



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)»

ФАКУЛЬТЕТ _____ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

КАФЕДРА _____ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА ***К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ***

НА ТЕМУ:

«Реализация моделей турбулентности в методе
конечных элементов с частицами PFEM-2»

Студент _____
(Группа)

_____ **В.А. Лосев**
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель ВКР

_____ **А.Ю. Попов**
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Консультант

_____ (Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Консультант

_____ (Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Нормоконтролер

_____ **М.М. Лукашин**
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

2023 г.

АННОТАЦИЯ

Расчетно-пояснительная записка 54 с., 13 рис., 18 источников.

РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЧАСТИЦАМИ PFEM-2.

Объектом исследования являются двумерные турбулентные течения вязких несжимаемых жидкостей.

Цель работы — реализация моделей турбулентности в методе конечных элементов с частицами PFEM-2 на языке C++ с использованием библиотеки deal.II.

Для достижения цели в работе были реализованы однопараметрическая модель Спаларта — Аллмараса и двупараметрическая модель $k - \varepsilon$. Метод PFEM-2 (Particle Finite Element Method, second generation) был впервые предложен сравнительно недавно, используется для решения различных задач гидрогазодинамики, является гибридным эйлерово-лагранжевым методом. Для моделирования турбулентных течений модифицирован алгоритм метода как в части переноса частиц, так и решения конечноэлементной задачи на сетке. Рассмотрены двумерные тестовые задачи о течении в канале.

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ	2
ВВЕДЕНИЕ	4
1. Моделирование турбулентности с использованием RANS . .	11
1.1. Осреднение по Рейнольдсу	11
1.2. Параметры турбулентного течения	15
1.3. Модель Спаларта — Аллмараса	17
1.4. Модель k – ϵ	18
2. Метод PFEM-2 и его модификация для моделирования турбулентных течений	20
2.1. Основные идеи метода конечных элементов с частицами PFEM-2	20
2.2. Модификация шагов по работе с частицами	23
2.3. Решение уравнения Рейнольдса	24
2.4. Решение дополнительного уравнения в модели S-A	26
2.5. Решение уравнений для k и ϵ в k – ϵ -модели	30
3. Границные условия для турбулентных величин	36
4. Результаты расчетов	38
4.1. Тестовая задача	38
4.2. Анализ результатов модели Спаларта — Аллмараса	40
4.3. Анализ результатов модели k – ϵ	41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	44
Список использованных источников	45
ПРИЛОЖЕНИЕ А	47

ВВЕДЕНИЕ

В гидродинамике турбулентность — это движение жидкости, характеризующееся хаотическими изменениями давления и скорости потока, в отличие от ламинарного потока, который возникает, когда жидкость течет в параллельных слоях, без разрыва между этими слоями [1]. Турбулентные течения распространены необычайно широко — как в природе (дым из трубы, течения рек и др.), так и в технике (обтекание летательных аппаратов, кораблей, подводных лодок, течения в насосах, компрессорах, трубопроводах, в соплах ракетных и реактивных двигателей [2]).

Истоки исследования турбулентности уходят к середине 20-го века, к работам Прандтля, Кармана, Тейлора и Колмогорова [3]. Первым, кто предложил понятие турбулентного течения был Осборн Рейнольдс. Он показал, что тип движения меняется, когда безразмерная величина $\frac{Ur}{\nu}$ (U — характеристическая скорость, ν — кинематическая вязкость, r — гидравлический диаметр) переходит через некоторую границу, данный тип движения назвали турбулентным, а соответствующую величину назвали числом Рейнольдса (Re) [4]. Число Рейнольдса, начиная с которого возникает турбулентное движение, называют критическим числом Рейнольдса. Соответственно при $Re < Re_k$ течение называется ламинарным. При этом значение Re_k не является строго определенным и зависит от постановки задачи и характеристик изначального потока. Но Re имеет нижнее значение, при котором не будет возникать турбулентное течение, обычно нижнее значение принимается равным 2000.

Вследствие того, что турбулентность является очень сложным физическим процессом, ее моделирование представляет большую трудность как с точки зрения построения моделей, так и в части вычислительных трудозатрат. Турбулентные течения предъявляют более высокие требования к численным расчетам в силу быстрого изменения различных величин в потоке. Появление достаточно простого и универсального теоретического описания

крайне маловероятно, но рост вычислительных мощностей современной компьютерной техники позволяет применять те или иные численные подходы для широкого круга задач.

Существует множество моделей турбулентности, основанных на различных подходах. Можно поставить вопрос, существует ли идеальная модель турбулентности, которая имела бы минимальный уровень сложности, при этом охватывая всю суть протекающих физических процессов. На этот вопрос нельзя дать однозначный ответ, поскольку очень часто на практике простота модели приносится в жертву, уступая место точности. Применимость каждой конкретной модели турбулентности сильно зависит от поставленной задачи, поскольку стоит принимать во внимание геометрию расчетной области, параметры исследуемой системы, режим течения, требования к точности результата и пр. Большинство моделей могут относительно точно решать только определенный тип задач, поскольку они часто имеют под собой некоторые изначальные эмпирические соображения.

Далее кратко рассмотрены основные группы подходов к моделированию турбулентных течений. К ним относятся: прямое численное моделирование (Direct numerical simulation, DNS), решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса (Reynolds-averaged Navier–Stokes, RANS), модели реинольдсовых напряжений, стохастические модели, моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES).

Прямое численное моделирование (Direct numerical simulation)

Наиболее точным подходом к моделированию турбулентности является прямое численное моделирование с использованием уравнений Навье — Стокса. Это также самый простой подход с концептуальной точки зрения. Этот метод основывается на задании максимально подробной расчётной сетки — такой, чтобы ячейки сетки были соизмеримы с мельчайшими вихревыми структурами.

Подход DNS был неприменим для моделирования до 1970-х годов, пока

компьютеры не достигли определенной вычислительной мощности. Даже сейчас основным недостатком данного подхода является очень большая вычислительная стоимость, которая с увеличением числа Рейнольдса очень быстро возрастает (приблизительно как Re^3) [1]. Из-за большой ресурсозатратности DNS популярен в основном среди научных исследователей. При этом подход DNS оказался очень ценным для пополнения знаний о турбулентных процессах. Область, в которой выполняется вычисление, должна быть по меньшей мере такой же большой, как рассматриваемая физическая область или самый большой турбулентный вихрь. Полезной характеристикой является интегральный масштаб (L) турбулентности, который по существу представляет собой расстояние, на котором пульсирующие составляющие скорости разных частиц жидкости остаются близкими друг к другу.

Моделирование также должно учитывать всю диссипацию кинетической энергии k . Это происходит и в самых малых масштабах, на которых активна вязкость, поэтому размер сетки должен быть не больше, чем масштаб, определяемый с учетом вязкости, называемый колмогоровским масштабом η , равным

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4},$$

где ϵ — скорость рассеивания кинетической энергии. При этом для разбиения области должны выполняться следующие условия:

$$Nh > L \quad \text{и} \quad h \leq \eta,$$

где N — количество точек вдоль заданного направления сетки, а h — шаг. Как было сказано ранее, DNS в основном является инструментом для различных научных исследований, помогающим получить информацию о турбулентных течениях, недоступную при иных подходах. К примерам использования DNS относятся [5]:

- понимание механизмов возникновения турбулентности, передачи энергии и рассеивания в турбулентных потоках;
- моделирование создания аэродинамического шума;
- изучение процессов в пристеночных течениях;
- понимание влияния сжимаемости на турбулентность;
- понимание взаимодействия между горением и турбулентностью;
- контроль и уменьшение лобового сопротивления на твердой поверхности.

Метод крупных вихрей (Large eddy simulation) Турбулентные течения имеют широкий диапазон пространственных длин и временных масштабов. Крупномасштабные вихри, как правило, обладают большей энергией, чем мелкомасштабные; таким образом, они наиболее эффективно переносят свойства потока. Мелкие вихри обычно намного слабее и обеспечивают незначительную передачу этих свойств. Таким образом, наиболее существенным является моделирование крупных вихрей. Именно в этом заключается подход LES. Процесс моделирования крупных вихрей в практических задачах является гораздо более эффективным, чем прямое численное моделирование (DNS). Обычно данный подход применяется при высокорейнольдсовых течениях и в случае области со сложной геометрией.

Важно точно определить величины, подлежащие вычислению. Поскольку рассматриваемое поле скоростей должно содержать только крупномасштабные компоненты общего поля, применяется фильтрация поля скоростей. При таком подходе моделируемое поле большого или разрешенного масштаба по существу является локальным средним значением всего поля. Отфильтрованная скорость определяется по формуле

$$\bar{u}_i(x) = \int_{\Omega} G(x, x') u_i(x') dx',$$

где $G(x, x')$ — ядро фильтра, является локализованной функцией.

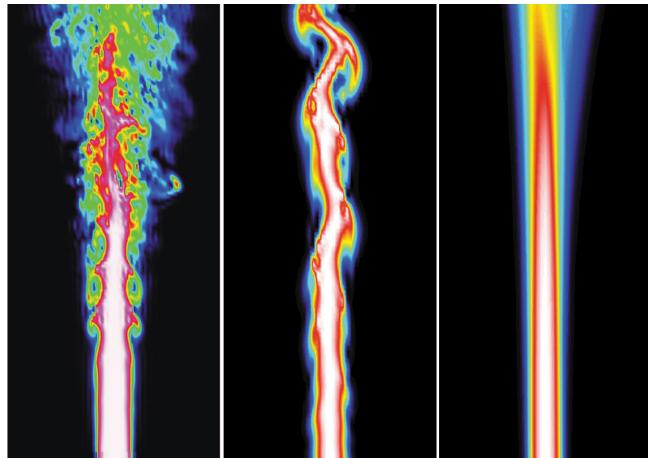


Рис. 1. Пример результатов моделирования струйного течения с помощью подходов DNS, LES и RANS [6]

Модель Рейнольдсовых напряжений Модель уравнения напряжений Рейнольдса (RSM) является наиболее полной классической моделью турбулентности. В этих моделях не применяется гипотеза вихревой вязкости и напрямую вычисляются отдельные компоненты тензора напряжений Рейнольдса. Модели напряжений Рейнольдса обеспечивают значительно лучшую точность, чем модели турбулентности, основанные на вихревой вязкости, при этом они эффективнее в вычислительном отношении чем прямое численное моделирование (DNS) и моделирование крупных вихрей.

Модели, основанные на вихревой вязкости, такие как $k - \epsilon$ и $k - \omega$, могут иметь недостатки в сложных реальных турбулентных течениях. Например, в потоках с искривлением линии обтекания, отрывом потока и потоках с зонами рециркуляции производительность этих моделей неудовлетворительна.

Модели уравнения напряжений Рейнольдса основаны на уравнении переноса напряжений Рейнольдса. Уравнение для переноса кинематического напряжения Рейнольдса $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ имеет вид

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = D_{ij} + P_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij} - \epsilon_{ij},$$

где D_{ij} — перенос R_{ij} за счет диффузии, P_{ij} — скорость образования R_{ij} , Π_{ij} — перенос R_{ij} из-за турбулентных взаимодействий давления и деформации, Ω_{ij} — перенос R_{ij} из-за вращения, $\frac{D \cdot}{Dt}$ — полная, или материальная, производная.

Модели с решением осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса Одними из самых распространенных в различных свободно распространяемых или коммерческих пакетах (ANSYS CFX, Fluent, OpenFOAM и др.) являются RANS-модели турбулентности. Метод осреднения Рейнольдса заключается в замене произвольно изменяющихся характеристик потока суммами осредненных и пульсационных составляющих. В результате осреднения появляется новая неизвестная величина — тензор напряжений Рейнольдса R_{ij} , из-за которой нельзя решить получившееся уравнение. Поэтому для нахождения R_{ij} дополнительно вводятся различные модели турбулентности. Одним из преимуществ RANS-подхода является возможность получения приемлемого результата на достаточно грубой сетке. Один из основных недостатков RANS заключается в том, что при моделировании турбулентности в области со сложной геометрией возможны некорректные результаты. На рисунке 1 видны основные отличия представленных подходов к моделированию турбулентных течений: если при использовании подхода DNS моделируется турбулентное течение без каких либо упрощений, то в подходе LES не учитывается влияние мелких вихрей, а в подходе RANS профиль теряет турбулентный вид, благодаря моделированию осредненных характеристик.

Поскольку моделирование турбулентных течений представляет большой практический интерес, очень важна их программная реализация в рамках тех или иных пакетов или библиотек. В данной работе рассматривается реализация RANS-моделей турбулентности применительно к сравнительно новому численному методу вычислительной гидродинамики — методу конечных элементов с частицами PFEM-2 (Particle Finite Element Method, 2nd generation). Этот метод довольно эффективен для определенного класса задач (задачи

с преобладанием переноса среды), однако имеет ограниченное распространение в силу практически полного отсутствия доступных программных реализаций. На текущий момент имеется, главным образом, реализация в пакете KRATOS [7], выполненная с участием авторов самого метода. В рамках данной работы идет речь о расширении возможностей другой свободной реализации PFEM-2, разработанной на кафедре «Прикладная математика» (на базе библиотеки `deal.II` по решению задач методом конечных элементов), в части моделирования турбулентных течений. Метод PFEM-2 предназначен, в том числе, для решения сложных по постановке задач (моделирование многофазных течений, решение задач аэрогидроупругости, моделирование высокорейнольдсовых течений), однако имеющаяся реализация на данный момент главным образом позволяет рассматривать только ламинарные течения вязких несжимаемых жидкостей (с возможностью учета свободной конвекции). Поэтому ее модификация для моделирования турбулентности является шагом на пути к расширению практической применимости этой разработки.

Целью данной работы является реализация RANS-моделей турбулентности в рамках метода PFEM-2 для расчета турбулентных течений. Для достижения этой цели решены следующие задачи:

- 1) рассмотрены однопараметрическая (Спаларта — Аллмараса) и двупараметрическая ($k - \epsilon$) модели турбулентности;
- 2) разработана модификация алгоритма метода конечных конечных элементов с частицами PFEM-2 для моделирования турбулентных течений;
- 3) реализована разработанная модификация алгоритма в рамках имеющегося программного кода на базе библиотеки `deal.II` [8];
- 4) выполнено решение тестовых задач для двумерного течения в канале.

1. Моделирование турбулентности с использованием RANS

1.1. Осреднение по Рейнольдсу

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса и несжимаемости [9]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} + \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{v} — векторное поле скоростей жидкости, м/с; p — поле давления, Па; ρ — плотность жидкости, кг/м³; μ — коэффициент динамической вязкости, Па · с; \mathbf{g} — векторное поле массовых сил, м/с². Тензор вязких напряжений $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ имеет следующие компоненты:

$$\tau_{ij} = 2\nu \left(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3} \delta_{ij} \right), \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

RANS-подход предполагает следующую процедуру. При рассмотрении турбулентных течений неизвестные величины можно представить в виде суммы средних полей и небольших пульсаций относительно них [10]:

$$v_i(\mathbf{r}, t) = U_i(\mathbf{r}, t) + u_i(\mathbf{r}, t), \quad p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) + p'(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

Здесь $i = 1, \dots, d$, где d — размерность задачи. При этом используем следующие правила осреднения:

$$\begin{aligned} \langle v_i \rangle &= U_i, \quad \langle U_i \rangle = U_i, \quad \langle u_i \rangle = 0, \\ \langle p \rangle &= P, \quad \langle P \rangle = P, \quad \langle p' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате осреднения с учетом введенных правил вместо уравнения Навье – Стокса (1) получаем *уравнение Рейнольдса* (в дальнейшем мы не рассматриваем массовые силы)

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_j}. \quad (4)$$

В уравнении Рейнольдса присутствует тензор пульсаций скоростей (тензор напряжений Рейнольдса) $R_{ij} = -\langle u_i u_j \rangle$, его компоненты называют *рейнольдсовыми напряжениями*. Они имеют физический смысл компонент осредненного переноса количества пульсационного движения (импульса) пульсационными скоростями [2].

Тензор напряжений Рейнольдса нельзя выразить из ранее осредненных характеристик. Таким образом, в системе увеличивается количество неизвестных переменных, то есть образуется проблема замыкания. Она заключается в том, что при попытке выразить $\langle u_i u_j \rangle$ с помощью эволюционного уравнения система всегда будет недоопределенна.

При моделировании турбулентности, в соответствии с *гипотезой Буссинеска* о турбулентной вязкости, тензор напряжений Рейнольдса можно представить в виде [1]

$$-\langle u_i u_j \rangle = v_t \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (5)$$

где v_t — турбулентная вязкость (также называется вихревой вязкостью), $k = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$ — кинетическая энергия турбулентности. В отличие от молекулярной вязкости ν , турбулентная не имеет физического смысла, а является по сути удобной переменной для описания турбулентного течения.

Формула Буссинеска легла в основу большого количества методов расчета турбулентных течений жидкости в гидравлике, гидродинамике и их технических применениях. При этом формула заслуживает ряда критических

замечаний. Она относится к числу локальных формул — то есть определяет значения турбулентных напряжений в данной точке потока жидкости в зависимости от осредненных скоростей деформаций в окрестности той же точки, а значит не содержит влияния на определяющее соотношение удаленных от этой точки областей потока. Такая ограниченность формулы Буссинеска лишает ее ряда важных применений, например, в несимметричных потоках в каналах с разной шероховатостью стенок. В каналах такого типа, в явном несоответствии с формулой Буссинеска, точки нулевого турбулентного трения не совпадают с точками максимальной скорости $(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = 0)$. Следует отметить, что формула Буссинеска не отражает вихревой структуры потока и размеры обменивающихся количеством движения вихревых масс, хотя учет данных факторов может оказывать существенное влияние на описание некоторых характерных для турбулентности процессов и явлений. Несмотря на это, формула Буссинеска получила широкое применение в гидравлике, метеорологии, гидродинамике и во многих других областях науки, техники и естествознания. При этом делались различные допущения о характере изменений в потоках величин μ_t и \mathbf{v}_t , от постоянства которых вскоре отказались [2].

Таким образом, гипотеза Буссинеска (5) решает проблему замыкания, но возникает потребность определения турбулентной вязкости \mathbf{v}_t , для чего в различных моделях турбулентности используются алгебраические соотношения или дифференциальные уравнения (одно или несколько).

В рамках данной работы мы ограничиваемся рассмотрением двумерных задач (однако обобщение на трехмерный случай носит главным образом технический характер). Примем обозначения $\langle U_1 \rangle = u, \langle U_2 \rangle = v, x_1 = x, x_2 = y$. В этом случае компоненты тензора напряжений Рейнольдса с учетом гипотезы Буссинеска вычисляются следующим образом:

$$-\langle u_1 u_2 \rangle = \mathbf{v}_t \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\langle u_2 u_1 \rangle$$

для недиагональных компонент. Для компонент $-\langle u_1 u_1 \rangle$ и $-\langle u_2 u_2 \rangle$ получаем систему

$$\begin{cases} -\langle u_1 u_1 \rangle = 2\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} (\langle u_1 u_1 \rangle + \langle u_2 u_2 \rangle), \\ -\langle u_2 u_2 \rangle = 2\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} (\langle u_1 u_1 \rangle + \langle u_2 u_2 \rangle). \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом

$$-\langle u_1 u_1 \rangle = 2\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} + 4\nu_t \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\langle u_2 u_2 \rangle = 2\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} + 4\nu_t \frac{\partial v}{\partial y}.$$

С учетом компонент тензора скоростей $\dot{\varepsilon}_{ij}$

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dot{\varepsilon}_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \dot{\varepsilon}_{21}$$

компоненты τ_{ij} тензора вязких напряжений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\nu \left(\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \tau_{22} &= 2\nu \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \tau_{12} &= \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{21}. \end{aligned}$$

Распишем слагаемое $\frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_j u_i \rangle}{\partial x_j}$, входящее в уравнение Рейнольдса (4). При $i = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tau_{1j} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_j u_1 \rangle}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} + 4\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

При $i = 2$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tau_{2j} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_j u_2 \rangle}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2\nu_t \frac{\partial u}{\partial x} + 4\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Эти слагаемые входят в соответствующие уравнения для u и для v , которые решаются с помощью МКЭ.

1.2. Параметры турбулентного течения

Течения в турбулентном режиме характеризуются набором параметров, отражающих интенсивность перемешивания в различных областях. Одним из важных параметров в моделях турбулентности является y^+ — расстояние от стенки канала, нормализованное по масштабу вязкости [11]:

$$y^+ \equiv \frac{u_\tau z}{\nu}. \quad (9)$$

Выпишем отдельно соотношения для u_τ и τ_w . Напряжение сдвига у стенки (wall shear stress) имеет следующий вид:

$$\tau_w \equiv \rho \nu \left(\frac{d \langle U \rangle}{dy} \right) \Big|_{y=0}.$$

Скорость трения (friction velocity) представляется в виде

$$u_\tau \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}.$$

Параметр y^+ является безразмерным, он имеет важное оценочное значение. В зависимости от его значения рассматриваемое пространство течения разделяется на подобласти (рисунок 2):

- вязкий подслой ($y^+ < 5$) — сдвиговое напряжение Рейнольдса незначительно по сравнению с вязким напряжением;
- буферный слой ($5 < y^+ < 30$) — переходная область между частями потока, в которых преобладает вязкость, и частями потока, в которых преобладает турбулентность;
- область логарифмического закона ($y^+ > 30$) — область преобладания

турбулентности;

- наружный слой ($y^+ > 50$) — область перекрытия между внутренним и внешним слоем (при больших значениях числа Рейнольдса).

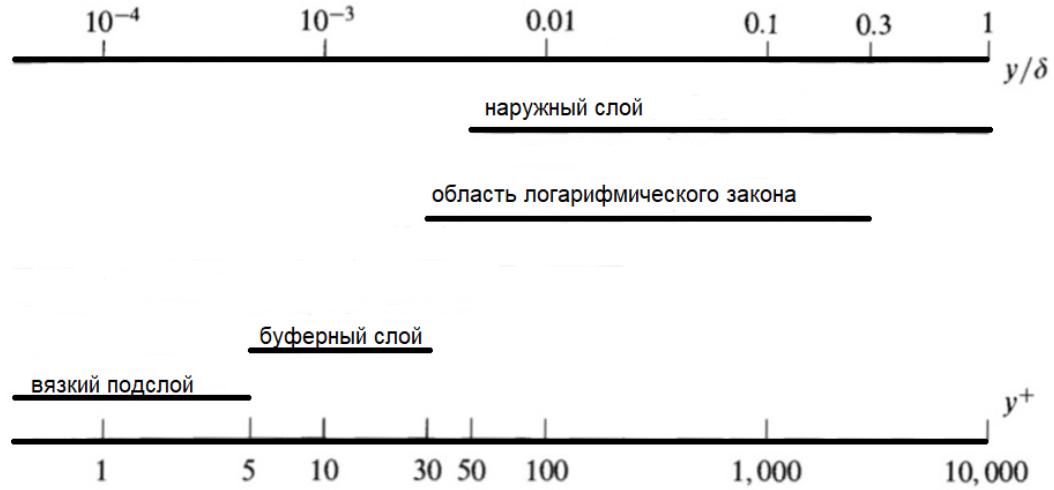


Рис. 2. Разделение области течения в зависимости от y^+

При этом y^+ можно оценить приблизительно. Для этого необходимо найти число Рейнольдса, с учетом значения средней скорости U на втоке и ширины турбулентного пограничного слоя по формуле

$$\text{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}.$$

Далее оцениваем поверхностное трение C_f по формуле [13]

$$C_f = [2 \log_{10}(\text{Re}) - 0.65]^{-2.3}.$$

Тогда напряжение сдвига у стенки и скорость трения u_* будут иметь следующий вид:

$$\tau_w = C_f \frac{1}{2} \rho U^2, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}.$$

Таким образом, приближенное значение для y^+ будет иметь следующий вид [13]:

$$y^+ = \frac{d \rho u_*}{\mu}, \quad (10)$$

где d — расстояние от стенки канала.

1.3. Модель Спаларта — Аллмараса

Данная модель относится к классу однопараметрических моделей. Изначально была разработана специально для аэрокосмических исследований. Для нахождения турбулентной вязкости ν_t решается одно дополнительное дифференциальное уравнение.

Формула для вычисления турбулентной вязкости имеет следующий вид:

$$\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}. \quad (11)$$

Для ее вычисления решаем уравнение для $\tilde{\nu}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} &= \tilde{S} C_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \left(C_{w1} f_w - \frac{C_{b1}}{k^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где d — расстояние от стенки канала. Входящие в данное уравнение величины имеют следующий вид для стандартной модели Спаларта — Аллмараса:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}, \quad \tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{k^2 d^2} f_{v2},$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r),$$

$$r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} k^2 d^2}, \quad f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4} \chi^2), \quad S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Также в уравнение для $\tilde{\mathbf{v}}$ входят следующие константы, полученные эмпирически или методом подгонки для случаев задач с известным решением:

$$\sigma = \frac{2}{3}, \quad C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad k = 0.41, \quad C_{w1} = C_{b1}/k^2 + (1+C_{b2})/\sigma,$$

$$C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{v1} = 7.1, \quad C_{t1} = 1, \quad C_{t2} = 2, \quad C_{t3} = 1.1, \quad C_{t4} = 2.$$

По предположению Спаларта [12], для лучших результатов следует принять $C_{t3} = 1.2, C_{t4} = 0.5$.

Распишем более подробно $S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}$:

$$\Omega_{ij}\Omega_{ij} = \Omega_{11}^2 + \Omega_{12}^2 + \Omega_{21}^2 + \Omega_{22}^2, \quad \Omega_{11} = \Omega_{22} = 0,$$

$$\Omega_{12}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \Omega_{12}^2.$$

$$\sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} = \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right|.$$

При этом функция f_{t2} принимает очень малые значения, поэтому слагаемые с ней можно исключить из уравнения (12). Уравнение (12) дополняется граничным условием прилипания на стенке $\tilde{\mathbf{v}}|_{\Gamma} = 0$.

1.4. Модель $k-\epsilon$

Рассмотрим широко распространенную в вычислительной гидродинамике стандартную $k-\epsilon$ -модель турбулентности. Данная модель является двухпараметрической. Такие модели основаны на решении дифференциальных уравнений для двух дополнительных турбулентных переменных, в данном случае — кинетической энергии турбулентности k и скорости диссипации энергии турбулентности ϵ . Турбулентная вязкость выражается через эти две величины следующим образом:

$$\nu_t = C_{\mu} \frac{k^2}{\epsilon}.$$

Уравнения для k и ε выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(kU_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon U_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{P\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (14)$$

В уравнения входят следующие константы:

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.00, \quad \sigma_\varepsilon = 1.30, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92.$$

Также в уравнения входит величина P , называемая производством кинетической энергии и задаваемая в виде

$$P = -\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}.$$

Ранее были расписаны компоненты тензора Рейнольдса в соответствии с гипотезой Буссинеска. Таким образом, производство кинетической энергии будет иметь вид

$$\begin{aligned} P = -\langle u_1 u_1 \rangle \frac{\partial u}{\partial x} - \langle u_2 u_2 \rangle \frac{\partial v}{\partial y} - \langle u_1 u_2 \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - \langle u_2 u_1 \rangle \frac{\partial v}{\partial x} &= v_t \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ &v_t \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(2v_t \frac{\partial u}{\partial x} + 2v_t \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &\left(2v_t \frac{\partial v}{\partial y} + 2v_t \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из условия несжимаемости жидкости получаем

$$P = v_t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) + 2v_t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2v_t \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2.$$

При моделировании течения в канале на его стенках Γ задается граничное условие прилипания для k : $k|_\Gamma = 0$, а также естественное граничное условие

$$\text{для } \boldsymbol{\varepsilon}: \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

2. Метод PFEM-2 и его модификация для моделирования турбулентных течений

2.1. Основные идеи метода конечных элементов с частицами PFEM-2

Вместе с развитием средств вычислительной техники, продолжается развитие и методов математического моделирования различных процессов в природе и технике. В частности, появляются новые методы численного решения задач гидро- и газодинамики. К современным методам решения задач вычислительной гидродинамики относится метод конечных элементов с частицами PFEM-2, предложенный в 2013 году [14]. В рамках данной работы за основу взята ранее разработанная на кафедре «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана программная реализация метода PFEM-2, разработанная на базе свободного программного обеспечения.

Метод конечных элементов с частицами относится к сеточным методам частиц, как и некоторые другие, к которым, например, относится метод материальной точки. В настоящий момент существуют два варианта метода конечных элементов с частицами: стандартный метод PFEM — чисто лагранжев метод конечных элементов с частицами, и его модифицированный вариант PFEM-2 — гибридный эйлерово-лагранжев метод. Данный метод конечных элементов с частицами предназначен для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости, которые описываются системой из уравнений (1). Основная идея обеих вариаций метода PFEM, как с подвижной, так и с фиксированной сеткой, заключается в разделении исходной задачи на две физические процессы: с помощью набора лагранжевых частиц моделируется конвективный перенос среды, при этом на эйлеровой сетке традиционным

методом конечных элементов решается упрощенная задача (без конвективного слагаемого). В случае метода PFEM-2 требуется проецирование полей (в первую очередь скоростей) с частиц на узлы сетки и обратно, но при этом нет необходимости перестраивать сетку на каждом шаге по времени. В традиционных сеточных методах при моделировании течений с преобладанием переноса среды требуется вести расчет с мелким шагом по времени, метод PFEM и PFEM-2 позволяет снять это ограничение.

Действия с частицами включают в себя их перемещение по полю скоростей, восстановление поля скоростей в каждом узле, коррекцию скоростей частиц. Выражение для проецирования поля скоростей в узлы сетки принимает следующий вид:

$$\mathbf{u}_j = \frac{\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \varphi_i^j}{\sum_{i=1}^k \varphi_i^j}, \quad (16)$$

где \mathbf{v}_i — скорость, переносимая i -й частицей, φ_i^j — функция формы j -го узла, вычисленная в координатах i -й частицы.

Поскольку перенос среды моделируется частицами, на сетке решается упрощенная гидродинамическая задача, без конвективного слагаемого:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot \hat{\tau} + \rho \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Систему (17) можно решить, используя два подхода: «совместный» и «с расщеплением». Будем использовать подход «с расщеплением», основным преимуществом которого является вычислительная эффективность. Он состоит из трех этапов: прогноз скорости, решение уравнения давления, коррекция скорости. Вводя векторы решения на предыдущем и текущем шагах по време-

мени \mathbf{u}^m и \mathbf{u}^{m+1} , соответственно, перепишем систему (17) в следующем виде:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}^{m+1}}{\Delta t} = \rho \frac{\mathbf{u}^m}{\partial \Delta t} - \nabla p^{m+1} + \nabla \cdot \hat{\tau}^{m+\theta}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{m+1} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Компоненты тензора вязких напряжений τ_{ij} учитываются полунеявным образом — часть берется с текущего шага по времени, часть — с предыдущего.

Для решения гидродинамической системы будем использовать следующую схему метода дробных шагов [5]:

- сначала определяем вектор прогноза скорости \mathbf{u}^* из уравнения

$$\rho \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} = \rho \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \hat{\tau}^{m+\theta},$$

- находим поле давления путем решения уравнения

$$\Delta p^{m+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*,$$

- далее корректируем скорость с помощью соотношения

$$\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} = \rho \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \nabla p^{m+1}.$$

В данной работе используется программа, реализующая метод PFEM-2, написанная на языке программирования C++ с использованием библиотеки deal.II (differential equations analysis library). Это одна из широко применяемых библиотек с открытым исходным кодом для решения уравнений в частных производных методом конечных элементов. С помощью библиотеки deal.II очень удобно можно выстроить полный цикл решения задачи методом конечных элементов: от генерации конечноэлементной сетки, составления матрицы системы и вектора правой части с заданием граничных условий к ее решению, выводу и обработке результатов. Визуализация результатов

осуществляется с помощью ParaView (формат данных .vtk).

Имеющийся алгоритм метода PFEM-2 был доработан для моделирования турбулентных течений. Модифицированный алгоритм содержит следующие предварительные шаги (курсивом обозначены измененные шаги):

- построение конечноэлементной сетки в расчетной области;
- *создание* матриц и векторов правых частей, задание граничных условий, в том числе условий на втоке, *инициализация* сеточного решения;
- начальное размещение частиц и *инициализация* полей в них;

и действия на каждом шаге по времени:

- *перемещение* частиц с проверкой равномерности распределения частиц в ячейках, *подсеиванием* или *удалением* лишних частиц;
- *проецирование* полей на узлы сетки с частиц;
- *решение* системы из уравнения Рейнольдса и уравнения несжимаемости методом конечных элементов, нахождение поля скоростей в узлах;
- *решение* уравнений для нахождения \tilde{v} или k и ϵ , вычисление турбулентной вязкости ν_t ;
- *коррекция* полей в частицах по изменению полей в узлах сетки;
- *запись* результатов в файл.

2.2. Модификация шагов по работе с частицами

В связи с наличием конвективных членов в уравнениях (12) и (13)-(14), требуется моделировать конвективный перенос величин \tilde{v} , k и ϵ . Последний, следуя логике метода PFEM-2, производится с помощью лагранжевых частиц, которые теперь, помимо поля скоростей, несут новые переменные в соответствии с моделью турбулентности. Изменения внесены в процедуры проецирования полей с частиц на узлы сетки и в обратном направлении. Собственно, в ходе проецирования производится накопление турбулентных величин в числителе формулы (16) и последующее обновление полей этих

величин в узлах. Аналогично, выполняется коррекция этих турбулентных переменных в частицах на величину их изменения в узлах ячейки сетки, содержащей частицу.

Процедура перемещения частиц не претерпела изменений, поскольку она производится исключительно по полю скоростей в узлах, которое считается «замороженным» в ходе ее, и на него непосредственным образом не влияют турбулентные переменные. Модификации подверглась только проверка равномерности распределения частиц, в ходе которой при их недостаточном количестве порождаются новые, с инициализацией полей скорости и \tilde{v} или k и ϵ (то же самое — в процедуре исходного размещения частиц в ячейках сетки). Упомянутые переменные добавлены и в процедуру вывода данных о полях в частицах в формате VTK.

2.3. Решение уравнения Рейнольдса

В отличие от исходной реализации требуется перейти от уравнения (1) к уравнению (4). Неизвестные величины представим с помощью функций формы $\Phi_u^j(x, y)$. На каждом элементе функция (рассматривается k -я компонента поля скоростей) представляется в виде $u_k = \Phi_u u$, где u — узловые значения, а Φ — вектор-строка функций формы, имеющие следующий вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \\ \varphi^4 \end{pmatrix}^T, u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix}.$$

В качестве проекционных функций будем рассматривать функции формы. Задаются граничные условия первого рода, называемые условиями прилипания,

$$u|_{\Gamma} = 0.$$

Таким образом, для уравнения Рейнольдса (без конвективного слагаемого) получаем:

$$\sum_{j=1}^4 \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_j \varphi_i \varphi_j d\Omega = \sum_{j=1}^4 \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}_j \varphi_i \varphi_j d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \cdot \hat{R} d\Omega. \quad (19)$$

Воспользуемся интегрированием по частям для последнего и предпоследнего слагаемого в (19)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \varphi_i \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} (\nabla \varphi_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} d\Omega, \\ \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \cdot \hat{R} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \varphi_i \hat{R} \cdot \mathbf{n} dS - \int_{\Omega} (\nabla \varphi_i) \cdot \hat{R} d\Omega. \end{aligned}$$

При замене в этом уравнении интегралов квадратурами, потребуется знать в гауссовых точках некоторые величины, изначально известные только в узлах сетки либо вычисляемые по таким значениям. Поскольку в уравнении Рейнольдса присутствует \mathbf{v}_t , найдем эту величину явно, воспользовавшись интерполяцией ее известных узловых значений с предыдущего временного слоя в гауссову точку q

$$(\mathbf{v}_t)_q = \sum_{j=1}^4 (\mathbf{v}_t)_j \varphi_j^q.$$

Тогда для компоненты x :

$$\begin{aligned} (\nabla \varphi_j) \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \langle u_j u_i \rangle) &= \left(\mathbf{v} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\mathbf{v}_t)_q (4 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y}); (\mathbf{v} + (\mathbf{v}_t)_q) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \cdot \\ \left(\frac{\partial \varphi_u^j}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_u^j}{\partial y} \right) &= \left(\mathbf{v} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\mathbf{v}_t)_q (4 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y}) \right) \frac{\partial \varphi_u^j}{\partial x} + \left((\mathbf{v} + (\mathbf{v}_t)_q) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \varphi_u^j}{\partial y}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для компоненты y :

$$\begin{aligned} (\nabla \varphi_j) \cdot (\hat{\tau} - \langle u_j u_i \rangle) &= \left((\mathbf{v} + (\mathbf{v}_t)_q) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \mathbf{v} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (\mathbf{v}_t)_q \left(4 \frac{\partial v}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \cdot \\ \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_u^j}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_u^j}{\partial y} \end{pmatrix} &= \left((\mathbf{v} + (\mathbf{v}_t)_q) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \varphi_u^j}{\partial x} + \left(\mathbf{v} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2(\mathbf{v}_t)_q \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \varphi_u^j}{\partial y}. \end{aligned} \quad (21)$$

Поскольку также присутствует необходимость вычисления граничного интеграла, то при решении задачи методом конечных элементов для первой компоненты слагаемые

$$\mathbf{v} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 4(\mathbf{v}_t)_q \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{v} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2(\mathbf{v}_t)_q \frac{\partial v}{\partial y}$$

дают вклад, соответственно, в матрицу и в вектор правой части. А для второй

$$(\mathbf{v} + (\mathbf{v}_t)_q) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{и} \quad (\mathbf{v} + (\mathbf{v}_t)_q) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

дают вклад, соответственно, в матрицу и в вектор правой части.

2.4. Решение дополнительного уравнения в модели S-A

Методом конечных элементов решается дополнительное дифференциальное уравнение без конвективного слагаемого. В данном случае при моделировании используется модификация стандартной модели (SA-noft2), отличающаяся от стандартной модели отсутствием функции f_{t2} . После замены производной по времени разностным аналогом и линеаризации уравнение (12) примет вид ($\widehat{\mathbf{v}}$ — неизвестная величина)

$$\frac{\widehat{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\widetilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} + \widetilde{S} C_{b1} \widetilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \nabla \cdot \left((\mathbf{v} + \widetilde{\mathbf{v}}) \nabla \widehat{\mathbf{v}} \right) + C_{b2} (\nabla \widetilde{\mathbf{v}})^2 \right\} - (C_{w1} f_w) \left(\frac{\widehat{\mathbf{v}} \widetilde{\mathbf{v}}}{d^2} \right). \quad (22)$$

Неизвестные величины представим с помощью функций формы $\Phi_{\tilde{\mathbf{v}}}^j(x, y)$.

На каждом элементе функция представляется в виде $\tilde{\mathbf{v}} = \Phi_{\tilde{\mathbf{v}}} \tilde{\mathbf{v}}$, где $\tilde{\mathbf{v}}$ — вектор узловых значений, а Φ — вектор-строка функций формы. Для решения данного уравнения методом конечных элементов домножим его на проекционную функцию φ_i и проинтегрируем по области Ω . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \tilde{\mathbf{v}}_j d\Omega &= \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \tilde{\mathbf{v}}_j d\Omega + C_{b1} \int_{\Omega} (\tilde{S} \tilde{\mathbf{v}}) \varphi_i d\Omega + \\ &+ \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi_i \nabla \cdot ((\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}) \nabla \varphi_j) d\Omega + \frac{1}{\sigma} C_{b2} \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{v}}_x^2 + \tilde{\mathbf{v}}_y^2) \varphi_i d\Omega - \\ &- C_{w1} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} f_w \frac{\tilde{\mathbf{v}}_j}{d^2} \varphi_j \varphi_i d\Omega. \quad (23) \end{aligned}$$

Как и в случае уравнения Рейнольдса, воспользуемся интегрированием по частям. Для модели Спаларта — Аллмараса проинтегрируем по частям третье слагаемое в правой части. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^4 \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi_i \nabla \cdot ((\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}) \nabla \varphi_j) d\Omega &= \frac{1}{\sigma} \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{v}}_x^2 + \tilde{\mathbf{v}}_y^2) \varphi_i d\Omega + \frac{1}{\sigma} \int_{\partial\Omega} \varphi_i (\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} dS \\ &- \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}}_j (\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}) (\nabla \varphi_i) \cdot (\nabla \varphi_j) d\Omega. \quad (24) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (22) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \tilde{\mathbf{v}}_j d\Omega &= \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \tilde{\mathbf{v}}_j d\Omega + \frac{1}{\sigma} (C_{b2}) \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{v}}_x^2 + \tilde{\mathbf{v}}_y^2) \varphi_i d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} (\tilde{S} C_{b1} \tilde{\mathbf{v}}) \varphi_i d\Omega - C_{w1} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} f_w \frac{\tilde{\mathbf{v}}_j}{d^2} \varphi_j \varphi_i d\Omega + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\sigma} \int_{\partial\Omega} \varphi_i (\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}_j \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{n} dS - \\ &- \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}}_j (\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}) (\nabla \varphi_i) \cdot (\nabla \varphi_j) d\Omega. \quad (25) \end{aligned}$$

При замене в этом уравнении интегралов квадратурами найдем выражение различных интегрируемых величин в гауссовых точках q путем интерполяции по значениям в узлах:

$$\tilde{\mathbf{v}}_q = \sum_{j=1}^4 \tilde{\mathbf{v}}_j \varphi_j^q, \quad \chi_q = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_q}{\mathbf{v}}, \quad S_q = \left| \sum_{j=1}^4 u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - \sum_{j=1}^4 v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right|, \quad r_q = \frac{\tilde{\mathbf{v}}_q}{\tilde{S}_q k^2 d^2},$$

$$\tilde{S}_q = S_q + \frac{\tilde{\mathbf{v}}_q}{k^2 d^2} f_{v2}, \quad g_q = \min[r_q + C_{w2}(r_q^6 - r_q), 10], \quad f_{wq} = g_q \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{C_{w3}^6 + g_q^6} \right)^{\frac{1}{6}}.$$

Слагаемое вида $(\nabla \tilde{\mathbf{v}})^2$ распишем следующим образом:

$$(\nabla \tilde{\mathbf{v}})^2 = \left(\sum_{j=1}^4 \tilde{\mathbf{v}}_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^4 \tilde{\mathbf{v}}_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right)^2 = \tilde{\mathbf{v}}_{qx}^2 + \tilde{\mathbf{v}}_{qy}^2.$$

В результате имеем (W_q — веса квадратурной формулы):

$$\begin{aligned} \sum_q \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \varphi_i(\mathbf{r}_q) \varphi_j(\mathbf{r}_q) \tilde{\mathbf{v}}_j W_q &= \sum_q \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \varphi_i(\mathbf{r}_q) \varphi_j(\mathbf{r}_q) \tilde{\mathbf{v}}_j W_q + \tilde{\mathbf{v}}_{qy}^2) \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q + \\ &+ \sum_q (\tilde{S}_q C_{b1} \tilde{\mathbf{v}}_q) \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q - \sum_q C_{w1} \sum_{j=1}^4 f_{wq} \frac{\tilde{\mathbf{v}}_q \tilde{\mathbf{v}}_j}{d^2} \varphi_j(\mathbf{r}_q) \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q - \\ &\sum_q \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^4 \tilde{\mathbf{v}}_j (\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}_q) (\nabla \varphi_i(\mathbf{r}_q)) \cdot (\nabla \varphi_j(\mathbf{r}_q)) W_q + \sum_q \frac{1}{\sigma} (C_{b2}) (\tilde{\mathbf{v}}_{qx}^2 + \tilde{\mathbf{v}}_{qy}^2) \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q. \end{aligned} \tag{26}$$

Запишем основные этапы с помощью всевдокода:

```

for (cell) do
    localmatrixNutilde=0.0;
    localrhsNutilde=0.0;
    for ( $q_i = 0, 1, 2, 3$ ) по гауссовым точкам do
        W=feV_values.JxW(q);
        for ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) по вершинам do
            const Tensor<0,2> Nk_vel;
            const Tensor<1,2> Nk_vel_grad;
            «в случае слагаемых, требующих вычисления в гауссовой
            точке»
            nut+=old_solNutilde*Nk_vel;
            vx+=old_solVx*Nk_vel_grad[0];
            ux+=old_solVy*Nk_vel_grad[1];
            «аналогично с другими слагаемыми»
    wallDist=min(abs(y-1.0),abs(y-(-1.0)));
    «вычисляем значения функций в модели SA»;
    Sq=abs(ux-vx); Stilde=Stilde(nut,Sq,wallDist);
    for (vertex = 0,1,2,3) do
        const Tensor<0,2> Ni_vel;
        const Tensor<1,2> Ni_vel_grad;
        for (vertex = 0,1,2,3) do
            const Tensor<0,2> Nj_vel;
            Nj_vel_grad;
            localmatrixNutilde(i,j)+=Ni_vel*Nj_vel*W;
            localmatrixNutilde(i,j)+= $\frac{1}{\sigma} * (\mathbf{v} + \mathbf{v}_t) *$ 
            Ni_vel_grad*Nj_vel_grad*W;
            localrhsNutilde(j)+= $\frac{1}{time\_step} *$ 
            Ni_vel*Nj_vel*W*old_solNutilde
            «аналогично поступаем с другими слагаемыми»

```

Далее решаем полученную систему линейных алгебраических уравнений и вычисляем значения \mathbf{v}_t :

```

for ( $q_i = i, n$ ) по всем узлам do
    solutionNut[i]=solutionNutilde[i]*fv1(solutionNutilde[i])
    «применяем wall function»

```

В данной функции:

- Ni_vel — значение функции формы i -го узла в гауссовой точке;
- Nj_vel — значение функции формы j -го узла в гауссовой точке;
- $feV_values.JxW(q_index)$ — вес квадратурной формулы в гауссовой точке;
- Ni_vel_grad — градиент функции формы i -го узла, вычисленный в гауссовой точке;
- old_solVx, old_solVy — значения соответствующих компонент скорости, вычисленных на предыдущем временном шаге;
- $old_solNutilde$ — значения $\tilde{\mathbf{v}}$, вычисленные на предыдущем временном шаге;
- $solutionNutilde, solutionNut$ — значения $\tilde{\mathbf{v}}$ и \mathbf{v}_t , вычисленные на текущем временном шаге;
- $localmatrixNutilde, localrhsNutilde$ — локальная матрица жесткости и вектор правой части, соответственно;
- $wallDist$ — расстояние от гауссовой точки до стенки канала.

2.5. Решение уравнений для k и ϵ в $k - \epsilon$ -модели

Заменяя производные по времени разностным аналогом и с учетом того, что конвективное слагаемое моделируется с помощью частиц, методом конечных элементов решаются дополнительные дифференциальные уравнения

(\hat{k} , $\hat{\epsilon}$ — неизвестные величины)

$$\frac{\hat{k}}{\Delta t} = \frac{k}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_k} \frac{\partial \hat{k}}{\partial x_j} \right] + P - \frac{\epsilon \hat{k}}{k}, \quad (27)$$

$$\frac{\hat{\epsilon}}{\Delta t} = \frac{\epsilon}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mathbf{v}_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial x_j} \right] + C_{\epsilon 1} \frac{P \epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon \hat{\epsilon}}{k}. \quad (28)$$

Учет нелинейных слагаемых производится по аналогии с моделированием в OpenFOAM [15], а именно величина ϵ в последнем слагаемом уравнения (13) представляется в виде $\frac{\epsilon \hat{k}}{k}$ и будет давать вклад в матрицу системы, аналогично вклад в матрицу дает последнее слагаемое, представленное в виде $C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon \hat{\epsilon}}{k}$, из уравнения (14). Неизвестные величины представим с помощью функций формы $\Phi_{\epsilon}^j(x, y)$, $\Phi_k^j(x, y)$. На каждом элементе функции представляются в виде:

$$k = \Phi_k \mathbf{k}, \quad \epsilon = \Phi_\epsilon \mathbf{\epsilon},$$

где \mathbf{k} , $\mathbf{\epsilon}$ — узловые значения k и ϵ , соответственно, а Φ — вектор-строка функции формы. В качестве проекционных функций используем функции формы. Домножим уравнение на проекционную функцию φ_i и проинтегрируем по области Ω .

Распишем уравнение для k :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \hat{k}_j d\Omega &= \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j k_j d\Omega + \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \hat{k}_j \varphi_i \nabla \cdot (\mathbf{v}_t \nabla \varphi_j) d\Omega \\ &- \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \varphi_i \hat{k}_j \varphi_j \frac{\epsilon}{k} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (u_y)^2 \varphi_i d\Omega + 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (v_x) (u_y) \varphi_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (v_x)^2 \varphi_i d\Omega + 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (v_x)^2 \varphi_i d\Omega + 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (u_y)^2 \varphi_i d\Omega. \end{aligned} \quad (29)$$

Для избавления от второй производной воспользуемся интегрированием по

частям:

$$\frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \hat{k}_j \nabla \cdot (\mathbf{v}_t \nabla \varphi_j) \varphi_i d\Omega = \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^4 \hat{k}_j \int_{\partial\Omega} \varphi_i \mathbf{v}_t \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \hat{k}_j \mathbf{v}_t (\nabla \varphi_i) \cdot (\nabla \varphi_j) d\Omega. \quad (30)$$

Таким образом, уравнение (13) получаем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \hat{k}_j d\Omega &= \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j k_j d\Omega + \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Omega} \hat{k}_j \varphi_i \mathbf{v}_t \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{n} dS - \\ \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \hat{k}_j \mathbf{v}_t (\nabla \varphi_i) \cdot (\nabla \varphi_j) d\Omega &- \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \varphi_i \hat{k}_j \varphi_j \frac{\epsilon}{k} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (u_y)^2 \varphi_i d\Omega + \\ 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (v_x) (u_y) \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (v_x)^2 \varphi_i d\Omega + 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (v_x)^2 \varphi_i d\Omega + 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}_t (u_y)^2 \varphi_i d\Omega. \end{aligned} \quad (31)$$

По аналогии распишем уравнение для ϵ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \hat{\epsilon}_j d\Omega &= \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \epsilon_j d\Omega + \frac{1}{\sigma_\epsilon} \sum_{j=1}^4 \hat{\epsilon}_j \int_{\Omega} \varphi_i \nabla \cdot (\mathbf{v}_t \nabla \varphi_j) d\Omega \\ - \sum_{j=1}^4 C_{\epsilon 2} \int_{\Omega} \frac{\epsilon \hat{\epsilon}_j \varphi_j}{k} \varphi_i d\Omega + C_{\epsilon 1} \int_{\Omega} \mathbf{v}_t \frac{\epsilon}{k} (u_y)^2 \varphi_i d\Omega + \\ 2 \int_{\Omega} \frac{\epsilon}{k} (v_x) (u_y) \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\epsilon}{k} (v_x) \varphi_i d\Omega + 2 \int_{\Omega} \frac{\epsilon}{k} ((v_x)^2 + (u_y)^2) \varphi_i d\Omega. \end{aligned} \quad (32)$$

Воспользуемся интегрированием по частям для второго слагаемого в правой части:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_\epsilon} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \hat{\epsilon}_j \varphi_i \nabla \cdot (\mathbf{v}_t \nabla \varphi_j) d\Omega &= \frac{1}{\sigma_\epsilon} \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Omega} \hat{\epsilon}_j \varphi_i \mathbf{v}_t \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{n} dS - \\ \frac{1}{\sigma_\epsilon} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \hat{\epsilon}_j \mathbf{v}_t (\nabla \varphi_i) \cdot (\nabla \varphi_j) d\Omega. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, уравнение (32) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j d\Omega &= \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \boldsymbol{\varepsilon}_j d\Omega + \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}} \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\Omega} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j \mathbf{v}_t \varphi_i \nabla \varphi_j \cdot \mathbf{n} dS - \\ \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}} \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j \mathbf{v}_t (\nabla \varphi_i) \cdot (\nabla \varphi_j) d\Omega &- \sum_{j=1}^4 C_{\varepsilon 2} \int_{\Omega} \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j \varphi_j}{k} \varphi_i d\Omega + C_{\varepsilon 1} \int_{\Omega} \left(\mathbf{v}_t \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{k} \right) ((u_y)^2 + \\ 2(v_x)(u_y) + (v_x)^2 + 2(u_x)^2 + (v_y)^2) \varphi_i d\Omega. \quad (34) \end{aligned}$$

Можно заметить, что в уравнениях (13) и (14) присутствует производство кинетической энергии P и другие нелинейные слагаемые. Чтобы их найти, воспользуемся интерполяцией их известных узловых значений с предыдущего временного слоя в гауссову точку:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{tq} &= \sum_{k=1}^4 (\mathbf{v}_t)_k \varphi_k, \quad u_{xq} = \sum_{k=1}^4 u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}, \quad u_{yq} = \sum_{k=1}^4 u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \\ v_{xq} &= \sum_{k=1}^4 v_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x}, \quad v_{yq} = \sum_{k=1}^4 v_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}, \quad k_q = \sum_{m=1}^4 k_m, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_q = \sum_{k=1}^4 \boldsymbol{\varepsilon}_k. \end{aligned}$$

В результате имеем для уравнения для k :

$$\begin{aligned} \sum_q \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \varphi_i(\mathbf{r}_q) \varphi_j(\mathbf{r}_q) \widehat{k}_j W_q &= \sum_q \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \varphi_i \varphi_j(\mathbf{r}_q) k_j W_q - \\ \sum_q \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^4 \widehat{k}_j \mathbf{v}_{tq} (\nabla \varphi_i(\mathbf{r}_q)) \cdot (\nabla \varphi_j(\mathbf{r}_q)) W_q &- \sum_q \sum_{j=1}^4 \varphi_i(\mathbf{r}_q) \varphi_j(\mathbf{r}_q) \frac{\widehat{k}_j}{k_q} \boldsymbol{\varepsilon}_q W_q + \\ \sum_q \mathbf{v}_{tq} (u_y)^2 \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q + \sum_q 2\mathbf{v}_{tq} (v_{xq}) (u_{yq}) \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q & \\ + \sum_q \mathbf{v}_{tq} (v_{xq})^2 \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q + \sum_q 2\mathbf{v}_{tq} (v_x)^2 \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q + \sum_q 2\mathbf{v}_{tq} (u_{yq})^2 \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q. \quad (35) \end{aligned}$$

Для уравнения для ε :

$$\begin{aligned}
& \sum_q \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \varphi_i(\mathbf{r}_q) \varphi_j(\mathbf{r}_q) \widehat{\varepsilon}_j W_q = \sum_q \sum_{j=1}^4 \frac{1}{\Delta t} \varphi_i(\mathbf{r}_q) \varphi_j(\mathbf{r}_q) \varepsilon_j W \\
& - \sum_q \sum_{j=1}^4 C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_q \widehat{\varepsilon}_j \varphi_j(\mathbf{r}_q)}{k_q} \varphi_i(\mathbf{r}_q) W - \sum_q \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \sum_{j=1}^4 \widehat{\varepsilon}_j \mathbf{v}_{tq} (\nabla \varphi_i(\mathbf{r}_q)) \cdot (\nabla \varphi_j(\mathbf{r}_q)) W_q + \\
& \sum_q C_{\varepsilon 1} \mathbf{v}_{tq} \frac{\varepsilon_q}{k_q} (u_{yq})^2 \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q + \sum_q 2 \mathbf{v}_{tq} \frac{\varepsilon_q}{k_q} v_{xq} u_{yq} \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q \\
& + \sum_q \mathbf{v}_{tq} \frac{\varepsilon_q}{k_q} (v_{xq}) \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q + \sum_q 2 \mathbf{v}_{tq} \frac{\varepsilon_q}{k_q} ((v_{xq})^2 + (u_{yq})^2) \varphi_i(\mathbf{r}_q) W_q. \quad (36)
\end{aligned}$$

С помощью псевдокода выпишем основные этапы реализации.

```

for (cell) do
    localmatrixK=0.0;
    localrhsK=0.0;
    localmatrixEps=0.0;
    localrhsEps=0.0;
    for ( $q_i = 0, 1, 2, 3$ ) по гауссовым точкам do
        weight=feV_values.JxW(q);
        for ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) по вершинам do
            const Tensor<0,2> Nk_vel;
            const Tensor<1,2> Nk_vel_grad;
            nut+=old_solutionNutilde*Nk_vel;
            vx+=old_solutionVy*Nk_vel_grad[0];
            eps+=old_solutionEps*Nk_vel;
            «в случае слагаемых, требующих вычисления в гауссовой
            точке»
    wallDist=min(abs(y-1.0),abs(y-(-1.0)));
    «вычисляем  $y^+$ »
    «применяем пристеночные функции»
    for ( $vertex = 0, 1, 2, 3$ ) do
        const Tensor<0,2> Ni_vel;
        const Tensor<1,2> Ni_vel_grad;
        for ( $vertex = 0, 1, 2, 3$ ) do
            const Tensor<0,2> Nj_vel;
            const Tensor<1,2> Nj_vel_grad;
            «в одном цикле вычисляем матрицы и правые части для
             $k$  и для  $\epsilon$ »
            localmatrixK(i,j)+=Ni_vel*Nj_vel_grad*weight;
            localrhsEps(j)+=Ni_vel*Nj_vel*old_solutionEps*weight;
            «аналогично поступаем с другими слагаемыми»

```

Далее решаем полученные системы и вычисляем значения \mathbf{v}_t :

```
for ( $q_i = i, n$ ) по всем узлам do
    solutionNut[i]=( $C_\mu * solutionK[i] * solutionK[i]$ )/solutionEps[i];
```

3. Границные условия для турбулентных величин

Часто при реализации какой-либо модели турбулентности желательно, помимо граничных условий, использовать так называемые пристеночные функции. Последние, например, в задачах о течениях в каналах лучше отражают некоторые эффекты, происходящие рядом с границей рассматриваемой области. Для определения влияния пристеночной функции воспользуемся оценкой y^+ . Будем использовать пристеночные функции в области преобладания турбулентной вязкости ($y^+ < 5$). При использовании модели $k - \epsilon$ пристеночная функция для ϵ может иметь вид

$$\epsilon = \frac{2wkv}{d^2},$$

где k — кинетическая энергия турбулентности, w — значение весовой функции в узле, \mathbf{v} — кинематическая вязкость, d — расстояние от стенки канала. В случае области логарифмического закона ($5 < y^+ < 30$) пристеночная функция принимает следующий вид:

$$\epsilon_{log} = wC_\mu \frac{k^{3/2}}{\mathbf{v}_t d},$$

где \mathbf{v}_t — турбулентная вязкость вблизи стенки, C_μ — ранее введенная константа модели Спаларта — Аллмараса. В данном случае целесообразно рассматривать только область преобладания вязкости, поскольку при данных входных параметрах решаемой задачи y^+ не превышает 100 и не рассматри-

вается высокорейнольдсовая модель. Для k часто рекомендуется естественное граничное условие [16], которое используется в разработанной модификации алгоритма PFEM-2:

$$\frac{\partial k}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

Теперь обратимся к модели Спаларта — Аллмараса. В данной модели условие пристеночной функции накладывается на \mathbf{v}_t . В области преобладания вязкости [17]:

$$\mathbf{v}_t = 0.$$

В области логарифмического закона:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} \left(\frac{y^+ k}{\ln E y^+} - 1 \right),$$

где k — константа Кармана, E — параметр шероховатости стенки. Как было замечено ранее, в данной реализации целесообразно использовать условие в области преобладания вязкости.

Не менее важны при данной реализации граничные условия на входе в канал. Они не всегда тривиальны, носят оценочный характер. Для различных моделей турбулентности они имеют разный вид [18].

1) В модели $k - \epsilon$ условие для k :

$$k = \frac{3}{2} (U I)^2,$$

где $I = 0.16(Re)^{-1/8}$ — турбулентная интенсивность, U — средняя скорость потока на входе, $l = 0.07L$ (L — ширина турбулентного пограничного слоя). Условие на втоке для ϵ :

$$\epsilon = C_{\mu}^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l},$$

где $C_{\mu} = 0.09$, k — значение кинетической энергии на втоке.

2) В модели Спаларта — Аллмараса условие для \tilde{v} :

$$3\mu \leq \tilde{v} < 5\mu.$$

Один из авторов модели Аллмарас рекомендует задавать на входе в канал $\tilde{v} = 3\mu$.

4. Результаты расчетов

4.1. Тестовая задача

Описанные выше модифицированный алгоритм метода PFEM-2 и численные схемы реализованы в рамках программного кода, имевшегося на кафедре «Прикладная математика». Рассмотрим тестовую задачу со следующими значениями параметров (расчетная область показана на рисунке 3):

- $a = 2$ м — ширина канала;
- $L = 10$ м — длина канала;
- $\nu = 0.0025 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ — вязкость жидкости;
- $\rho = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ — плотность жидкости;
- $\Delta p = -10$ Па — перепад давления по длине канала;
- $\Delta t = 0.001$ с — временной шаг;
- $e = 10^{-6}$ — точность при решении линейных систем;
- $t = 10$ с — рассматриваемое модельное время;
- максимальное число частиц в ячейке — 20;
- количество внешних итераций на этапе МКЭ — 2.

Выбранные параметры соответствуют числу Рейнольдса $Re = 8000$. Построим график скорости течения для ламинарного случая, для сравнения результатов при моделировании турбулентных процессов. Для этого рассмотрим течение Пуазейля — одно из самых простых точных решений уравнений

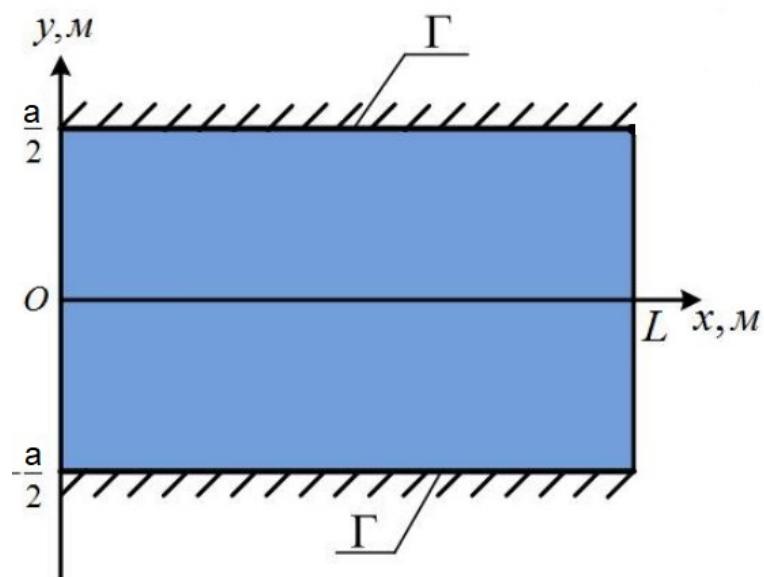


Рис. 3. Расчетная область в тестовой задаче

Навье — Стокса, в предположении того, что компонента скорости v направлена вдоль канала. Точное стационарное решение имеет вид

$$v(y) = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - y^2 \right). \quad (37)$$

График полученного решения применительно к поставленной тестовой задаче изображен на рисунке 4.

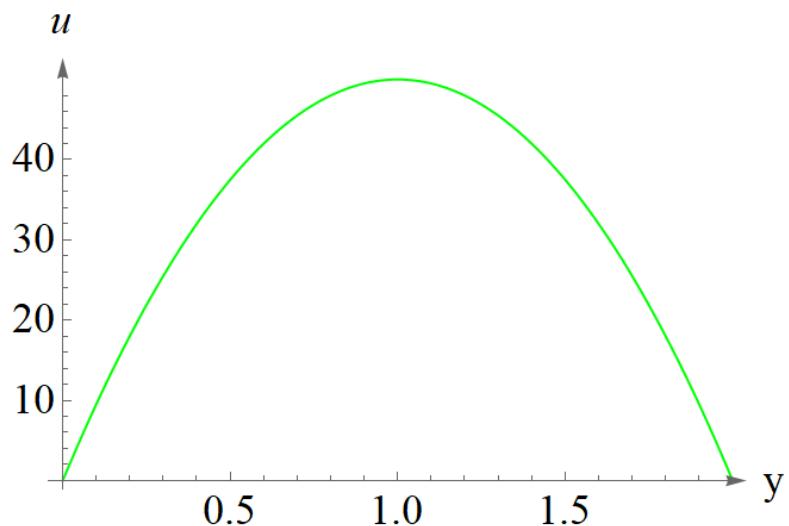


Рис. 4. Профиль скоростей для ламинарного случая

Построим график y^+ . Стоит отметить, что вследствие формулы (10) значения y^+ пропорционально зависят от оценочного значения средней скорости

U_{mean} на втоке, которая зависит от некоторых эмпирических предположений на счет возможного значения скорости в самом начале турбулентного процесса. На рисунке 5 приведен график значений y^+ в зависимости от ширины канала при $U_{mean} = 1$. В данном случае максимальное значение равняется 75, при увеличении U_{mean} максимальное значение y^+ тоже увеличивается, что повлияет на область применения пристеночных функций и на граничные значения на входе в канал в модели $k - \varepsilon$. Вопрос правильной оценки U_{mean} остается открытым.

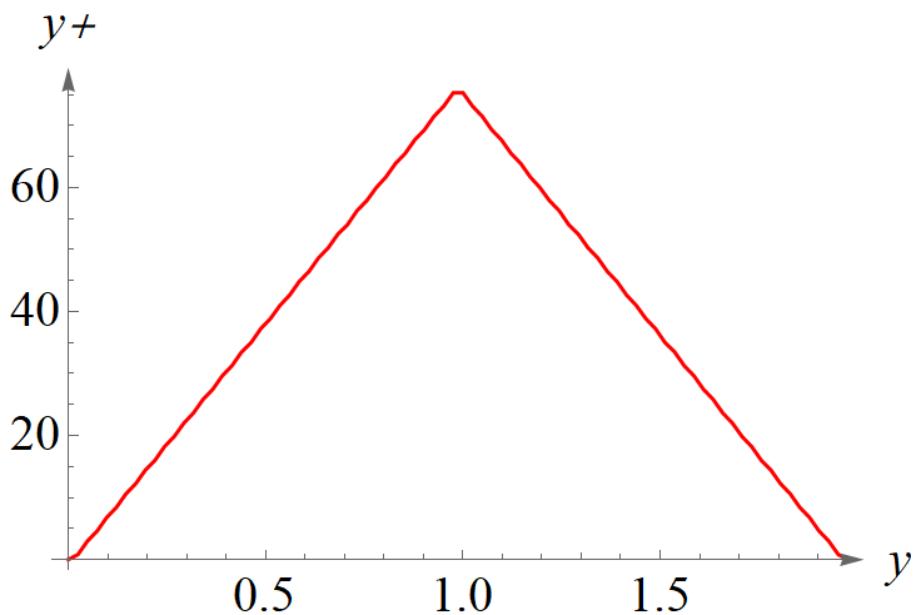


Рис. 5. Распределение параметра y^+ по толщине канала

4.2. Анализ результатов модели Спаларта — Аллмараса

Рассмотрим результаты для модели Спаларта — Аллмараса. Для сравнения результатов выполнено решение в пакете OpenFOAM. В последнем использовался решатель simpleFoam, который находит стационарное решение. Полученные графики компоненты поля скоростей V_x , \mathbf{v}_t , $\tilde{\mathbf{v}}$ показаны на рисунке 6.

С помощью программной реализации модифицированного алгоритма PFEM-2 выполнялся нестационарный расчет методом счета на установление. Полученное распределение компоненты V_x , ее профиль и профили \mathbf{v}_t , $\tilde{\mathbf{v}}$ в сечении

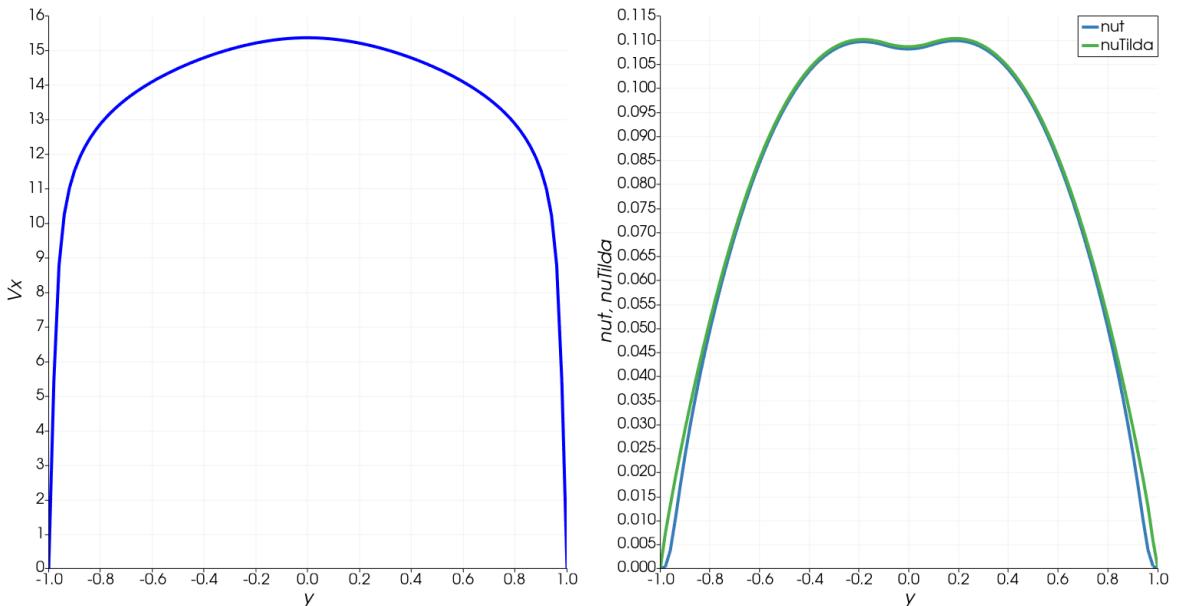


Рис. 6. Профиль компоненты V_x поля скоростей, турбулентной вязкости ν_t и величины $\tilde{\nu}$, полученные в OpenFOAM в модели Спаларта — Аллмараса

$x = 8$ (где течение уже является развивающимся и не ощущается влияние набегающего потока) приведены на рис. 7 и 8. Стоит отметить влияние вязкости на турбулентное течение вблизи стенок канала, отчетливо видное на рис. 8 и отсутствующее в ламинарном течении. На графиках ν_t и $\tilde{\nu}$ видно влияние пристеночной функции ($\nu_t = 0$) на соответствующем участке (в данном случае оценка y^+ произведена при учете $U_{mean} = 1.0$). Профиль скорости количественно (в части максимального значения) и качественно похож на результат, полученный с помощью OpenFOAM, при этом заметно отличается профиль турбулентной вязкости. Данные отличия могут быть связаны с большим количеством нюансов в построении численной схемы, аппроксимации слагаемых в уравнении для $\tilde{\nu}$, а также с различным заданием пристеночных функций, граничных условий на входе в канал и начального приближения.

4.3. Анализ результатов модели $k - \varepsilon$

Для модели $k - \varepsilon$ также получено решение в пакете OpenFOAM. Графики компоненты поля скоростей V_x , величин k и ε показаны на рисунке 9. Стоит отметить, что профили и максимальные значения скоростей в обеих моделях

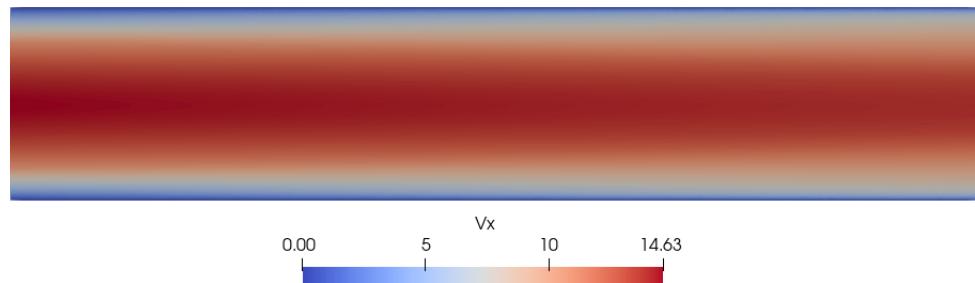


Рис. 7. Распределение компоненты V_x поля скоростей, полученные разработанным решателем в модели Спаларта — Аллмараса

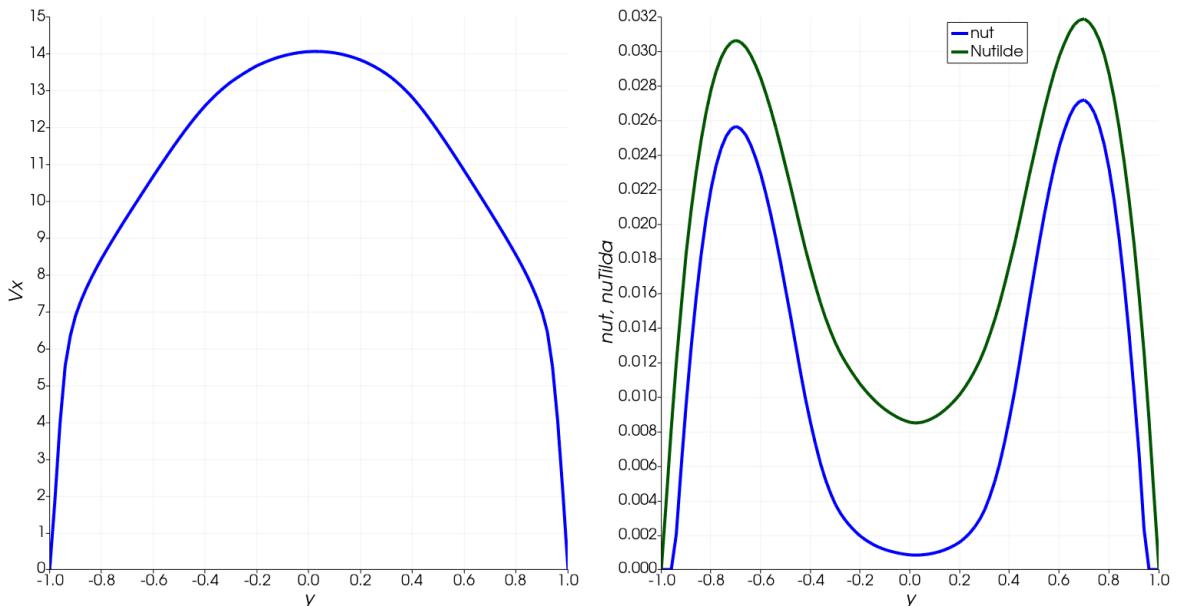


Рис. 8. Профиль компоненты V_x поля скоростей, турбулентной вязкости ν_t и величины $\tilde{\nu}$, полученные разработанным решателем

отличаются, что может быть связано с разной областью применения данных моделей, о которой было сказано ранее.

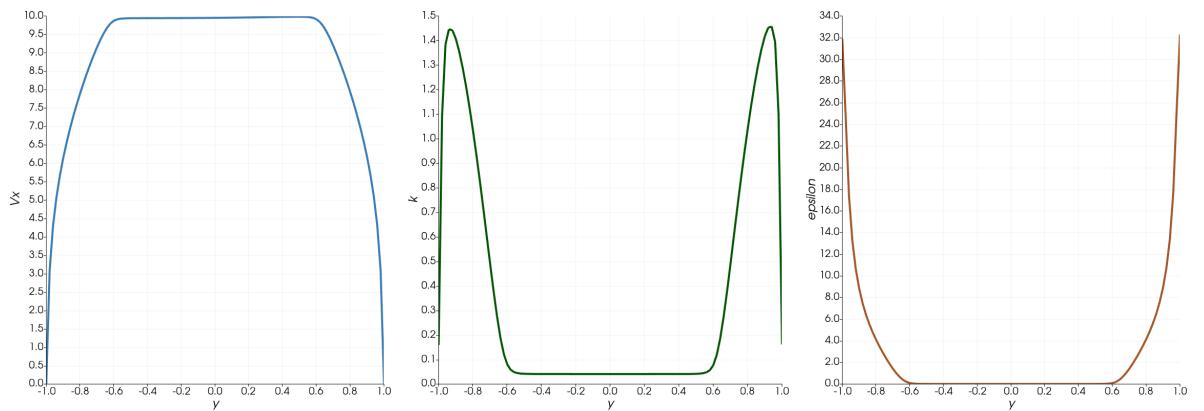


Рис. 9. Профиль компоненты V_x поля скоростей, величин k и ϵ , полученные в OpenFOAM в модели $k - \epsilon$

На рисунке 10 приведено решение, полученное с помощью разработанного

на базе deal.II решателя. На рисунках 11, 12 и 13 показаны распределения V_x , k и ϵ в канале. Отметим, что в OpenFOAM гораздо заметнее разграничение по зонам течения — пристеночное и в ядре потока, с очень резким переходом между ними. В разработанном решателе на основе PFEM-2 переход между областями более плавный. На получаемые результаты большое влияние оказывают пристеночные функции, оценка y^+ и условия на входе в канал. Это влияние требует дополнительного исследования.

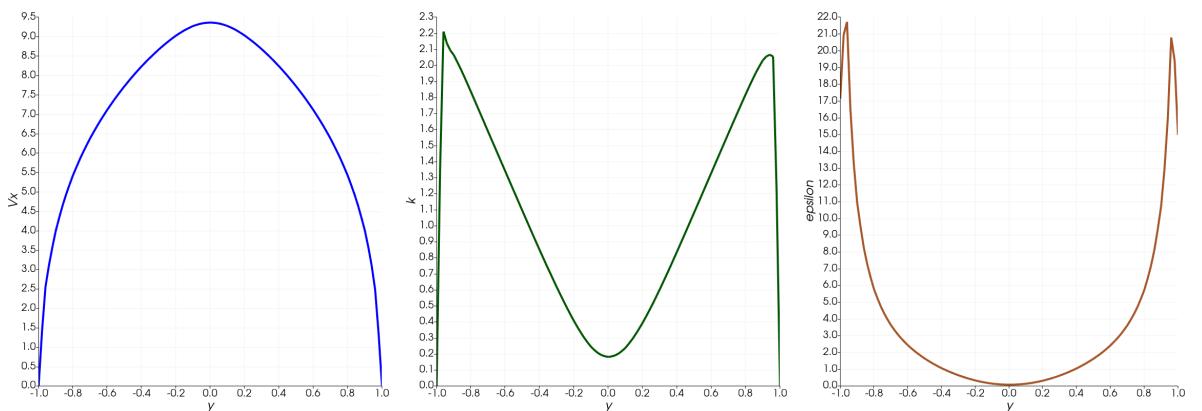


Рис. 10. Профиль компоненты V_x поля скоростей, величин k и ϵ , полученные разработанным решателем в модели $k - \epsilon$

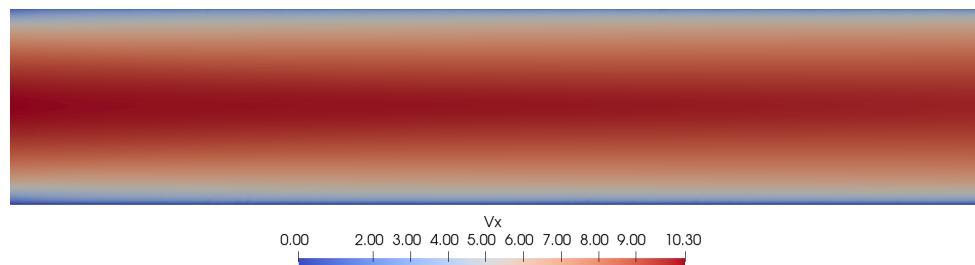


Рис. 11. Распределение компоненты V_x поля скоростей в модели $k - \epsilon$

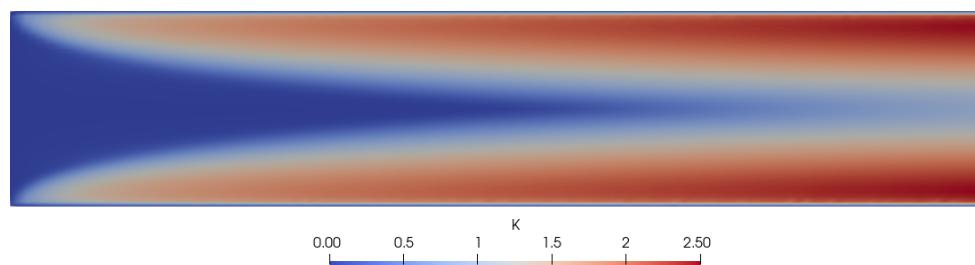


Рис. 12. Распределение k в модели $k - \epsilon$

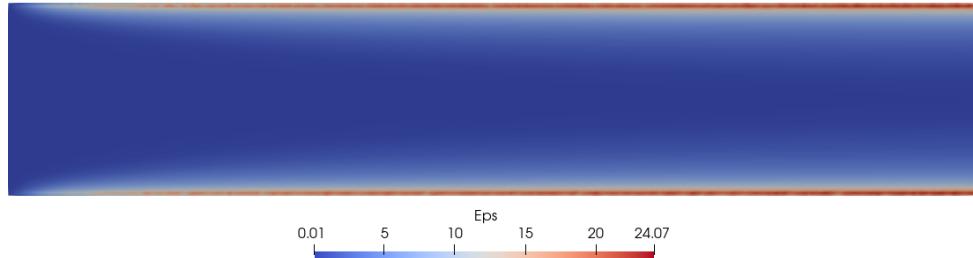


Рис. 13. Распределение ϵ в модели $k - \epsilon$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках настоящей выпускной квалификационной работы рассмотрены основные подходы к моделированию турбулентных течений. Представляло интерес использование моделей турбулентности применительно к методу конечных элементов с частицами PFEM-2. Его алгоритм был модифицирован для двух широко распространенных RANS-моделей (модель Спаларта — Аллмараса и модель $k - \epsilon$) и реализован в рамках программного кода, имеющегося на кафедре «Прикладная математика». Рассмотрена тестовая задача о двумерном турбулентном течении в канале. Для сравнения получено также решение этой задачи свободно распространяемым пакетом OpenFOAM. В части поля скоростей результаты получились количественно близкими, в части турбулентной вязкости ν_t , величин k и ϵ имеется только некоторое качественное совпадение. При этом в случае OpenFOAM изменение характера течения между пристеночным слоем и ядром потока происходит очень резко, в случае разработанного решателя — более плавно. Достигжение лучшего результата в части количественного совпадения результатов может быть связано с необходимостью доработки численных схем, уточнением пристеночных функций и различных параметров моделей турбулентности, что требует дополнительного исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Pope S.B. Turbulent flows. Cambridge University Press, 2000. 749 p.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
3. Wilcox D.C. Turbulence modeling: an overview. La Canada, CA, 2001. 13 p.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть вторая. М.: Физматлит, 1963, 728 с.
5. Ferziger J.H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. Springer - Verlag, Berlin, 2002. 431 p.
6. Hopf A. Simulation of airflow within horticulture high-tunnel greenhouses using open-source CFD software // Bachelor Thesis. Moritzburg, 2018. 51 p. DOI: 10.13140/RG.2.2.12070.57923
7. The Kratos. Home page. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.cimne.com/kratos/> (дата обращения: 28.05.2023)
8. The deal.II Finite Element Library. Home page. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.dealii.org/> (дата обращения: 1.06.2023)
9. Зарубин В.С., Кузыркин Г. Н., Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
10. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть 1. Пермь: Перм.гос. техн. ун-т., 1998. 108 с.
11. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. СПб: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. 108 с.
12. Rumsey C. Turbulence modeling resource. One-equation models: Spalart-Allmaras. URL: <https://turbmodels.larc.nasa.gov> (Дата обращения: 30.10.2022).
13. Y plus wall distance estimetion. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.cfd-online.com> (Дата обращения: 9.05.2023).

14. Idelsohn S.R., Nigro N.M., Gimenez J.M., Rossi R., Marti J.M. A fast and accurate method to solve the incompressible Navier-Stokes equations // Engineering Computations. 2013. V. 30, No. 2. Pp. 197-222. doi: 10.1108/02644401311304854
15. OpenFOAM. Home page. [Электронный ресурс]. URL: openfoam.com (дата обращения: 3.06.2023)
16. Douglas L.S. Wall functions for the k-epsilon turbulence model in generalized nonorthogonal curvilinear coordinates. Iowa State University, 1992. 177 p.
17. OpenFOAM: User Guide. [Электронный ресурс]. URL: openfoam.com (дата обращения: 3.06.2023).
18. Turbulence free-stream boundary conditions. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.cfd-online.com> (Дата обращения: 9.05.2023).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Иллюстративный материал доклада

Реализация моделей турбулентности в методе конечных элементов с частицами PFEM-2

Студент: Лосев В.А., ФН2-81Б
Руководитель: Попов А.Ю.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

24 июня 2023 г.



Ламинарные и турбулентные течения

Ламинарное течение — траектории соседних частиц жидкости отличаются незначительно;
турбулентное течение — имеются хаотические изменения давления и скорости потока.

Турбулентные течения встречаются очень широко как в природе (дым из трубы, течения рек и др.), так и в технике (течения в насосах, компрессорах, трубопроводах).

Подходы к моделированию турбулентных течений

- DNS — прямое численное моделирование;
- RANS — осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса;
- RSM — модель уравнения напряжений Рейнольдса;
- SMT — стохастическое моделирование турбулентности;
- LES — метод крупных вихрей.



Метод конечных элементов с частицами PFEM-2

Идея метода

разделение исходной задачи на две по физическим процессам:

- моделирование переноса с помощью набора лагранжевых частиц;
- моделирование влияния вязкости, перепада давления и внешних сил путем решения задачи методом конечных элементов на неподвижной эйлеровой сетке.

Область применения

Широкий спектр задач механики вязкой несжимаемой жидкости, включая

- моделирование многофазных течений;
- решение задач со свободной поверхностью;
- задачи аэро- и гидроупругости (Fluid-structure interaction);
- моделирование высокорейнольдсовых течений.

Цель и задачи

Целью данной работы является реализация RANS–моделей турбулентности в рамках метода PFEM-2 для расчета турбулентных течений. Для достижения этой цели решены следующие задачи:

- ❶ рассмотрены однопараметрическая (Спаларта — Аллмараса) и двупараметрическая ($k - \varepsilon$) модели турбулентности;
- ❷ разработана модификация алгоритма метода конечных конечных элементов с частицами PFEM-2 для моделирования турбулентных течений;
- ❸ реализована разработанная модификация алгоритма в рамках имеющегося программного кода на базе библиотеки deal.II;
- ❹ выполнено решение тестовых задач для двумерного течения в канале.

Осреднение по Рейнольдсу

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и несжимаемости

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \hat{\tau} + \rho \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Подход RANS заключается в представлении неизвестных величин в виде суммы средних полей и пульсаций:

$$v_i(\mathbf{r}, t) = U_i(\mathbf{r}, t) + u_i(\mathbf{r}, t), \quad p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) + p'(\mathbf{r}, t).$$

В результате осреднения вместо уравнения Навье — Стокса получаем уравнение Рейнольдса

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_j u_i \rangle}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Проблема замыкания

В уравнении Рейнольдса (2) присутствует тензор напряжений Рейнольдса $R_{ij} = -\langle u_i u_j \rangle$. Его нельзя выразить из осредненных характеристик, что приводит к проблеме замыкания: гидродинамическая система будет недоопределенна.

Гипотеза Буссинеска о турбулентной вязкости

Тензор напряжений Рейнольдса можно представить в виде

$$-\langle u_i u_j \rangle = \nu_t \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij},$$

$k = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle$ — кинетическая энергия турбулентности. Основная задача турбулентных моделей — вычисление ν_t . В зависимости от дополнительных соотношений для вычисления ν_t модели делятся на

- алгебраические (модель Смагоринского);
- однопараметрические (модель Спаларта — Аллмараса);
- двухпараметрические ($k - \varepsilon$, $k - \omega$, $k - \omega$ SST).

Модель Спаларта — Аллмараса

Одно дополнительное соотношение — для величины $\tilde{\nu}$ (турбулентная вязкость $\nu_t = \tilde{\nu} f_{v1}$):

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \tilde{S} C_{b1} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right)^2 \right\} - C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2. \quad (3)$$

Функции и коэффициенты, используемые в модели турбулентности:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu} f_{v2}}{k^2 d^2}, f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$
$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}}, g = r + C_{w2}(r^6 - r), r \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} k^2 d^2}, S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$$
$$\sigma = \frac{2}{3}, C_{b1} = 0.1355, C_{b2} = 0.622, k = 0.41, C_{w1} = C_{b1}/k^2 + (1 + C_{b2})/\sigma,$$
$$C_{w2} = 0.3, C_{w3} = 2, C_{v1} = 7.1.$$

Модель $k - \varepsilon$

Помимо гидродинамической задачи, решаются 2 дополнительных дифференциальных уравнения для кинетической энергии турбулентности k и скорости диссипации кинетической энергии турбулентности ε :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(kU_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon U_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{P\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (5)$$

- Тройственная вязкость выражается по формуле $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$.
- Величина P — производство кинетической энергии, вычисляется как $P = -\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$.
- Уравнения содержат следующие константы:

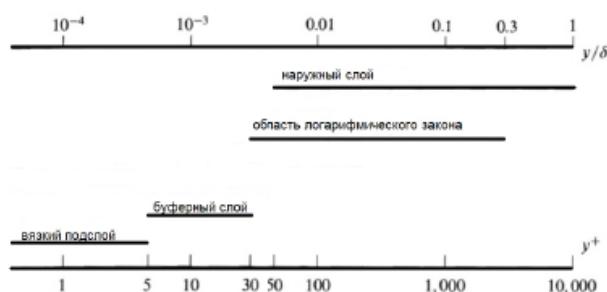
$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 1.00, \sigma_\varepsilon = 1.30, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92.$$

Пристеночные функции

Часто желательно помимо граничных условий использовать пристеночные функции, которые лучше отражают некоторые эффекты, происходящие рядом с границей рассматриваемой области. Будем использовать пристеночные функции в области преобладания турбулентной вязкости ($y^+ < 5$):

$$\varepsilon = \frac{2w k \nu}{d^2}, \quad \frac{\partial k}{\partial n} = 0, \quad \nu_t = 0,$$

где k — кинетическая энергия, w — значение весовой функции в узле, ν — кинематическая вязкость, d — расстояние от стенки.



Общий алгоритм метода PFEM-2

Предварительные шаги

- ① генерация/импорт конечноэлементной сетки;
- ② инициализация полей в узлах сетки (с использованием начальных условий);
- ③ начальное размещение частиц в ячейках, инициализация заданных в них полей.

Действия на каждом шаге по времени

- ④ коррекция полей в частицах по значениям в узлах сетки;
- ⑤ перемещение частиц (с «подсеванием» при необходимости);
- ⑥ проецирование полей с частиц в узлы сетки;
- ⑦ решение методом конечных элементов на сетке;
- ⑧ вычисление аэродинамических нагрузок;
- ⑨ запись результатов в файл.

Решение сеточной задачи

Решаются уравнения Рейнольдса (без конвективного слагаемого) и уравнение несжимаемости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\partial \langle \tau_{ij}^m \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_j u_i \rangle}{\partial x_j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Схема расщепления по переменным

Применяется метод дробных шагов:

- ① $\rho \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} = \rho \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \frac{\partial \langle \tau_{ij}^m \rangle}{\partial x_j} - \rho \frac{\langle u_j u_i \rangle}{\partial x_j}$, — прогноз скорости;
- ② $\Delta p^{m+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*$, — поиск поля давления;
- ③ $\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} = \rho \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \nabla p^{m+1}$. — коррекция скорости.

После определения новых полей скоростей и давления решаются ДУ для дополнительных турбулентных величин.

Решение дополнительных уравнений в моделях турбулентностей

Методом конечных элементов решаются дополнительные дифференциальные уравнения без конвективного слагаемого (\hat{k} , $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\tilde{\nu}}$ — неизвестные величины). Для модели $k - \varepsilon$:

$$\frac{\hat{k}}{\Delta t} = \frac{k}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \hat{k}}{\partial x_j} \right] + P - \frac{\varepsilon \hat{k}}{k}, \quad (7)$$

$$\frac{\hat{\varepsilon}}{\Delta t} = \frac{\varepsilon}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{P \varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon \hat{\varepsilon}}{k}. \quad (8)$$

Для модели Спаларта — Аллмараса:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\tilde{\nu}}}{\Delta t} &= \frac{\tilde{\nu}}{\Delta t} + \tilde{S} C_{b1} \tilde{\nu} + \\ &\quad \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \hat{\tilde{\nu}}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} - (C_{w1} f_w) \left(\frac{\tilde{\nu} \hat{\tilde{\nu}}}{d^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Тестовая задача

Параметры расчетной области:

- $a = 2\text{м}$, $L = 10\text{м}$;
- $\nu = 0.0025 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$;
- $\rho = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
- $\Delta p = -10\text{Па}$;
- $\Delta t = 0.001 \text{ с}$ — шаг по времени.

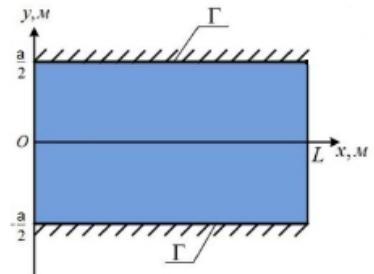


Рис.: Расчетная область

Условия на входе в канал:

$$k = \frac{3}{2} (UI)^2, \quad \varepsilon = C_\mu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_0}, \quad 3\mu \leq \tilde{\nu} < 5\mu.$$

где $I = 0.16(Re)^{-1/8}$ — турбулентная интенсивность, U — средняя скорость потока на входе, $l_0 = 0.07L$ (L — диаметр канала), $C_\mu = 0.09$.

Г. У. на стенах канала: $\tilde{\nu}|_\Gamma = 0$; $k|_\Gamma = 0$; $\left.\frac{\partial \varepsilon}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$.

Результаты модели Спаларта — Аллмараса

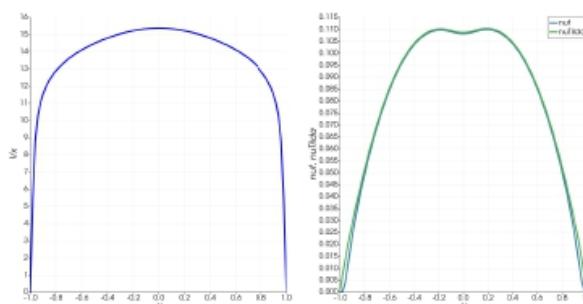


Рис.: V_x , ν_t и $\tilde{\nu}$, полученные в OpenFOAM

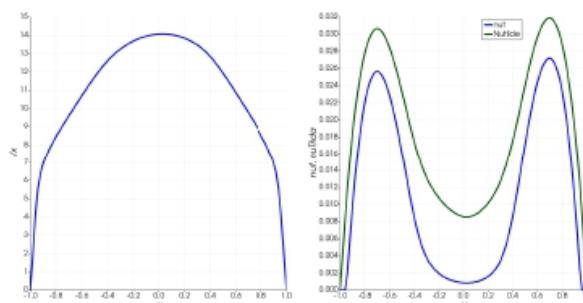


Рис.: V_x , ν_t и $\tilde{\nu}$, полученные разработанным решателем

Результаты модели $k - \varepsilon$

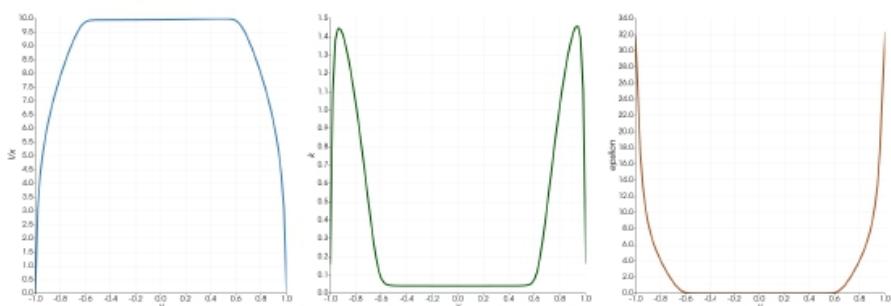


Рис.: V_x , k и ε , полученные в OpenFOAM

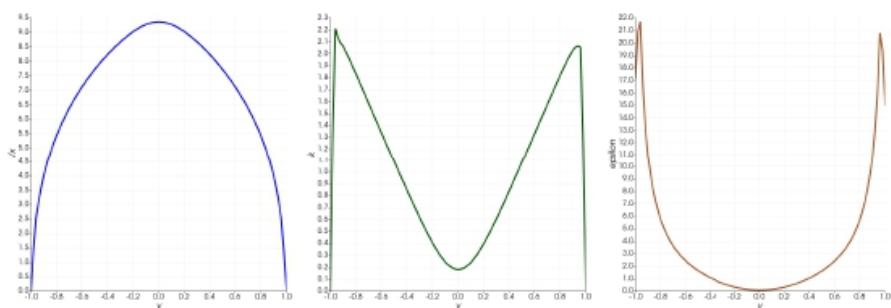


Рис.: V_x , k и ε , полученные разработанным решателем

Результаты модели $k - \varepsilon$

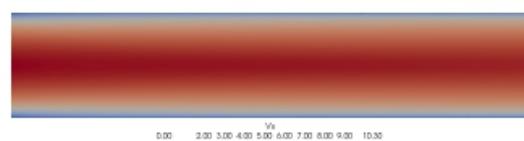


Рис.: Распределение компоненты V_x поля скоростей

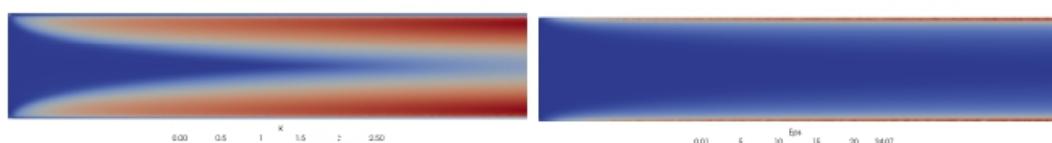


Рис.: Распределение k и ε

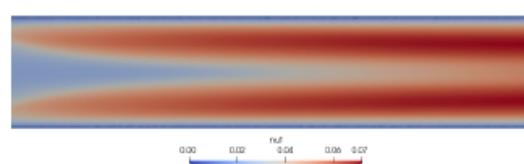


Рис.: Распределение ν_t