Лаптев Владислав

Домашняя работа к заданиям 17, 35-37, 4.1

№17

Дана выборка:

X_1	4	0	-1	3	4
X_2	2	-3	-2	1	2
X_3	3	2	2	1	-3

Найти главные направления и дисперсии по главным компонентам.

Решение:

$$X=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1) $\bar{X} = (2, 0, 1)$

$$X_c=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2) $$C = X_c^T \cdot X_c = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & 21 & -9 \\ 21 & 22 & -9 \\ -9 & -9 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{N-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 22/4 & 21/4 & -9/4 \\ 21/4 & 22/4 & -9/4 \\ -9/4 & -9/4 & 22/4 \end{pmatrix}$$

3) $\det(C-\lambda I) = \begin{pmatrix} 22-\lambda & 21 & -9 \\ 21 & 22-\lambda & -9 \\ -9 & -9 & 22-\lambda \end{pmatrix} = (22-\lambda)^3 + 1701 + 1701 -$

$-81(22-\lambda) - 81(22-\lambda) - 441(22-\lambda) = -\lambda^3 + 66\lambda^2 - 849\lambda + 784 =$

$= -(\lambda-1)(\lambda^2 - 65\lambda + 784) = -(\lambda-1)\cdot(\lambda-16)(\lambda-49) = 0$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 16, \ \lambda_3 = 49$

$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \frac{\sqrt{11}}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

v_1, v_2, v_3 – главные компоненты

$\frac{1}{N-1}\cdot\lambda_1 = \frac{1}{4}, \ \frac{1}{N-1}\lambda_2 = 4, \ \frac{1}{N-1}\lambda_3 = \frac{49}{4}$ – дисперсия по главным компонентам

№35

Рассмотрим задачу восстановления регрессии с квадратичной функцией потерь $L(y', y) = (y'-y)^2$.

Доказать, что если $f^*(x) = \arg\min E((Y-c)^2 | X=x)$, то $f^*(x) = E(Y|X=x)$ (регрессионная ф-ия). Чему тогда равен средний риск $R(f^*)$?

Решение:

$E((Y-c)^2 | X=x) = E(Y^2 - 2cY + c^2 | X=x) = E(Y^2|X=x) - 2c\cdot E(Y|X=x) + c^2$

Прибавим, а затем вычтем $E(Y|X=x)^2$, тогда

$c^2 - 2cE(Y|X=x) + E(Y|X=x)^2 + E(Y^2|X=x) - E(Y|X=x)^2 =$

$= (c - E(Y|X=x))^2 + D(Y|X=x)$

min достигается при $c = E(Y|X=x)$ ч.т.д.

Средний риск при $f^*(y) = E(Y|X=x)$:

$R(f^*) = \iint\limits_{X\,Y} (y - f^*(x))^2 p(y|X=x)\,dy\,p(x)\,dx =$

$$\int_X E\left((Y-f^*(x))^2 \mid X=x\right) p(x)dx = \int_X E\left((Y-E(Y \mid X=x))^2 \mid X=x\right) \cdot$$

$$\cdot p(x)\,dx = \int_X D(Y \mid X=x)\, p(x)\,dx = E_X D_Y(Y \mid X)$$

№ 36

Рассмотрим задачу восстановления регрессии с функцией потерь $L(y', y) = |y' - y|$. Доказать, что минимум средний риск доставляет при этом условная медиана $f(x) = \text{median}(Y \mid X=x)$.

Решение:

Нужно док-ть, что $\arg\min E(|Y-c| \mid X=x) = \text{median}(Y \mid X=x)$

$$E(|Y-c| \mid X=x) = \int_Y |Y-c| f_Y(x)dx = \int_{-\infty}^{c} (c-y) f_Y(x)dx +$$

$$+ \int_c^{+\infty} (y-c) f_Y(x)dx = \int_{-\infty}^{c} c f_Y(x)dx - \int_{-\infty}^{c} y f_Y(x)dx + \int_c^{+\infty} y f_Y(x)dx -$$

$$- \int_c^{+\infty} c f_Y(x)dx \quad (1)$$

Продифф-ем по c:

$$\frac{d(1)}{dc} = \int_{-\infty}^{c} f_Y(x)dx - \int_c^{+\infty} f_Y(x)dx$$

Нужно взять c, чтобы $F_Y(c) = 0.5$, а это медиана, т.е. $c = \text{median}(Y \mid X=x)$, ч.т.д.

№ 37

А как должна выглядеть ф-ция потерь, чтобы минимум средний риск давала условная мода?

Решение:

Индикаторная ф-ция

Упр 4.1

1) Доказать, что можно положить $v_0 = \bar{x}$. Описать мн-во всех возможных v_0 доставляющих минимум суммы квадратов расстояний до искомого многообразия.

Решение:

$$v_0 = \underset{v_0 \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{dist}^2(x^{(i)}, W_0) = \bar{x}$$

< Д:

$$D = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{dist}^2(x^{(i)}, W_0) = \sum_{i=1}^{N} \|x^{(i)} - v_0\|^2 = \sum_{i=1}^{N} (x^{(i)} - v_0)^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial v_0} = -2\sum_{i=1}^{N}(x^{(i)} - v_0) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{N}(x^{(i)} - v_0) = 0$$

$$x^{(1)} - v_0 + x^{(2)} - v_0 + \ldots + x^{(N)} - v_0 = 0 \rightarrow v_0 = \frac{1}{N}(x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots + x^{(N)}) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x^{(i)} = \bar{x}$$

Убедимся, что это точка минимума: $\frac{\partial^2 D}{\partial \vartheta_0^2} = 2\sum_{i=1}^{N} 1 = 2N > 0$,

значит, $\vartheta_0 = \bar{x}$ ч.т.д.