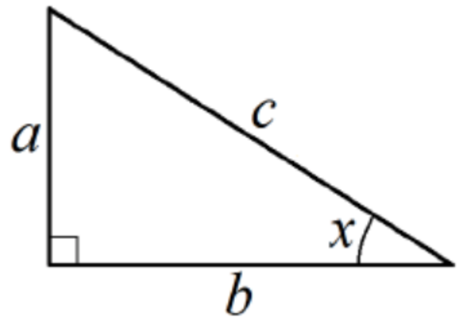
Занятие 0. Тригонометрия, векторы.

1 Основные понятия

Рассмотрим прямоугольный треугольник, по определению $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ вводятся как:



$$\sin x = \frac{a}{c} \quad \cos x = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} x = \frac{a}{b} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{b}{a}$$

Для этих тригонометрических функций выполнимы следующие соотношения:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{sin^2 x}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$
$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2 \operatorname{tg} x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$
$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Отдельно выделим тождества, называемые **формулами понижения степени**:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Внимание *все формулы не обязательно учить наизусть. Многие из приведенных выше формул выводятся одна из другой. Можете заняться этим в качестве упражнения.*

2 Тригонометрический круг

Для определения табличных значений тригонометрических функций часто используют **тригонометический круг**:

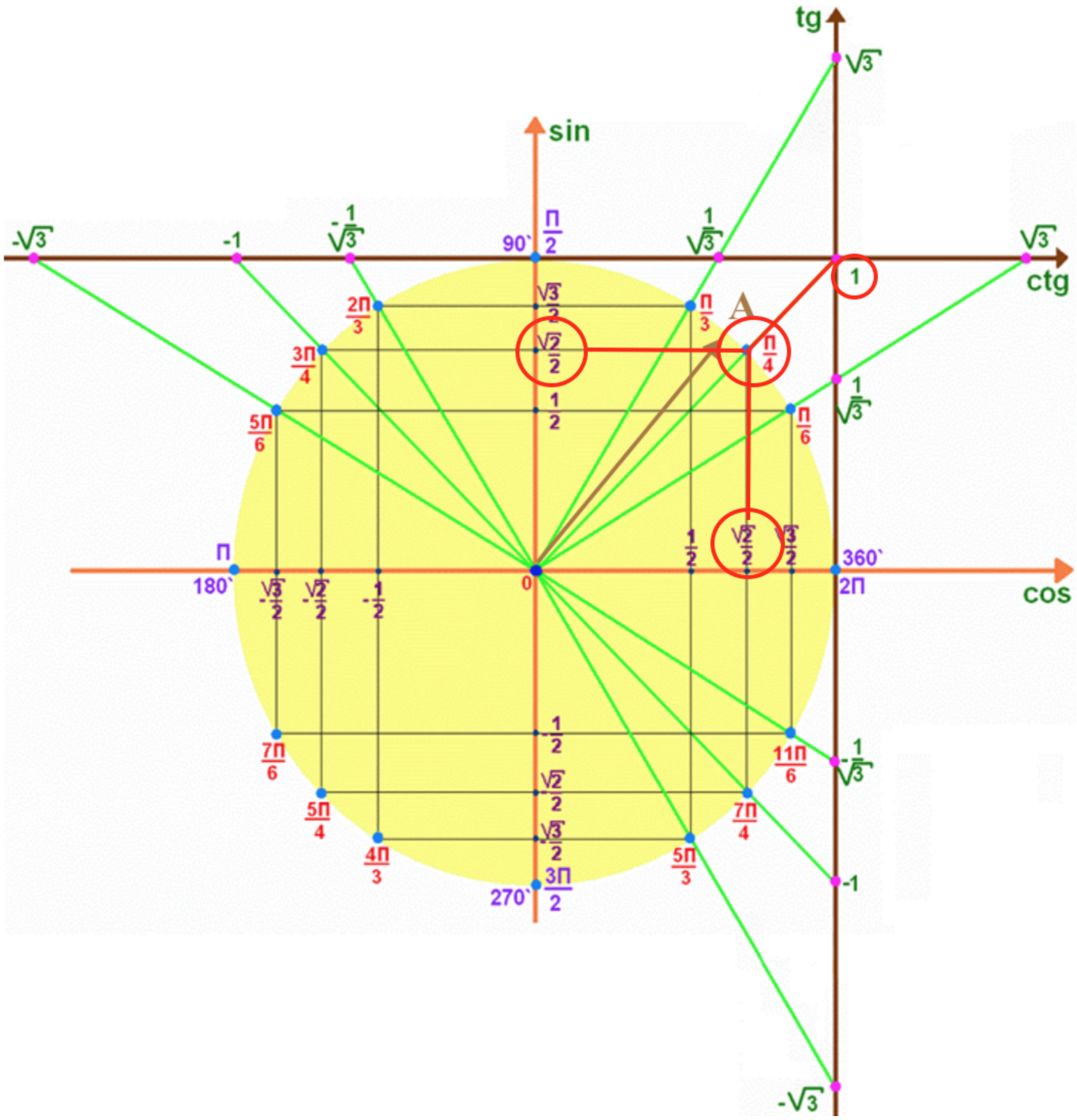


Рис. 1. Тригонометрический круг. Вычисление тригонометрических функций от разных аргументов.

Нарисуем круг с радиусом $R = 1$, отложим луч под углом x от горизонтали и посмотрим на точку пересечния A луча с окружностью (поворот на 90° соответствует углу $\pi/2$). Координаты этой точки будут равны $(\sin x, \cos x)$. Таким образом, получим:

$\cos x$ - длина проекции отрезка OA на горизонтальную ось
$\sin x$ - длина проекции отрезка OA на вертикальную ось
$\operatorname{tg} x$ - координата пересечения луча OA с вертикальной касательной к окружности
$\operatorname{ctg} x$ - координата пересечения луча OA с горизонтальной касательной к окружности

На рисунке показаны способы подсчета тригонометрических функций от разных углов. Разберем подсчет на примере $\alpha = \pi/4$ (смотри рис. 1). Проводим луч под углом $\pi/4$ и смотрим на пересечение луча с двумя касательными. Получаем, что $\operatorname{tg}(\pi/2) = \operatorname{ctg}(\pi/2) = 1$. Величины синуса и косинуса ищутся как проекции соответствующего отрезка на оси.

Следующие тождество называются **формулами приведения**:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$
$$\sin\left(\pi - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\pi + x\right) = -\sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$
$$\cos\left(\pi - x\right) = -\cos x$$
$$\cos\left(\pi + x\right) = -\cos x$$
$$\dots$$

Существует достаточно простое правило для получения этих формул с помощью тригонометрического круга:

Алгоритм получения формулы приведения:

1. Если в аргументе функции стоит $n\pi/2$, где n — нечетное число, то функция меняется на конфигурацию:

$$\sin(n\pi/2 + x) \to \pm\cos(n\pi/2 + x); \quad \cos(n\pi/2 + x) \to \pm\sin(n\pi/2 + x)$$

$$\operatorname{tg}(n\pi/2 + x) \to \pm\operatorname{ctg}(n\pi/2 + x); \quad \operatorname{ctg}(n\pi/2 + x) \to \pm\operatorname{tg}(n\pi/2 + x)$$

   Если n — четное натуральное число, то функция остается той же самой:

$$\sin(n\pi/2 + x) \to \pm\sin(n\pi/2 + x); \quad \cos(n\pi/2 + x) \to \pm\cos(n\pi/2 + x)$$

$$\operatorname{tg}(n\pi/2 + x) \to \pm\operatorname{tg}(n\pi/2 + x); \quad \operatorname{ctg}(n\pi/2 + x) \to \pm\operatorname{ctg}(n\pi/2 + x)$$

2. Теперь нужно разобраться только со знаком. Рассмотрим, как это делать на примере. Пусть нужно посчитать, чему равен $\sin(15\pi/2 + x)$. Сначала вычтем из аргумента $2\pi n$ так, чтобы $(15\pi/2 - 2\pi n) \in [0, 2\pi]$. При этом:

$$\sin(15\pi/2 + x) = \sin(\pi/2 + x) = \pm\cos x \tag{1}$$

   Теперь предположим, что $0 \leq x \leq \pi/2$, тогда $\cos x > 0; \sin(\pi/2 + x) > 0$. Получаем, что в (1) слева и справа положительные числа. То есть выбираем знак «+».

3. Ответ: $\sin(15\pi/2 + x) = \cos x$

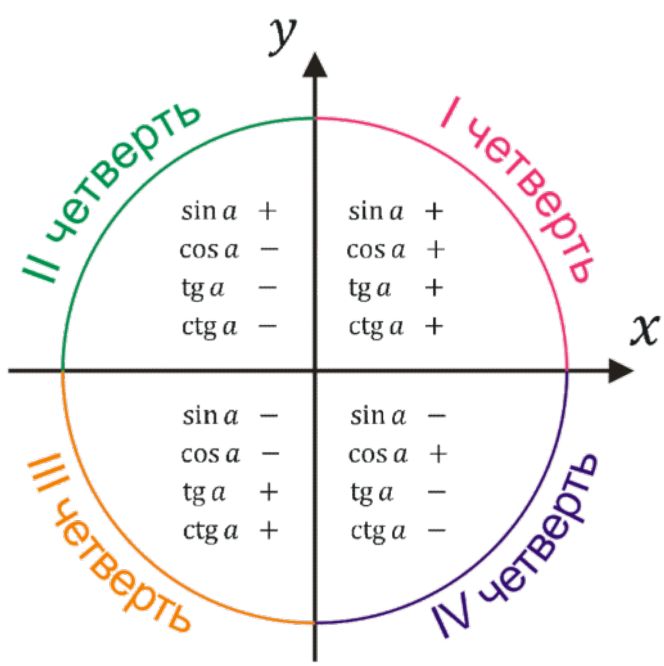


Рис. 2. Знаки тригонометрических функций в зависимости от аргумента.