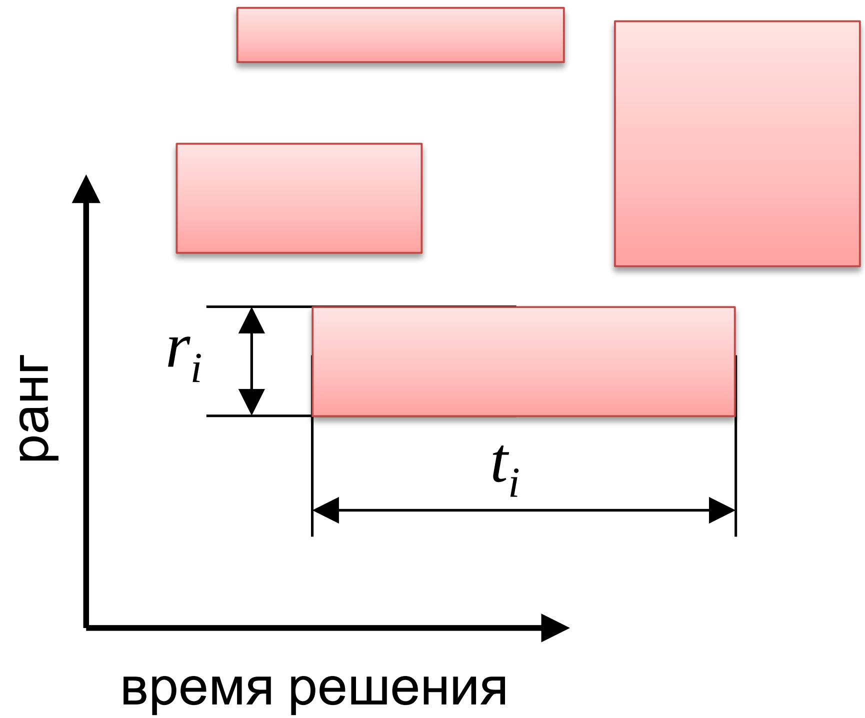
Лекция 4. Приближённый алгоритм распределения задач набора по элементарным машинам распределённой ВС

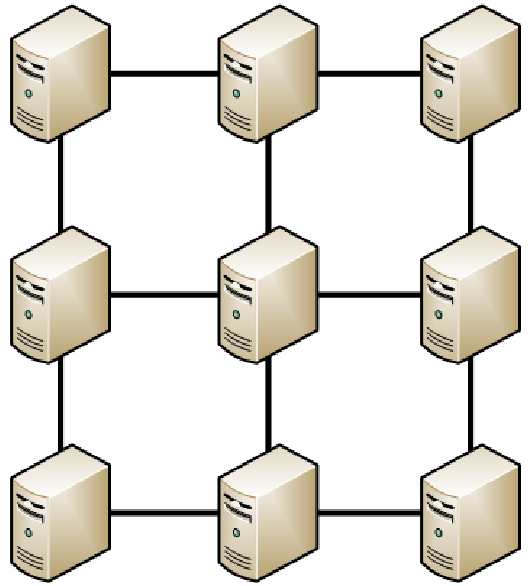
Пазников Алексей Александрович

Ассистент Кафедры вычислительных систем
Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики

http://cpct.sibsutis.ru/~apaznikov

Обработка набора задач





Распределённая ВС

Постановка задачи

$J = \{1, 2, \ldots, m\}$ – множество задач

r_j – ранг параллельной задачи,

t_j – время решения;

$\forall j \in J$: $r_j = 1$

Расписание S – это перестановка

$$S = (j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots, j_l, \ldots, j_m) \quad (1)$$

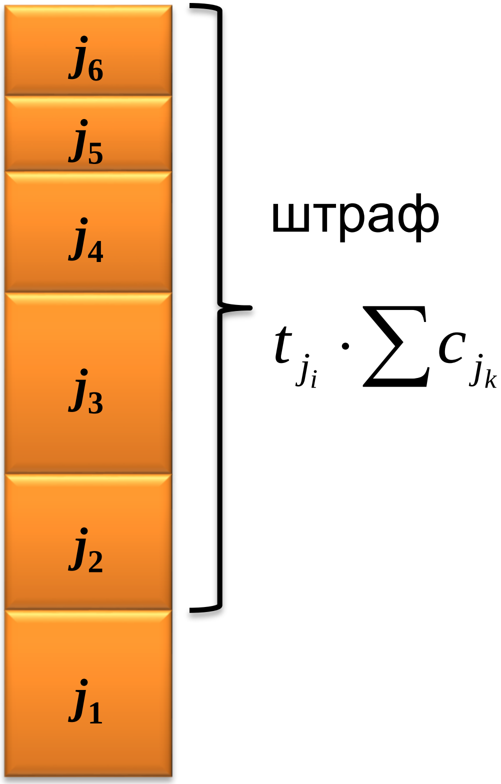
Постановка задачи

$$F(j_1, j_2, \ldots, j_m) = t_j(c_{j_1} + c_{j_2} + \ldots + c_{j_m}) + t_{j_2}(c_{j_3} + \ldots + c_{j_m}) + \ldots + t_{j_{m\text{-}1}} \cdot c_{j_m} = D - f(j_1, \ldots, j_m) \qquad (2)$$

где

$$D = \sum_{k=1}^{m} c_{j_k}, \quad V = \sum_{k=1}^{m} t_{j_k}$$

$$f(j_1, j_2, \ldots, j_m) = \sum_{k=1}^{m} t_{j_k} \cdot \sum_{r=1}^{k} c_{j_k} \qquad (3)$$



Очевидно, что $\min$ (2) достигается при $\max$ (3)

Теорема

Для того, чтобы перестановка (1) обеспечивала min функции штрафа (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$\frac{t_{j_1}}{c_{j_1}} \le \frac{t_{j_2}}{c_{j_2}} \le \ldots \le \frac{t_{j_l}}{c_{j_l}} \le \ldots \le \frac{t_{j_m}}{c_{j_m}} \qquad (4)$$

Доказательство. Необходимость

Дано: (1) обеспечивает $\min$ (2).

Доказать, что выполняется (4).

Рассмотрим последовательность, полученную из (1) перестановкой местами k и l

$$S' = (j_1, j_2, \ldots, j_l, \ldots, j_k, \ldots, j_m)$$

$\Rightarrow$ это решение не оптимальное (может с ним не совпадать)

$$\Rightarrow f(j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_l, \ldots, j_m) - f(j_1, \ldots, j_l, \ldots, j_k, \ldots, j_m) \geq 0$$

Распишем:

$$(-t_{j_k} + t_{j_l})\,(c_{j_{k+1}} + \ldots + c_{j_l}) + (c_{j_k} - c_{j_l})\,(t_{j_{k+1}} + \ldots + t_{j_l}) \geq 0$$

Доказательство. Необходимость

Следовательно:

$$t_{j_k} \le t_{j_l} + (c_{j_k} - c_{j_l}) \frac{t_{j_{k+1}} + \ldots + t_{j_m}}{c_{j_{k+1}} + \ldots + c_{j_m}}, \quad k < l \tag{5}$$

Неравенство (5) является необходимым условием для того, чтобы задача j_k решалась раньше j_l. При $l = k + 1$ условие (5) принимает следующий вид:

$$t_{j_k} / c_{j_k} \le t_{j_{k+1}} / c_{j_{k+1}} \tag{6}$$

Учитывая (6), методом математической индукции легко доказать, что $\forall(j_k$ и $j_l)$ перестановки (1), обеспечивающей максимальное значение функции (2), выполняется соотношение

$$t_{j_k} / c_{j_k} \le t_{j_l} / c_{j_l}$$

■

Доказательство. Достаточность

Дано: для (1) выполняется (4).

Доказать, что расписание является оптимальным по (3).

От противного:

Пусть оптимальное значение соответствует не (1), а другая перестановка:

$S' = (s_1, s_2, \ldots, s_l, s_{l+1}, \ldots, s_m)$, для которого $\exists l$:

$$t_{s_{l+1}} / c_{s_{l+1}} < t_{s_l} / c_{s_l} \qquad (7)$$

Меняя местами задачи s_l и s_{l+1} и учитывая (7), получаем:

$$f(s_1, \ldots, s_{l-1}, s_l, s_{l+1}, \ldots, s_m) - f(s_1, \ldots, s_{l-1}, s_{l+1}, s_l, \ldots, s_m) < 0$$

Доказательство. Достаточность

Меняя местами задачи s_l и s_{l+1} и учитывая (7), получаем:

$$f(s_1, \ldots, s_{l-1}, s_l, s_{l+1}, \ldots, s_m) - f(s_1, \ldots, s_{l-1}, s_{l+1}, s_l, \ldots, s_m) < 0$$

После элементарных преобразований:

$$t_{s_{l+1}} c_{s_l} - t_{s_l} c_{s_{l+1}} < 0$$

$$\Rightarrow t_{s_{l+1}} / c_{s_{l+1}} < t_{s_l} / c_{s_l},$$

это противоречит (7) $\Rightarrow$ предположение не верно.

■

Алгоритм

1. Отсортировать задачи по критерию (4).
2. Назначать последователь на ЭМ.

Алгоритм

Самостоятельно:

Для параллельных задач [Евреинов, Хорошевский, с.180-182]

Примечание:

для формирования укрупнённых задач использовать алгоритм 1DBP.

Г.Климт «Жизнь и смерть»