

Лекция 6. Методы решения матричных игр в смешанных стратегиях

Пазников Алексей Александрович

Ассистент Кафедры вычислительных систем
Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики

<http://cpct.sibsutis.ru/~apaznikov>



?



Методы решения матричных игр:

- Поиск седловой точки (решение в чистых стратегиях)
- Составление системы уравнений (если $n = m$)
- Графический метод (если $n \leq 2$ или $m \leq 2$)
- Сведение матричной игры к задаче линейного программирования
- Метод Брауна
- и др.



Хотя бы один игрок имеет две чистые стратегии

Рассмотрим игру $2 \times n$, в которой игрок A имеет две стратегии.

	y_1	y_2	\dots	y_n
	B_1	B_2	\dots	B_n
$x_1: A_1$	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1n}
$1-x_1: A_2$	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2n}



Графический метод

Игрок A выбирает стратегии A_1 и A_2 с вероятностями x_1 и $1-x_1$.

Игрок B выбирает стратегии B_1, B_2, \dots, B_n с вероятностями y_1, y_2, \dots, y_n , где $y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$, $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$

Ожидаемый выигрыш игрока A , соответствующий j -й стратегии игрока B :

$$x_1 a_{1j} + (1-x_1) a_{2j}, j = 1, 2, \dots, n$$

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, j = 1, 2, \dots, n$$

Следовательно, игрок A ищет величину x_1 , которая максимизирует минимум ожидаемого выигрыша

$$\max_{x_1} \min_j \{ (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j} \}$$



Графический метод. Пример

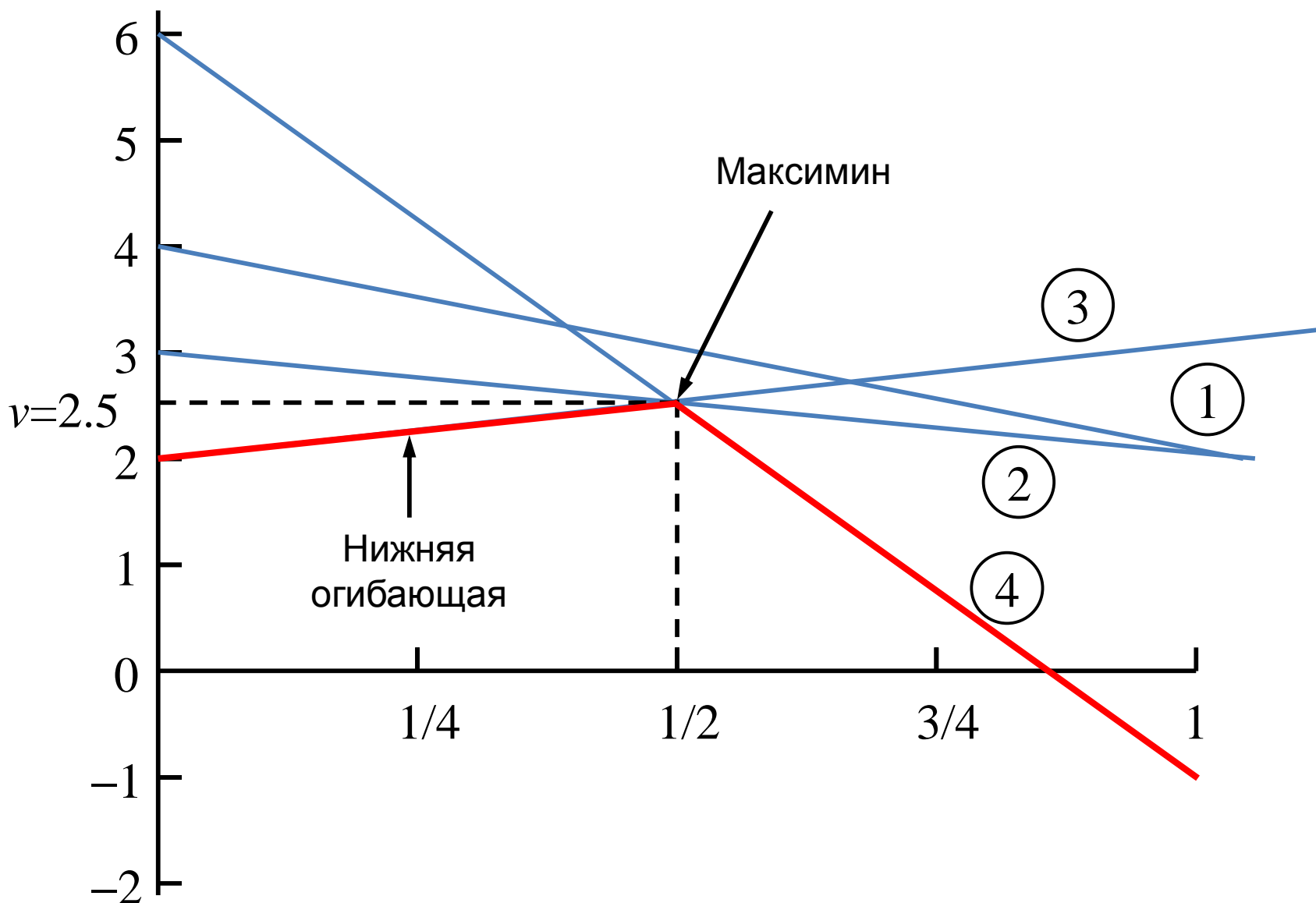
Рассмотрим игру 2×4 между ВЦ (A) и диспетчером (B), в которой платежи выплачиваются вычислительному центру.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	-1
A_2	4	3	2	6

Чистые стратегии B	Ожидаемые выигрыши A
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$



Графический метод. Пример





Графический метод. Пример

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 3,} \\ -7\left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{5}{2} & \text{из уравнения прямой 4.} \end{cases}$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока B определяется двумя стратегиями B_3 и B_4 , формирующими нижнюю огибающую графика \Rightarrow

$$y_1 = y_2 = 0 \text{ и } y_4 = 1 - y_3$$

Ожидаемые платежи игрока B :

Чистые стратегии A	Ожидаемые выигрыши B
1	$4y_3 - 1$
2	$-4y_3 + 6$



Оптимальные стратегии игрока B ?

Наилучшее решение из наихудших для игрока B – точка минимум верхней огибающей заданных двух прямых:

Чистые стратегии A	Ожидаемые платежи B
1	$3y_3 - 1(1 - y_3) = 4y_3 - 1$
2	$2y_3 + 6(1 - y_3) = -4y_3 + 6$

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6 \Rightarrow y_3 = 7/8$$

$$\text{Цена игры: } v = 4 \times (7/8) - 1 = 5/2$$

Оптимальные стратегии игрока B :

$$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 7/8, y_4 = 1/8$$



Оптимальные значения вероятностей x_i , $i = 1, 2, \dots, m$
игрока A :

$$\max_{x_i} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{im} x_i \right) \right\}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$



Сведение к задаче линейного программирования

Чтобы сформулировать в виде задачи линейного программирования:

$$v = \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{im} x_i \right)$$

Отсюда следует, что:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v, \quad j = 1, 2, \dots, n$$



Задача игрока A может быть записана в виде:

$$z = v \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$v - \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

v не ограничена в знаке!



Оптимальные стратегии y_1, y_2, \dots, y_n игрока B определяются путём решения задачи

$$\min_{y_i} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} y_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} y_j \right) \right\}$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$



Сведение к задаче линейного программирования

Используя описанную процедуру, запишем задачу для игрока B в виде:

$$\omega = v \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$v - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

v не ограничена в знаке

v – **цена игры**



Сведение к задаче линейного программирования. **Пример**

Имеется игра между ВЦ (игрока A) и диспетчером (B)

	B_1	B_2	B_3	Минимумы строк
A_1	3	-1	-3	-3
A_2	-2	-4	-1	-2
A_2	-5	-6	2	-6
Максимумы столбцов	3	4	2	



Сведение к задаче линейного программирования. Пример

Значение цены игры находится между -2 и 2 .

Задача линейного программирования для A :

$$z = v \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$v - 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 0$$

$$v + x_1 - 4x_2 + 6x_3 \leq 0$$

$$v + 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Оптимальное решение:

$$x_1 = 0,39, x_2 = 0,31, x_3 = 0,29 \text{ и } v = -0,91$$



Итеративный метод Брауна

Пусть $C = \|c_{ij}\|$ есть $(n \times m)$ -матрица; C_i означает i -ю строку, $C_{\cdot j}$ – j -й столбец.

Рассмотрим последовательности векторов:

$$X(0), X(1), X(2), \dots, X(l), \dots$$

$$Y(0), Y(1), Y(2), \dots, X(l), \dots$$

где

$$X(l) = \{x_0(l), x_1(l), \dots, x_n(l)\}$$

$$Y(l) = \{y_0(l), y_1(l), \dots, y_n(l)\}$$

$x_i(l)$, $i \in E$ – относительная оценка выигрыша ВЦ, если он на l -й итерации выбирает i -ю строку матрицы



Итеративный метод Брауна

$x_i(l)$, $i \in E$ – относительная оценка выигрыша ВЦ, если он на l -й итерации выбирает i -ю строку матрицы

$y_j(l)$, $i \in E$ – относительная оценка выигрыша диспетчера, если он в l -й итерации выбирает j -й столбец матрицы C .

В l -й итерации ВЦ и диспетчер выбирают соответственно строку i и столбец j , для которых

$$x_i(l) = \max_{0 \leq i \leq n} x_i(l) = \max X(l)$$

$$y_j(l) = \min_{0 \leq j \leq m} y_j(l) = \min Y(l)$$



Итеративный метод Брауна

Учитывая найденные i и j , игроки пересматривают свои оценки значений строк и столбцов для $(l+1)$ -й итерации:

$$X(l+1) = X(l) + C_{\cdot j}, \quad Y(l+1) = Y(l) + C_i.$$

Очевидно, что

$$X(l) = X(0) + \sum_{j=0}^n l \pi_j(l) C_{\cdot j}$$

$$Y(l) = Y(0) + \sum_{i=0}^n l p_i(l) C_i.$$

где $l \pi_j(l)$ – число выборов столбца j ,

$l p_i(l)$ – число выборов строки i .



Итеративный метод Брауна

Тогда

$$P(l) = \{p_0(l), p_1(l), \dots, p_n(l)\},$$

$$\Pi(l) = \{\pi_0(l), \pi_1(l), \dots, \pi_n(l)\}$$

– оценки смешанных стратегий ВЦ и диспетчера,
которые сходятся к оптимальным стратегиям P^* и Π^* .

Практически можно положить

$$X(0) = Y(0) = 0$$

$l^{-1}X(l)$ – среднее взвешенное столбцов,

$l^{-1}Y(l)$ – среднее взвешенное строк матрицы C .

$$\Rightarrow l^{-1} \min Y(l) \leq V \leq l^{-1} \max X(l)$$



Итеративный метод Брауна

Доказано, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\min Y(l)}{l} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\min X(l)}{l} = V$$

Итак, при больших l :

$$P^* \approx P(l), \Pi^* \approx \Pi(l),$$

$$V \approx (2l)^{-1} [\max X(l) - \min V(l)] \leq V(l)$$

В качестве меры близости $V(l)$ к V можно взять

$$l^{-1} [\max X(l) - \min Y(l)] \leq l$$

где $l > 0$



Скорость сходимости итеративного процесса:

$$V(l) - V < \delta l^{-1/2(n-1)}$$

где V – истинное значение цены игры,

$V(l)$ – значение цены игры после l -й итерации,

δ - некоторый постоянный масштабный коэффициент.



Скоро зима!

