Физика 10 класс

Переменный ток

1 Закон Ома для переменных токов

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных резистора R, катушки L и конденсатора C.
К цепи приложена синусоидальная ЭДС (рис.1):

$$\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t) \tag{1}$$

Требуется найти ток I, который установится в цепи.

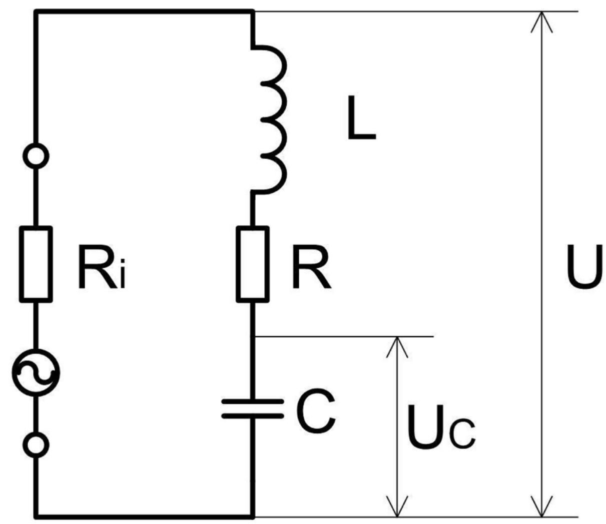

Рис. 1. Цепь

1.1 Метод фазовых диаграмм

Для решения данной задачи построим фазовую диаграмму в осях XOY (рис.2).
Идея фазовой диаграммы в том, что в каждый момент времени проекция вектора A на ось OX равна напряжению в момент времени t.
Так как частота переменного тока равна ω, то решение можно записать в виде:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

На фазовой диаграмме векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью, поэтому при решении можно не рассматривать их вращение, так как разность фаз между каждым вектором будет сохраняться. (рис.2)

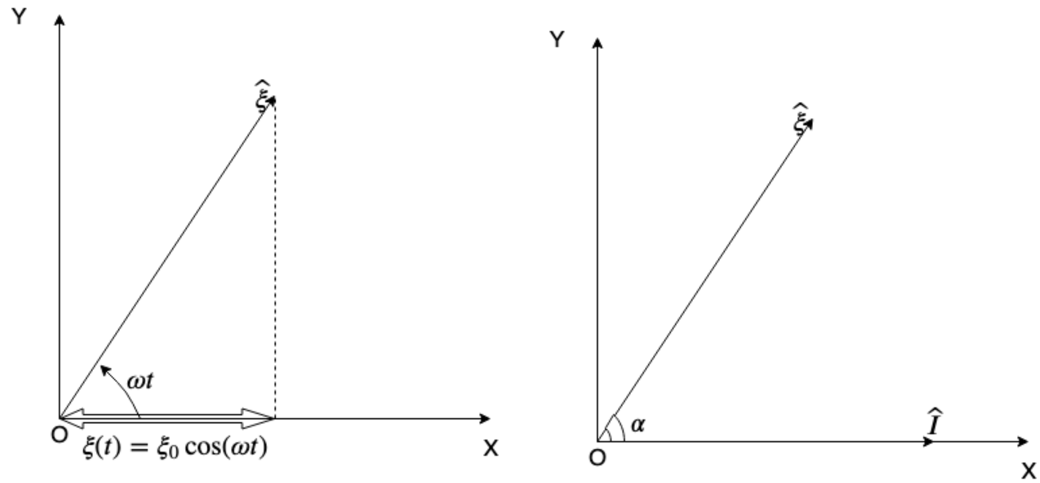

Рис. 2. Фазовая диаграмма вектора ξ и вектора I

Требуется найти две неизвестных - I_0 и α
Для этого рассмотрим напряжения на катушке, конденсаторе и сопротивлении и нанесем их на фазовую диаграмму.

- Напряжение на сопротивлении $\xi_R = IR$, поэтому на фазовой диаграмме оно сонаправлено с I_0
- Напряжение на катушке $\xi_L = \dot{I}L = -I_0\omega L\sin(\omega t - \alpha)$, то есть напряжение **опережает** I_0 на $\frac{\pi}{2}$
- Напряжение на конденсаторе равно $\xi_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{\omega c}I_0\sin(\omega t - \alpha)$, то есть напряжение **отстает** на $\frac{\pi}{2}$

Диаграмма будет иметь вид (рис.3) Из проекций вектора ξ_0 на оси получаем систему:

$$\begin{cases} \xi_L - \xi_C = \xi_0 \sin\alpha \\ \xi_R = \xi_0 \cos\alpha \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 = \xi_0 \sin\alpha \\ I_0 R = \xi_0 \cos\alpha \end{cases} \tag{3}$$

Возведем в квадрат оба выражения и просуммируем. Тогда получим выражение для I_0:

$$I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\xi_0}{|Z|} \tag{4}$$

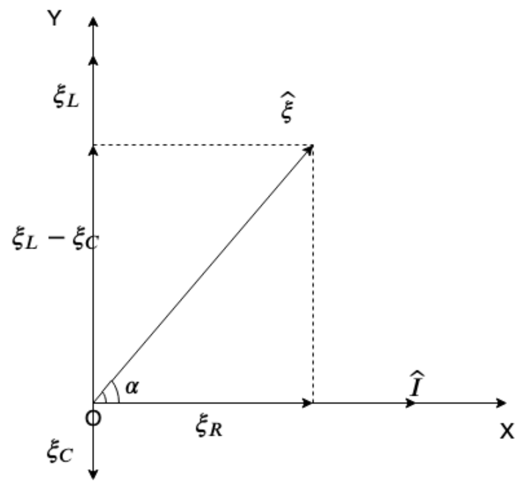

Рис. 3. Фазовая диаграмма цепи

где $Z = R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})$- импеданс цепи.
Аналогичным образом можно решить **любые** задачи на переменный ток.

Замечания:

- Важно запомнить, что напряжение на катушке «обгоняет» ток на $\frac{\pi}{2}$, а на конденсаторе отстает на $\frac{\pi}{2}$
- При решении задач с более сложными цепями для паралельных участков цепи нужно записывать равенство напряжений с учетом **фазы**. Другими словами, вектора на фазовой диаграмме от паралельных участков цепи равны.
- Для последовательных участков цепи на фазовой диаграмме совпадают **токи**. (этим фактом мы пользовались для вывода формулы)
- Весь вывод был проведен без учета вращения векторов на фазовой диаграмме. При решении рассматривалось **амплитудное значение напряжения**. Соответственно и результат I_0 является амплитудным значением. В задачах может встретиться термин **действующее значение** ξ- усредненное по времени значение проекции вектора ξ на ось X. Можно убедиться в том, что

$$\xi_{\text{действ}} = \frac{\xi_0}{\sqrt{2}}$$

Поэтому, если в задаче просят найти действующее значение тока, то будет верна формула:

$$I_{\text{действ}} = \frac{\xi_{\text{действ}}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\xi_{\text{действ}}}{|Z|}$$

1.2 Метод комплексных аплитуд

Иным методом решения задач с переменным током является метод комплексных аплитуд Для этого перейдем к комплексной форме:

$$\widehat{\xi} = \xi_0 e^{i\omega t} \tag{5}$$

Замечания:

- Мнимой экспонентой $e^{i\alpha}$ называется комплексное число

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

- Выражение (1) **не эквивалентно** уравнению (5)(так как в первом случае действительное число, а во втором комплексное). Однако, если стоит задача просуммировать два действительных числа вида (1), то можно перейти к комплексному представлению, просуммировать комплексные числа, взять действительную часть и получить нужный результат.
Пример:
Найти сумму $A = a_1\cos(\omega_1 t) + a_2\cos(\omega_2 t)$

  1. Перейдем к комплексному представлению:

$$a_1\cos(\omega_1 t) = a_1 e^{i\omega_1 t}$$

$$a_2\cos(\omega_2 t) = a_2 e^{i\omega_2 t}$$

  2. Сложим комплексные числа:

$$\widehat{A} = a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t}$$

  3. Возьмем действительную часть и получим равенство:

$$A = Re(\widehat{A}) = Re(a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t})$$

Последнее замечание будет неявно использоваться в дальнейшем выводе

Теперь аналогично запишем ток $\widehat{I}$:

$$\widehat{I} = I_0 e^{i(\omega t - \alpha)} = \widehat{I}_0 e^{i\omega t}$$

Запишем привычное нам уравнение Киргофа:

$$\widehat{\xi} = \widehat{I}R + \dot{\widehat{I}}L + \frac{Q}{C}$$

Раскроем $\widehat{\xi}$ и $\widehat{I}$ и сократим на $e^{i\omega t}$:

$$\xi_0 = \widehat{I}_0\left(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)$$

Выразим $|I_0|$:

$$|I_0| = |\frac{\xi_0}{\left(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}\right)}| = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\xi_0}{|Z|}$$

Получили тот же самый результат.

Алгоритм решения задач с помощью комплексных амплитуд:

- Написать $\widehat{\xi}$ и $\widehat{I}$ в комплексном виде
- Записать уравнение Киргофа
- Раскрыть производные и подставить значения $\widehat{\xi}$ и $\widehat{I}$
- Выразить $\widehat{I_0}$ и взять модуль