Лекция 7. Организация функционирования распределённых ВС с привлечением аппарата стохастического программирования

Пазников Алексей Александрович

Ассистент Кафедры вычислительных систем
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики

http://cpct.sibsutis.ru/~apaznikov

Стохастическое программирование

В чём состоит задача принятия решения?

Выбор переменных (e.g. x_{ij}), оптимизирующих целевую функцию (e.g. f)

От чего зависят оптимальные значения?

От различных параметров (запас ресурсов, время, стоимость)

В чём ограничение стандартных методов?

Оптимальное решение для определённого набора значений параметров

Оказывается

На практике некоторые параметры являются случайными.

Стохастическое программирование

Стохастическое программирование – это подход, позволяющий учитывать неопределённость в задачах оптимизации.

Стохастическое программирование – это раздел математического программирования, совокупность методов решения оптимизационных задач вероятностного характера.

Классификация

- **Одношаговые задачи**

Принимается одно решение, или, если несколько, то каждое предыдущее решение не влияет на изменение случайных величин.

- **Многошаговые задачи**

Два или более решений. Принимаемые решения влияют на изменение случайных величин.

Стохастическое программирование. Пример

Задача линейного программирования:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{x_j}\left(\min_{x_j}\right)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, m$$

Ладно, а что, если c_j, a_{ij}, b_i – <u>случайные</u>??

Например, b_i – ресурс (от ряда факторов), c_j – цена (от спроса и предложения), a_{ij} – расходные коэффициенты

Стохастическое программирование. Пример

Стохастическая постановка целевой функции:

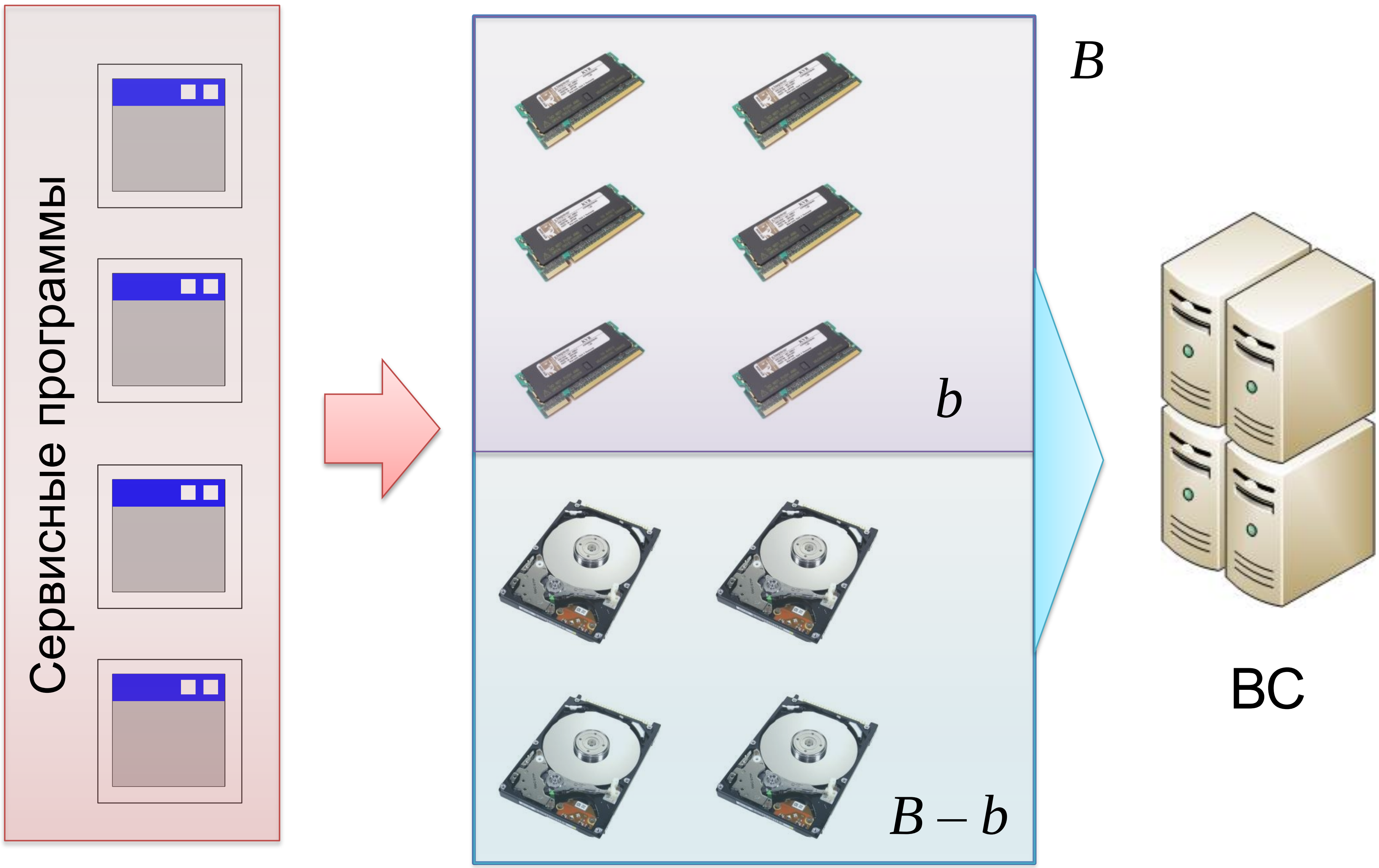
1. Заменить случайные величины их средними значениями (М-постановка)

$$f = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \max_{x_j} \left(\min_{x_j} \right)$$

2. Заменить случайные величины их средними значениями (М-постановка)

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq r \right) \to \max_{x_j} \quad \text{или} \quad P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq r \right) \to \min_{x_j}$$

Задача I



Задача I

Используется набор сервисных программ.

B ячеек – общий объём памяти составляет ячеек.

b ячеек – доступный объём оперативной памяти (ОП).

$\Rightarrow B - b$ ячеек – размещается во внешней памяти (ВП).

Быстродействие(ВП) << *Быстродействие*(ОП)

<u>Дано распределение вероятностей спроса на программы.</u>

Найти: распределение программ в оперативной и внешней памяти, при котором ожидаемые потери минимальны.

Задача I

Пусть $J = \{1, 2, ..., m\}$ – набор сервисных программ:

a_i – **объём памяти**, требуемы для программы i,

t_i – **потери**, которые возникают, когда задача i требуется и когда она не находится в ОП.

p_i – **вероятность** того, что при функционировании ВС понадобится программа i (устанавливаются экспериментально в результате длительного функционирования ВС)

Задача I

Требуется определить

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ размещена в ОП ВС,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

которые минимизируют мат. ожидание потерь

$$\sum_{i=1}^{m} (1 - x_i) t_i p_i$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \le b$$

Задача II

подсистема,
j ЭМ

подсистема,
k ЭМ

ВС, n ЭМ

Задача II

Имеется ВС в составе n ЭМ.

Режим обслуживание потока задач.

Система может быть разбита на подсистемы различных рангов.

$j \in \{1, 2, ..., n\}$ – ранг подсистемы.

При разбиении ВС на подсистемы должно выполняться условие

$$\sum_{j=1}^{n} j x_j \le n$$

x_j – число подсистем ранга j.

Теоретико-игровой подход?

Задача II

Если диспетчер не может формировать пакеты задач из их потока, проблема оперативной диспетчеризации становится сложной.

Почему?

$\Rightarrow$ Цель – организация стохастически оптимального функционирования.

i.e. Вычислительный центр и диспетчер действуют в соответствии со своими оптимальными смешанными стратегиями.

Задача II

d_r – **цена** эксплуатации подсистемы r,

c_r – **стоимость** эксплуатации подсистемы ранга r,

T – длительный промежуток **времени** эксплуатации.

a_j – **спрос** на подсистему ранга r – непрерывная случайная влечина с плотностью $p_j(a_j)$

Тогда м.о. спроса на подсистему ранга j:

$$\rho_j = \int_0^{\infty} a_j p_j(a_j)\, da_j$$

Задача II

1. *СпросНа*(подсистемы j) $>$ *Организовано*(подсистем j)

$\Rightarrow d_j - c_j$ – убыток за каждый неудовлетворённый спрос.

2. *СпросНа*(подсистемы j) $<$ *Организовано*(подсистем j)

$\Rightarrow c_j$ – убыток на каждую избыточную подсистему.

Требуется найти такие числа x_j, $j = 1, 2, ..., n$, которые *максимизируют ожидаемую прибыль* за время T.

Задача II

СпросНа(**подсистемы *j***) < ***Организовано***(**подсистем *j***)

СпросНа(**подсистемы *j***) > ***Организовано***(**подсистем *j***)

Плохо | Плохо

0 $\quad x_j \quad$ **В самый раз!** $\quad \infty$

Ожидаемые **потери от недостатка** подсистем ранга *j*:

$$(d_j - c_j)\int_{x_j}^{\infty}(a_j - x_j)\,p_j(a_j)\,da_j$$

Ожидаемые **потери от избытка** подсистем ранга *j*:

$$c_j\int_{0}^{x_j}(x_j - a_j)\,p_j(a_j)\,da_j = c_j(x_j - \rho_j) + c_j\int_{x_j}^{\infty}(a_j - x_j)\,p_j(a_j)\,da_j$$

Задача II

Математическое ожидание прибыли при эксплуатации ВС:

$$\sum_{j=1}^{n}(d_j - c_j)\rho_j - \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j - \rho_j) - \sum_{j=1}^{n} d_j \int_{x_j}^{\infty}(a_j - x_j)p_j(a_j)da_j$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left((d_j - c_j)\rho_j - c_j(x_j - \rho_j) - d_j \int_{x_j}^{\infty}(a_j - x_j)p_j(a_j)da_j\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(d_j\rho_j - c_j x_j - d_j \int_{x_j}^{\infty}(a_j - x_j)p_j(a_j)\,da_j\right)$$

Задача II

Оптимальные x_j находятся из решения следующей задачи:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(c_j x_j + d_j \int_{xj}^{\infty}(a_j - x_j)p_j(a_j)da_j\right) \to \min_{x_j}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} jx_j \le n,$$

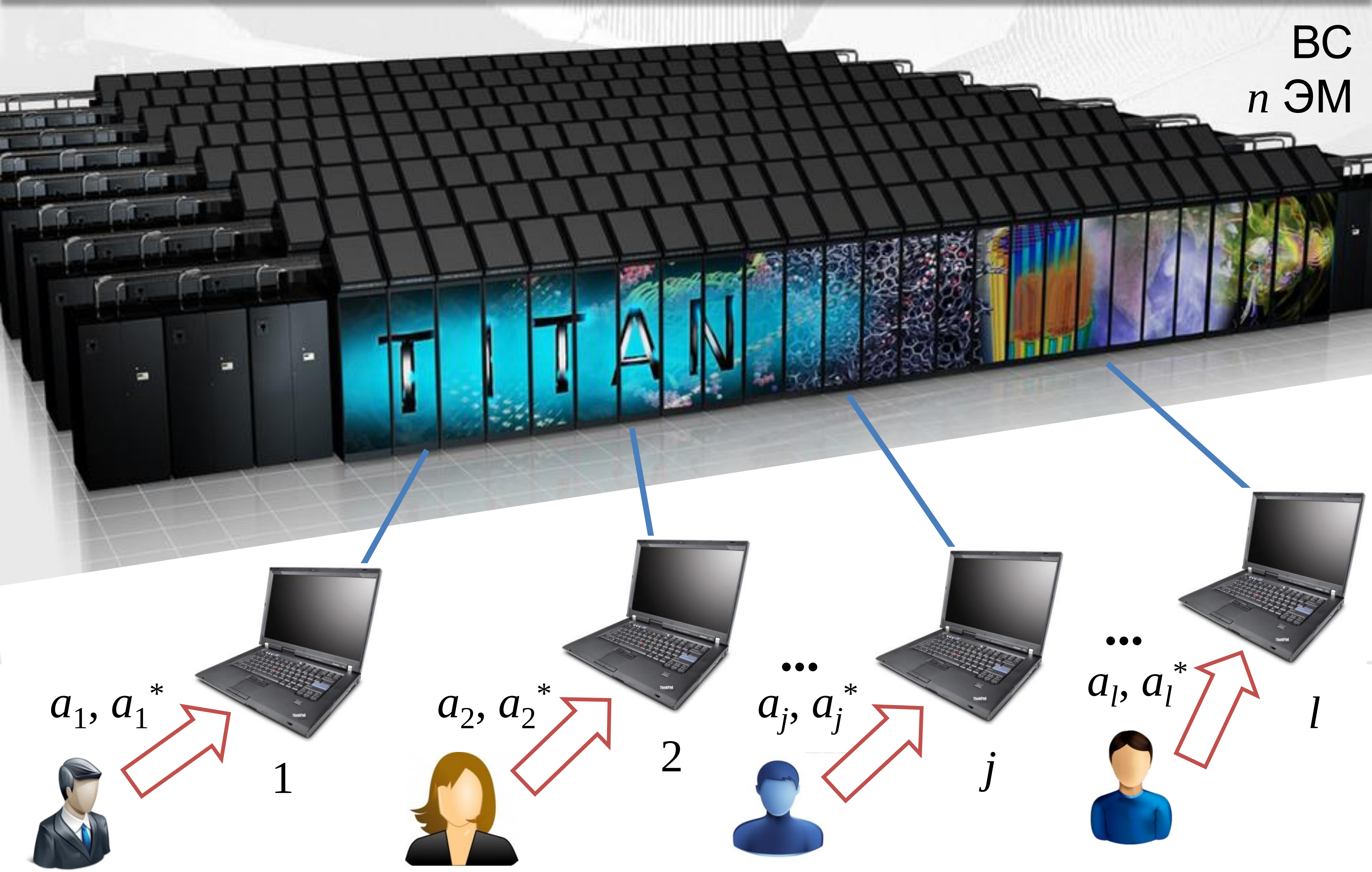
$$x_j \ge 0$$

Задача II

В чём преимущество описанного подхода?

1. Не связан с трудоёмким <u>периодическим</u> поиском ресурсом.
2. Требуется только <u>статистика</u> спросов на подсистемы.
3. Задача стохастического программирования решается <u>один раз</u>.

Задача III



Задача III

Имеется распределённая ВС:

n – количество ЭМ,

l – число терминалов

a_j, a_j^* - минимальный и максимальный допустимые ранги задач, поступивших на терминал $j = 1, 2, ..., l$,

1. Спрос на подсистемы различных рангов заранее неизвестен.
2. Можно определить средний спрос на подсистемы различных рангов.

Задача III

Пусть $p_j(a_j)$ и $p_j^*(a_j^*)$ – вероятности запроса a_j и a_j^* ЭМ с терминала j. Очевидно, что

$$\sum_{a_j=0}^{\infty} p_j(a_j) = 1, \qquad \sum_{a_j^*=0}^{\infty} p_j^*(a_j^*) = 1$$

Тогда средний спрос на терминале j при минимально и максимально требуемом ранге для решения задач потока:

$$\rho_j = \sum_{a_j=0}^{\infty} a_j p_j(a_j), \qquad \rho_j^* = \sum_{a_j^*=0}^{\infty} a_j^* p_j^*(a_j^*)$$

Задача III

Пусть $p_j(a_j)$ и $p_j^*(a_j^*)$ – вероятности запроса a_j и a_j^* ЭМ с терминала j. Очевидно, что

$$\sum_{a_j=0}^{\infty} p_j(a_j) = 1, \qquad \sum_{a_j^*=0}^{\infty} p_j^*(a_j^*) = 1$$

Тогда средний спрос на терминале j при минимально и максимально требуемом ранге для решения задач потока:

$$\rho_j = \sum_{a_j=0}^{\infty} a_j p_j(a_j), \qquad \rho_j^* = \sum_{a_j^*=0}^{\infty} a_j^* p_j^*(a_j^*)$$

Задача III

x_j – ранг подсистемы, которая назначается на терминал j, $j = 1, 2, ..., l$

$c_j(x_j - a_j^*)$ – потери при решении задачи, ранг которой не больше x_j (простаивают избыточные ЭМ),

$c_j x_j + k\rho_j^*$ – потери терминала j (все выделенные терминалу ЭМ простаивают),
где $k\rho_j^*$ – штраф за нерешение задач, k – коэффициент.

Задача III

Среднее число избыточных ЭМ на терминале j:

$$\sum_{a_j^*}^{x_j}(x_j - a_j^*)p_j^*(a_j^*) = x_j - p_j^* + \sum_{a_j^*}^{\infty}(a_j^* - x_j)p_j^*(a_j^*),\ j = 1,2,\ldots,l$$

Ожидаемые потери от избытка ЭМ на терминале j:

$$c_j(x_j - \rho_j^*) + c_j \sum_{a_j^*=x_j}^{\infty}(a_j^* - x_j)p_j^*(a_j^*) \qquad (3.1)$$

Задача III

Среднее число недостающих ЭМ на терминале j:

$$n_j(x_j) = \sum_{a_j = x_j}^{\infty} (a_j - x_j) p_j(a_j), \quad j = 1,2,\dots,l \qquad (3.2)$$

Введём функцию:

$$\delta_j(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } n_j(x_j) \geq 0{,}5 \\ 0, & \text{если } n_j(x_j) < 0{,}5 \end{cases}$$

тогда ожидаемые потери от недостатка ЭМ на терминале j:

$$\delta_j(x_j)(c_j x_j + k\rho_j^*) \qquad (3.3)$$

Задача III

Тогда задача минимизации потерь при распределении ЭМ по терминалам (с учётом (3.1) – (3.3))

$$\min_{x_j} z = \sum_{j=1}^{l} c_j (x_j - \rho_j^*) + \sum_{j=1}^{l} c_j \sum_{a_j^* = x_j}^{\infty} (a_j^* - x_j) p_j^*(a_j^*)$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} \delta_j(x_j)(c_j x_j + k\rho_j^*) \tag{3.4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{l} x_j \le n, \quad x_j \ge 0 \tag{3.5}$$

x_j – целые числа

Задача III

Пусть спрос на подсистемы различных рангов подчинён пуассоновскому закону:

$$p_j(a_j) = \frac{\rho_j^{a_j}}{a_j!} e^{-\rho_j}, \quad p_j^*(a_j^*) = \frac{(\rho_j^*)^{a_j^*}}{a_j^*!} e^{-\rho_j^*} \tag{3.6}$$

из (3.6) следует

$$a_j^* p_j^*(a_j^*) = \rho_j^* p_j^*(a_j^* - 1), \quad a_j^* \geq 1;$$

тогда

$$\sum_{a_j^*=x_j}^{\infty} (a_j^* - x_j) p_j^*(a_j^*) = \begin{cases} \rho_j^* p_j^*(x_j - 1) - x_j p_j^*(x_j), \text{если } x_j \geq 1 \\ \rho_j^*, \text{если } x_j = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $p_j^*(x_j) = \sum_{a_j^*=x_j}^{\infty} p_j^*(a_j^*)$

Задача III

Подставляя (3.7) в (3.4) и в (3.2), получаем:

$$\min z = \sum_{j=1}^{l} \delta_j^*(x_j)(c_j x_j + k\rho_j^*) + \sum_{j=1}^{l} c_j (x_j - \rho_j^*) + \tag{3.8}$$

$$+ \sum_{j=1}^{l} c_j [\rho_j^* p_j^*(x_j - 1) - x_j p_j^*(x_j)]$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{l} x_j \le n, \quad x_j \ge 0 \tag{3.9}$$

x_j – целые числа

Перепишем

$$\min_{x_j} z = \sum_{j=1}^{l} \Big(\delta_j^*(x_j)(c_j x_j + k\rho_j^*) + c_j(x_j - \rho_j^*) +$$

$$c_j[\rho_j^* p_j^*(x_j - 1) - x_j p_j^*(x_j)] \Big)$$

Полагаем

$$f_j(x_j) = \delta_j^*(x_j)(c_j x_j + k\rho_j^*) + c_j(x_j - \rho_j^*) +$$

$$+ c_j[\rho_j^* p_j^*(x_j - 1) - x_j p_j^*(x_j)]$$

Решение матричных игр

Вместо задачи (3.8) – (3.9) получим следующую задачу. Найти

$$\min_{x_j} z = \sum_{j=1}^{l} f_j(x_j) \tag{3.10}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{l} x_j \le n, \quad x_j \ge 0 \tag{3.11}$$

x_j – целые числа

Решение матричных игр

Задача (3.10) – (3.11) – задача динамического программирования.

Следовательно

Можно найти все оптимальные решения x_j^*, $j = 1,\ldots, l$ и соответствующие им значения целевой функции z^*.

Задача III. Пример

Дано: ВС: $n = 10$ ЭМ, $l = 15$, c_j, ρ_j, ρ_j^*

Коэффициент штрафа $k_1 = 0.5$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_j	3	2	2	1	2	5	4	2	3	7	2	1	3	5	2
ρ_j^*	1.7	3	3	3	3	2.7	1	1.2	1.7	2	2	2	1.4	2.5	2
ρ_j	1.2	1	2	1.5	3	2.5	1	1	1.5	2	1	1.5	1	1	1.7

Задача III. Пример

Дано: ВС: $n = 10$ ЭМ, $l = 15$, c_j, ρ_j, ρ_j^*

Коэффициент штрафа $k_1 = 0.5$, $k_2 = 1$, $k_3 = 2$

j		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_j		3	2	2	1	2	5	4	2	3	7	2	1	3	5	2
ρ_j^*		1.7	3	3	3	3	2.7	1	1.2	1.7	2	2	2	1.4	2.5	2
ρ_j		1.2	1	2	1.5	3	2.5	1	1	1.5	2	1	1.5	1	1	1.7
x_j^*	k_1		1	3	2							1	2		1	
	k_2		1		2							1	2	1	1	2
	k_3		1	3	2				1			1		1	1	

$z^* = 11.31$, $z^* = 19.62$, $z^* = 35,85$ – ожидаемые потери

Эндрю Уает "Ветер с океана"

Ф.Бекон. "Папа Иннокентий X Веласкеса"