МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования   
**«Национальный исследовательский   
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»**

**(ННГУ)**

**Институт информационных технологий, математики и механики**

Направление подготовки: Фундаментальная информатика и информационные технологии

Магистерская программа: Инженерия программного обеспечения

**ОТЧЕТ**

по лабораторной работе №3

**Волновая схема на задаче Дирихле для уравнения Пуассона**

**Метод верхней релаксации**

Допущена к защите  **Выполнил:**

студент группы 381706-1м

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Шептунов В. О.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись подпись

**Проверил:**

к.ф-м.н., доцент кафедры МОСТ Баркалов К. А.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

подпись

Рецензент:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

ученая степень, ученое звание

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Нижний Новгород  
2018

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc514339615)

[Цель работы 5](#_Toc514339616)

[1. Постановка задачи 6](#_Toc514339617)

[2. Описание метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Метод верхней релаксации. Волновая схема. 7](#_Toc514339618)

[2.1 Последовательная версия. Метод верхней релаксации 8](#_Toc514339619)

[2.2 Параллельная версия. Метод верхней релаксации. Волновая схема. 9](#_Toc514339620)

[3. Программная реализация решения задачи с использованием технологии OpenMP 10](#_Toc514339621)

[4. Результаты экспериментов 13](#_Toc514339622)

[Заключение 15](#_Toc514339623)

[Литература 16](#_Toc514339624)

Введение

Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим общим уравнением теплопроводности

Если среда – однородная, то уравнение теплопроводности приобретает вид

где положительная константа зависит от свойств среды.

Для стационарных процессов (т.е. в случае и ) уравнения колебаний и диффузии приобретают вид

При уравнение называется уравнением Пуассона

Начальные условия – условия, определяющие значения искомой функции при одном значении независимой переменной. В уравнении теплопроводности присутствует только первая производная по времени, следовательно достаточно задать одно начальное условие на значение функции. Физической интерпретацией будет являться распределение температуры в теле в начальный момент.

Граничные условия – условия, определяющие значения искомой функции на границе пространственной области, внутри которой ищется решение (при различных значениях независимых переменных). Граничные условия, при которых известны значения функции на границе называется задачей Дирихле.

Универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений является метод конечных разностей, при котором решение дифференциального уравнения сводится к решению разностных уравнений.

Данная лабораторная работа посвящена методу верхней релаксации применительно к задаче Дирихле для уравнения Пуассона. Основной акцент сделан на реализацию, анализ и сравнение последовательной и параллельной версий алгоритма решения задачи. Применение технологии OpenMP в задаче параллельной реализации метода на языке программирования С++.

Цель работы

Требуется:

1. Изучить метод верхней релаксации.
2. Решить краевую задачу для стационарного двумерного уравнения теплопроводности (задача Дирихле для уравнения Пуассона).
3. Реализовать метод верхней релаксации с оптимальным параметром (волновая схема).
4. Реализовать последовательный метод решения задачи.
5. Реализовать параллельный метод решения задачи с использованием технологии OpenMP.
6. Решить тестовую задачу, с целью получения временных результатов исполнения. Провести анализ. Сделать необходимые выводы.
7. Постановка задачи

Найти стационарное распределение температур на квадратной пластине с внешними источниками тепла, на краях которой поддерживается заданный температурный режим.

Задача именуется как задача Дирихле для уравнения Пуассона:

(1)

Исходные данные:

Величины и функции .

Результат:

Искомая функция .

1. Описание метода решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Метод верхней релаксации. Волновая схема.

Для отыскания численного решения дифференциальной задачи (1) в области задания уравнения вводится равномерная прямоугольная сетка и используется разностная схема второго порядка аппроксимации. Сеточная функция , являющаяся точным решением разностной схемы, трактуется как приближенное (численное) решение исходной задачи.

Задается размерность ) и шаг сетки по оси и по .

*–* узлы сетки.

Узлы называются внутренними, – угловые.

*–* значение сеточной функции в узле

*–* значение функции в во внутреннем узле

- значения функций граничных условий в соответствующих граничных узлах.

Разностная схема для отыскания сеточной функции принимает вид:

И представляет собой линейную систему уравнений относительно неизвестного вектора . Так как значения в граничных углах известны, то вектор имеет вид:

.

Собственные числа данной матрицы будут определяться соотношением

Cпектральное число обусловленности:

2.1 Последовательная версия. Метод верхней релаксации

Для рассматриваемой системы линейных уравнений (1) оптимальный параметр метода верхней релаксации известен [4] и в случае одинаковых шагов сетки и равен

Расчетные формула метода верхней релаксации:

Формула итерационного процесса:

Алгоритм:

for j = 1 do m - 1

for i = 1 do m - 1

2.2 Параллельная версия. Метод верхней релаксации. Волновая схема.

В последовательном алгоритме каждое очередное - ое приближение значения вычисляется по последнему -ому приближению значений и и предпоследнему ( -ому приближению значений и . При требовании совпадения результатов вычислений последовательных и параллельных вычислительных схем в начале каждой итерации метода только одно значение может быть пересчитано. После пересчета вычисления могут выполняться уже в двух узлах сетки и (в этих узлах выполняются условия последовательной схемы), затем после пересчета узлов и - в узлах , и и т.д.

Выполнение итерации метода можно разбить на последовательность шагов, на каждом из которых к вычислениям окажутся подготовленными узлы вспомогательной диагонали сетки с номером, определяемом номером этапа

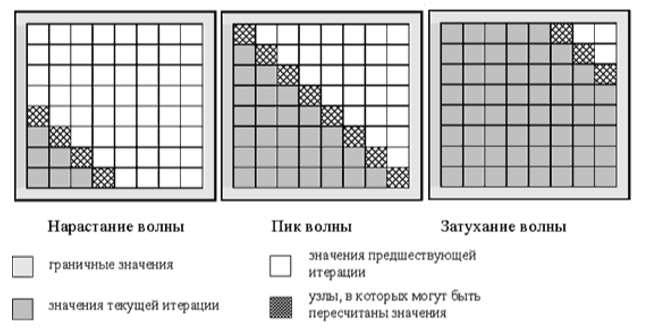


Рис. 1 Иллюстрация волновой схемы

1. Программная реализация решения задачи с использованием технологии OpenMP

Для достижения поставленных целей работы было реализовано консольное приложение на языке С++. Код программы содержит:

1. class heat\_task {}

Класс, в котором храниться описание задачи.

class heat\_task {

heat\_task();

public:

double X; // ширина пластины

double Y; // длина пластины

int n; // размер сетки по x

int m; // размер сетки по y

explicit heat\_task(double \_x, double \_y, int \_n, int \_m) : X(\_x), Y(\_y), n(\_n), m(\_m) {}

double left\_condition(double y) { return 0.0 + y \* y; } // функция, задающая граничное условие при x = 0

double right\_condition(double y) { return 4.0 + y \* y; } // функция, задающая граничное условие при x = X

double bottom\_condition(double x) { return 0.0 + x \* x; } // функция, задающая граничное условие при y = 0

double top\_condition(double x) { return 9.0 + x \* x; } // функция, задающая граничное условие при y = Y

double f(double x, double y) { return 4.0; } // функция, задающая внешнее воздействие

};

1. void heat\_dirichlet\_sor(heat\_task task, double\* v)

Непосредственно метод верхней релаксации решающий задачу Дирихле для уравнения Пуассона.

Для параллельной реализации, в вышеуказанной функции были

использованы следующие директивы *OpenMP:*

* + *#pragma omp parallel for* - указывает что цикл, следующий за данной директивой, следует разделить по итерациям между потоками.

Условие *if* (PARALLEL), где макрос PARALLEL – указывает в каком случае применять директивы *#pragma omp*

1. voidcheck\_convergence(const heat\_task &task, double\* result)

Проверка корректности работы.

А именно, решается дополнительная задача на других размерностях . Для каждой из решенных задач вычисляется теоретическая ) и численная () ошибки. Результат вычисления считается корректным, если модуль разности ошибок не превосходить величины 0.1. Т.е .

1. void print\_result\_experiment\_to\_file(void \*file)

Вывод результатов экспериментов в csv файл.

При запуске приложения на экран выводятся временные результаты последовательно и параллельного решения задачи, ускорение () и эффективность ().

, , где

– количество *OpenMP* потоков,

– время исполнения параллельного алгоритма с использованием потоков,

– время исполнения последовательного алгоритма с использованием одного

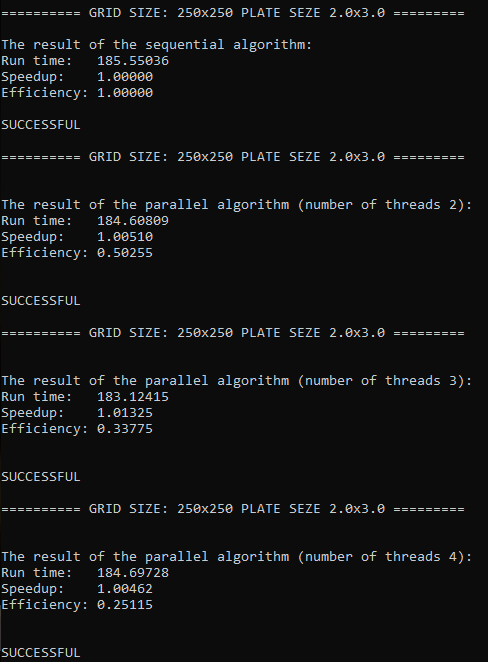


Рис. 2 Пример работы программы

1. Результаты экспериментов

В данной работе была проведена серия экспериментов для выявления зависимости ускорения и эффективности параллельного решения от количества потоков.

Решалась тестовая задача

число разбиений по и соответственно последовательно выбиралось из списка:

{100, 100, 250, 250, 500, 500, 750, 750, 1000, 1000, 1250, 1250, 1500, 1500}.

Эксперименты проводились на: 4х ядерном процессоре Intel® Core™ i5-5200U CPU @2.2GHz с уровнями кэша:

Рис. 3 Зависимость ускорения от числа потоков

Рис. 4 Зависимость эффективности от числа потоков

Заключение

В данной лабораторной работе был рассмотрен и реализован метод верхней релаксации применительно к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Для подтверждения эффективности параллельного метода решения над его последовательной версией была проведена серия экспериментов.

На локальной машине полученные результаты (рис. 3) показывают замедление при малых размерах сеток (< 750). Это объясняется низкой трудоемкостью операций, выполняемых каждым потоком при волновой схеме вычислений. Накладные расходы (время, требуемое для создания и закрытия параллельной секции) превышают выигрыш от распараллеливания. Однако, при больших размерностях сеток ( >750) наблюдается ускорение близкое к линейному.

В тестовой системе параллельная версия показала хорошее ускорение. На четырех *OpenMP* потоках удалось достичь ускорения в 4.3 раза, что говорит об эффективной параллельной реализации.

Литература

1. Баркалов К.А. Образовательный комплекс «Параллельные численные методы». Лекционные материалы. – Н.Новгород, Изд-во ННГУ, 2011.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989
3. Гергель В. П. Теория и практика параллельных вычислений. – М.: БИНОМ, 2007.