

Лекция 5. Режим обслуживания потока задач

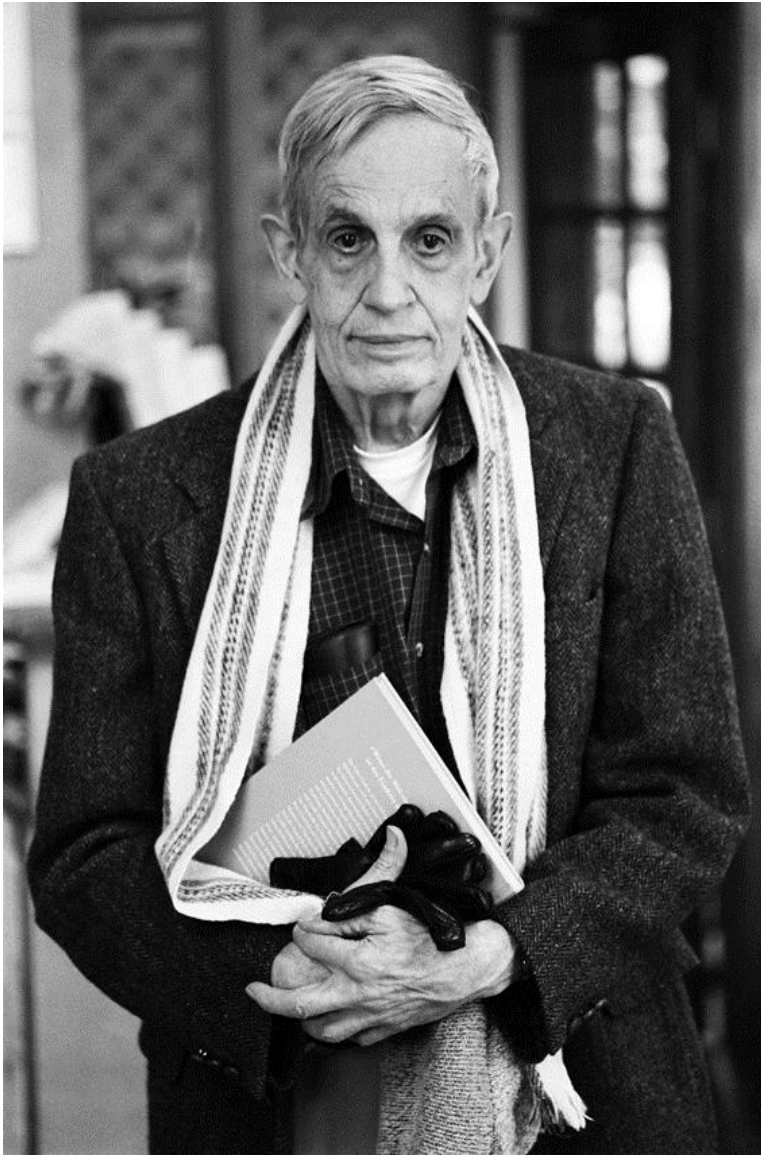
Пазников Алексей Александрович

Ассистент Кафедры вычислительных систем
Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики

<http://cpct.sibsutis.ru/~apaznikov>



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС



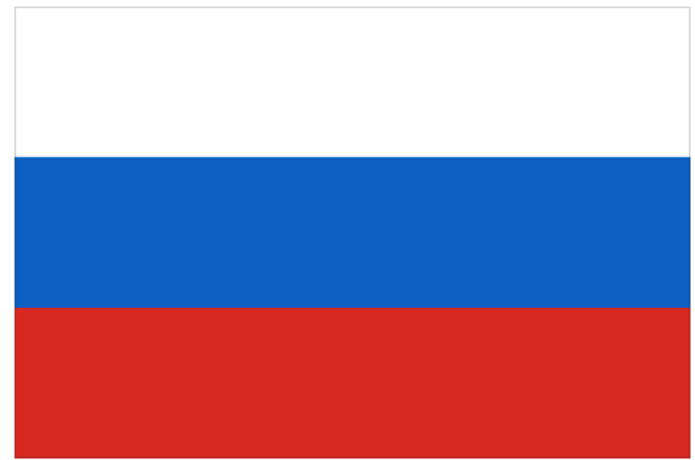
Джон Нэш (John Nash; род.1928)

- Американский математик, работающий в области теории игр и дифференциальной геометрии.
- Лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 года «За анализ равновесия в теории некооперативных игр».
- Известен широкой публике большей частью по биографической драме Рона Ховарда «Игры разума» (англ. A Beautiful Mind) о его математическом гении и борьбе с шизофренией.



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

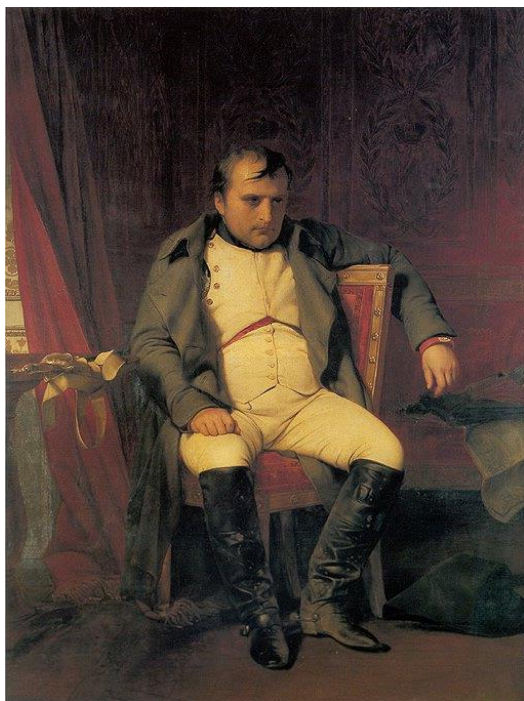
- В теории игр рассматриваются ситуации, связанные с принятием решений, в которых **два противника имеют конфликтующие цели.**





Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

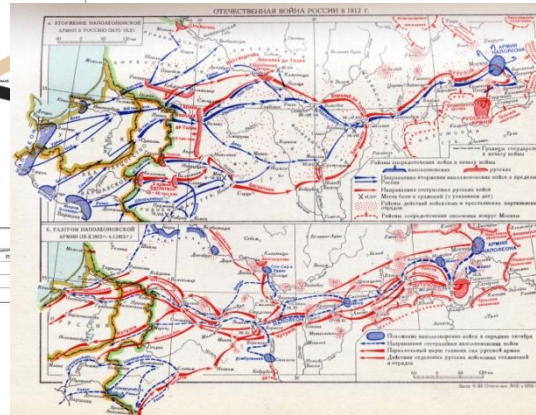
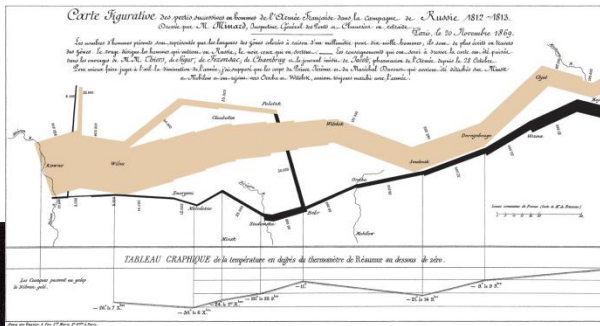
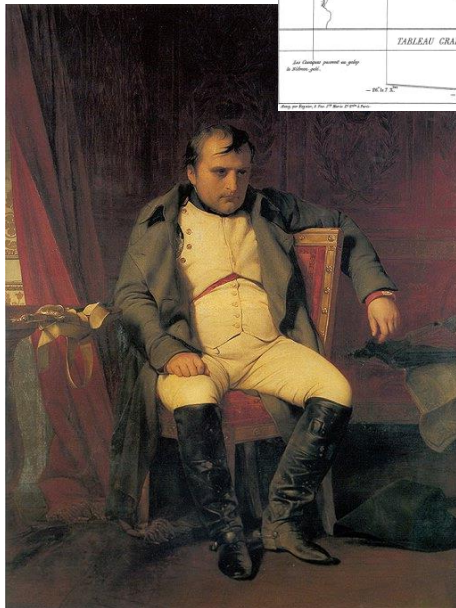
- В игровом конфликте участвуют два противника, именуемые **игроками**, каждый из которых имеет множество возможных выборов, которые называются стратегиями





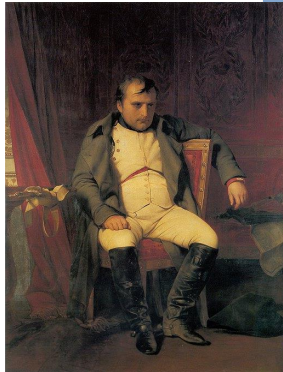
Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

- Каждый из игроков имеет некоторое множество возможных выборов, которые называются **стратегиями**.





Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

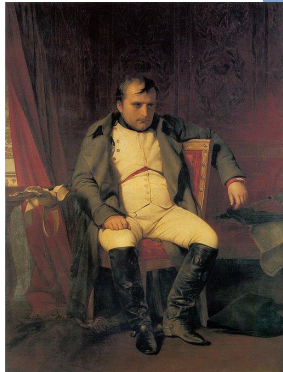


	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

- С каждой парой стратегий связан **платёж**, который один из игроков выплачивает другому.
- Такие игры известны как **игры двух лиц с нулевой суммой**.



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС



	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

- Если игрок A использует стратегию i , а игрок B – стратегию j , то:
- платёж игроку A составляет a_{ij} ,
 - платёж игроку B составляет $-a_{ij}$



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС



Что является оптимальным решением игры?



- **Оптимальным решением игры** является одна или несколько стратегий для каждого из игроков, при котором любое отклонение от данных стратегий не улучшает плату тому или другому игроку.
- Эти решения могут быть в виде единственной **чистой** стратегии
- или нескольких стратегий, которые являются **смешанными** в соответствии с заданными вероятностями.



Решение в чистых стратегиях

	B_1	B_2	B_3	B_4	Минимумы строк
A_1	6	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5 <i>максимин</i>
A_3	-2	4	-9	5	-9
Максимумы столбцов	8	5	9	8	

минимакс



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

- Решение может быть основано на обеспечении **наилучшего результата из наихудших** для каждого игрока.
- Критерий наилучшего результата из наихудших соответствует выбору **минимаксному значению**.
- Оптимальным решением в игре является выбор стратегий A_2 и B_2 .
- При этом цена игры составляет 5 и игроки А и В используют стратегии, соответствующие **седловой точке**.



Решение в смешанных стратегиях

	B_1	B_2
A_1	1	-1
A_2	-1	1

Минимумы
строк

-1

-1

Максимумы
столбцов

1

1



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

ВЦ

ВС

ЭМ₁

ЭМ₂

ЭМ₃

⋮

ЭМ_n



Диспетчер





Дано: ВЦ, на котором эксплуатируется ВС из n ЭМ, и диспетчер.

Требуется выделять вычислительные ресурсы для задач.



Задача 1. [Евреинов, Хорошейвский, с. 185]

Имеется ВЦ, эксплуатирующий ВС из n ЭМ

ВЦ для решения задач может выставлять любое число ЭМ

$$i \in E = \{0, 1, \dots, n\}$$

На ВЦ поступает поток задач различных рангов

Считается, что интенсивность такая, что имеются задачи всех рангов.



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

Считается, что интенсивность такая, что имеются задачи всех рангов.

Считаем, что построены пакеты задач r_j'

Имеется диспетчер, который в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots$ назначает на ВС задачи с временем $\Theta = 1$

Имеется игра с участием двух игроков: ВЦ и диспетчера
ВЦ использует *чистую стратегию* $i \in E$, если для решения задач отводит i ЭМ

Диспетчер использует *чистую стратегию* j , если для решения он назначает задачу ранга j .



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

Если ВЦ выбирает стратегию i , а диспетчер стратегию j , то диспетчер “платит” ВЦ сумму c_{ij} , $c = \| c_{ij} \|$ - матрица платежей.



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

Если ВЦ применяет смешанную стратегию $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$, а диспетчер – смешанную стратегию $\Pi = \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n\}$, то средний платёж вычислительному центру составит

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} p_i \pi_j$$

p_i и π_i – вероятности выбора соответственно вычислительным центром стратегии с номером i и диспетчером стратегии с номером j .



Теоретико-игровой подход к проблеме организации функционирования ВС

ВЦ имеет оптимальную смешанную стратегию $P^* = \{p_0^*, p_1^*, \dots, p_n^*\}$, а диспетчер – оптимальную смешанную стратегию $\Pi^* = \{\pi_0^*, \pi_1^*, \dots, \pi_n^*\}$ такие что

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} p_i^* \pi_j \geq V \geq \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} p_i \pi_j^*$$

$$V = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} p_i^* \pi_j^*$$

Требуется для заданной матрицы платежей найти решение $\{P^*, \Pi^*\}$ и цену V игры



Подбор элементов платёжной матрицы

Будем считать, что если i, j – чистые стратегии соответственно ВЦ и диспетчера, то элементы матрицы платежей

$$c_{ij} = \begin{cases} jc_1 + (i - j)c_2 & \text{при } i \geq j, \\ jc_1 + (j - i)c_3 & \text{при } i < j, \end{cases}$$

где c_1 – платёж за использование одной машины в течение единицы времени, c_2 и c_3 – штрафы в единицу времени за простой одной машины и и при $j - i = 1$



Подбор элементов платёжной матрицы

Наиболее вероятно, что в на ВЦ будут поступать задачи всех рангов. Поэтому алгоритм функционирования ВС, состоящий в назначении задач одного ранга, представляется неэффективным. Следовательно, игра не должна иметь решения в чистых стратегиях, т.е. матрица $\|c_{ij}\|$ **не должна иметь седловых точек.**



Теорема. Матрица c_{ij} не имеет седловых точек тогда и только тогда, когда $c_1 < \min\{c_2, c_3\}$



Доказательство.

Необходимость Пусть матрица $\|c_{ij}\|$ не имеет седловых точек. Из определения c_{ij} следует, что максимальным элементом 0-столбца является c_{n0} . Так как по условию $\|c_{ij}\|$ не имеет седловых точек, то c_{n0} не должен быть минимальным в своей строке. Минимум в последней строке должен достигаться в c_{nn} . Значит, $c_{nn} < c_{n0}$, но так как $c_{n0} = nc_2$, а $c_{nn} = nc_1$, то $c_1 < c_2$

Аналогично рассуждая для 0-строки и n -столбца, получим $c_1 < c_3$. Необходимость доказана.



Достаточность

Если $c_1 < \min\{c_2, c_3\}$, то легко увидеть, что диагональные элементы являются минимальными в своей строке и в своём столбце, причём минимум строгий. Следовательно, матрица не имеет седловых точек.





Имеется ВС из n ЭМ и множество $J = \{1, 2, \dots, m\}$ задач.

Задачи характеризуются рангом r_j и временем t_j решения.

Требуется множество всех задач ранга r , $i \leq r \leq n$, разбить на подмножества так, чтобы в каждое из них входили задачи, суммарное время решение которых было близко к заданному значению Θ .



Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

Пусть подмножества $J^r \subseteq J$, $r = 1, \dots, n$ – такие, что в J^r входят все задачи $I_i^r \in J$, $i = 1, 2, \dots, a$, которые имеют ранг r . Время решения этих задач

$$T_r = \sum_{i=1}^a t_i^r$$



Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

Пусть также $J' = \{I_1^r, I_2^r, \dots, I_i^r, \dots, I_a^r\}$ – некоторая последовательность, членами которой являются элементы J_i^r . Подмножество $J_j \subseteq J'$ включает в себя k_j задач, причём

$$J_j = \bigcup_{i=K_j+1}^{K_j+k_j} J_i^r,$$

где

$$K_j = \sum_{s=0}^{j-1} k_s, \quad k_0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, L_r, \quad L_r =]T_r / \Theta[$$

(L_r – ближайшее к T_r / Θ целое число, $L_r \geq T_r / \Theta$)



Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

Каждое подмножество $J_j \subset J'$, $j = 1, 2, \dots, L_r$, назовём укрупнённой задачей b_j ранга r . Время решения таких задач

$$T_j = \sum_{i=K_j+1}^{K_j+k_j} t_i^r$$

Будем считать, что для пакет укрупнённых задач ранга r сформирован, если справедливо равенство

$$|T' - \Theta| = o(T'),$$

где $T' = \max_{J_j \subset J} \{T_j\}$



Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

Подмножества $J_j \subset J'$ выбираются следующим образом.

Пусть построены подмножества $J_s \subset J'$, $s = 1, 2, \dots, j - 1$, тогда подмножества

$$J_j = \begin{cases} J''_j, k_j = k'_j, \text{ если } (\Theta_u)_j > [T_j - (\Theta_b)_j](L_r - j)^{-1} \\ J''_j \cup I_{K_j+k'_j+1}, k_j = k'_j + 1, \text{ в противном случае} \end{cases}$$

где J''_j – часть последовательности J' такая, что

$$J'_j = \{I_{K_j+1}, I_{K_j+2}, \dots, I_{K_j+k'_j}\}, \quad T^j = \sum_{i=K_j+1}^{L_r} t_i^r$$

а для величин $(\Theta_u)_j$ и $(\Theta_b)_j$ справедливы соотношения

$$\sum_{i=K_j+1}^{K_j+k'_j+1} t_i^r = (\Theta_u)_j > \Theta, \quad \sum_{i=K_j+1}^{K_j+k'_j} t_i^r = (\Theta_b)_j \leq \Theta$$



Требуется найти такую последовательность J'^* задач, которая обеспечит выполнение условия

$$|T' - \Theta| = o(T') \quad (*)$$

Последовательность J'^* отыскивается с помощью **метода цепей Монте-Карло**



Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

1. Последовательность J' принимается за базовую.
2. Рассматриваем перестановки, находящиеся на расстоянии не больше k , $k \leq a$, от базовой. В качестве *расстояния* между двумя последовательностями J' и J'' принимают число индексов в J'' , которые не следуют за теми же индексами, что и в базовой J' .



Стохастический алгоритм формирования пакетов задач

3. Сначала получаем $k - 1$ переменных x_i в непрерывном интервале $(0, a)$: $x_i = a\xi_i$, $i = 1, 2, \dots, k - 1$, где $\xi_i \in U(0, 1)$.
4. Если $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_i \leq x_k = a$, то x_i делят последовательность J' на k частей $J^s \subseteq J$, $s = 1, 2, \dots, k$, содержащих задачи, номера которых являются целыми числами в $(x_{i-1}, x_i]$. Некоторые части могут оказаться пустыми. Случайная перестановка этих частей даёт новую последовательность J'' с расстоянием не больше k от базовой.
5. Если T'' для новой последовательности J'' меньше T , т.е. наилучшим образом удовлетворяет (*), то J'' берётся в качестве базовой.



6. Если сделано d попыток моделирования последовательностей с расстоянием k от базовой без изменения базовой, то рассматриваются последовательности с расстоянием $k / 2$ и так далее до тех пор, пока не будут смоделированы последовательности расстоянием 2.



Д. Поллок «Человек с ножом»