Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

КУРСОВАЯ РАБОТА

НА ТЕМУ:

Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса в одномерной задаче расчета течения в канале

Студент ФН2-71Б (Группа) | (Подпись, дата) | В. А. Лосев (И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы, ассистент каф. ФН-2 | (Подпись, дата) | А. Ю. Попов (И. О. Фамилия)

2023 г.

Оглавление

1. Введение

В гидродинамике турбулентность — это движение жидкости, характеризующееся хаотическими изменениями давления и скорости потока, в отличие от ламинарного потока, который возникает, когда жидкость течет в параллельных слоях, без разрыва между этими слоями. Турбулентные течения распространены необычайно широко — как в природе (дым из трубы, течения рек и др.), так и в технике (течения в насосах, компрессорах, трубопроводах).

Турбулентные течения предъявляют более высокие требования к численным расчетам в силу быстрого изменения различных величин в потоке. Возможно прямое решение системы уравнений гидродинамики для турбулентного случая (Direct numerical simulation, DNS), но для снижения вычислительной нагрузки в практических расчетах часто используются различные модели турбулентности. Существует несколько больших групп подходов: осреднение по Рейнольдсу (Reynolds-averaged Navier–Stokes, RANS), модели рейнольдсовых напряжений, стохастические модели, моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES).

Данная работа посвящена описанию турбулентных течений путем применения *осреднения по Рейнольдсу* к уравнениям Навье — Стокса на примере решения одномерной задачи о течении вязкой жидкости в канале. Рассматриваются 3 модели различного уровня сложности: алгебраическая (модель Смагоринского), однопараметрическая (Спаларта — Аллмараса), а также двухпараметрическая модель $k - \varepsilon$, основной принцип которых заключается в решении проблемы замыкания, о которой будет сказано ниже.

2. Осреднение по Рейнольдсу

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и несжимаемости

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \mu\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}, \\ \nabla\cdot\vec{v} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\vec{v}$ — векторное поле скоростей жидкости, м/с; p — поле давления, Па; ρ — плотность жидкости, кг/м^3; μ — коэффициент динамической вязкости, Па $\cdot$ с; $\vec{g}$ — векторное поле массовых сил.

При рассмотрении турбулентных течений неизвестные величины можно представить в виде суммы средних полей и небольших пульсаций относительно них:

$$v_i(\vec{r},t) = U_i(\vec{r},t) + u_i(\vec{r},t), \quad p(\vec{r},t) = P(\vec{r},t) + p\prime(\vec{r},t). \tag{2}$$

Здесь $i = 1,\ldots,d$, где d — размерность задачи. При этом используем следующие правила осреднения:

$$\langle v_i\rangle = U_i, \quad \langle U_i\rangle = U_i, \quad \langle u_i\rangle = 0,$$
$$\langle p\rangle = P, \quad \langle P\rangle = P, \quad \langle p\prime\rangle = 0.$$

Таким образом, в результате осреднения с учетом введенных правил вместо уравнения Навье — Стокса получаем *уравнение Рейнольдса* (в дальнейшем мы не рассматриваем массовые силы)

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial\langle u_j u_i\rangle}{\partial x_j}. \tag{3}$$

В уравнении Рейнольдса присутствует тензор пульсаций скоростей (тензор напряжений Рейнольдса) $\tau_{ij} = \langle u_i u_j\rangle$, его компоненты называют рейнольдсовыми напряжениями. Они имеют физический смысл компонент осредненного переноса количества пульсационного движения (импульса) пульсационными скоростями [1].

Тензор напряжений Рейнольдса нельзя выразить из ранее осредненных характеристик. Таким образом, в системе увеличивается количество неизвестных переменных, то есть образуется проблема замыкания. Она заключается в том, что при попытке выразить $\langle u_i u_j\rangle$ с помощью эволюционного уравнения система всегда будет недоопределена.

При моделировании турбулентности, в соответствии с гипотезой Буссинеска о турбулентной вязкости, тензор напряжений Рейнольдса можно представить в виде [2]

$$-\langle u_i u_j\rangle = \nu_t\left(\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}k\delta_{ij},$$

где ν_t — турбулентная вязкость (также называется вихревой вязкостью). В отличие от молекулярной вязкости ν, турбулентная не имеет физического смысла, а является по сути удобной переменной для описания турбулентного течения.

Таким образом, основные модели турбулентности основаны на решении проблемы замыкания путем нахождения турбулентной вязкости ν_t с помощью алгебраических соотношений или дифференциальных уравнений.

3. Модель Смагоринского

Самый простой подход к рассмотрению турбулентных течений состоит в том, чтобы предположить, что турбулентная вязкость и энергия турбулентных пульсаций

$k = \langle u^2/2 \rangle$ для данного течения есть величины постоянные. В этом случае уравнение Рейнольдса (3) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu + \nu_t\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}. \tag{4}$$

Будем рассматривать относительно простой случай течения в канале с единственной ненулевой компонентой поля скоростей $\vec{U} = (u_x, 0)$, которая изменяется только в направлении оси Oy. При этом $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{l}$, где p_1 и p_2 — давления на входе в канал и выходе из него, соответственно, а l — длина канала.

В стационарном случае уравнение примет вид

$$\frac{1}{\rho}\frac{p_2 - p_1}{l} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu + \nu_t\right)\frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{5}$$

Модель Смагоринского является алгебраической. Для решения проблемы замыкания вводится параметр l_m, называемый длиной пути смешения, впервые предложенный Л. Прандтлем. Под длиной пути смешения понимают расстояние, проходимое жидкой частицей поперек потока, прежде чем происходит ее смешение с окружающей жидкостью. Данное предположение применяется обычно к простым потокам, в которых средняя скорость имеет тольку одну компоненту (пограничные слои, каналы, трубы) [3]. В случае течения в канале имеем следующее соотношения для l_m:

$$l_m = kz, \tag{6}$$

где $k = 0.41$ — константа Кармана, z — расстояние от точки до ближайшей стенки канала. При этом для учета взаимодействия молекулярного и турбулентного переноса импульса в непосредственной близости от стенки была предложена модификация пути смешения за счет введения демпфирующей функции. В таком случае l_m имеет следующий вид:

$$l_m = kz(1 - e^{-y^+/26}).$$

Смысл параметра y^+ будет описан в разделе 4. Для более точного результата следует ограничить максимальную длину пути смешения по правилу $(l_m)_{max} \approx 0.09\delta$, где δ — толщина турбулентного пограничного слоя [4].

Смагоринский предложил выразить вихревую вязкость следующим образом:

$$\nu_t = l_m^2 \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}, \tag{7}$$

где $\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\langle U_i\rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial\langle U_j\rangle}{\partial x_i}\right)$. Поскольку для рассматриваемой задачи $\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = 0$, получаем

$$2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij} = \left(\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)^2.$$

Таким образом,

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right|.$$

Для построения разностной схемы интегро-интерполяционным методом проинтегрируем уравнение (5):

$$\int\limits_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} dx \int\limits_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\nu + \nu_t\Big)\frac{\partial u_x}{\partial y} dy = \int\limits_{y_{i-\frac{1}{2}}}^{y_{i+\frac{1}{2}}} dy \int\limits_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} dx,$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x (W_{j+\frac{1}{2}} - W_{j-\frac{1}{2}}) = \Delta y \frac{1}{\rho}\left(p(x_{j+\frac{1}{2}}) - p(x_{j-\frac{1}{2}})\right),$$

где $W_{i+\frac{1}{2}} = (\nu + \nu_t)\, \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big|_{y=y_{i+\frac{1}{2}}}$.

Будем искать стационарное решение, решая нестационарную задачу методом счета на установление. В результате получаем

$$\frac{u_i - \check{u}_i}{\tau} = \frac{1}{\Delta y}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta y}(\nu + \nu_t)\Big|_{y=y_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta y}(\nu + \nu_t)\Big|_{y=y_{i-\frac{1}{2}}}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{l}, \tag{8}$$

где $\Delta y = h$ (шаг сетки по пространству), а $(\nu + \nu_t)\,|_{y=y_{i+\frac{1}{2}}} = \nu + \frac{\nu_{t\,i} + \nu_{t\,i+1}}{2}$, Δp – перепад давления в канале, l — длина канала, ν — кинематическая вязкость среды. Обозначим шаг по времени за τ, а $\check{u}_i$ — решение с предыдущего временного слоя. Граничные условия при моделировании течения в канале будут иметь следующий вид: $u_0 = 0,\ u_n = 0$. Данное уравнение будем использовать и в следующих моделях для нахождения поля скоростей.

При решении системы для разностной схемы (8) возникает проблема нелинейности из-за слагаемого $\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\left(\frac{\nu t_i + \nu t_{i+1}}{2} + \nu\right)$, поскольку величина ν_t также зависит от скорости. Для избавления от нелинейности будем вычислять ν_t, используя значения с предыдущего временного слоя:

$$\nu_{t\,i} = l_{mi}^2 \left| \frac{\check{u}_{i+1} - \check{u}_{i-1}}{2h} \right|.$$

Далее выполняем решение линейной системы для нахождения вектора $\vec{u}$. Шаги по времени выполняются до сходимости. В качестве критерия останова можно взять $|\vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)}| \leqslant \varepsilon$.

4. Параметры турбулентного течения

Течения в турбулентном режиме характеризуются набором параметров, отражающих интенсивность перемешивания в различных областях. Одним из важных параметров в моделях турбулентности является y^+ — расстояние от стенки канала, нормализованное по масштабу вязкости:

$$y^+ \equiv \frac{u_\tau z}{\nu}. \tag{9}$$

Выпишем отдельно соотношения для u_τ и τ_w. Напряжение сдвига у стенки (wall shear stress) имеет следующий вид:

$$\tau_w \equiv \rho\nu \left(\frac{d\langle U \rangle}{dy} \right) \bigg|_{y=0}.$$

Скорость трения (friction velocity) представляется в виде

$$u_\tau \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}.$$

Параметр y^+ является безразмерным, он имеет важное оценочное значение. В зависимости от его значения рассматриваемое пространство течения разделяется на подобласти (рисунок 1):

- вязкий подслой ($y^+ < 5$) — сдвиговое напряжение Рейнольдса незначительно по сравнению с вязким напряжением;
- буферный слой ($5 < y^+ < 30$) — переходная область между частями потока, в которых преобладает вязкость, и частями потока, в которых преобладает турбулентность;
- область логарифмического закона ($y^+ > 30$) — область преобладания турбулентности;
- наружный слой ($y^+ > 50$) — область перекрытия между внутренним и внешним слоем (при больших значениях числа Рейнольдса).

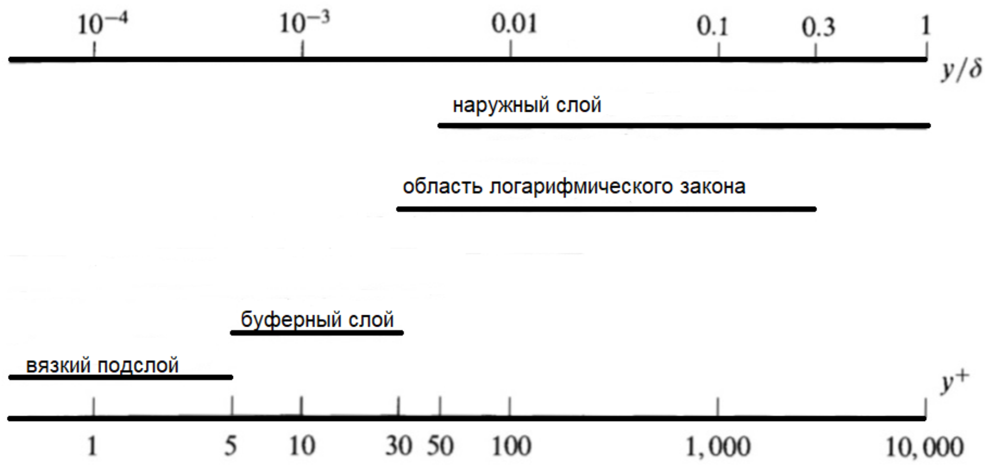

Рис. 1. Разделение области течения в зависимости от y^+

5. Модель Спаларта — Аллмараса

Данная модель является более поздней по сравнению с моделью Смагоринского, относится к классу однопараметрических моделей. Для нахождения турбулентной вязкости ν_t решается одно дополнительное дифференциальное уравнение.

Формула для вычисления турбулентной вязкости имеет следующий вид:

$$\nu_t = \widetilde{\nu} f_{v1}. \tag{10}$$

Для ее вычисления решаем уравнение для $\widetilde{\nu}$

$$\frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial t} + u_j \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_j} = \widetilde{S} C_{b1} \left(1 - f_{t2}\right) \widetilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \widetilde{\nu}) \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \left(\frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_i} \right)^2 \right\} - \left(C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{k^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\widetilde{\nu}}{d} \right)^2. \tag{11}$$

Входящие в данное уравнение величины имеют следующий вид для стандартной модели Спаларта — Аллмараса:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\widetilde{\nu}}{\nu}, \quad \widetilde{S} = S + \frac{\widetilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2},$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r),$$

$$r \equiv \frac{\nu}{S k^2 d^2}, \quad f_{t2} = C_{t3} \exp\left(-C_{t4} \chi^2\right), \quad S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}},$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Также в уравнение для $\widetilde{\nu}$ входят следующие константы, полученные эмпирически или методом подгонки:

$$\sigma = \frac{2}{3}, \quad C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad k = 0.41, \quad C_{w1} = C_{b1}/k^2 + (1 + C_{b2})/\sigma,$$

$$C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{v1} = 7.1, \quad C_{t1} = 1, \quad C_{t2} = 2, \quad C_{t3} = 1.1, \quad C_{t4} = 2.$$

По предположению Спаларта, для лучших результатов следует принять $C_{t3} = 1.2$, $C_{t4} = 0.5$ [5].

Для стационарного одномерного случая уравнение для $\widetilde{\nu}$ принимает следующий вид:

$$\widetilde{S} C_{b1} \left(1 - f_{t2}\right) \widetilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \widetilde{\nu}) \frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \left(\frac{\partial \widetilde{\nu}}{\partial x_i} \right)^2 \right\} - \left(C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{k^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\widetilde{\nu}}{d} \right)^2 = 0. \tag{12}$$

При этом функция f_{t2} принимает очень малые значения, поэтому слагаемые с ней можно исключить из уравнения (11). Граничные условия для уравнения (11) имеют вид $\widetilde{\nu}_0 = 0,\ \widetilde{\nu}_n = 0$.

Будем искать стационарное решение, решая нестационарную задачу методом счета на установление. Запишем разностную схему для уравнения для $\widetilde{\nu}$ (уже в линеаризованном относительно последней виде)

$$\frac{\widetilde{\nu}_i - \check{\widetilde{\nu}}_i}{\tau} = \widetilde{S}C_{b1}(1 - f_{t2})\widetilde{\nu}_i - \left(C_{w1}f_w - \frac{C_{b1}}{k^2}f_{t2}\right)\left(\frac{\check{\widetilde{\nu}}_i\widetilde{\nu}_i}{d^2}\right) + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\widetilde{\nu}_{i+1} - 2\widetilde{\nu}_i + \widetilde{\nu}_{i-1}}{h^2}(\nu + \check{\widetilde{\nu}}_i) + (1 + C_{b2})\left(\frac{\check{\widetilde{\nu}}_{i+1} - \check{\widetilde{\nu}}_{i-1}}{2h}\right)^2\right), \quad (13)$$

где $\widetilde{\nu}_i$ — значение, которое необходимо найти в результате решения линейной системы, а $\check{\widetilde{\nu}}_i$ — значения, взятые с прошлого шага по времени. В одномерном случае величину S вычисляем как $\left|\dfrac{\check{u}_{i+1} - \check{u}_{i-1}}{2h}\right|$, где $\check{u}_i$ — скорость с прошлого временного слоя. Для нахождения поля скоростей решаем уравнение (5), подставляя при этом ν_t, вычисленную по формуле (10).

Разностная схема (13) приводит к линейной системе относительно ν. Процесс счета предполагает решение на каждом шаге по времени уравнений для ν и u с использованием значений с прошлого временного слоя и выполняется до достижения сходимости.

6. Модель k–ε

Рассмотрим широко распространенную стандартную k–ε-модель турбулентности. Данная модель является двухпараметрической. Такие модели основаны на рассмотрении двух дополнительных турбулентных переменных, в данном случае — кинетической энергии турбулентности k и скорости диссипации энергии ε. Турбулентная вязкость выражается через эти две величины следующим образом:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Уравнения для k и ε выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (kU_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P - \varepsilon, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon U_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{\varepsilon 1}\frac{P\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (15)$$

В уравнения входят следующие константы:

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.00, \quad \sigma_\varepsilon = 1.30, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92.$$

Также в уравнения входит величина P, называемая производством кинетической энергии и задаваемая в виде

$$P = -\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}.$$

При рассмотрении одномерной задачи

$$P = \nu_t \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2.$$

Для нахождения u_x используем уравнение (5).

Запишем разностные схемы для нахождения k и ε. Будем искать стационарные решения, решая нестационарную задачу методом счета на установление:

$$\frac{k_i - \check{k}_i}{\tau} = \frac{k_{i+1} - 2k_i + k_{i-1}}{h^2} \left(\frac{\check{\nu}_i}{\sigma_k} \right) + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{\check{\nu}_{i+2} - \check{\nu}_i}{2h} + \frac{\check{\nu}_{i+1}(\check{u}_{i+1} - \check{u}_{i-1})^2}{4h^2} - \check{\varepsilon}_i,$$

$$\frac{\varepsilon_i - \check{\varepsilon}_i}{\tau} = \frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}}{h^2} \left(\frac{\check{\nu}_i}{\sigma_\varepsilon} \right) + \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{2h\sigma_\varepsilon} \frac{\check{\nu}_{i+1} - \check{\nu}_{i-1}}{2h} + \frac{C_{\varepsilon 1} \varepsilon_i \check{\nu}_i (\check{u}_{i+1} - \check{u}_{i-1})^2}{4h^2 \check{k}_i} - \frac{C_{\varepsilon 2} (\check{\varepsilon}_i)^2}{\check{k}_i}.$$

где $\check{\varepsilon}_i, \check{u}_i, \check{\nu}_i, \check{k}_i$ — значения, взятые с предыдущего шага по времени.

Вопрос граничных условий для k и ε нетривиален. Для кинетической энергии турбулентности в литературе имеется консенсус, что на стенках $k = 0$, постановка ГУ для скорости диссипации энергии вызывает больше вопросов. В расчетах ниже используется ГУ 1-го рода $\varepsilon_0 = \varepsilon_n = \mathrm{const} \neq 0$, по аналогии с некоторыми программными пакетами.

Разностные схемы, записанные выше, приводят к линейным системам относительно k и ε. Процесс счета предполагает решение на каждом шаге по времени уравнений для ε, k и u с использованием значений с прошлого временного слоя и выполняется до достижения сходимости.

7. Результаты расчетов

7.1. Тестовая задача

В рамках курсовой работы описанные выше модели реализованы в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica для решения одномерной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в канале. Рассматривается тестовая задача со следующими значениями параметров (расчетная область показана на рисунке 2):

- $a = 2$ — ширина канала;
- $L = 10a$ — длина канала;
- $\nu = 0.0025$ — вязкость жидкости;
- $\rho = 1$ — плотность жидкости;
- $\Delta p = -10$ — перепад давления.

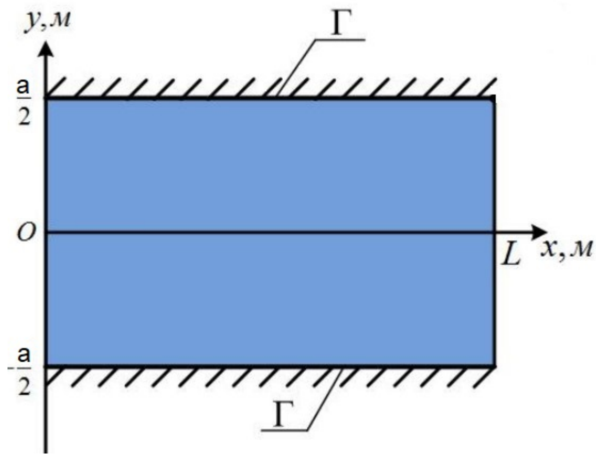

Рис. 2. Расчетная область в тестовой задаче

Выбранные параметры соответствуют числу Рейнольдса Re $= 12000$.

Как первое приближение, построим график скорости течения для ламинарного случая, для сравнения результатов при моделировании турбулентных процессов. Для этого рассмотрим течение Пуазейля — одно из самых простых точных решений уравнений Навье — Стокса. Точное стационарное решение имеет вид

$$v(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu l}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2\right). \tag{16}$$

Профиль скоростей для стационарного ламинарного случая представлен на рисунке 3.

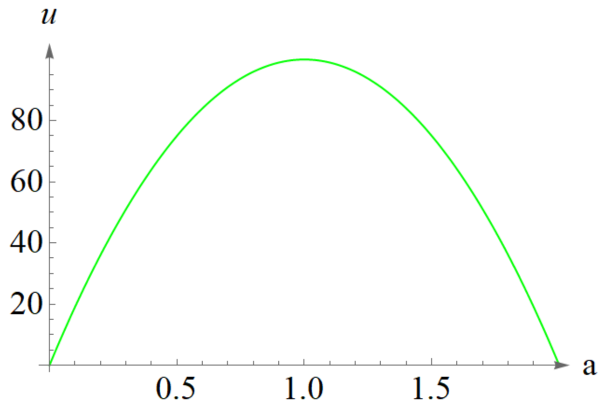

Рис. 3. Профиль скоростей для ламинарного случая

Дополнительно выполнялось сравнение с решением, полученным в свободном пакете OpenFOAM. Отметим, что в нем решалась двумерная задача с теми же параметрами. Использовался решатель `simpleFoam`, выполняющий поиск стационарного решения, и модель турбулентности Спаларта — Аллмараса (по той причине, что она наиболее проста в задании ГУ). Процесс решения сошелся за 427 с. при шаге расчета по времени $\Delta t = 0.1$ с., таким образом, выполнено 4270 шагов по времени. Полученные графики поля скоростей и вязкости (взятые вблизи выхода из канала) приведены на рисунке 4. Стоит отметить, что профиль скоростей существенно отличается от ламинарного случая, как по форме, так и по величине.

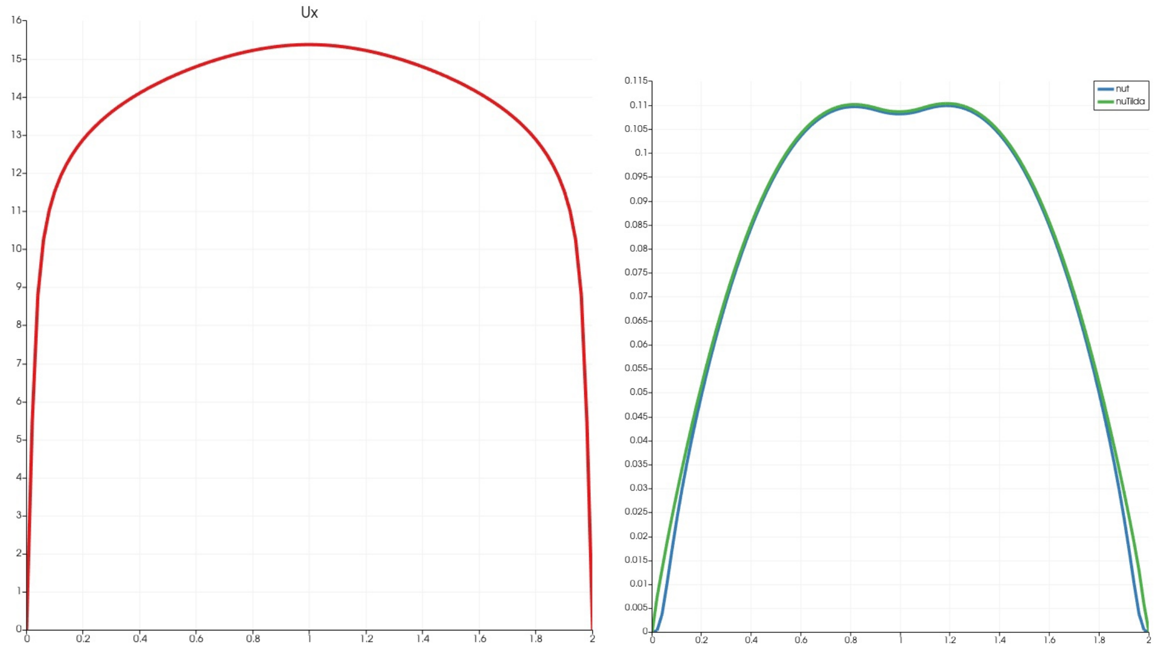

Рис. 4. Профиль поля скоростей, турбулентной вязкости ν_t и величины $\widetilde{\nu}$, полученные в OpenFOAM

7.2. Численное решение одномерной задачи

На рисунке 5 приведен график решения, полученный с использованием модели Смагоринского. Данная модель является самой ранней и самой простой из рассмотренных. Несмотря на это, на графике отчетливо видно влияние турбулентности у стенок. Сам профиль значительно отличается от ламинарного. На рисунке 6 показан график значений параметра y^+ в этой модели. В расчете использовались шаги по времени и пространству $\tau = 0.01$ и $h = 0.01$. Выполнялось приблизительно 400 итераций. Максимальное значение скорости в канале $U_{x\max} \approx 16.6256$ м/с.

Для модели Спаларта — Аллмараса использовались те же шаги расчета, при этом потребовалось большее число итераций — около 4000. Однако на качественном

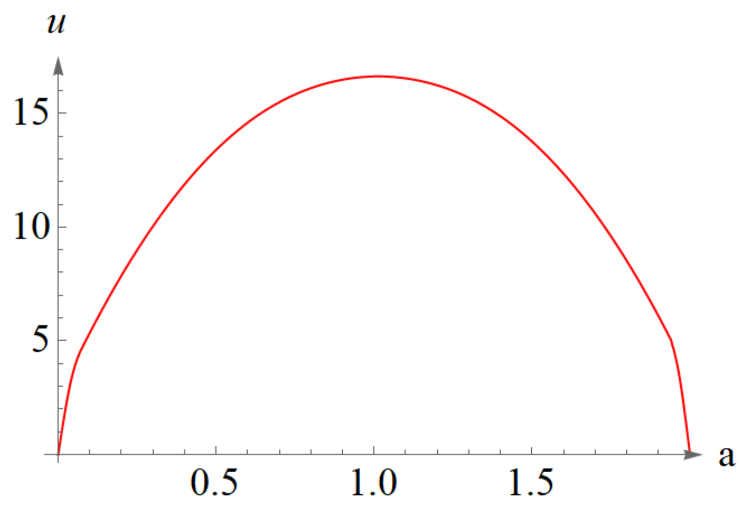

Рис. 5. Профиль скоростей в модели Смагоринского

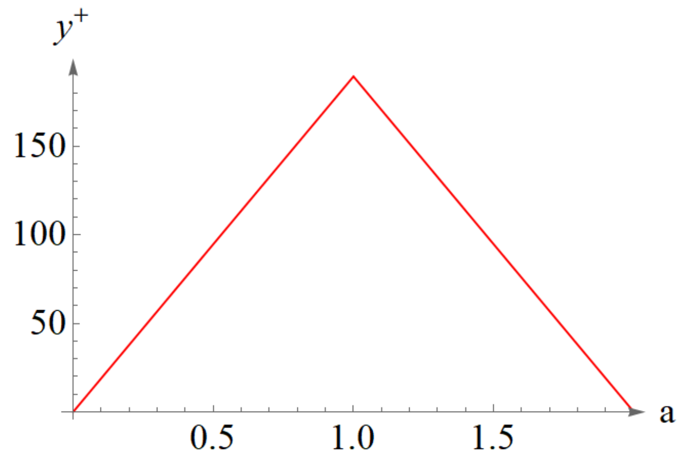

Рис. 6. y^+ для тестовой задачи

уровне профили скоростей и турбулентной вязкости (рисунки 7 и 8) гораздо лучше согласуются с решением в OpenFOAM. Максимальное значение скорости в канале равно $U_{x\max} \approx 18.253$ м/с.

7.3. Анализ результатов

На основании приведенных выше результатов, полученных в одномерных моделях, реализованных в Wolfram Mathematica, можно сделать вывод, что модель Спаларта — Аллмараса дает, как минимум, качественно корректный результат. Дальнейшего уточнения решения путем измельчения сетки и шага по времени достичь не получается.

Показанные на рисунках 10 и 11 двумерные стационарные распределения поля скоростей и турбулентной вязкости по каналу подталкивают к выводу, что необходимо рассматривать задачу в двумерной постановке без упрощений. Это, в свою

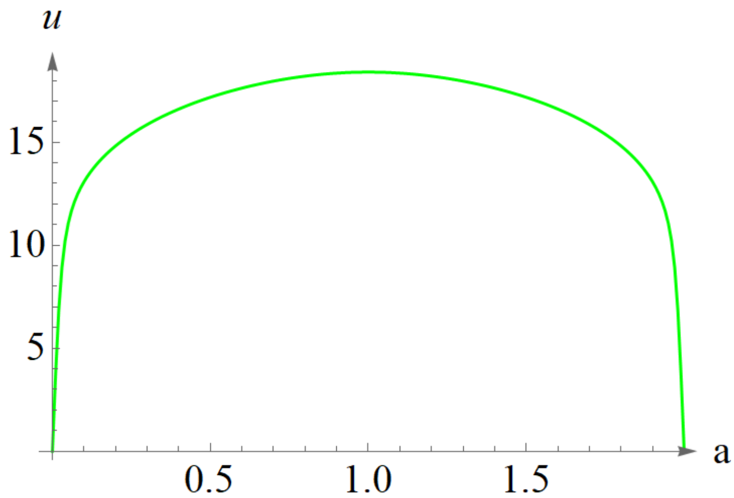

Рис. 7. Профиль скоростей в модели Спаларта — Алммараса

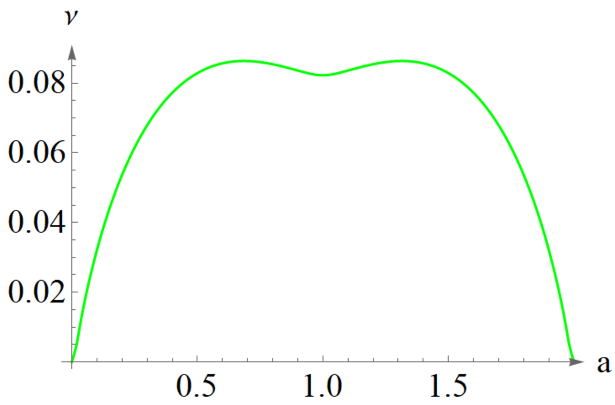

Рис. 8. Профиль турбулентной вязкости ν_t

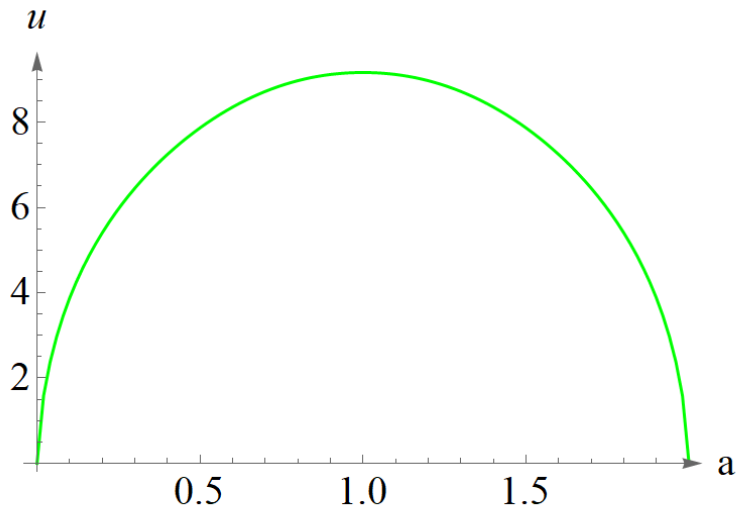

Рис. 9. Профиль скоростей в модели k – ε

очередь, потребует более сложной программной реализации.

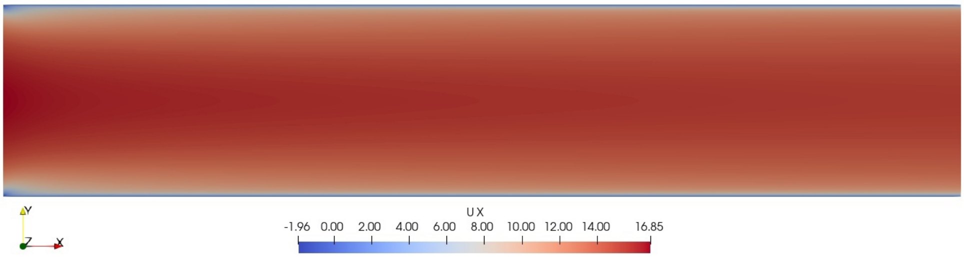

Рис. 10. Стационарное распределение поля скоростей, полученное в OpenFOAM

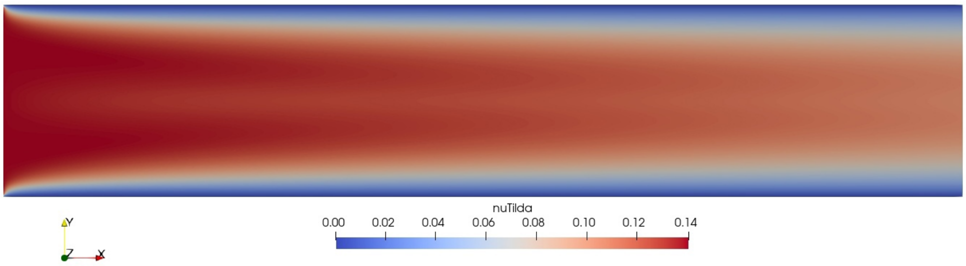

Рис. 11. Стационарное распределение поля турбулентной вязкости, полученное в OpenFOAM

8. Заключение

Таким образом, в рамках данной работы были рассмотрены RANS (Reynolds-averaged Navier — Stokes) модели турбулентности. 3 модели разного типа реализованы в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica для тестовой задачи. Также рассмотрены основные параметры турбулентного течения, имеющие оценочные значения. Произведенное сравнение полученных результатов с решением двумерной задачи в пакете OpenFOAM свидетельствуют о качественном совпадении результатов (для модели Спаларта — Аллмараса), при этом для достижения количественного сходства целесообразно переходить к двумерной постановке, что выходит за рамки поставленной задачи.

Список использованных источников

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Л.: Гос. изд. технико–теоретической литературы, 1950. 676 с.
2. Pope S.B. Turbulent flows. Cambridge University Press, 2000. 749 p.
3. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть 1. Пермь: Перм.гос. техн. ун-т., 1998. 108 с.
4. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. СПб: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. 108 с.

5. Rumsey C. Turbulence modeling resource. One-equation models: Spalart-Allmaras. URL: https://turbmodels.larc.nasa.gov (Дата обращения: 30.10.2022).