Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Фундаментальные науки

КАФЕДРА Прикладная математика

РЕФЕРАТ

НА ТЕМУ:

Стационарные решения уравнения Кортевега—Де Фриза

Студент ФН2-41Б (Группа) (Подпись, дата) В. А. Лосев (И. О. Фамилия)

Преподаватель (Подпись, дата) Г. В. Гришина (И. О. Фамилия)

2021 г.

Оглавление

Введение

Солитон — структурно устойчивая уединённая волна, распространяющаяся в нелинейной среде. История изучения солитона началась в августе 1834 года на берегу канала Юнион вблизи Эдинбурга. Джон Скотт Рассел [1] наблюдал на поверхности воды явление, которое он назвал уединённой волной — «solitary wave». В данной работе будет рассмотрено уравнение Кортевега[2]—Де Фриза[3], которое имеет непосредственное отношение к теории солитонов и описывает саму волну. Солитоны бывают различной природы:

- На поверхности жидкости (первые солитоны, обнаруженные в природе), иногда считают таковыми волны цунами и бор.
- Ионозвуковые и магнитозвуковые солитоны в плазме.
- Гравитационные солитоны в слоистой жидкости.
- Солитоны в виде коротких световых импульсов в активной среде лазера.
- Солитоны в нелинейно-оптических материалах.
- Солитоны в воздушной среде .

1. Постановка задачи.

Проанализировать и получить стационарное решение уравнения Кортевега — Де Фриза в виде импульса и рассмотреть различные варианты более общих стационарных решений в зависимости от значений вводимых параметров.

2. Уравнение Кортевега — Де Фриза

2.1. Стационарное решение в виде импульса

Уравнение Кортевега — Де Фриза имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x} = 0. \tag{1}$$

[1] Джон Скотт Рассел (*англ.* John Scott Russell, 1808–1882) — британский инженер-кораблестроитель, ученый и бизнесмен.

[2] Дидерик Иоханнес Кортевег (*нидерл.* Diederik Johannes Korteweg, 1848–1941) — нидерландский математик.

[3] Густав де Фриз (*нидерл.* Gustav de Vries, 1866–1934) — нидерландский математик.

Это уравнение в частных производных. Здесь $u(x,t)$ — отклонение от положения равновесия, x — пространственная координата, а t — время. Будем искать решение уравнения Кортевега—Де Фриза в виде бегущей волны. Найдем его стационарное решение в виде импульса при условии, что константы интегрирования равны нулю.

Положим в уравнении (1):

$$u(x,t) = f(x - ct) = f(\xi),$$

где $\xi = x - ct$, c — некоторая постоянная, характеризующая скорость распространения волны. Имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{df}{d\xi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{d^3 f}{d\xi^3}.$$

После подстановки этих соотношений, уравнение (1) принимает вид

$$-c\frac{df}{d\xi} + \frac{d^3 f}{d\xi^3} - 6f\frac{df}{d\xi} = 0.$$

Интегрируя по ξ обе части уравнения, получаем

$$-c\int f' d\xi + \int f''' d\xi - 6\int f f' d\xi = 0,$$

и следовательно,

$$-cf + f'' - 3f^2 = 0.$$

Проинтегрируем по ξ обе части уравнения еще раз. Тогда

$$-c\int f d\xi + \int f'' d\xi - 3\int f^2 d\xi = 0,$$

$$-\frac{c}{2}f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 - f^3 = 0,$$

откуда

$$\frac{df}{d\xi} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{c}{2}f^2 + f^3},$$

и следовательно

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{df}{\sqrt{\frac{c}{2}f^2 + f^3}},$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{df}{f\sqrt{\frac{c}{2} + f}}.$$

Далее, делая замену $f = -w^2$ и, используя тот факт, что

$$\int \frac{dw}{w\sqrt{a^2 - w^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arsech} \frac{w}{a}, \tag{2}$$

получаем

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{-2w dw}{-w^2\sqrt{\frac{c}{2} - w^2}},$$

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dw}{w\sqrt{\frac{c}{2} - w^2}},$$

используя (2), имеем $\xi = \frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arsech}\left(\sqrt{\frac{c}{2}}w\right)$, или $w = \sqrt{\frac{c}{2}} \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right)$. Тогда

$$f = -w^2 = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right),$$

то есть

$$f = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)\right).$$

Таким образом, получаем

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct)].$$

Это простейшее стационарное решение уравнения Кортевега—Де Фриза. Решение представляет собой возмущение движущееся в положительном направлении оси Ox с постоянной скоростью c.

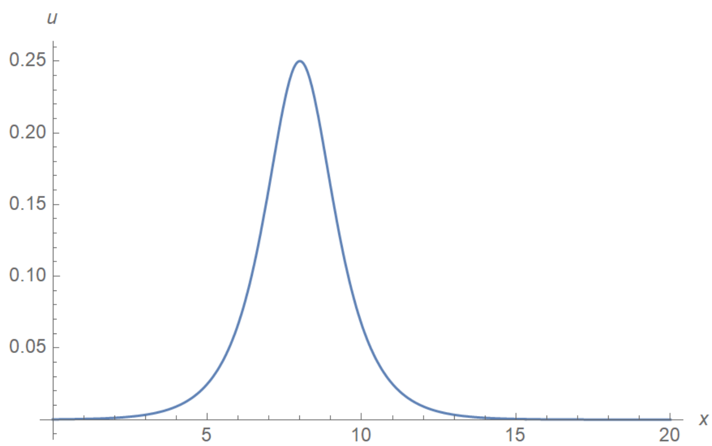

Рис. 1. Иллюстрация простейшего стационарного решения в виде импульса

В полученном решении проявляется общая черта нелинейных волн — связь между амплитудой и скоростью импульса (не накладывающихся друг на друга волн). То есть импульсы с большей амплитудой движутся быстрее. Простым интегрированием можно убедиться, что ширина и амплитуда импульса связаны соотношением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|u|}dx = \pi.$$

Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{|u|}dx = \sqrt{\frac{c}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{e^{\frac{\sqrt{c}(x-ct)}{2}} + e^{\frac{-\sqrt{c}(x-ct)}{2}}} dx = 2\operatorname{arctg}\left(e^{\frac{tc^{\frac{3}{2}}}{2} - \frac{x\sqrt{x}}{2}}\right) = 2\frac{\pi}{2} = \pi.$$

2.2. Общее стационарное решение

Теперь получим более общее стационарное решение. Оно имеет колебательный характер и в пределе, когда период колебаний стремится к бесконечности, может быть сведено к рассмотренному выше решению в виде импульса. Для получения более общего стационарного решения положим в уравнении (1) $u(x,t) = -2f(x-ct) = -2f(\xi)$ [1]. Тогда $u_x = -2\frac{df}{d\xi} = -2\frac{\partial f}{\partial x}$ и $u_t = 2c\frac{df}{d\xi}$. Уравнение (1) запишем в виде

$$2f'''_{\xi\xi\xi} = -24ff'_\xi + 2cf'_\xi.$$

Далее

$$2\int f'''_{\xi\xi\xi}d\xi = -24\int ff'_\xi d\xi + 2c\int f_\xi d\xi,$$

и следовательно,

$$f''_{\xi\xi} = -6f^2 + cf + m.$$

Домножим обе части последнего равенства на f_ξ

$$f''_{\xi\xi}f_x = -6f^2 f_\xi + cff_\xi + mf_\xi,$$

Следовательно, интегрируя по ξ, имеем

$$\int f''_{\xi\xi}f_\xi d\xi = -6\int f^2 f_\xi d\xi + c\int ff_\xi d\xi + m\int f_\xi d\xi,$$

Откуда

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 = -4f^3 + cf^2 + af + b. \tag{3}$$

Факторизованная форма кубического многочлена в правой части имеет вид

$$-4(f-a_1)(f-a_2)(f-a_3) = 4\varphi(f). \tag{4}$$

Покажем, что для решения нужно рассматривать только действительные корни. Заметим, что при действительном f_ξ функция $\varphi(f)$ должна быть положительной. Таким образом, для колебаний конечной амплитуды функция f должна быть ограничена областью $a_2 \leqslant f \leqslant a_3$, то есть должно быть по крайней мере два различных действительных корня [1]. Введем новую переменную

$$k^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}, \tag{5}$$

где a_1, a_2, a_3 — корни указанного выше кубического выражения. В дальнейшим нам будет важен параметр k^2 при поиске решения уравнения. Возможны следующие варианты для корней $\varphi(f)$:

1) три различных действительных корня;

2) два различных действительных корня, один из них кратности два.

Проанализируем, какие значения может принимать параметр k^2 в зависимости от взаимного расположения корней a_1, a_2, a_3. Рассмотрим следующие случаи:

1.1) $a_1 = a_2 \neq a_3$, тогда введенный выше коэффициент k^2 по формуле (5) будет иметь следующий вид

$$k^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_2} = 1$$

.

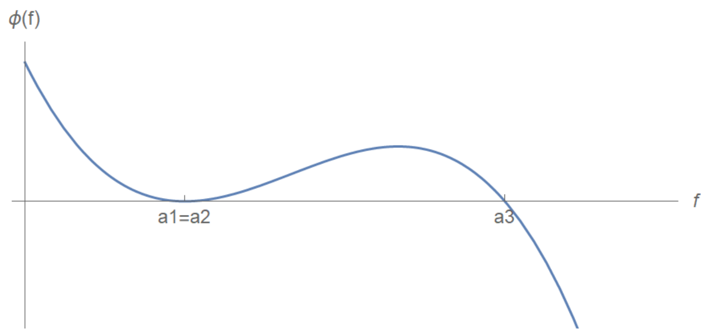

Рис. 2. Два корня и один из них кратности два, при этом $a_1 = a_2$.

1.2) $a_1 \neq a_2 = a_3$, тогда введенный выше коэффициент k^2 по формуле (5) будет иметь следующий вид

$$k^2 = \frac{a_3 - a_3}{a_3 - a_1} = 0.$$

2) Три различных действительных корня, при этом $a_1 < a_2 < a_3$, тогда имеем $a_3 - a_1 > a_3 - a_2$, а значит $0 < \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} < 1$, то есть $0 < k^2 < 1$.

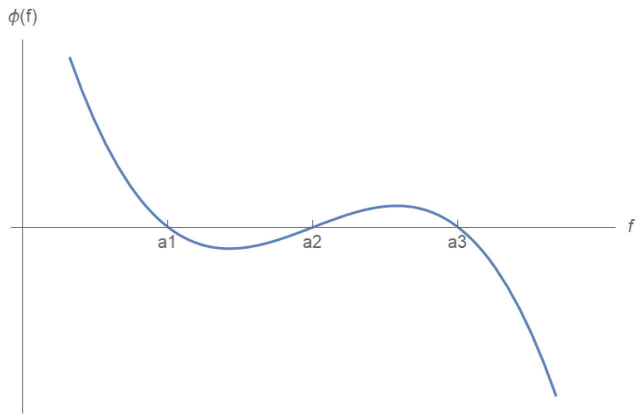

Рис. 3. Три различных действительных корня $a_1 < a_2 < a_3$.

Вернемся к решению уравнения (4) и перепишем его в виде

$$\left(\frac{df}{d\xi}\right)^2 = 4(a_3 - f)(a_3 - a_2 + f - a_3)(a_3 - a_1 + f - a_3).$$

Далее запишем единственный отрицательный множитель в виде $f - a_3 = -g$, тогда получаем, что уравнение для g имеет вид:

$$\left(\frac{dg}{d\xi}\right)^2 = 4g(a_3 - a_2 - g)(a_3 - a_1 - g).$$

Пусть теперь $g = (a_3 - a_2)v^2$. Тогда получим уравнение

$$4(a_3 - a_2)v^2 \left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = 4(a_3 - a_2)v^2(a_3 - a_2 - (a_3 - a_2)v^2)(a_3 - a_1 - (a_3 - a_2)v^2).$$

Учитывая, что $k^2 = \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}$, получим

$$4(a_3 - a_2)v^2 \left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = 4(a_3 - a_2)v^2(a_3 - a_2)(1 - v^2)\left(1 - \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}v^2\right)(a_3 - a_1),$$

и следовательно,

$$(a_3 - a_2)v^2 \left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = (a_3 - a_2)^2 v^2 (1 - v^2)(1 - k^2 v^2)(a_3 - a_1).$$

Итак,

$$\left(\frac{dv}{d\xi}\right)^2 = (1-v^2)(1-k^2v^2)(a_3-a_1). \tag{6}$$

Решение уравнения $(v_\xi)^2 = (1-v^2)(1-k^2v^2)$ можно найти с помощью эллиптического интеграла I рода в форме Якоби

$$v(\xi,k) = \int\limits_0^\xi \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} = \operatorname{sn}(\xi,k),$$

где величина $k \in [0,1]$ носит название параметра эллиптического интеграла, а $\operatorname{sn}(\xi,k)$— эллиптический синус Якоби. Поэтому решение уравнения (6) имеет вид

$$v(x-ct) = \operatorname{sn}(\sqrt{a_3-a_1}(x-ct),k).$$

Так как $f - a_3 = -g$, а $g = (a_3-a_2)v^2$, то

$$f = a_3 - (a_3-a_2)v^2,$$

и таким образом, имеем

$$f(x-ct) = a_3 - (a_3-a_2)\operatorname{sn}^2[\sqrt{a_3-a_1}(x-ct),k].$$

Во всяком кубическом уравнении коэффициент при квадратичном члене равен сумме корней, взятой с обратным знаком. В случае с тремя разными действительными корнями $c = 4(a_1+a_2+a_3)$, что следует из выражений (3) и (4). Убедимся в этом на нашем примере

$-4(f-a_1)(f-a_2)(f-a_3) = -4f^3+4a_1f^2+4a_2f^2+4a_3f^2-4a_2a_3f-4a_1a_3f-4a_1a_2f+4a_1a_2a_3 = -4f^3+\underbrace{4(a_1+a_2+a_3)}f^2-4a_2a_3f-4a_1a_3f-4a_1a_2f+4a_1a_2a_3.$

Как было сказано ранее c — это постоянная скорость с которой движется волна.

Функция $\operatorname{sn}^2(\xi,k)$ колеблется между нулем и единицей с периодом равным $2K$ [1].

$$K = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx.$$

Теперь посмотрим, какой вид принимает решение уравнения (3) при различном расположении корней a_1, a_2, a_3 из выражения (4) при различных значениях параметра k^2.

I) При a_2 стремящемся к a_1, k стремится к единице, а $K \to \infty$, так как в этом случае интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2)}}dx$$

расходится. Из табличного соотношения для эллиптических функций $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$ имеем $\operatorname{sn}^2 u = 1 - \operatorname{cn}^2 u$. Также зная, что функции $\operatorname{sn}(z,k)$ и $\operatorname{cn}(z,k)$ при $k \to 1$ имеют предельные формы $\operatorname{sn}(z,1) = th(z)$ и $\operatorname{cn}(z,1) = \frac{1}{ch(z)}$, получаем

$$\operatorname{sn}^2 u = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}.$$

Продожая решение

$$f(x-ct) = a_3 - (a_3 - a_2)\operatorname{sn}^2[\sqrt{a_3 - a_1}(x-ct)],$$

следовательно

$$f(x-ct) = a_3 - (a_3 - a_2)(1 - \operatorname{sech}^2[\sqrt{a_3 - a_2}(x-ct)]),$$

откуда

$$f(x-ct) = a_3 - a_3 + a_2 + (a_3 - a_2)\operatorname{sech}^2[\sqrt{a_3 - a_2}(x-ct)].$$

Тогда мы окончательно получим выражение

$$f(x-ct) = a_2 + (a_3 - a_2)\operatorname{sech}^2[\sqrt{a_3 - a_2}(x-ct)], \tag{7}$$

являющееся решением солитонного типа, то есть это выражение описывает единственный горб. Это — уединенная волна, экспериментально открытая Скоттом Расселом [2].

II) Если $a_2 = 0$ (при условии, что $a_1 = \frac{c}{4}$) мы получаем

$$u(x-ct) = -2f(x-ct) = -\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)],$$

а это и есть ранее полученный стационарный импульс.

III) С другой стороны, если a_3 стремится к a_2, то $k \to 0$, так как в данном случае

$$k^2 = \frac{a_2 - a_2}{a_2 - a_1} = 0,$$

и мы получаем стационарное решение в виде колебаний малой амплитуды. И в этом случае:

$$K = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1(1-x^2)}}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $\operatorname{sn}(z,k) = \sin z$ при $k \to 0$ в данном случае получаем решение в виде

$$f(x-ct) = a_3 - (a_3 - a_2)\sin^2[\sqrt{a_3 - a_1}(x-ct)], \tag{8}$$

где $c = 4(2a_1 + a_2)$. Убедимся в этом непосредственной проверкой:
$-4(f-a_1)(f-a_2)^2 = -4f^3 + 8a_2f^2 + 4a_1f^2 - 4a_2f - 8a_1a_2f + 4a_1(a_2)^2 =$
$-4f^3 + \underbrace{4(2a_2 + a_1)}f^2 - 4a_2f - 8a_1a_2f + 4a_1(a_2)^2.$

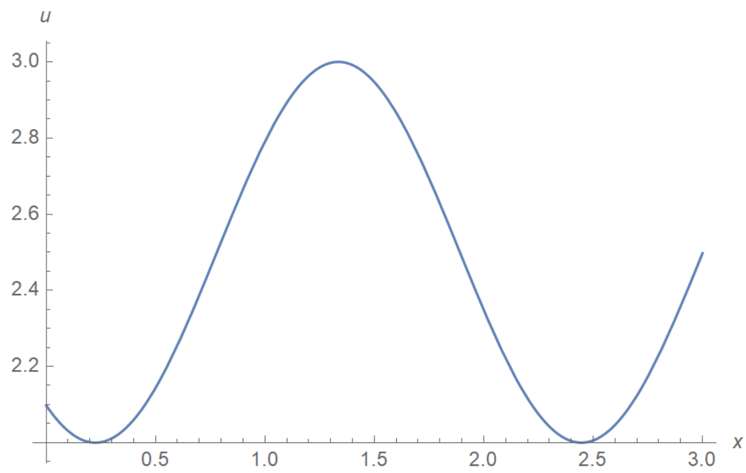

Рис. 4. Стационарного решения при $k \to 0$

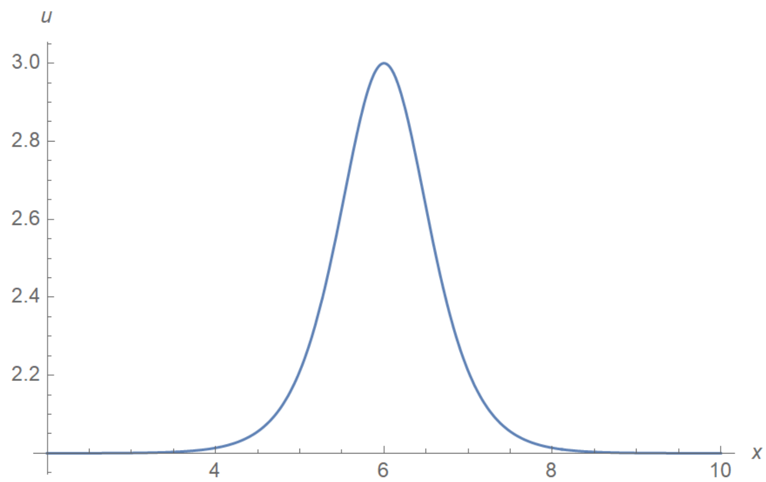

Рис. 5. Стационарное решение при $k \to 1$

3. Вывод

Таким образом мы получили стационарное решение уравнения Кортевега—Де Фриза в виде импульса и более общее стационарное решение колебательного характера при разных значениях вводимых параметров.Так, при $k \to 1$ мы имеем решение солитонного типа, то есть в виде уединенной волны, а при $k \to 0$ получаем стационарное решение в виде колебаний малой амплитуды. Хотя изначально данное уравнение описывало волны на поверхности воды, впоследствии было доказано, что это уравнение имеет практическое применение во многих областях.

Список использованных источников

1. Лэм Д.Л. Ведение в теорию солитонов. М.: Мир,1983.—294 с.
2. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир,1977.—624 с.