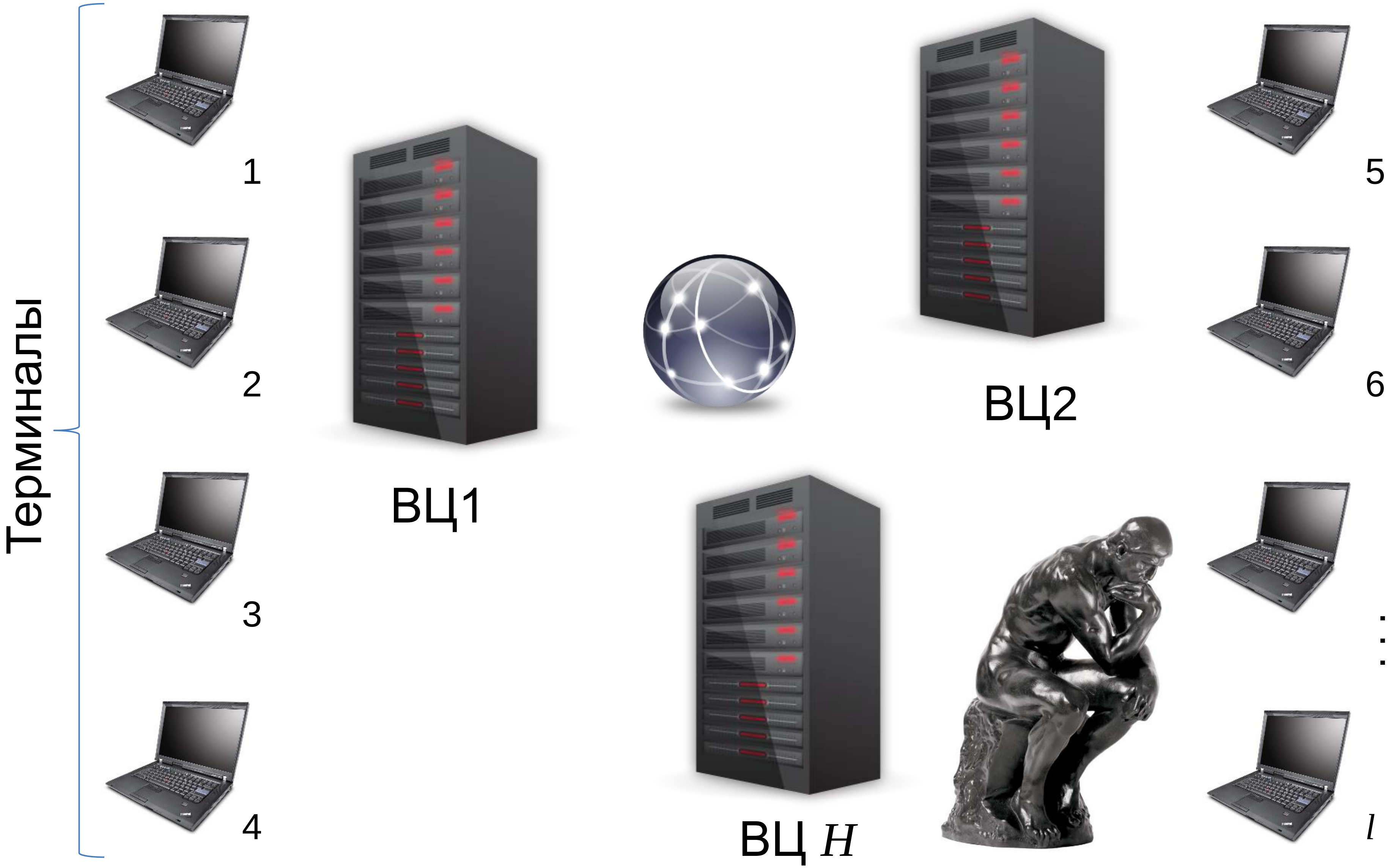
Лекция 8. Организация функционирования распределённых ВС с привлечением аппарата стохастического программирования

Пазников Алексей Александрович

Ассистент Кафедры вычислительных систем
Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики
http://cpct.sibsutis.ru/~apaznikov

Задача IV



Задача IV

Пусть ВС состоит из n ЭМ, размещённых в H вычислительных центрах, и обслуживает l терминалов.

Тогда очевидно, что:

$$\sum_{i=0}^{H} n_i = n \quad \sum_{i=0}^{H} l_i = l$$

Задача IV

- На терминалы поступают потоки задач различных рангов.
- Спрос с каждого терминала $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ подчинён пуассоновскому распределению.
- ρ_j и ρ_j^* – среднее значение спроса при минимальном и максимальном требуемом ранге.
- c_j – стоимость использования одной ЭМ с терминала j.
- $\|c_{ik}\|$ – стоимости каналов между i-м и k-м ВЦ; $i, j \in 1,2, \ldots, H$

Задача IV

Пусть

- x_j – ранг подсистемы, назначенной терминалу j, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$
- a_j и a_j^* – минимальный и максимальный ранги подсистем, которая потребуется на терминале j.
- χ_{ij} – число ЭМ i-го ВЦ, используемых терминалом j
- Введём функцию $\delta(\chi_{ij})$

$$\delta = \begin{cases} 1, \text{если } \chi_{ij} > 0 \\ 0, \text{если } \chi_{ij} = 0 \end{cases}$$

Задача IV

Тогда потери, связанные с использованием каналов:

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{t=1}^{H}\delta(\chi_{ij})c_{ik_j}, kj = 1, 2, \dots, H$$

где k_j – номер ВЦ, содержащего терминал j.

Задача IV

- Избыточные ЭМ на j-м терминале простаивают.
- При необеспечении минимально необходимым числом ЭМ все ЭМ, выделенные терминалу, простаивают и платится штраф.

Задача IV

Задача, которую необходимо решить:

$$\min_{x_j} z = \sum_{j=1}^{l} \left\{ \sum_{i=1}^{H} \delta(\chi_{ij}) + \delta_j(x_j)\left(c_j x_j + k\rho_j^*\right) \right.$$

$$\left. + cj\left(x_j - \rho_j^*\right) + c_j[\rho_j^* p_j^*(x_j - 1) - xjp_j^*(x_j)] \right\}$$

при условиях

x_j, χ_{ij} - неотрицательные целые, $j = 1, ..., l$, $i = 1, ..., H$

$$\sum_{j=1}^{l} \chi_{ij} = ni\,, \sum_{j=1}^{H} \chi_{ij} - xj = 0$$

Задача IV

Здесь

$$\delta j(xj) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho_j p_j(x_j - 1) - xjp_j(xj) \geq 0{,}5, \\ 0, & \text{если } \rho_j p_j(x_j - 1) - xjp_j(x_j) < 0{,}5, \end{cases}$$

$$p_j(x_j) = \sum_{a_j = x_j}^{\infty} \frac{\rho_j^{a_j}}{a_j!} e^{-\rho_j}, \qquad p_j^*(x_j) = \sum_{a_j^* = xj}^{\infty} \frac{(\rho_j^*)^{a_j^*}}{a_j^*!} e^{-\rho_j^*}$$

$k\rho_j$ – штраф за нерешение задачи на j-м терминале,

k – коэффициент штрафа

Задача IV

- Задача целочисленного программирования.
- Поиск точного решения связан с большими затратами.
- Лучше быстрое гарантированное получение приближенного решения.
- Задача может быть эффективно решена методом цепей Монте-Карло

Задача IV. Пример

- $H = 7$ – количество ВЦ.
- $n = 16$ – общее число ЭМ, причём

$$n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 4,\ n_4 = 1,\ n_5 = 2,\ n_6 = 3,\ n_7 = 3$$

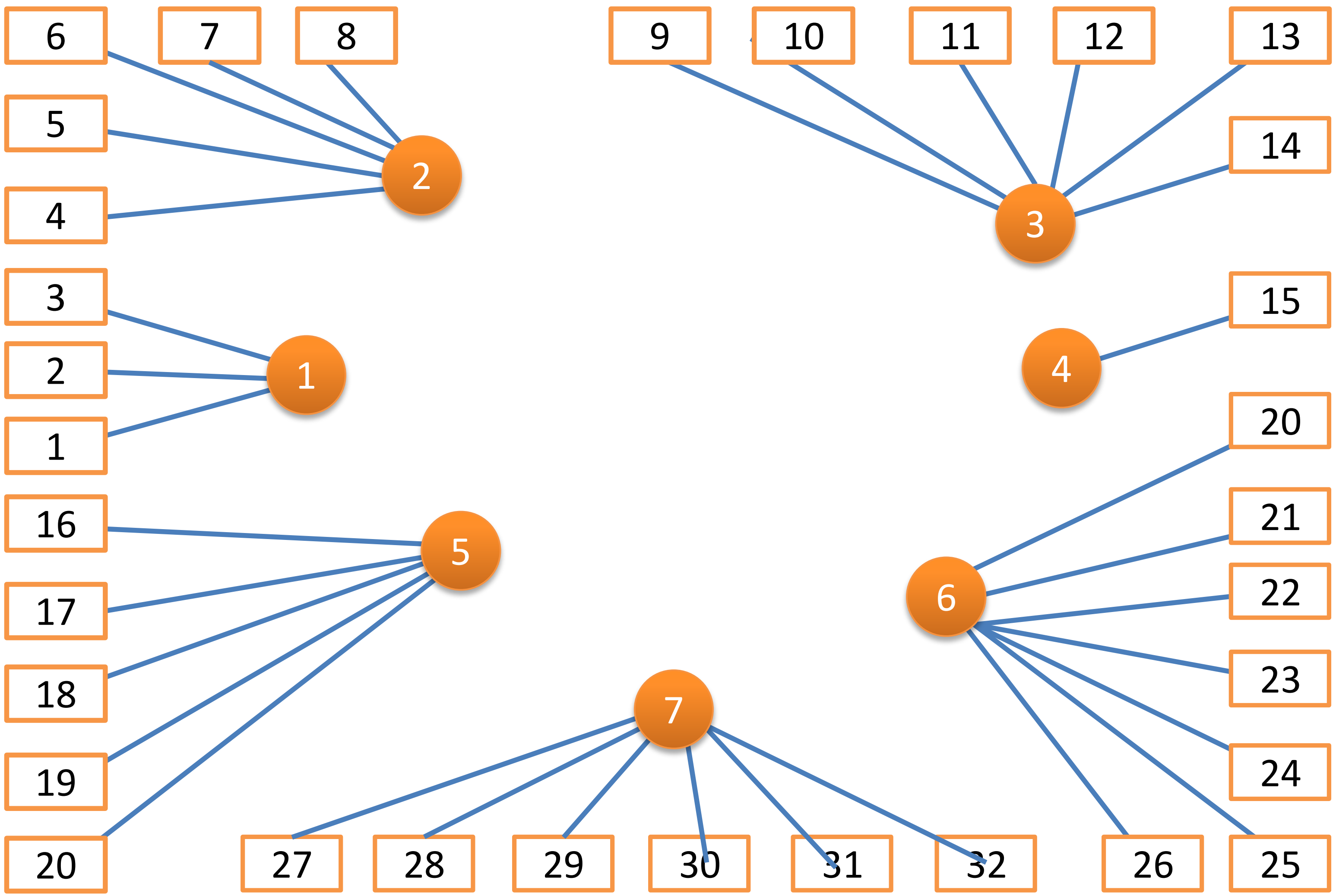
- $l = 32$ – количество терминалов, причём

$$l_1 = 3,\ l_2 = 5,\ l_3 = 6,\ l_4 = 1,\ l_5 = 4,\ l_6 = 7,\ l_7 = 6$$

- Известны значения c_j, ρ_j, ρ_j^*, $j = 1, \ldots, 32$
- Задана матрица $\|c_{ik}\|$.

Пример. Размещение 7 ВЦ и 32 терминалов

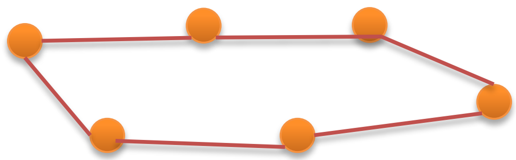
Пусть ВС состоит из $n = 16$ ЭМ и включает $H = 7$ ВЦ:



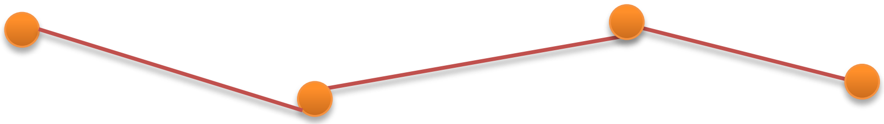
Пример. Размещение 7 ВЦ и 32 терминалов

Варианты топологического размещения ВС:

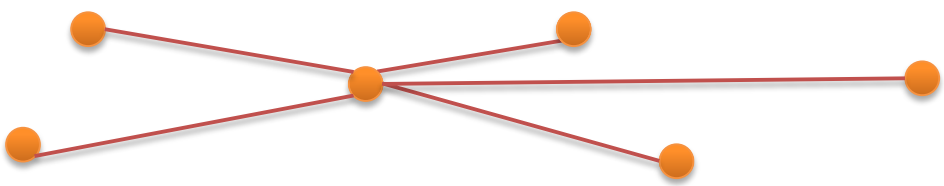
1. Система с кольцевой структурой.



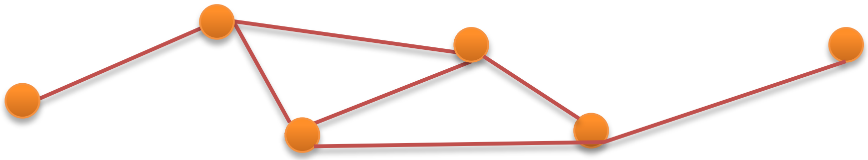
2. Одномерная (линейная) система.



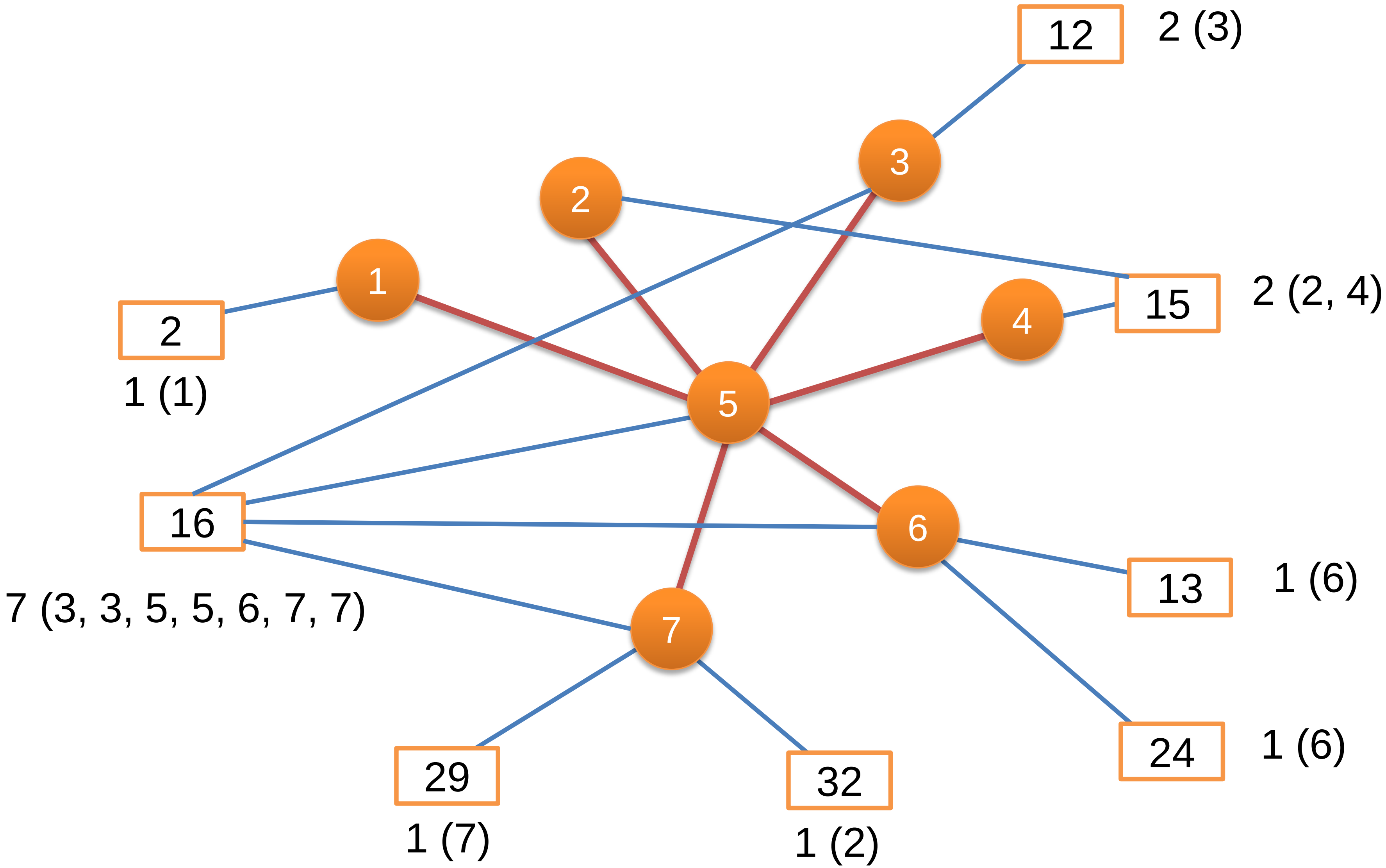
3. Система с радиальной структурой.



4. Система с произвольной структурой.



Методы решения



Методы решения

Метод рекуррентных соотношений («динамическое программирование»)

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j(xj) \to \min_{x_j} \quad , \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,$$

$$a_j > 0, \qquad x_j \geq 0, \tag{2}$$

$$j = 1, \dots, n$$

$$b, aj, xj \; - \text{целые}$$

Метод рекуррентных соотношений

Оптимальное решение x_1^*, x_2^*, …, x_n^* обеспечивает глобальный минимум (1) при ограничениях (2):

$$z^* = \sum_{j=1}^{n} f_j(xj) = \min_{x_j} \sum_{j=1}^{n} f_j(xj),$$

Метод рекуррентных соотношений

Можно показать, что для последовательности функций

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_j} \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j), \qquad k = 1, \dots, n, \quad = 0, \dots, b$$

в которых решение удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le \xi$$

справедливы рекуррентные соотношения

(3)

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_k} [f k(x_k) + \Lambda k - 1(\xi - akxk)] = \min_{x_k} \Omega_k(xk)$$

где x_k может принимать значения $0, 1, \dots, [\xi / a_k]$.

Метод рекуррентных соотношений

Процедура отыскания z^*:

1. Непосредственное определение $\Lambda_1(\xi)$
2. Вычисление $\Lambda_k(\xi)$, $k = 2, 3, ..., n - 1$ при помощи (3)
3. Определение $z^* = \Lambda_n(b)$

Метод рекуррентных соотношений

Как отыскиваются оптимальные x_j^*

Пусть $x'_1(\xi)$ – значение $x_1(\xi)$, для которых

$$f_1(x'_1(\xi)) = \min_{0 \le x_1 \le [\xi/a_1]} f_1(x_1) = \Lambda_1(\xi)$$

где $\xi = 0, 1, ..., b$

Метод рекуррентных соотношений

Строится таблица $x'(\Lambda)$

ξ	$\Lambda_1(\xi)$	$x_1(\xi)$
0	$\Lambda_1(\xi)$	$x_1(\xi)$
1	$\Lambda_1(\xi)$	$x_1(\xi)$
$\ldots$	$\Lambda_1(\xi)$	$x_1(\xi)$
b	$\Lambda_1(\xi)$	$x_1(\xi)$

Метод рекуррентных соотношений

Получив $\Lambda_1(\xi)$ для всех $\xi = 0, 1, ..., b$, вычисляем

$$\Lambda_2(\xi) = \min_{0 \le x_2 \le [\xi/a_2]} [f_2(x_2) + \Lambda_1(\xi) - a_2 x_2]$$

Для этого фиксируем ξ и последовательно для $x_2 = 0,1, ..., [\xi / a_2]$ находим величины

$$\begin{aligned} &\Omega_2(0,\xi) = f_2(0) + \Lambda_1(\xi) \\ &\Omega_2(1,\xi) = f_2(1) + \Lambda_1(\xi - a_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Omega_2([\xi/a_2],\xi) = f_2([\xi/a_2]) + \Lambda_1(\xi - [\xi/a_2]) \end{aligned} \qquad (4)$$

Метод рекуррентных соотношений

- Наименьшая величина из (4) будет $\Lambda_1(\xi)$.
- Процедура выполняется рекурсивно.
- Для всех ξ строится аналогичная таблица x'_2.
- Отыскиваются оставшиеся значения x_j^*.

$$x^*_{n-i} = x'_{n-i}\left(b - \sum_{k=0}^{i-1} a'_{n-k} x^*_{n-k}\right), \qquad i = 1, \dots, n$$

В результате получаем z^* и множество решений x_j^*.

Хаим Сутин «Гладиолусы»