), \quad (210)$$

где  $E_{mn}^0$  – истинная комплексная амплитуда поля,  $\Delta_{mn}$  – относительная ошибка определения комплексной амплитуды.

Тогда восстановленное поле в дальней зоне можно записать в виде:

$$E = \sum_{mn} k_{mn} E_{mn}^0 (1 + \Delta_{mn}) = E^0 + \sum_{mn} k_{mn} E_{mn}^0 \Delta_{mn}, \quad (211)$$

где  $E^0$  – истинное значение поля в дальней зоне.

Проведём оценку погрешности восстановления в максимуме ДН для сфазированной антенны. Без ограничения общности можно считать, что максимум ДН соответствует направлению  $u=v=0$  ( $\alpha=\beta=0$ ).

Оценим коэффициенты  $k_{mn}$ , определяемые выражением (48), используя метод стационарной фазы. Будем полагать  $r_2 \rightarrow \infty$ ,  $T_x = T_y = D$ ,  $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 0$ . Тогда для интеграла по  $x$  стационарная точка определяется условием

$$f'(x) = \frac{2\pi}{\lambda r_1} x - \frac{2\pi}{D} m. \quad (212)$$

откуда

$$x_{cm} = \frac{m\lambda r_1}{D}. \quad (213)$$

Легко видеть, что интеграл имеет стационарную точку для индексов  $m$ , определяемых условием (18).

Согласно методу стационарной фазы, значение  $k_m$  оценивается следующим образом:

$$k_m = e^{j\pi/4} e^{-jk \frac{m^2 \lambda^2}{2D^2}} \frac{1}{D} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_{cm})|}} = e^{j\pi/4} e^{-jk \frac{m^2 \lambda^2}{2D^2}} \frac{\sqrt{\lambda r_1}}{D}. \quad (214)$$

Оценка интеграла по  $y$  проводится аналогично. Тогда оценка  $k_{mn}$  записывается в виде:

$$k_{mn} = e^{j\pi/2} e^{-jk \frac{m^2 \lambda^2}{2D^2}} e^{-jk \frac{n^2 \lambda^2}{2D^2}} \frac{\lambda r_1}{D^2}. \quad (215)$$

Аналогичным образом с помощью метода стационарной фазы можно показать, что поле антенны, сфазированной в направлении  $u=v=0$ , имеет стационарные точки в зоне Френеля в угловых направлениях

$$|u|, |v| < \frac{D}{2r_1}, \quad (216)$$

а поле оценивается выражением

$$E_{mn} = c \cdot \frac{\partial E_A}{\partial z} \left( \frac{r_1 m \lambda}{D}, \frac{r_1 n \lambda}{D} \right) e^{-j\pi/2} e^{jk \frac{m^2 \lambda^2}{2D^2}} e^{jk \frac{n^2 \lambda^2}{2D^2}}, \quad (217)$$

где  $c$  – константа.

Из (216) следует, что поле в зоне Френеля имеет стационарные точки в отсчётах, определяемых условием (18). Таким образом, при восстановлении

максимума ДН наиболее значимыми слагаемыми в (211) являются слагаемые, определяемые критерием (18), и эти слагаемые вносят основной вклад в погрешность восстановления. В силу этого при оценке погрешности ограничим суммирование только этими слагаемыми.

Исходя из (18) общее число слагаемых в (211) определяется как

$$MN = \frac{D^4}{(\lambda r_1)^2} . \quad (218)$$

Используя полученные оценки для коэффициентов и поля в зоне Френеля, получаем следующую оценку максимума поля в дальней зоне:

$$E^{0,\max} = \sum_{mn} k_{mn} E_{mn}^0 = \sum_{mn} c \frac{\lambda r_1}{D^2} \frac{\partial E_A}{\partial z} \left( \frac{r_1 m \lambda}{D}, \frac{r_1 n \lambda}{D} \right) = \sum_{mn} |k_{mn}| \cdot |E_{mn}^0| , \quad (219)$$

что выполняется в силу того, что в (215) и (217) коэффициенты  $k_{mn}$  и отсчёты поля в зоне Френеля имеют противоположный знак фазы.

Для следующих оценок будем считать, что отсчёты поля в зоне Френеля из диапазона (18) приближённо равны между собой:

$$E_{mn}^0 \approx E_F^0 . \quad (220)$$

Такое приближение позволит получить простую оценку ошибок и не приведёт к значительному ухудшению точности оценки.

Из (218), (219), (220) получаем

$$|k_{mn}| \cdot |E_F^0| = E^{0,\max} \frac{(\lambda r_1)^2}{D^4} . \quad (221)$$

Далее можно оценить дисперсию ошибки восстановления максимума ДН, пользуясь выражением (211) и считая ошибки  $\Delta_{mn}$  независимыми случайными величинами с одинаковым распределением:

$$\begin{aligned} D\{\Delta E\} &= D \left\{ \sum_{mn} k_{mn} E_{mn}^0 \Delta_{mn} \right\} = |k_{mn}|^2 |E_F^0|^2 D \left\{ \sum_{mn} \Delta_{mn} \right\} = \\ &= \left( E^{0,\max} \frac{(\lambda r_1)^2}{D^4} \right)^2 \frac{D^4}{(\lambda r_1)^2} D\{\Delta_{mn}\} = \left( E^{0,\max} \frac{\lambda r_1}{D^2} \right)^2 D\{\Delta_{mn}\}, \end{aligned} \quad (222)$$

где  $D\{\dots\}$  означает дисперсию случайной величины.

Таким образом, среднеквадратичное отклонение восстановленного поля в максимуме ДН составляет:

$$rms\{\Delta E\} = E^{0,\max} \frac{\lambda r_1}{D^2} rms\{\Delta_{mn}\}, \quad (223)$$

где  $rms\{\dots\}$  означает среднеквадратичное отклонение (корень из дисперсии).

При измерении в районе границы дальней зоны все коэффициенты, кроме  $k_{00}$ , малы, поэтому погрешность восстановления максимума ДН примерно равна ошибке измерений. При уменьшении расстояния, согласно (223), погрешность восстановления максимума ДН уменьшается.

Погрешность определения УБЛ, связанная с относительными ошибками измерений, зависит от расстояния другим образом. При измерении около границы дальней зоны погрешность определения УБЛ также примерно равна ошибке измерений, т.к. в этом случае все коэффициенты, кроме  $k_{00}$ , малы, а  $k_{00} \approx 1$ . Однако при уменьшении расстояния измерения погрешность увеличивается, т.к. становятся значимыми другие коэффициенты  $k_{mn}$ , такие, что измеренное поле  $E_{mn}$  имеет больший уровень, чем  $E_{00}$ , а следовательно, и бóльшие ошибки. Исходя из этих соображений ошибку определения УБЛ можно оценить следующей формулой:

$$rms\{\Delta E^{SLL}\} = \sqrt{\left(E^{0,SLL}\right)^2 + \left(k_{10}(r_1)E^{0,\max}\right)^2} rms\{\Delta_{mn}\}, \quad (224)$$

где  $E^{0,SLL}$  – уровень первого бокового лепестка.

Данная формула справедлива при достаточно больших  $r_1$  (примерно  $r_1 > 0,5D^2/\lambda$ ). При меньших  $r_1$  поле в зоне Френеля уже значительно отличается от поля в дальней зоне, и, кроме того, погрешность определения УБЛ зависит от большего числа слагаемых в (211), поэтому оценка (224) становится неверной. В области  $r_1 < 0,5D^2/\lambda$  погрешность УБЛ можно оценить с помощью (223), т.к. при  $r_1$  значительно меньшем расстояния дальней зоны ДН определяется значительным числом отсчётов поля в зоне Френеля, и первые боковые лепестки определяются практически по тому же множеству отсчётов, что и максимум ДН.

Приведём примеры восстановления ДН при наличии относительных ошибок амплитуды поля в зоне Френеля. На следующих рисунках показаны восстановленные ДН рассмотренной ранее осесимметричной зеркальной антенны диаметром 150 см при измерении на расстоянии 5 м, 30 м и 100 м при наличии случайных ошибок амплитуды с нормальным распределением и с.к.о. 0,2 дБ.

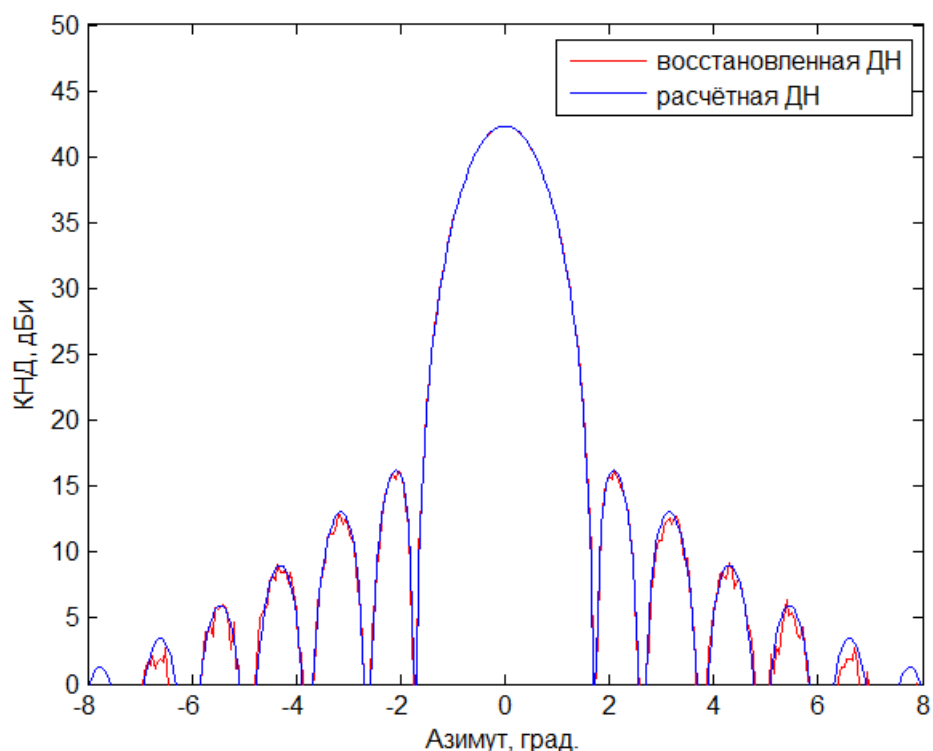


Рис.40. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля с 5 м.  
Относительные ошибки 0,2 дБ.

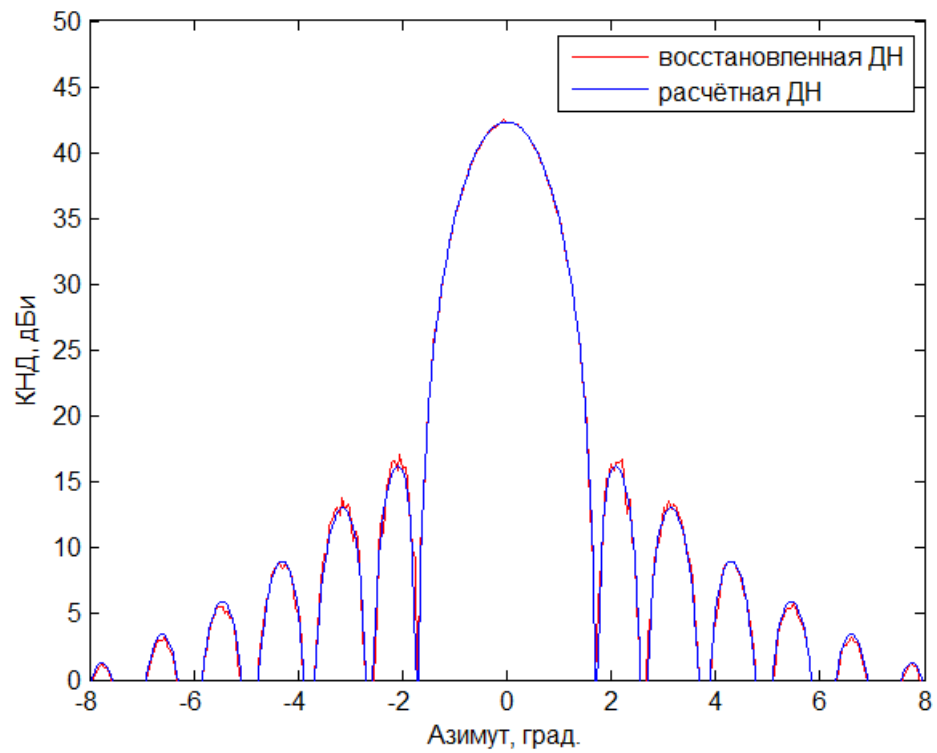


Рис.41. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля с 30 м.

Относительные ошибки 0,2 дБ.

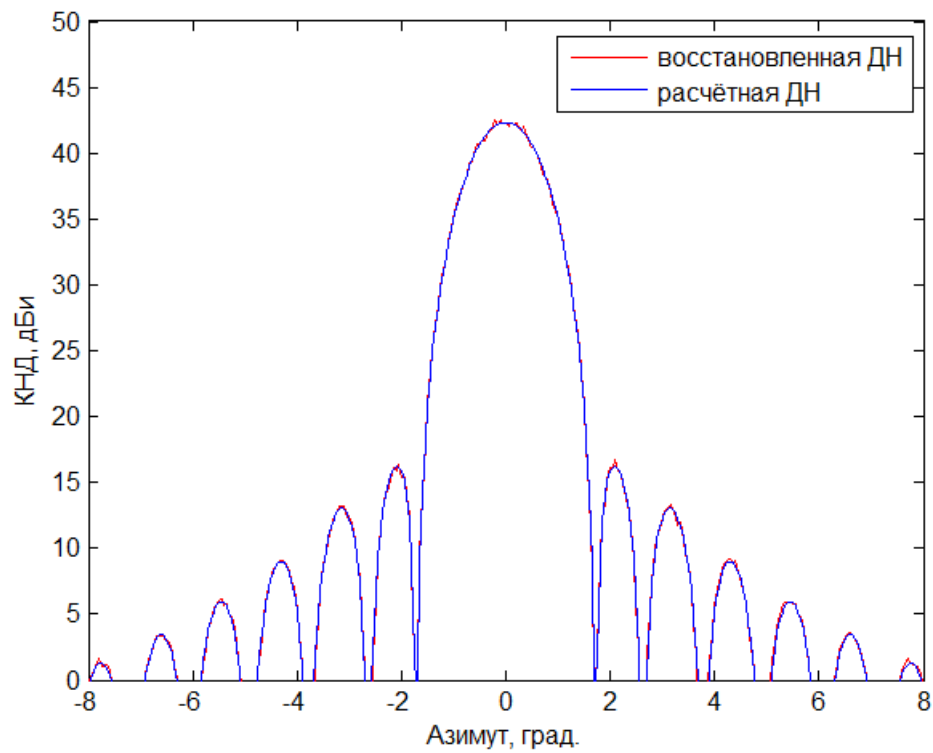


Рис.42. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля со 100 м.

Относительные ошибки 0,2 дБ.



Из рисунков видно, что погрешности восстановления в районе максимума ДН увеличиваются с увеличением расстояния. По приведённым выше формулам погрешность определения максимума ДН оценивается как 0,013 дБ, 0,08 дБ и 0,3 дБ для 5 м, 30 м и 100 м соответственно. При усреднении по 20 численным экспериментам погрешность составила 0,015 дБ, 0,10 дБ и 0,2 дБ.

Также из рисунков видно, что погрешности в районе первых боковых лепестков максимальны на 30 м и уменьшаются на 5 м и 100 м. Согласно приведённым выше формулам, погрешность определения УБЛ оценивается в 0,2 дБ, 0,7-1,5 дБ (по формулам (224) и (223)) и 0,2 дБ для 5 м, 30 м и 100 м соответственно. При усреднении по 20 численным экспериментам погрешность составила 0,2 дБ, 0,6 дБ и 0,2 дБ. Таким образом, результаты расчётов согласуются с предложенными оценками.

Отметим, что погрешность восстановления ДН, связанную с относительными ошибками измерений, можно уменьшить за счёт использования более мелкого шага  $\Delta\alpha$  или  $\Delta\beta$ , если расстояние измерений не находится вблизи границы дальней зоны (например, для случая, показанного на рис.41). Поскольку измерения проводятся по сечениям и в каждом сечении поле может измеряться с достаточно малым шагом, то целесообразно использовать более мелкий шаг вдоль измеряемых сечений, т.к. это не приведёт к увеличению объёма измерений.

Фазовые ошибки влияют на точность определения ДН при измерении в зоне Френеля практически так же, как амплитудные (0,65° фазовой ошибки соответствует 0,1 дБ амплитудной ошибки). Отличием является то, что по мере приближения к дальней зоне влияние фазовых ошибок уменьшается быстрее, т.к. ДН в заданном направлении в этом случае в основном определяется измерениями в этом же направлении (в пределе – при измерении в дальней зоне – ошибка восстановленной амплитудной ДН не зависит от фазовых ошибок). Например, при фазовой ошибке 1,3° и измерении на расстоянии 100 м погрешность

определения УБЛ рассматриваемой модели антенны составила 0,1 дБ, тогда как при ошибке амплитуды в 0,2 дБ погрешность составила 0,2 дБ.

*Влияние абсолютных ошибок измерения амплитуды и фазы*

Абсолютные ошибки связаны, например, с переотражениями в безэховой камере (в этом случае они носят псевдослучайный характер).

Представим измеренную комплексную амплитуду поля в зоне Френеля в виде, аналогичном представлению из предыдущего подраздела:

$$E_{mn} = E_{mn}^0 + \Delta E_{mn} , \quad (225)$$

где  $\Delta E_{mn}$  – абсолютная ошибка определения комплексной амплитуды.

Проведём оценку погрешности восстановления ДН. Пользуясь обозначениями из предыдущего подраздела, запишем восстановленное поле в дальней зоне:

$$E = \sum_{mn} k_{mn} (E_{mn}^0 + \Delta E_{mn}) = E^0 + \sum_{mn} k_{mn} \Delta E_{mn} . \quad (226)$$

Оценим дисперсию ошибки восстановления, пользуясь результатами из предыдущего раздела:

$$\begin{aligned} D\{\Delta E\} &= D\left\{ \sum_{mn} k_{mn} \Delta E_{mn} \right\} = \frac{(\lambda r_1)^2}{D^4} D\left\{ \sum_{mn} \Delta E_{mn} \right\} = \\ &= \frac{(\lambda r_1)^2}{D^4} \frac{D^4}{(\lambda r_1)^2} D\{\Delta E_{mn}\} = D\{\Delta E_{mn}\}. \end{aligned} \quad (227)$$

Таким образом, согласно полученной оценке погрешность восстановления ДН, связанная с абсолютными ошибками измерений, одинакова для максимума ДН и боковых лепестков (в линейных единицах), не зависит от расстояния измерения и равна ошибке одного отдельного измерения комплексной амплитуды в зоне Френеля.

Приведём примеры восстановления ДН при наличии абсолютных ошибок измерения поля в зоне Френеля. На следующих рисунках показаны восстановленные ДН рассмотренной ранее антенны диаметром 150 см при

измерении на расстоянии 5 м, 30 м и 100 м при наличии ошибок со средним уровнем -5 дБи.

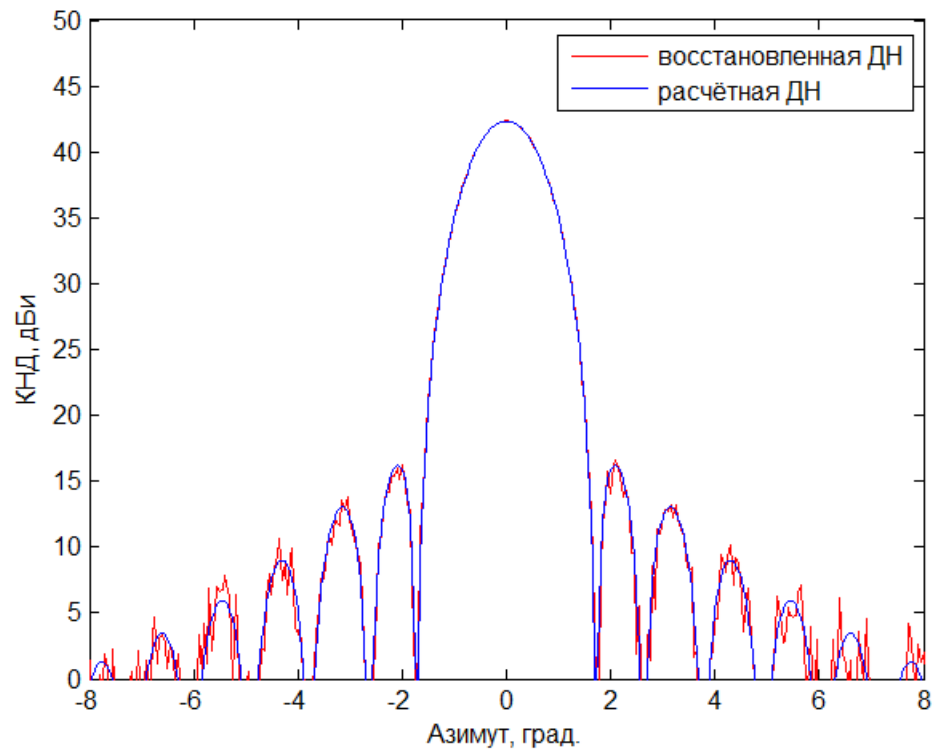


Рис.43. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля с 5 м.  
Ошибки со средним уровнем -5 дБи.

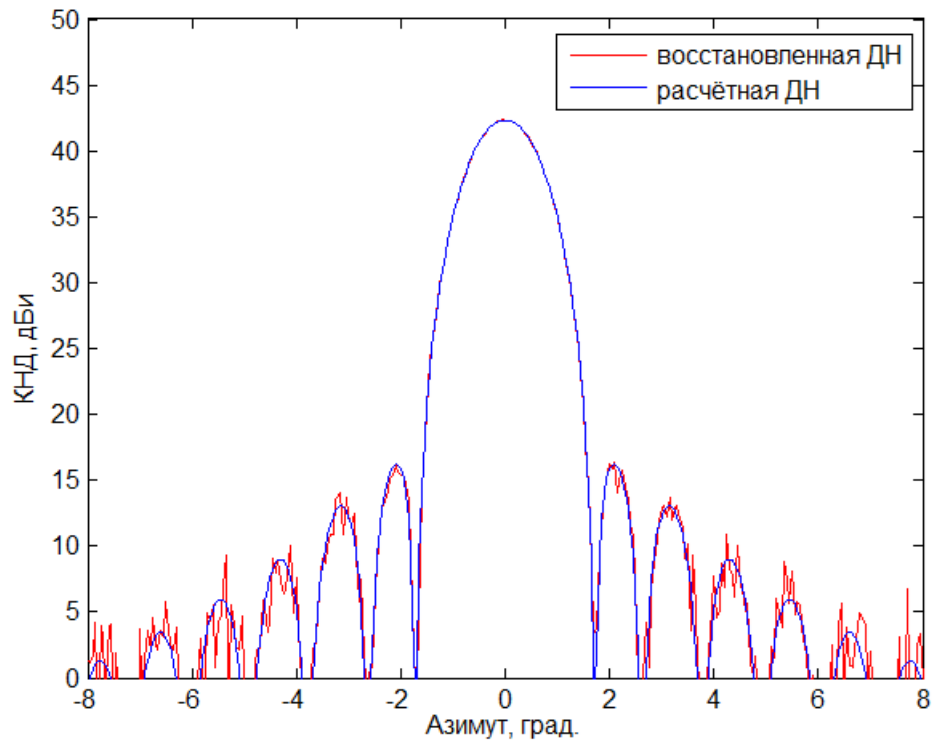


Рис.44. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля с 30 м.  
Ошибки со средним уровнем -5 дБи.

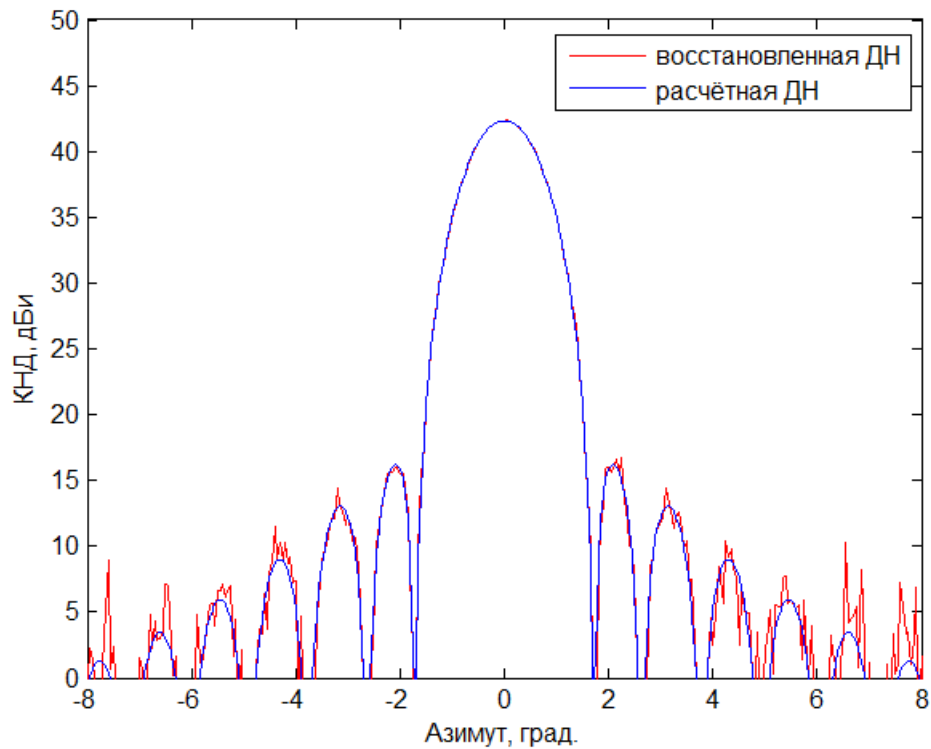


Рис.45. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля со 100 м.

Ошибки со средним уровнем -5 дБи.

Из рисунков видно, что погрешности восстановленных ДН примерно одинаковы во всех трёх случаях, и в логарифмической шкале (в дБ) погрешность увеличивается с уменьшением уровня ДН. Погрешность восстановления ДН в максимуме составила 0,02 дБ во всех трёх случаях. Погрешность определения УБЛ составила 0,3-0,5 дБ. С учётом того, что УБЛ равен -25 дБ, полученные погрешности примерно равны в линейных единицах. Таким образом, расчёты подтверждают справедливость сделанных оценок.

#### *Ошибки углового позиционирования испытуемой антенны*

Рассмотрим влияние ошибок углового позиционирования на примере антенны, использованной в расчётах в предыдущих подразделах. Ниже приведены расчётная ДН и восстановленная ДН при измерении на расстоянии 5 м, 30 м и 100 м при наличии ошибок углового позиционирования в  $0,03^\circ$ . (Напомним, что шаг между отсчётами составляет  $1,1^\circ$ .)

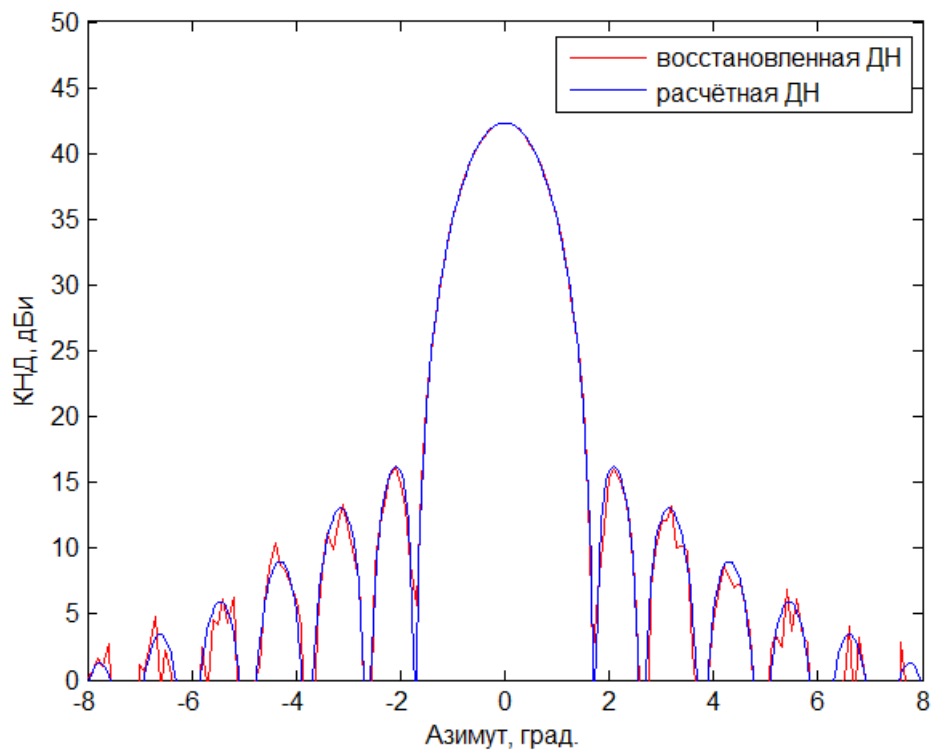


Рис.46. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля с 5 м.

Ошибки углового позиционирования  $0,03^\circ$ .

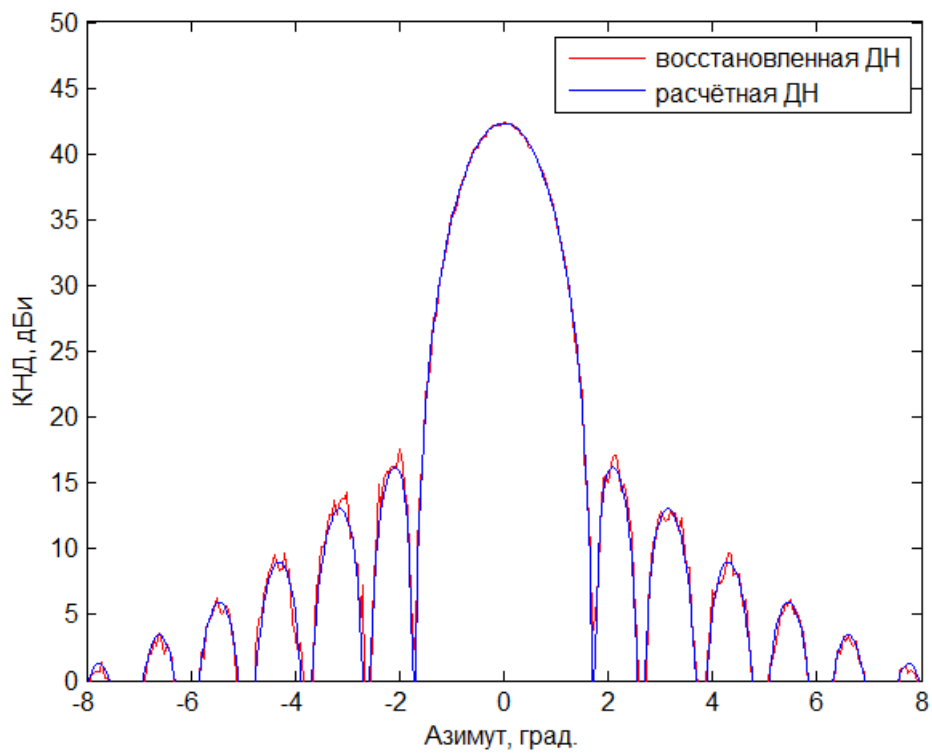


Рис.47. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля с 30 м.

Ошибки углового позиционирования  $0,03^\circ$ .

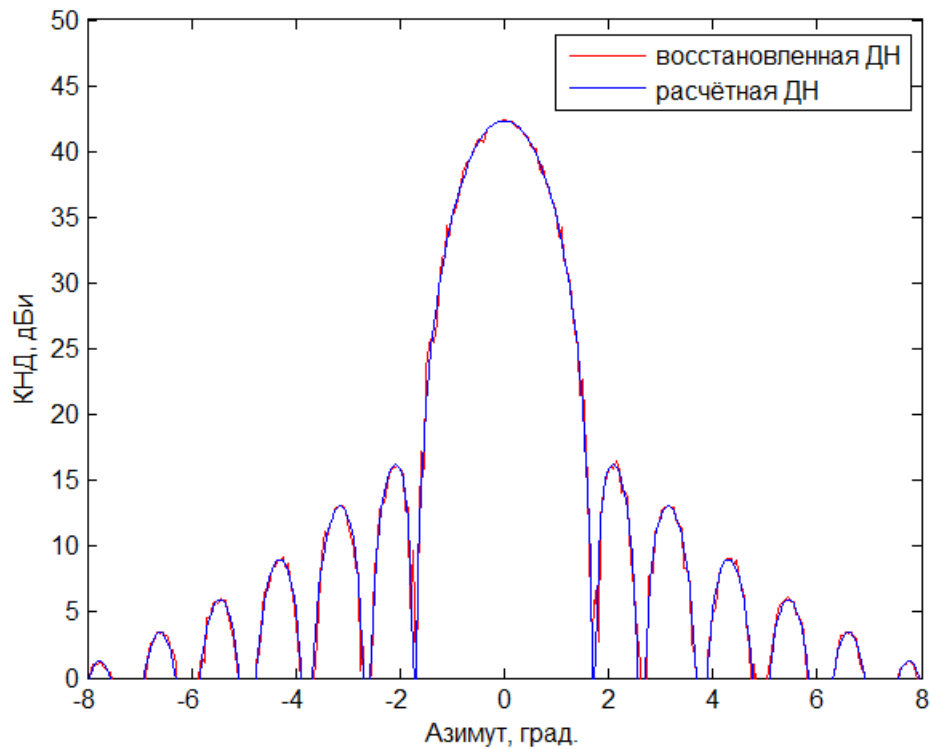


Рис.48. Расчётная ДН и восстановленная ДН при пересчёте поля со 100 м.

Ошибки углового позиционирования  $0,03^\circ$ .

Из рисунков видно, что ошибки углового позиционирования влияют на определение УБЛ примерно так же, как относительные ошибки измерений. Для 30 м погрешность определения УБЛ наибольшая (1,0 дБ), для 5 м и 100 м погрешность меньше (0,4 дБ и 0,2 дБ соответственно). Погрешность определения максимума составила около 0,02-0,03 дБ во всех трёх случаях.

Для оценки погрешности восстановления, связанной с ошибками позиционирования, можно использовать следующие эмпирические формулы, полученные на основе расчётов, представленных выше, и ряда аналогичных расчётов. Погрешность определения поля в максимуме ДН можно оценить как

$$\Delta E_{\max} \approx \frac{\Delta \theta}{\lambda / D} \text{ дБ}, \quad (228)$$

где  $\Delta \theta$  – ошибка углового позиционирования.

Погрешность определения УБЛ можно оценить исходя из следующего правила: ошибка позиционирования величиной в  $0,01 \lambda/D$  приводит к такой же погрешности определения УБЛ, как относительная ошибка измерения амплитуды в 0,1 дБ. Исходя из этого правила, можно оценить погрешность, пользуясь формулами (224) и (223).

*Ошибка определения расстояния между испытуемой и вспомогательной антеннами*

Рассмотрим вопрос о требуемой точности определения расстояния между испытуемой и вспомогательной антеннами. Поскольку рассматривается случай, когда расстояние между антеннами значительно превышает их размеры, то можно ожидать, что требование на точность определения расстояния может также измениться по сравнению с методом ближней зоны.

Рассмотрим, как изменятся коэффициенты  $k_{mn}$  (формула (48)), если вместо точного расстояния  $r$  использовать в (48) расстояние  $r + \Delta r$ . Выпишем интеграл по переменной  $x$ , полагая  $r_2 \rightarrow \infty$ :

$$k_m = \frac{1}{T_x} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{j \frac{k}{2(r+\Delta r)} x^2 + j k x (\alpha_2 - \alpha_1)} e^{-j m \frac{2\pi}{T_x} x} dx. \quad (229)$$

Раскладывая выражение  $1/(r + \Delta r)$  в ряд, получаем:

$$k_m = \frac{1}{T_x} \int_{-T_x/2}^{T_x/2} e^{j \frac{k}{2r} x^2 + j k x (\alpha_2 - \alpha_1)} e^{-j \frac{k \Delta r}{2r^2} x^2} e^{-j m \frac{2\pi}{T_x} x} dx. \quad (230)$$

Видно, что подынтегральное выражение отличается от выражения с точным значением  $r$  фазовым множителем  $\exp(-jk\Delta r x^2 / 2r^2)$ . Для того чтобы ошибка коэффициентов  $k_m$  была мала, нужно чтобы фазовый множитель был близок к единице при всех значениях  $x$ . Поскольку максимальное значение  $x$  равно примерно  $D/2$ , то данное условие можно записать в виде

$$k \Delta r (D/2)^2 / 2r^2 \ll 1, \quad (231)$$

или

$$\Delta r \ll \lambda r^2 / D^2. \quad (232)$$

Например, для случая, когда  $r \approx 10D$ , согласно полученной оценке требуемая точность задания  $r$  составляет порядка  $10\lambda$ , т.е. требования значительно менее строгие, чем при измерениях в ближней зоне.

При моделировании антенны с диаметром 150 см (из предыдущих подразделов) точность определения уровня первого бокового лепестка ухудшается на 0,05 дБ при измерении на расстоянии 30 м с ошибкой задания расстояния в 1,2 м (согласно (232)) и на 0,04 дБ при измерении на расстоянии 60 м и ошибкой задания расстояния в 4,8 м.

Например, при измерениях в безэховой камере ОАО «Радиофизика» (расстояние между испытуемой и вспомогательной антеннами – 75 м) зависимость требуемой точности задания  $r$  от размера антенны и частоты показана на следующем рисунке. Графики обрываются в районе точек, где расстояние измерения соответствует границе дальней зоны антенны, т.е.  $D_{\min} = \sqrt{\lambda r / 2}$ .

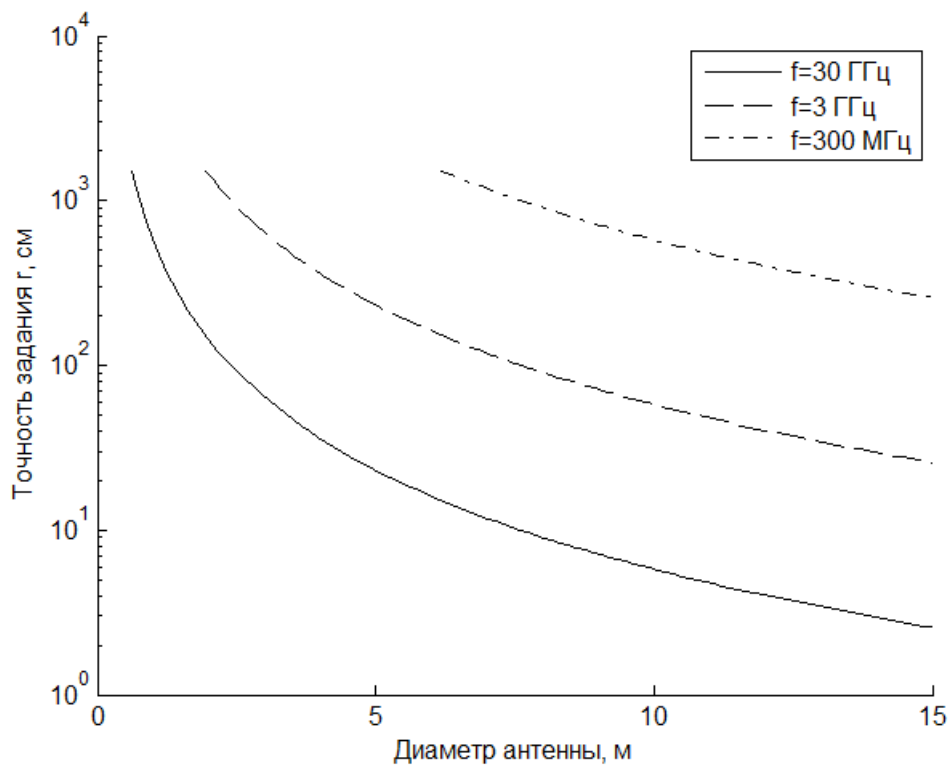


Рис.49. Требуемая точность задания  $r$  для стенда в ОАО «Радиофизика» (длина трассы – около 75 м).



Таким образом, в большинстве случаев нет необходимости измерять расстояние между испытуемой и вспомогательной антеннами с высокой точностью.

#### **4.6. Измерительный стенд и разработанная программа**

Для применения метода восстановления ДН по измерениям в зоне Френеля на практике в ОАО «Радиофизика» была проведена модернизация стенда для измерения ДН методом дальней зоны [66].

При измерениях антенна помещается на ОПУ с возможностью изменения азимута и угла места (рис.50).

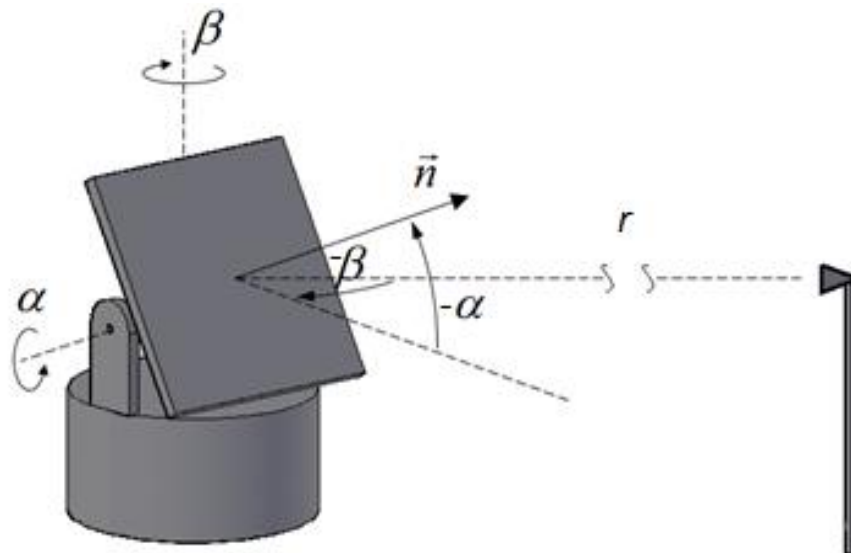


Рис.50. Опорно-поворотное устройство.

Согласно принципу взаимности, измерения могут проводиться при работе испытуемой антенны как на приём, так и на передачу. В рассматриваемом стенде испытуемая антенна работает на приём. Схема измерений, на основе которой работает стенд, показана на рис.51. Измерения проводятся в безэховой камере, где для уменьшения отражений стены покрыты радиопоглощающим материалом (РПМ). Общий вид безэховой камеры показан на рис.52 (длина трассы – около 75 м).

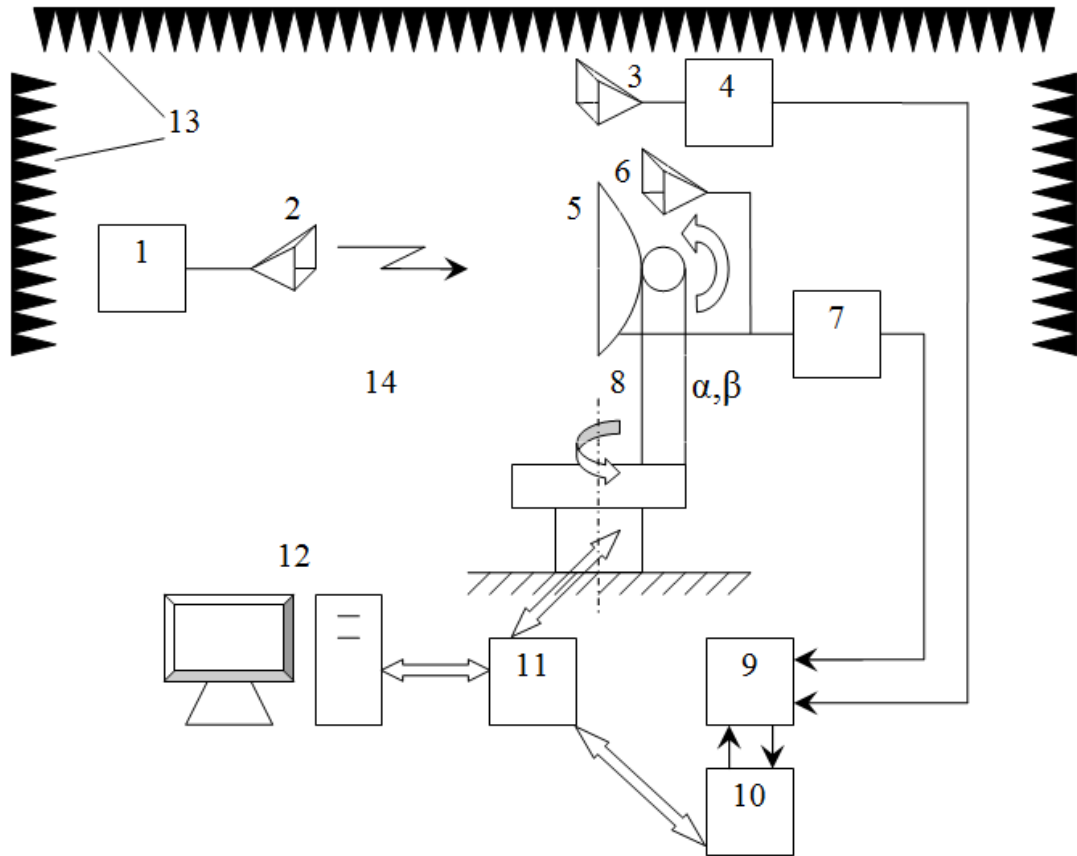


Рис.51. Схема измерений (упрощенная): 1 – генератор; 2 - вспомогательная передающая антенна; 3 - антенна опорного канала; 4 - смеситель опорного канала; 5 - испытуемая антенна; 6 - эталонная антенна; 7 - смеситель измерительного канала; 8 – ОПУ; 9 - блок усиления и коммутации; 10 - векторный анализатор цепей; 11 – контроллер; 12 – компьютер; 13 – РПМ; 14 - безэховая камера.

Испытуемая антенна 5 принимает сигнал, излучённый вспомогательной передающей антенной 2. Для измерения фазы используется опорный канал и вспомогательная приемная антенна 3. Амплитуда и фаза принятого сигнала регистрируется на приёмнике 10 и сохраняется на компьютере 12 для текущих углов позиционирования ОПУ. Измеряется несколько азимутальных или угломестных сечений поля в зоне Френеля с требуемым шагом по второму углу. После этого производится обработка данных по формулам, описанным в работе.



Рис.52. Безэховая камера ОАО «Радиофизика».

Для измерения КУ испытываемая антенна заменяется на эталонную и проводится измерение амплитуды сигнала в максимуме ДН эталонной антенны. Далее проводится вычисление КУ по описанным в работе формулам. Для измерения ДН, КУ или ЭИИМ передающей антенны необходимо модифицировать схему на рис.51 для работы на передачу.

В рамках диссертационной работы была написана программа для восстановления ДН по результатам измерений в зоне Френеля на описанном стенде. Интерфейс программы приведён в приложении. Также программа позволяет получать рекомендации по таким параметрам измерений, как количество сечений, угловой шаг и сектор измерений. Таким образом, программа может быть использована и на этапе подготовки к измерениям.

Метод измерения в зоне Френеля позволил значительно расширить возможности измерительного стенда ОАО «Радиофизика». На рис.53 показана зависимость максимального размера антенн от частоты, при измерении антенн методом дальней зоны и методом зоны Френеля на стендах с различной длиной

трассы. Красная линия соответствует стенду ОАО «Радиофизика». Например, на частоте 10 ГГц методом дальней зоны на стенде можно было измерять антенны размером до 1 м, а после модернизации стенда, позволившей проводить измерения в зоне Френеля, на нём можно измерять антенны размером до 15 м.

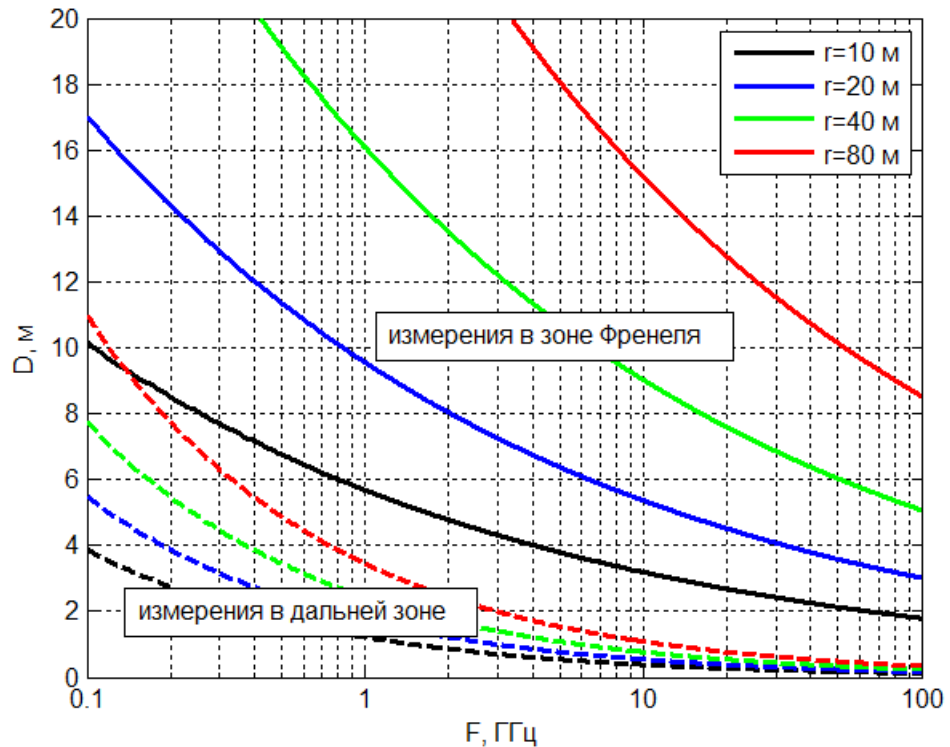


Рис.53. Зависимость максимального размера антенн от частоты, при измерении на стендах различного размера. Пунктир – измерения в дальней зоне, сплошные – измерения в зоне Френеля.

#### 4.7. Погрешности восстановления ДН для стенда ОАО «Радиофизика»

Проведём оценку погрешности восстановления ДН и КУ антенн для стенда ОАО «Радиофизика». Основные источники ошибок такие же, как при измерении методом дальней зоны. К источникам ошибок относятся: переотражения от стен безэховой камеры; случайные ошибки при регистрации амплитуды и фазы поля; ошибки, связанные с точностью позиционирования испытуемой и вспомогательной антенн; ошибки, связанные с направленными свойствами вспомогательной антенны; методические ошибки восстановления ДН.

Ошибка, связанная с направленными свойствами вспомогательной антенны, зависит от выбора вспомогательной антенны. При рассмотрении метода полагалось, что в результате измерений определяются значения электрического поля в зоне Френеля, т.е. не учитывались направленные свойства вспомогательной антенны. Такое допущение справедливо, если размер вспомогательной антенны мал по отношению к области, в которой поле испытываемой антенны существенно меняется [40], т.е.

$$bD \ll \lambda r, \quad (233)$$

где  $b$  – размер вспомогательной антенны. На практике часто пользуются эквивалентным условием, а именно, условием спада ДН вспомогательной антенны не более чем на 0,5-1 дБ на краю испытываемой антенны относительно максимума.

Влияние направленных свойств вспомогательной антенны можно оценить следующим образом. Спадание ДН вспомогательной антенны к краю испытываемой антенны эквивалентно увеличению спада амплитуды испытываемой антенны к краям на соответствующее значение. Это приводит к некоторому расширению максимума восстановленной ДН, снижению КУ и уменьшению УБЛ. Например, если ДН вспомогательной антенны спадает на 0,5-1 дБ, а уровень спада амплитудного распределения на краю испытываемой антенны составляет -10 дБ, то УБЛ определяется с ошибкой около 0,2-0,3 дБ, ширина луча – с ошибкой 0,5-1%, КУ – с ошибкой 0,05-0,1 дБ.

Ошибки, связанные с отражением от стен безэховой камеры, также в значительной степени зависят от формы ДН вспомогательной антенны. Если ДН имеет секторную форму, соответствующую геометрии стенда и размеру испытываемой антенны, и низкий УБЛ, то влияние сигналов, отражённых от стен безэховой камеры, будет в значительной степени уменьшено. В случае если удастся добиться такой формы ДН вспомогательной антенны, сигналы, отражённые от стен безэховой камеры, принимаются с уровнем до -55 дБ

относительно сигнала, соответствующего максимуму ДН испытываемой антенны. В противном случае этот уровень может увеличиваться до -25 дБ.

Случайные ошибки при регистрации амплитуды и фазы имеют величину порядка 0,05-0,2 дБ и 0,3-1°, и определяются точностью векторного анализатора (измерительная система Agilent PNA-X N5242A).

Погрешность измерения углового положения антенны с помощью поворотного устройства составляет не более 0,01°.

Методическая ошибка, связанная с алгоритмом восстановления ДН, как показано в разделе 4.4, составляет менее 0,1 дБ при определении КУ, а при восстановлении бокового излучения с уровнем до -25 дБ – не более 0,2-0,3 дБ.

При измерении КУ на погрешность влияют следующие факторы: погрешность определения КУ эталонной антенны (0,5–1 дБ), погрешность измерения коэффициента передачи (около 0,5 дБ), погрешность, обусловленная уровнем безэховости (около 0,5 дБ).

Суммарную ошибку можно оценить по формуле:

$$\delta_{\Sigma} \approx \sqrt{\sum \delta_i^2}, \quad (234)$$

где  $\delta_i$  – ошибка, связанная с  $i$ -ым фактором.

Таким образом, для антенн с электрическим размером порядка  $100-200\lambda$  в диапазоне 1–25 ГГц погрешность определения КУ можно оценить величиной в 1,0-1,5 дБ, а погрешность определения УБЛ с уровнем -25...-35 дБ – величиной 1,0-2,0 дБ.

#### **4.8. Эксперименты по проверке метода**

Точность метода восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля подтверждается результатами экспериментов, проведенных в ОАО «Радиофизика». Первый эксперимент заключался в измерении ДН антенны методом дальней зоны и методом измерения на разреженной сетке в зоне Френеля [31]. Для измерений использовалась офсетная зеркальная антенна



диаметром 0,6 м, частота 12,5 ГГц (рис.54). Расстояние дальней зоны антенны составляет 30 м. Измерения в дальней зоне проводились на расстоянии 76 м, измерения в зоне Френеля – на расстояниях 7,6 м, 4 м и 2,5 м. Сравнение измеренной и восстановленной ДН приведены на рис.55 и 56. Погрешность определения уровня первого бокового лепестка составила около 1 дБ (УБЛ составляет около -25 дБ).



Рис.54. Зеркальная антенна на ОПУ во время проведения эксперимента.

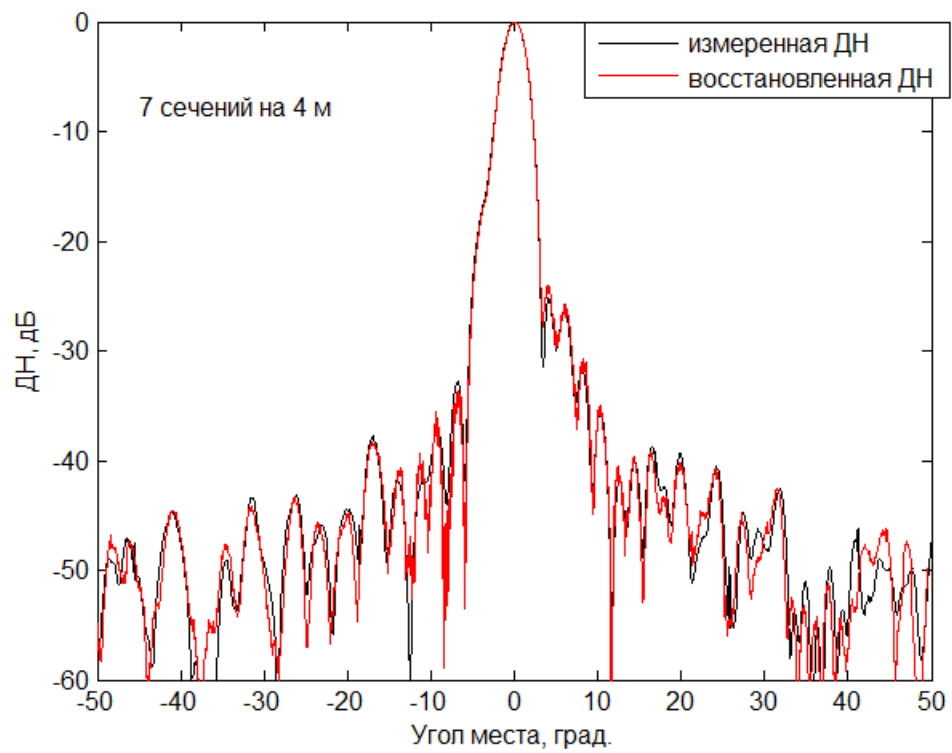


Рис.55. Сравнение измеренной и восстановленной ДН по измерениям на 4 м.

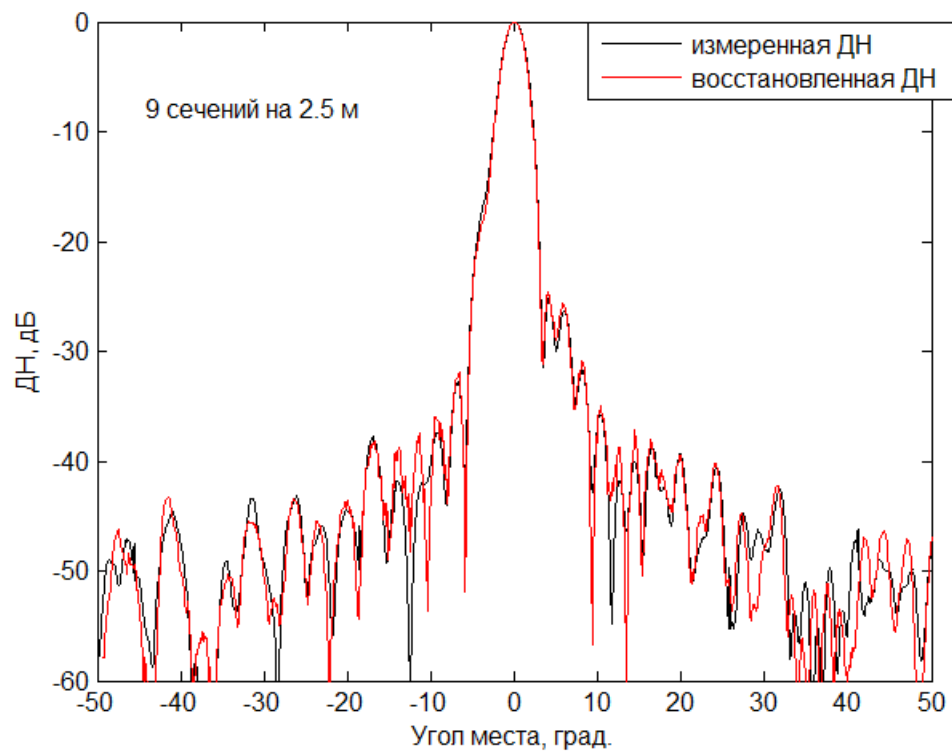


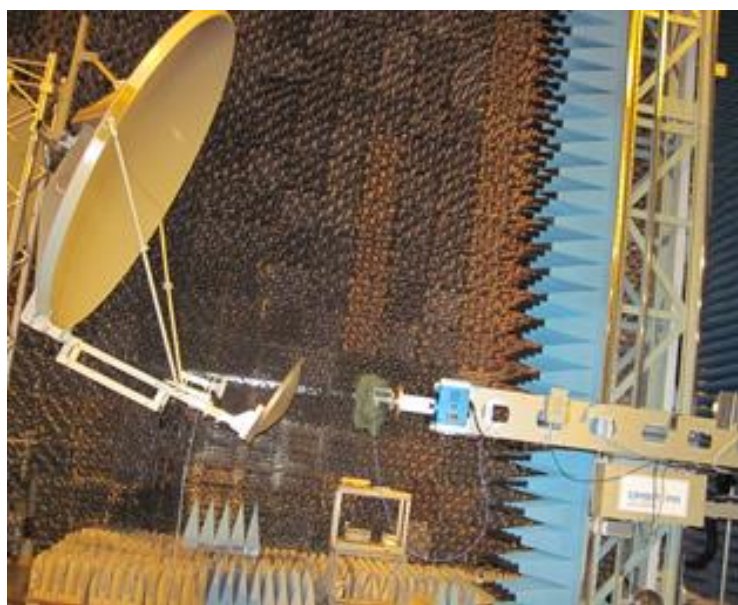
Рис.56. Сравнение измеренной и восстановленной ДН по измерениям на 2,5 м.



Второй эксперимент заключался в определении ДН зеркальной антенны с помощью амплифазометрических измерений в зоне Френеля и с помощью амплифазометрических измерений в ближней зоне с помощью планарного сканера. Использовалась офсетная двухзеркальная антенна с диаметром апертуры 1,8 м, измерения проводились на частоте 14,25 ГГц. Расстояние дальней зоны составляет 300 м. Измерения в зоне Френеля проводились на расстоянии 75 м. Фотографии антенны, установленной на измерительных стендах, приведены ниже.



Антенна, установленная на ОПУ для измерений ДН в зоне Френеля



Антенна, установленная на вертикальной опоре для измерений в ближней зоне

Рис.57. Двухзеркальная антенна на измерительных стендах.

Сравнение сечений восстановленных ДН в азимутальной и угломестной плоскостях представлены на следующих рисунках:



Рис.58. Сравнение восстановленных ДН в азимутальной плоскости.

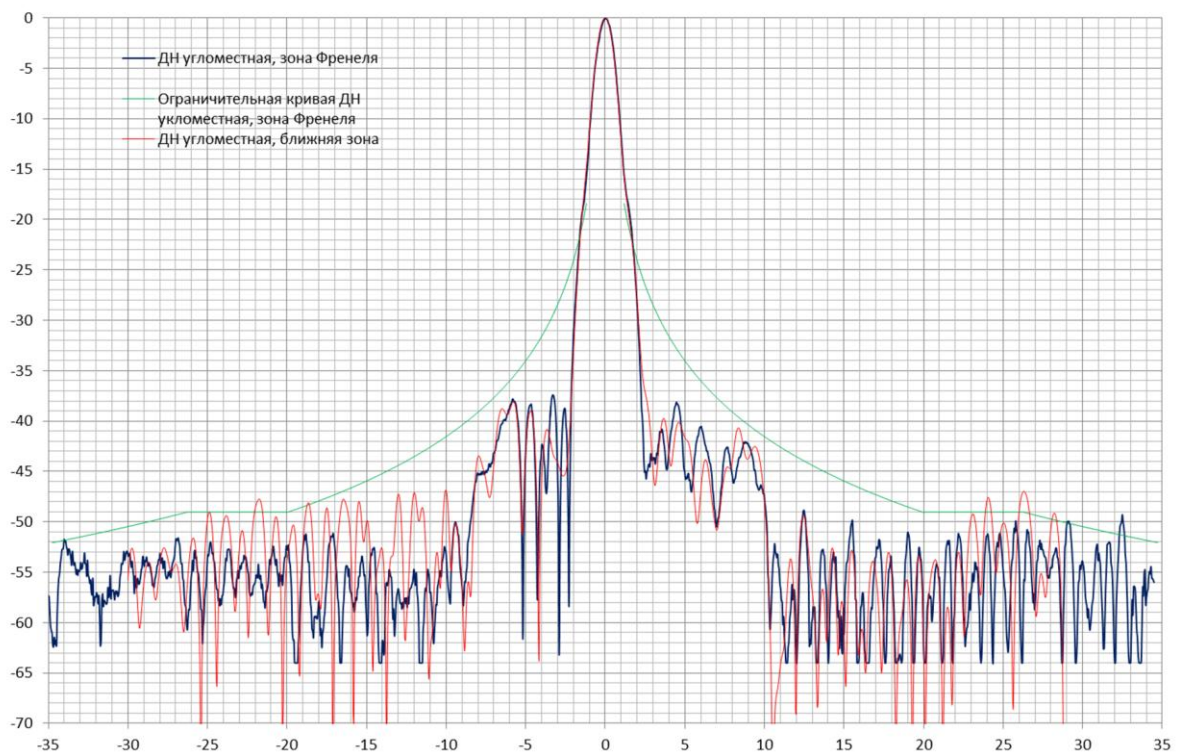


Рис.59. Сравнение восстановленных ДН в угломестной плоскости.



Различие УБЛ антенны при измерениях на двух стендах составляет около 1,5 дБ на уровне минус 35 – минус 40 дБ, что свидетельствует о хорошем соответствии результатов измерений в зоне Френеля и в ближней зоне.

#### ***4.9. Примеры измерения ДН антенн***

Приведём примеры определения ДН по измерениям в зоне Френеля на описанном стенде. В качестве первого примера рассмотрим офсетную зеркальную антенну (рис.60). Диаметр антенны 2,4 м, результаты измерений приводятся для частоты 14,25 ГГц. Расстояние дальней зоны составляет 550 м, что в 7 раз больше длины трассы стенда. Центральное угломестное сечение поля и восстановленная ДН в угломестном сечении показаны на рис.61.



Рис.60. Зеркальная антенна Ku-диапазона на ОПУ.

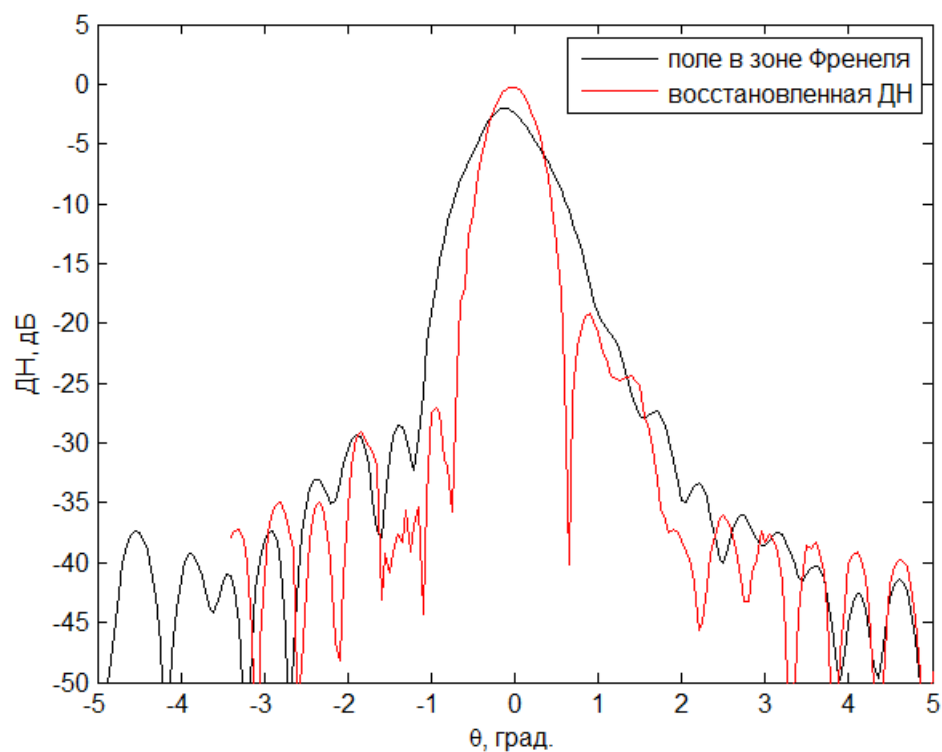


Рис.61. Центральное сечение измеренного поля в зоне Френеля и восстановленная ДН зеркальной антенны.

В качестве второго примера рассмотрим двухзеркальную антенну диаметром 5 м, частота 3,45 ГГц (рис.62). Расстояние дальней зоны составляет 600 м. Центральное азимутальное сечение поля и восстановленная ДН показаны на рис.63. Заметим, что антенна не является сфокусированной в дальнюю зону (расфокусировка была предусмотрена разработчиком антенны для обеспечения требуемой ширины луча), вследствие чего ДН в зоне Френеля является более узкой, чем восстановленная ДН.



Рис.62. Зеркальная антенна S-диапазона на ОПУ.

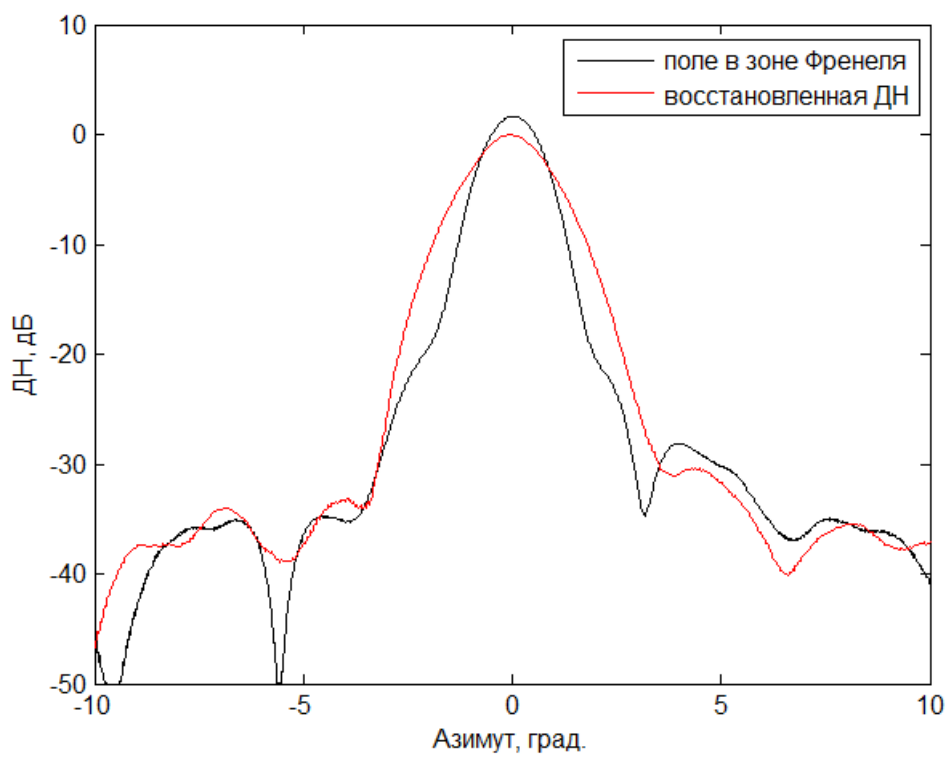


Рис. 63. Центральное сечение измеренного поля в зоне Френеля и восстановленная ДН зеркальной антенны.



В качестве заключительно примера рассмотрим волноводно-щелевую антенну, показанную на рис.64, измерения которой также проведены в зоне Френеля на описанном стенде. Антенна работает в X-диапазоне и имеет длину около 14 м. Расстояние дальней зоны составляет более 10 км и превышает размеры безэховой камеры в 200 раз.

Для определения азимутального сечения ДН антенны достаточно измерить одно сечение поля в зоне Френеля в силу того, что антенна вытянута в горизонтальном направлении [25,40]. Для уменьшения ошибок, связанных с отражением от стен безэховой камеры была разработана специальная вспомогательная антенна с ДН вытянутой формы в соответствии с геометрией испытуемой антенны [67]. Измеренное распределение поля в зоне Френеля и восстановленная ДН показаны на рис.65.



Рис.64. Волноводно-щелевая антенна X-диапазона на ОПУ.

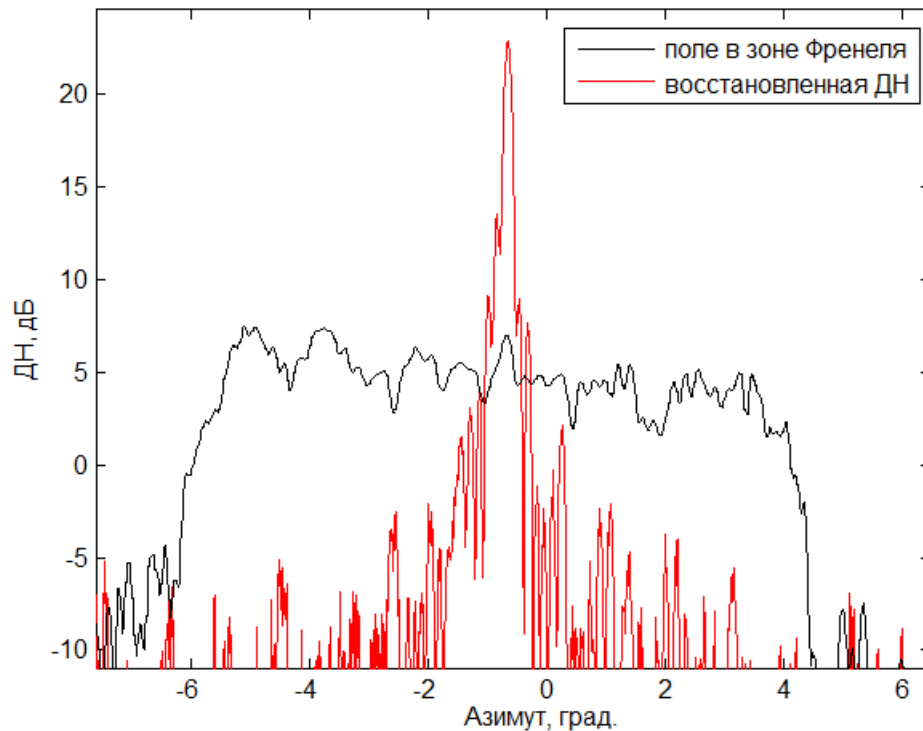


Рис.65. Центральное сечение поля в зоне Френеля и восстановленная ДН волноводно-щелевой антенны.

#### 4.10. Выводы

В данной главе рассмотрены особенности практического применения метода. Приведены соотношения для определения энергетических характеристик антенны. Описаны способы учёта несовпадения центра вращения и центра апертуры, способы определения ДН как двумерной функции. Дана оценка минимального числа сечений в зоне Френеля, необходимого для восстановления ДН. Рассмотрены основные источники ошибок, дана оценка погрешности восстановления ДН. Приведено описание измерительного стенда, используемого в ОАО «Радиофизика» для определения ДН антенн по измерениям в зоне Френеля, а также разработанной программы для восстановления ДН по результатам измерений в зоне Френеля. Приведены результаты проведённых в ОАО «Радиофизика» экспериментов, подтверждающих высокую точность предложенного метода. Описаны примеры измерения ДН антенн с помощью рассмотренного стенда.

## Заключение

В работе рассмотрен амплифазометрический метод восстановления ДН антенн по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля. Получена векторная формула для пересчёта поля, измеренного на разреженной сетке углов в зоне Френеля, в произвольную точку в зоне Френеля или в дальней зоне, обобщающая известные формулы. Показано, что аналогичные соотношения для восстановления ДН могут быть получены из известных соотношений, основанных на интегрировании поля в зоне Френеля, при интерполяции этого поля рядом Котельникова. Из этого следует, что данные методы позволяют восстанавливать ДН с одинаковой точностью, но метод с измерениями на разреженной сетке углов требует меньшего объёма измерений, т.к. он учитывает аналитические свойства поля, связанные с ограниченностью пространственного спектра.

Получена асимптотика соотношений, используемых для восстановления ДН по измерениям в ближней зоне на цилиндре, справедливая при проведении измерений в зоне Френеля. Согласно асимптотике, ДН выражается через отсчёты поля в зоне Френеля с коэффициентами в виде интегралов Френеля, что совпадает с соотношениями для восстановления ДН по измерениям на разреженной сетке. В частности, это означает, что при проведении измерений в зоне Френеля метод измерения на разреженной сетке требует такого же объёма измерений, что и метод ближней зоны, но первый имеет более простые соотношения.

Получены соотношения для определения энергетических характеристик антенны. Получена формула для определения минимального числа сечений поля в зоне Френеля, необходимого для восстановления главного сечения ДН. Дана оценка погрешности определения ДН и КУ. Приведено описание стенда ОАО «Радиофизика» для определения характеристик антенн по измерениям в зоне Френеля, а также описание разработанной программы. Приведены результаты проведённых в ОАО «Радиофизика» экспериментов по проверке точности метода и примеры измерения ДН антенн с помощью описанного стенда.



**Приложение. Интерфейс разработанной программы для восстановления ДН.****Рис.66. Окно подготовки к проведению измерений.**

Подготовка OBR DN Восстановление Результат

Файлы с измерениями амплитуды:

№	Имя файла	Путь к файлу
-3	A4M3.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
-2	A4M2.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
-1	A4M1.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
0	A4_0.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
1	A4P1.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
2	A4P2.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
3	A4P3.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\

Добавить Удалить Сортировать

Файлы с измерениями фазы:

№	Имя файла	Путь к файлу
-3	F4M3.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
-2	F4M2.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
-1	F4M1.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
0	F4_0.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
1	F4P1.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
2	F4P2.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\
3	F4P3.BLN	C:\Documents and Settings\Admin\Рабочий стол\4\

Добавить Удалить Сортировать

Добавить папку

Частота измерений, ГГц

Вертикальный размер апертуры, мм

Горизонтальный размер апертуры, мм

Дистанция измерения, м

Вертикальный сдвиг фазового центра, мм

Половина диапазона сдвига фазового центра, мм

Минимальный K, ед.

Шаг области восстановления, градусы

☒ на основе ширины апертуры

☐ в 10 раз меньше

☐ вручную:

Шаг измерений по углу места, град.

Шаг графика восстановленной ДН, град.

Расчёт

Рис.67. Окно ввода параметров измерения и файлов результатов измерения.

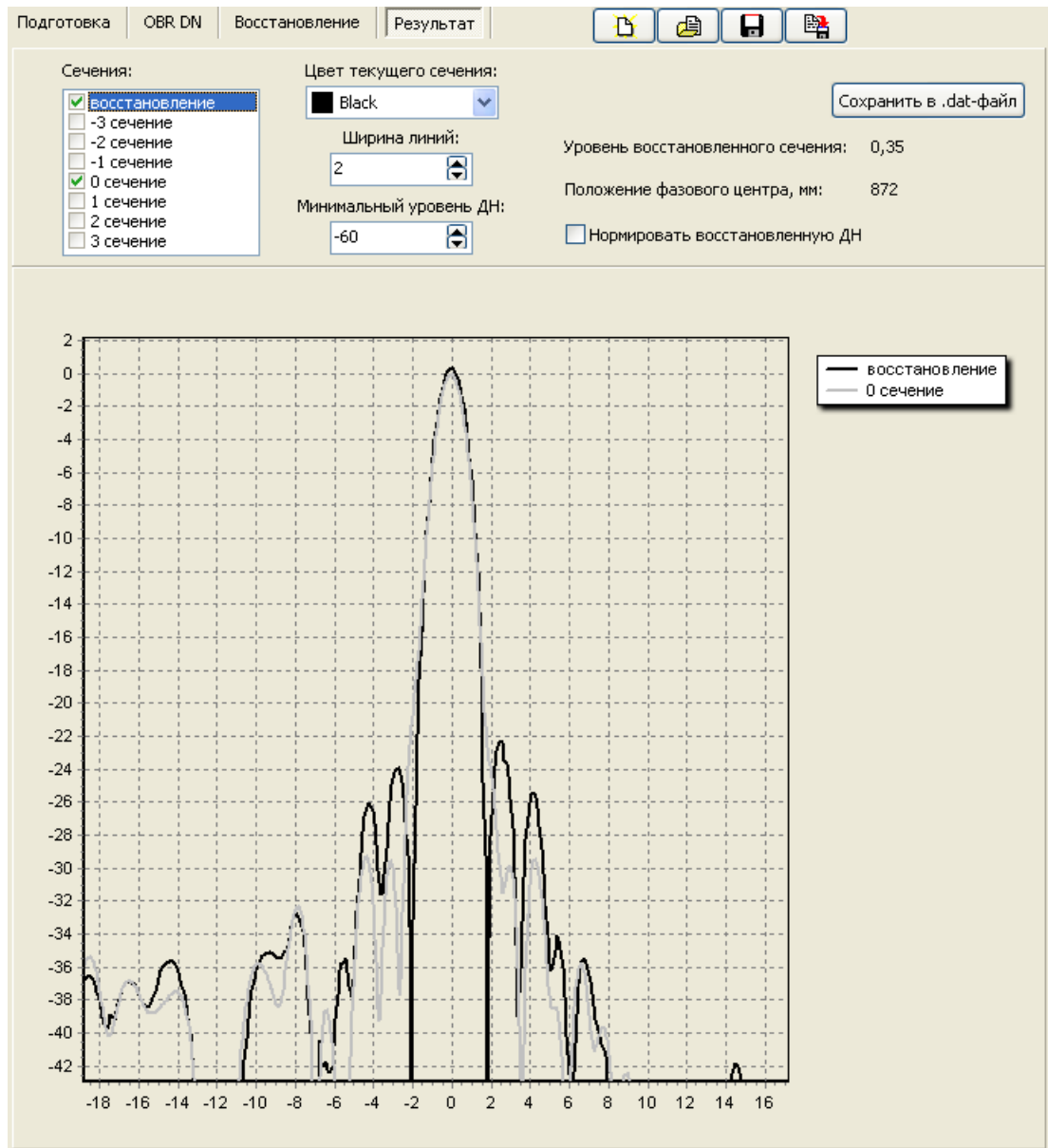


Рис.68. Окно результатов восстановления.

## Литература

1. Фрадин А.З., Рыжков Е.В. Измерения параметров антенно-фидерных устройств. – М.: Связьиздат, 1962. – 314 с.
2. Методы измерения характеристик антенн СВЧ / Л.Н. Захарьев и др.; Под ред. Н.М. Цейтлина. М.: Радио и связь. 1985. – 368 с.
3. Бахрах Л.Д., Кременецкий С.Д., Курочкин А.П., Усин В.А., Шифрин Я.С. Методы измерений параметров излучающих систем в ближней зоне. – Л.:Наука, 1985. – 272 с.
4. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов / под общ. ред. Н.П. Балабухи. М.: Наука. 2007. – 266 с.
5. Бахрах Л.Д., Курочкин А.П. Об использовании оптических систем и метода голографии для восстановления диаграмм направленности антенн СВЧ по измерениям поля в зоне Френеля. // Доклады АН СССР. – 1966. – Т. 171. №6. – С. 1309-1312.
6. Арутюнян Дж. С., Курочкин А. П. Оптическое моделирование диаграмм направленности по радиоголограмме поля в зоне Френеля // Радиотехника и электроника. – 1971. – Т. 16. № 9. – С. 1623-1628.
7. Турчин В.И., Цейтлин Н.М. К вопросу об измерении диаграмм направленности в зоне Френеля. // Доклады АН СССР. – 1972. – Т. 205. № 4. – С. 820-823.
8. Турчин В.И., Цейтлин Н.М., Чандаев А.К. Об измерении диаграмм направленности антенны по излучению источника в зоне Френеля при помощи голографии на СВЧ и обработки на ЭВМ // Радиотехника и электроника. – 1973. – Т. 18. № 4. – С. 725-734.
9. Турчин В.И., Фарфель В.А., Фогель А.Л. Погрешности фазометрического метода восстановления диаграмм направленности антенн по измерениям в

- ближней зоне. // Радиотехника и электроника. – 1976. – Т. 21. № 1. – С. 72-82.
10. Колосов Ю.А., Курочкин А.П. Восстановление диаграмм направленности антенн по полю, известному в ограниченном секторе углов в зоне Френеля. В кн.: Антенны / под ред. А.А. Пистолькорса. М.: Связь. – 1972. – Вып. 16. – С.25-37.
  11. Каплун И.В., Курочкин А.П. Исследование случайных погрешностей голографических методов определения характеристик направленности антенн. // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. 20. № 10. – С.2038-2045.
  12. Шифрин Я.С., Усин В.А. О точности голографического метода измерения диаграмм направленности антенн. В кн.: Антенны. / под ред. А.А. Пистолькорса. М.: Связь. – 1979. – Вып. 27. – С.26-38.
  13. Бахрах Л.Д., Колосов Ю.А., Курочкин А.П. Определение поля антенны в дальней зоне через значения поля в ближней зоне. В кн.: Антенны / под ред. А. А. Пистолькорса. М.: Связь. – 1976. – Вып. 24. – С.3-14.
  14. Бахрах Л.Д., Курочкин А.П.. Голография в микроволновой технике. – М.: Сов. радио, 1979.
  15. Ludwig A.C. Near-field far-field transformations using spherical-wave expansion. // IEEE Trans. Ant. and Prop. – 1971. – AP-19. № 2. – P.214-220.
  16. Leach W.M., Paris D.T. Probe compensated near-field measurements on a cylinder. // IEEE Trans. Ant. and Prop. – 1973. – AP-21. №4. – P. 435-445.
  17. Larsen F.H. Probe correction of spherical near-field measurements. // Electronics Lett. – 1977. – Vol. 13. №14. – P. 393-395.
  18. Jensen F., Larsen F.H. Spherical near-field technique. // IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. Dig. – 1977. – Vol. 15. – P. 378-381.
  19. Mittra R., Imbriale W. Gain and pattern measurements of large aperture antennas in the Fresnel zone. // IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. Dig. – 1969. – Vol. 7. – P. 40-42.

20. Geus C.A.M., Dijk J. Calculation of aperture and far-field distributions from measurements in the Fresnel zone of large reflector antennas, TH-Report, August 1978.
21. D'Elia G., Leone G., Pierri R. A new approach in the near field-far field transformation. // IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. Dig., Houston, USA. – 1983. – P. 495-498.
22. D'Elia G., Leone G., Pierri R., Schirinzi G. New Method of Far-Field Reconstruction from Fresnel Field. // Electronics Letters. – 1984. – Vol. 20. No. 8. – P. 342-343.
23. Bucci O. M., Franceschetti G., Pierri R. Reflector antennas field. An exact aperture-like approach. // IEEE Trans. Ant. and Prop. – 1981. – AP-29. – P. 580-586.
24. Hayman D. B., Bird T. S., James, G. C. Fresnel-Zone Measurement and Analysis of a Dual-Polarized Meteorological Radar Antenna. // AMTA Symposium. – 1998. – P. 127-132.
25. Evans G. Far Field Correction for Short Antenna Ranges. // AMTA Symposium. – 1985. – P. 34.1-34.9.
26. Evans G. Antenna Measurement Techniques. – Artech House, 1990. – 240 c.
27. Wu K., Parekh S. Methods of transforming antenna Fresnel region fields to far region fields. // AMTA Symposium. – 1989. – P. 11.9-11.14.
28. Sierra-Castañer M., Burgos S. // Fresnel zone to far field algorithm for rapid array antenna measurements. // EuCAP Symposium, Rome, Italy. – 2011. – P. 3251-3255.
29. Kondapaneni, F., Bártek, H. Far Field Method Antenna Measurements in Near Field. // Radioelektronika 2005, Brno University of Technology FEEC, Institute of Radio Electronics 2005.
30. Wu K., Parekh S. A method of transforming Fresnel field to far field for circular aperture antennas. // IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. Dig. – 1990. – P. 216-219.

- 31.Виленко И.Л., Медухин А.А., Сусеров Ю.А., Тоболев А.К., Шишлов А.В. Восстановление диаграммы направленности антенны по измерениям в зоне Френеля. // Антенны. – 2005. – № 1. – С. 46-52.
- 32.Oh S.-S., Kim J.-M., Yun J.-H. Antenna measurement on cylindrical surface in Fresnel region using direct far-field measurement system. // ETRI J. – 2007. – Vol. 29. No. 2. – P. 135-142.
- 33.Oh S.-S., Yun J.-H. New Method for Predicting the Electromagnetic Field at a Finite Distance Using Fresnel Field Transformation. // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2008. – Vol. 7. – P. 291-293.
- 34.Бахрах Л.Д., Каплун И.В., Курочкин А.П. Определение параметров антенн в поле неплоской облучающей волны. // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. 20. №12. – С. 2433-2442.
- 35.Birtcher C.R., Balanis C.A., Vokurka V.J. RCS Measurements, Transformations, and Comparisons Under Cylindrical and Plane Wave Illumination. // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1994. – Vol. 42. – P. 329-334.
- 36.Ying Z.H. RCS calculations, transformations and comparisons under spherical and plane wave illumination. // IEEE APS Digest. – 1990. – Vol.4. – P. 1918-1921.
- 37.Poulton G.T. An alternative plane wave synthesis method for Fresnel-zone antenna measurements. // IEEE APS Digest. – 1989. – Vol.1. – P. 90-93.
- 38.Yamaguchi R., Kimura Y., Komiya K., Cho K. A far-field measurement method for large size antenna by using synthetic aperture antenna. // EuCAP Symposium. – 2009. – P. 1730-1733.
- 39.Las Heras F., Galocha B., Besada J. L. A Method to Transform Measured Fresnel Patterns to Far-Field Based on a Least-Squares Algorithm with Probe Correction. // AMTA Symposium. – 1995. – P. 352-357.
- 40.Инденбом М. В. Восстановление диаграммы направленности линейной антенны и устранение влияния отражений по измерениям в зоне Френеля // Антенны. – 2013. – № 3. – С. 46-57.

41. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1979.
42. Боровиков В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции. – М.: Связь, 1978.
43. Krivosheev Y.V., Shishlov A.V., Tobolev A.K., Vilenko I.L. Fresnel Field to Far Field Transformation Based on Two-Dimensional Fourier Series Expansion. // Advanced Electromagnetics Symposium (AES), Paris, France. – 2012. – P. 200-207.
44. Кривошеев Ю.В., Шишлов А.В. Развитие метода восстановления диаграмм направленности антенн по измерениям на разреженной сетке углов в зоне Френеля. // Радиотехника. – 2012. – №11. – С. 47-53.
45. D'Elia G., Leone G., Pierri R., Valentino D. Numerical evaluation of the near field using sampling expansions. // IEEE APS Digest. – 1982. – Vol.20. – P. 241-244.
46. Кинбер Б.Е. Азюкин А.В., Виленко И.Л., Шишлов А.В. Численные расчеты диаграмм зеркальных антенн. Метод Филона; преимущества и границы применимости. В кн.: Вопросы дифракции и распространения радиоволн. – М.: МФТИ. – 1991. – С. 5-15.
47. Сканирующие антенные системы СВЧ. Т. 1. / Под ред. Р.К.Хансена. – М.: Советское радио, 1966.
48. Кривошеев Ю.В., Шишлов А.В. Об эквивалентности двух методов восстановления ДН по измерениям на сфере в зоне Френеля. // Радиотехника. – 2014. – №1. – С. 110-112.
49. Ojeba E. B., Walter C. H. On the cylindrical and spherical wave spectral content of radiated electromagnetic fields. // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1979. – Vol. 27. – P. 634-639.
50. Бахрах Л.Д., Будаев А.Г., Булкин В.М. и др. Восстановление диаграммы направленности излучающей системы по измерениям ближнего поля на



- цилиндрической поверхности. // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 249. №3. – С. 601-605.
- 51.Будай А.Г., Булкин В.М., Колосов Ю.А. и др. Восстановление диаграммы направленности антенны по измерениям ближнего поля на цилиндрической поверхности. В кн.: Радиоголография и оптическая обработка информации в микроволновой технике. – Л.: Наука. 1980. С.63-79.
  - 52.Bucci O., Gennarelli C. Use of sampling expansions in near-field-far-field transformation: the cylindrical case. // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1988. – Vol. 36. – P. 830-835.
  - 53.Hansen J.E. Spherical Near-Field Antenna Measurements. – Peter Peregrinus Ltd., 1988.
  - 54.Yaghjian A. D. An overview of near-field measurements. // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1986. – AP-34. – P. 30-45.
  - 55.Stratton J. A. Electromagnetic Theory. – New York: McGraw-Hill, 1941.
  - 56.Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974.
  - 57.Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979.
  - 58.Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990.
  - 59.Krivosheev Yu.V., Shishlov A.V. Fresnel region asymptotics of near-field to far-field transformation: the cylindrical case. // International conference on antenna theory and techniques (ICATT), Odessa, Ukraine. – 2013. – P. 586-588.
  - 60.Bucci O., Franceschetti G. On the spatial bandwidth of scattered fields. // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1987. – AP-35. – P. 1445-1455.
  - 61.Bucci O., Gennarelli C., Savarese C. Representation of electromagnetic fields over arbitrary surfaces by a finite and nonredundant number of samples. // IEEE Trans. Antennas Propagat. – 1998. – Vol. 46. – P. 351-359.
  - 62.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977.

63. Yaghjian A. D. A simplified approach to probe-corrected spherical near-field scanning. // IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. Dig. – 1984. – Vol. 22. – P. 670-673.
64. Егоров Е.Н., Основы микроэлектроники СВЧ. – Учебное пособие по курсам «Антенно-фидерные устройства» и «Радиотехнические устройства и системы» (часть II). – М.: Изд. МИЭТ, 1983.
65. Krivosheev Y.V., Shishlov A.V., Tobolev A.K., Vilenko I.L. Fresnel Field to Far Field Transformation Using Sparse Field Samples. // International conference on mathematical methods in electromagnetic theory (MMET), Kharkiv, Ukraine. – 2012. – P. 237-242.
66. Денисенко В.В., Козлов Ю.И., Соловьев Г.К., Тоболев А.К., Шабанов Р.И., Шишлов А.В. Радиоизмерения в специализированных безэховых камерах. // Радиотехника. – 2008. – №10. – С. 8-15.
67. Елизаров С.В., Корчемкин Ю.Б., Смольникова О.Н., Тоболев А.К. Создание измерительных антенн с диаграммой направленности специальной формы. // Антенны. – 2011. – №10. – С. 53-57.