



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_ Фундаментальные науки

КАФЕДРА \_\_\_\_\_ Прикладная математика

## *КУРСОВАЯ РАБОТА*

### *НА ТЕМУ:*

*Верификация расчетов методом конечных  
элементов с частицами PFEM-2 путем  
проверки принципа максимума давления*

Студент \_\_\_\_\_  
ФН2-61Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

В. А. Лосев  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

Руководитель курсовой работы

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

А. Ю. Попов  
\_\_\_\_\_  
(И. О. Фамилия)

2022 г.

## Оглавление

1. Введение . . . . .	3
2. Метод PFEM-2 . . . . .	3
3. Верификация метода на основе принципа максимума давления . . . . .	5
4. Нахождение параметра $Q$ в узлах сетки . . . . .	6
5. Нахождение параметра $Q$ в частицах . . . . .	7
6. Решение тестовой задачи . . . . .	9
7. Заключение . . . . .	11
Список использованных источников . . . . .	11

## 1. Введение

Вместе с развитием средств вычислительной техники, продолжается развитие и методов математического моделирования различных процессов в природе и технике. В частности, появляются новые методы численного решения задач гидро- и газодинамики. В отличие от традиционных, широко себя зарекомендовавших, подходов (таких как метод конечных элементов и метод контрольных объемов), новые методы требуют верификации для подтверждения их работоспособности и применимости для решения практических задач. К современным методам решения задач вычислительной гидродинамики относится метод конечных элементов с частицами PFEM-2, предложенный в 2013 году [1]. Этот метод представляет интерес для решения определенного класса задач, в связи с чем актуальна его верификация с помощью различных подходов. Помимо решения тестовых задач с известным решением либо характеристиками течения, может быть применен другой подход – использование принципа максимума давления [2]. Проверка выполнения принципа максимума может применяться в качестве способа верификации для широкого класса численных расчетов течений жидкости (как вязкой, так и идеальной). В методе PFEM-2 расчет ведется в переменных «скорость»-«давление», и этот подход предполагает вычисление некоторого параметра  $Q$  в области течения с использованием поля скоростей. Затем рассматривается поверхность  $Q = 0$ , которая разделяет область течения на области с  $Q > 0$  и  $Q < 0$ , в которых не может быть локального максимум либо минимума, в зависимости от знака. В рамках данной работы за основу взята ранее разработанная на кафедре «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана программная реализация метода PFEM-2, для которой реализована проверка принципа максимума давления, с последующей проверкой на тестовой задаче об обтекании кругового профиля.

## 2. Метод PFEM-2

Метод конечных элементов с частицами — это сеточный метод частиц, как и некоторые другие, например, метод материальной точки. На сегодняшний день существует два варианта метода конечных элементов с частицами: стандартный метод PFEM — чисто лагранжев метод, и его модификация PFEM-2 — гибридный эйлерово-лагранжев метод конечных элементов с частицами. Основная идея обеих вариаций метода PFEM, как с подвижной, так и с фиксированной сеткой, заключается в том что набор частиц переносит все внутренние и внешние свойства и переменные сре-

ды (такие как плотность, вязкость, скорость, давление и т.д.), при этом решается гидродинамическая задача на сетке традиционным методом конечных элементов. В случае метода PFEM-2 проекция с частиц на узлы сетки необходима, но при этом нет необходимости перестраивать сетку на каждом шаге по времени. Также одним из недостатков метода PFEM является необходимость маленького шага по времени для получения приемлемых результатов. Данный недостаток отсутствует в рассмотренном методе конечных элементов с частицами PFEM-2.

Метод конечных элементов с частицами PFEM-2 предназначен для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости, которые описываются системой из уравнения несжимаемости и уравнений Навье — Стокса

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Основной идеей метода PFEM-2 является разделение решения системы (1) на 2 части по физическим процессам: перенос среды моделируется с помощью лагранжевых частиц, а остальные эффекты учитываются на неподвижной эйлеровой сетке. Действия с частицами включают в себя их перемещение по полю скоростей, восстановление поля скоростей в каждом узле, коррекцию скоростей частиц. Выражение для проецирования поля скоростей в узлы сетки имеет следующий вид:

$$\mathbf{u}_j = \frac{\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \varphi_i^j}{\sum_{i=1}^k \varphi_i^j}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{v}_i$  — скорость, переносимая  $i$ -й частицей,  $\varphi_i^j$  — функция формы  $j$ -го узла, вычисленная в координатах  $i$ -й частицы.

Поскольку перенос среды моделируется частицами, на сетке решается упрощенная гидродинамическая задача, без конвективного слагаемого:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Систему (2) можно решить, используя два подхода: «совместный» и «расщепленный». Рассмотрим «расщепленный» подход, главным преимуществом которого считается вычислительная эффективность. Он состоит из трех этапов: прогнозирование скорости, решение уравнения давления, коррекция скорости. Для него имеем следующую схему:

- определяем вектор прогноза скорости  $\mathbf{u}^*$  из

$$\rho \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} = \rho \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{m+\theta},$$

- находим поле давления

$$\Delta p^{m+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*,$$

- далее корректируем скорость

$$\rho \frac{\mathbf{u}^{n+1}}{\Delta t} = \rho \frac{\mathbf{u}^*}{\Delta t} - \nabla p^{m+1}.$$

В данной работе используется программа, реализующая метод PFEM-2, написанная на языке программирования C++ с использованием библиотеки deal.II. Это одна из широко применяемых библиотек с открытым исходным кодом для решения уравнений в частных производных методом конечных элементов. Визуализация результатов осуществляется с помощью ParaView.

### 3. Верификация метода на основе принципа максимума давления

Пусть все гидродинамические параметры являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями координат в некоторой ограниченной замкнутой области  $G$  стационарного течения идеального газа или жидкости. И пусть в  $G$  величина  $Q$  определяется формулой

$$Q = 0.5(\hat{\Omega}_{ij}\hat{\Omega}_{ij} - \hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij}). \quad (4)$$

В формуле (4)

$$\hat{\Omega}_{ij} = 0.5 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

— компоненты антисимметричного тензора завихренности,

$$\hat{S}_{ij} = 0.5 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

— компоненты симметричного тензора скоростей деформации.

Тогда, если во всех точках  $G$  выполняется неравенство

- $Q < 0$ , то во внутренней точке  $G$  давление не может иметь локального минимума;
- $Q > 0$ , то во внутренней точке  $G$  давление не может иметь локального максимума.

В обоих случаях речь идет не только о невозможности достижения строгих экстремумов, но и о невозможности достижения нестрогих экстремумов во внутренней точке  $G$ . Аналогичный смысл параметра  $Q$  был известен для несжимаемой жидкости. Выражение для  $Q$ -параметра содержит только первые производные компонент скорости, что позволяет определять знак (+/-) параметра  $Q$  даже для численных решений, полученных методами низкого порядка и снижает требования к порядку точности и к мелкости шага сетки при определении знака параметра  $Q$  [2]. При этом факт наличия локального минимума или локального максимума давления в некоторой области течения выясняется обычным «перебором» значений в узлах расчетной сетки. Для верификации численного метода достаточно представлять лишь поверхность  $Q = 0$ , имеющую ясный физический смысл. Отметим, что описанный критерий можно применять не только для идеальных, но и для вязких жидкостей, что и рассматривается в рамках данной работы.

Более подробно рассмотрим тензоры  $\hat{\Omega}$  и  $\hat{S}$ . Тензор завихренности имеет нулевые диагональные элементы  $\Omega_{11}$  и  $\Omega_{22}$ . Ненулевыми будут компоненты, имеющие следующие выражения (в двумерном случае):

$$\hat{\Omega}_{12} = 0.5 \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),$$

$$\hat{\Omega}_{21} = 0.5 \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Для тензора  $\hat{S}$  запись аналогична, при этом, соответственно,  $S_{11} \neq 0$  и  $S_{22} \neq 0$ . Таким образом получаем итоговое выражение для вычисления

$$Q = \frac{1}{8} (\hat{\Omega}_{12}\hat{\Omega}_{12} + \hat{\Omega}_{21}\hat{\Omega}_{21} - \hat{S}_{11}\hat{S}_{11} - \hat{S}_{21}\hat{S}_{21} - \hat{S}_{12}\hat{S}_{12} - \hat{S}_{22}\hat{S}_{22}).$$

После несложных преобразований получаем

$$Q = -\frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y}. \quad (5)$$

Вычисление параметра  $Q$  было применено к методу конечных элементов с частицами PFEM-2, реализованному на языке программирования  $C++$  с использованием библиотеки deal.II. Далее рассматриваются 2 реализации этой процедуры: с использованием полей в узлах сетки и в частицах.

## 4. Нахождение параметра $Q$ в узлах сетки

Вычисление параметра  $Q$  производится с помощью нескольких вложенных циклов. Для начала нужно найти  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  в гауссовых точках в силу следующей причины.

Компоненты поля скоростей  $V_x, V_y$  заданы в узлах сетки, при этом функции формы и их градиент вычисляется в библиотеке `deall`. II только в гауссовых точках, поэтому сначала считаем значения производных в гауссовых точках, воспользовавшись формулой

$$G_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 v_{x_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}(\mathbf{r}),$$

где  $i$  — номер узла ячейки,  $\varphi_i$  — функция формы, соответствующая  $i$ -му узлу,  $\mathbf{r}$  — координаты гауссовой точки. Остальные значения производных в гауссовых точках вычисляем аналогично. Далее выполняем проецирование и находим значения производных в узлах. Для производной скорости в некотором узле сетки получим выражение, используя предыдущий результат:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\sum_k G_{xy} \varphi(\mathbf{r}_k)}{\sum_k \varphi(\mathbf{r}_k)},$$

суммирование выполняется по всем гауссовым точкам  $k$  во всех ячейках, содержащих этот узел.

Запишем основные этапы вычисления с помощью псевкода.

```

for (cell) do
    localdVx/dy = 0.0;
    localweights = 0.0;
    for ( $q_i = 0, 1, 2, 3$ ) по гауссовым точкам do
        gaussDVx/Dy = 0.0;
        for ( $vertex = 0, 1, 2, 3$ ) по вершинам ячейки do
            gaussDVx/Dy+ = localVx * shapegrad[1];
            for ( $vertex = 0, 1, 2, 3$ ) do
                localdVx/dy(vertex)+ = gaussDVx/Dy * shapevalue(vertex, q);
                localWeights(vertex)+ = shapevalue(vertex, q);

```

В данном случае  $shapegrad[i]$  — значение  $i$ -й компоненты градиента функции формы в гауссовой точке с номером  $q$ ,  $shapevalue(vertex, q)$  — функция формы,  $localVx$  — локальный вектор значений скоростей в узлах ячейки сетки. Затем информация переносится в глобальный вектор по всем ячейкам. После этого в узлах вычисляется величина  $Q$  по формуле (5).

## 5. Нахождение параметра $Q$ в частицах

В отличие от случая фиксированной конечноэлементной сетки, частицы в методе PFEM-2 занимают произвольное положение и вычисление производных поля

скоростей в них с помощью функций формы невозможно. В таком случае можно использовать подход с применением интегрального оператора дифференцирования, предложенный в [3]. При переходе от непрерывного случая к набору частиц интеграл заменяется на сумму, поэтому запишем оператор ( $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$  — обозначение вычисляемой производной)

$$L_h^\beta f_p = \frac{1}{\varepsilon^{|\beta|}} \sum_q V_q(t) (f_q(t) \pm f_p(t)) \eta_\varepsilon^\beta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q(t)). \quad (6)$$

Выбор знака в скобках зависит от четности или нечетности  $|\beta|$ , которое имеет смысл порядка производной. Если  $|\beta|$  — четное число, то выбирается отрицательный знак, в противном случае — положительный. В данном выражении  $\varepsilon$  — это радиус ядра,  $\eta_\varepsilon^\beta(\mathbf{x}) = \frac{\eta(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})}{\varepsilon^d}$ . В нашем случае  $|\beta| = 1$ , а размерность пространства  $d = 2$ . Запишем оператор второго порядка для аппроксимации производной по  $x$ , в данном случае  $\mathbf{r} = \{x, y\}$ . Его ядро имеет следующий вид:

$$\eta^{(1,0)}(\mathbf{r}) = -2 \frac{x}{\pi} e^{-|\mathbf{r}|^2}.$$

Для аппроксимации производной по  $y$  имеем, соответственно,

$$\eta^{(0,1)}(\mathbf{r}) = -2 \frac{y}{\pi} e^{-|\mathbf{r}|^2}.$$

Для повышения точности на границе, где большая часть частиц лежит по одну сторону от рассматриваемой, предлагается использовать другое ядро. Запишем ядро 2-го порядка для левостороннего случая:

$$\eta^{L,(1,0)}(\mathbf{r}) = (-20 + |\mathbf{r}|^2) \frac{x}{\pi} e^{-|\mathbf{r}|^2}.$$

Коэффициенты ядра «правостороннего» оператора будут иметь точно такие же значения, как и для «левостороннего», но с заменой множителя  $x$  на  $y$ .

С технической точки зрения применять формулу (6) сложно в том случае, если в частицах задана плотность величины  $f_p$ , а не сама величина, т.к. необходимо знать т.н. объем частицы  $V_q$  и учитывать неравномерность распределения частиц. В нашем случае в частицах заданы сами величины — компоненты поля скоростей  $V_x$  и  $V_y$ . В такой ситуации возможно применение вспомогательной равномерной сетки, на которой делаются вычисления по формуле (6). Тогда алгоритм выглядит следующим образом:

- строим равномерную сетку с шагом  $h$ , при этом  $V_q = h^2$  и  $\varepsilon = 2h$ . Шаг этой сетки меньше шага исходной;



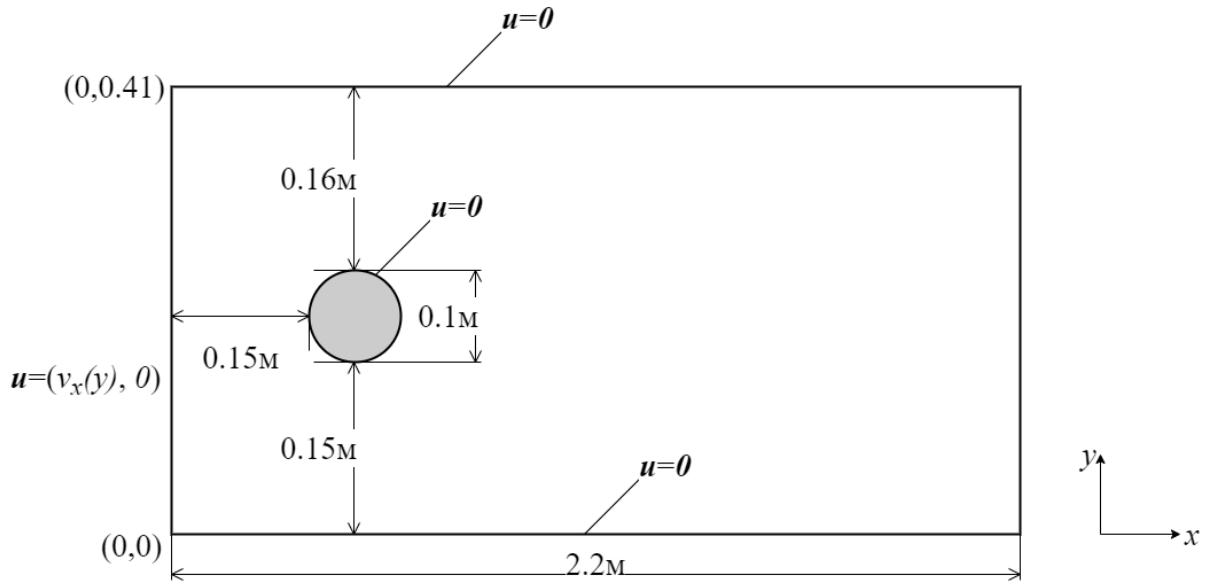


Рис. 1. Расчетная область для тестовой задачи

- проецируем компоненты поля скоростей на вспомогательную сетку с помощью формулы (2). При этом требуется для каждой частицы найти ту ячейку вспомогательной сетки, в которой она находится;
- вычисляем производные в узлах вспомогательной сетки по формуле (6);
- интерполируем найденное поле  $Q$  на частицы с узлов вспомогательной сетки с использованием значений функций формы в них.

## 6. Решение тестовой задачи

Описанные выше процедуры были реализованы в ранее разработанном программном комплексе и затем проверены на тестовой задаче о двумерном обтекании кругового цилиндра. Рассматривается несжимаемая жидкость в канале с цилиндрическим телом, расположенным немного ниже центра канала (рис. 1). Поле скоростей на входе в канал считается горизонтальным, а компонента  $x$  задается с помощью квадратичной зависимости

$$v_x(y) = 4V_{max}y(H - y)/H^2, \quad (7)$$

где  $V_{max} = 1.5$  м/с. Поток ламинарный (число Рейнольдса  $Re = 100$ ), другие параметры жидкости: кинематическая вязкость  $\nu = 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с, плотность  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>. Моделируется нестационарный режим течения. Сконструированная сетка содержит 19700 ячеек, первоначально в каждой ячейке находилось 4 частицы. На рисунке 2 приведено распределение компоненты поля скоростей  $V_x$  для момента времени  $t = 3$ с.

На рисунке 3 показано поле давления с линиями уровня  $Q = 0$ , а также отдельно — распределение скалярной величины  $Q$  в узлах сетки и частицах в тот же момент времени (для случая поля в частицах эффекты на краях области обусловлены некорректностью применения выбранного ядра в одностороннем случае). Видно, что на качественном уровне выполняется принцип максимума: параметр  $Q$  имеет необходимый знак в тех областях, где давление имеет локальный минимум или максимум.

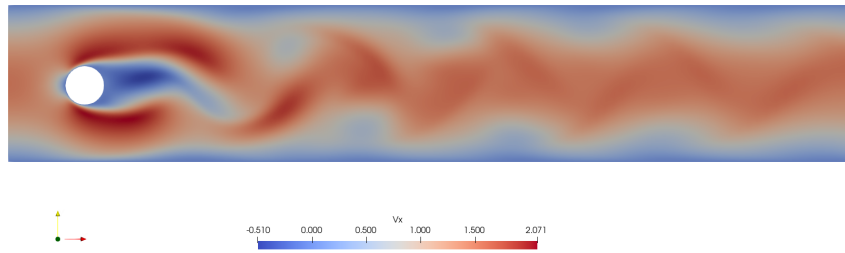


Рис. 2. Компонента поля скоростей  $V_x$  в момент времени  $t = 3с$ .

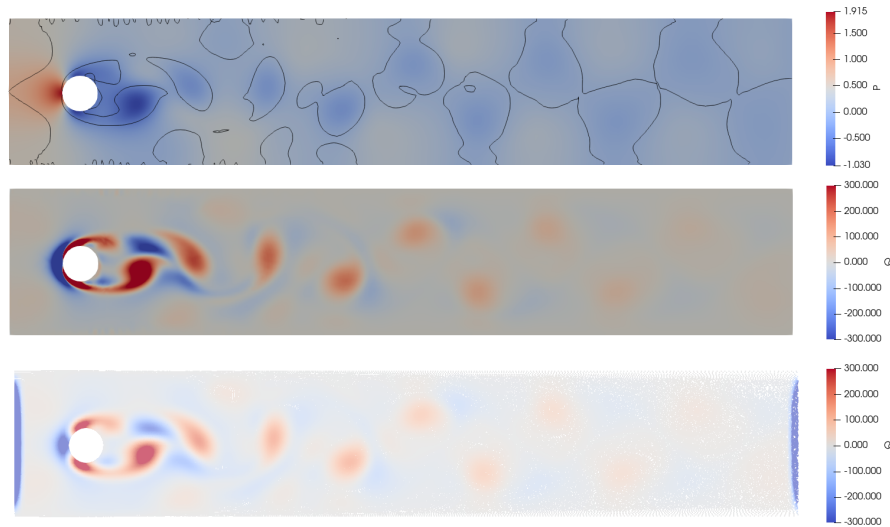


Рис. 3. Поле давления с линиями уровня  $Q = 0$ , распределение скалярной величины  $Q$  в узлах сетки и частицах в тот же момент времени

## 7. Заключение

В ходе работы был реализован один из методов для верификации исходной программы. Параметр  $Q$ , лежащий в основе данного метода, был вычислен в узлах сетки и в частицах, для второго случая потребовалось создание вспомогательной равномерной сетки. Результаты работы программы для тестовой задачи показали, что принцип максимума давления на качественном уровне выполняется в обоих случаях и может служить надежным способом верификации численных расчетов при моделировании течения жидкости или газа. В рамках работы получены базовые навыки по работе с операционной системой семейства Linux, сборки библиотеки deal.II (и сопутствующих), а также использования ранее разработанной реализации метода PFEM-2.

## Список использованных источников

1. Idelsohn S.R., Nigro N.M., Gimenez J.M., Rossi R., Marti J.M. A fast and accurate method to solve the incompressible Navier-Stokes equations // Engineering Computations. 2013. V. 30, No. 2. Pp. 197-222. doi: 10.1108/02644401311304854
2. Вышинский В. В., Сизых Г. Б. О верификации расчетов стационарных дозвуковых течений и о форме представления результатов // Матем. моделирование. 2018. С. 21–38.
3. Eldredge D. A General Deterministic Treatment of Derivatives in Particle Methods // Journal of Computational Physics. 2002. P. 686–709.