Физика 10 класс

Занятие 2. Механика твердого тела.

1 Момент силы

1.1 Мотивация

При решении задач из первой темы тело рассматривалось как **материальная точка** и обладало **тремя степенями свободы**, поэтому для описания движения было достаточно записать **2-й закон Ньютона** в векторной форме. На втором занятии мы будем рассматривать твердое тело и оно уже будет иметь **6 степеней свободы**, связанные с вращательным и поступательным движениями. Поэтому возникает необходимость в новых уравнениях, которых было бы достаточно для описания движения системы.

1.2 Постановка задачи

Рассмотрим произвольную точку O, будем называть ее **полюсом**. Пусть к некоторой точке приложена сила $\vec{F}$.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки O называется векторное произведение вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$ (рис.1):

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

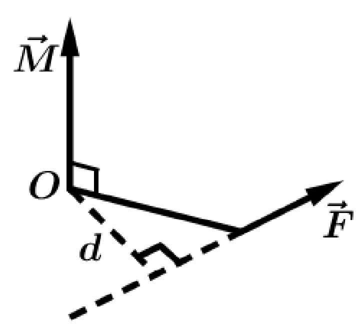

Рис. 1. Момент сил

Важные наблюдения:

- Типичная ошибка при решении задач - непонимание, относительно какой точки записывается **момент сил**. Нужно запомнить, что **нельзя говорить о моменте сил предварительно не сказав про точку**. Фраза: «запишем момент для системы» является неграмотной.
  Правильно говорить так : «запишем момент для системы *относительно точки* O»
- В определении момента сил не уточняется, может ли точка О быть подвижной. Сейчас мы **не накладываем никаких ограничений на движение полюса**. Но ограничения на точку О будут наложены в следующем параграфе **для того, чтобы связать величины $\vec{M}, \vec{L}$ уравнением моментов** ($\vec{L}$ будет введен позже)
- Момент сил $\vec{M}$ **не изменится**, если точку приложения силы $\vec{F}$ перенести вдоль линии действия силы.
- Если в точке приложена сила $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$, то векторное произведение можно записать в виде:
$$[\vec{r} \times \vec{F}] = [\vec{r} \times \vec{F_1}] + [\vec{r} \times \vec{F_2}]$$

2 Момент импульса

Аналогично моменту сил $\vec{M}$ материальной точки можно определить момент импульса $\vec{L}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \tag{1}$$

где $\vec{p}$ - импульс материальной точки

Замечания:

- **Все наблюдения для момента сил переносятся на этот случай**
- Понятие момента сил и момента импульса вводилось для **материальной точки**. Если разбить тело на мелкие части и просуммировать, можно получить момент сил и момент импульса **всей системы**.

*На данный момент введены понятия **момент сил и момент импульса**. Возникает желание связать эти величины некоторым законом. Этот закон называется **уравнением моментов.***

3 Уравнение моментов

Предположим, что точка О является **неподвижной**. Путем дифференцирования выражения (1) по времени получим:

$$\dot{\vec{L}} = [\dot{\vec{r}} \times \vec{p}] + [\vec{r} \times \dot{\vec{p}}]$$

Так как О неподвижна, то $\dot{\vec{r}} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{v}$. Заметим, что в первом слагаемом векторы $\vec{p}$ и $\vec{v}$ колинеарны, поэтому оно равно 0. Во втором слагаемом $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$. В итоге получаем:

$$\dot{\vec{L}} = [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M} \tag{2}$$

Замечания:

- **Формула была получена для материальной точки**. Если рассмотреть систему, то можно получить уравнение (2) путем суммирования уравнения моментов для каждой точки. Причем при суммировании моменты внутренних сил взаимоуничтожатся.
- Утверждение выше не является очевидным, предлагается проделать доказательство самостоятельно. Из этого свойства получается более сильный результат, которым и пользуются при решении задач:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{\text{внеш}} \tag{3}$$

- Как и говорилось ранее, уравнение моментов **нельзя записать для произвольной точки О**. Например, мы вывели его в предположении, что точка О **неподвижна**. Можно доказать, что уравнение остается верным в трех случаях:
  - полюс неподвижен
  - полюс является центром масс тела
  - полюс, скорость которого в любой момент времени паралельна скорости центра масс.

  При решении задач в 99% случаев за полюс выбираются первые два варианта. Многие при выборе точки полагаются на свое чутье, но есть задачи в которых выбор не так очевиден. Поэтому ***важно запомнить эти три случая и при решении задач второго листка понимать, к какому из случаев относится ваше решение, так вы сможете отработать свой навык.***

4 Закон сохранения момента импульса

Вырожденным случаем уравнения (3) служит закон сохранения момента импульса.

$$\vec{L} = const$$

Хочется выделить наиболее популярные случаи:

- центральное поле (сила направлена вдоль радиуса $\vec{r}$)
- Система изолирована (не действуют внешние силы)

В обоих случаях $\vec{M}_{\text{внеш}} = \vec{0}$

5 Момент импульса и момент сил относительно точки и относительно оси

До этого момента речь шла о моменте относительно точки. Но можно ввести и другое понятие - момент относительно оси. Для этого рассмотрим момент сил относительно точки O и запишем уравнение (3) в проекции на оси OX, OY, OZ (рис.2):

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{внеш}}; \frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{внеш}}; \frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}} \tag{4}$$

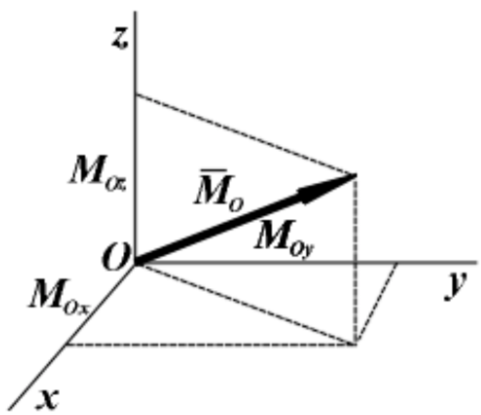

Рис. 2. Найти момент инерции тела

Моментом импульса и моментом сил относительно оси OX называются величины $\vec{L}_x, \vec{M}_x$

Наблюдение:

- На практике при решении задач **записывается уравнение динамики относительно точки O** (в векторном виде), а потом переходим к эквивалентной системе из трех уравнений - **уравнения динамики относительно осей OX,OY,OZ**.
- Если находить момент (сил, импульса) относительно точки, то это **векторная величина**. Если же записать относительно оси, то это будет **обычное число**.

6 Момент инерции

В предыдущих параграфах мы ввели понятие момента импульса (относительно точки О, оси) для системы. Напомним, что для этого нужно было "разрезать"тело на множество материальных точек и векторно просуммировать момент импульса от каждой материальной точки. Но такая операция является непосильной. Поэтому в этом параграфе мы введем понятие момента инерции и угловой скорости, с помощью которых процесс решения станет легче.

6.1 Вращательное движение

Рассмотрим ось вращения и запишем **уравнение динамики относительно этой оси**. Тогда $\vec{L} = \sum m_i r_i^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega}$, где $I = \sum m_i r_i^2$- **момент инерции системы** и уравнение имеет вид:

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \vec{M} \tag{5}$$

где М-момент сил **относительно оси вращения**, I - момент инерции **относительно оси вращения**
Твердым телом называется система материальных точек, взаимные расстояния которых не изменяются при произвольном движении.
Вектором угловой скорости $\vec{\omega}$ называется такой вектор $\vec{\omega}$, что скорость $\vec{v}_c$ в любой точке С твердого тела с радиус вектором $\vec{r}_c$ задается формулой:

$$\vec{v}_c = [\vec{\omega} \times \vec{r}_c] \tag{6}$$

Наблюдения:

- На практике основная задача состоит в том, чтобы найти ось вращения. Помочь в его нахождении могут следующие факты:
  - у твердого тела в каждый момент времени существует мгновенная ось вращения
  - **вектор угловой скорости** $\vec{\omega}$ сонаправлен с мгновенной осью вращения
- Частным случаем уравнения (5) является вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. В этом случае $I = const$:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M \tag{7}$$

- Часто пытаются записать уравнение (7) в том случае, когда оно не выполняется. **Пример:** движение гироскопа.

6.2 Теорема Штейнера

Данная теорема может быть полезна при нахождении момента инерции относительно оси вращения O_1O_1', не проходящей через центр масс, зная момент относительно оси OO' (**проходит через центр масс**) (рис.3).

$$I_{o_1o_1'} = I_{oo'} + md^2 \tag{8}$$

Замечания:

- Оси OO' и O_1O_1' должны быть паралельны
- OO' должна проходить через центр масс

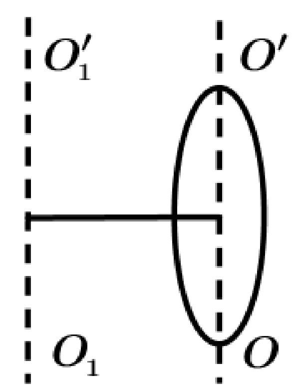

Рис. 3. Найти момент инерции тела

6.3 Теорема о центральном моменте инерции

Во многих задачах возникает потребность найти момент инерции системы относительно оси OO'.
Одним из возможных методов является интегрирование:

$$I_{OO'} = \int_V r^2 dm$$

где r — расстояние до оси OO'.
Однако существует метод, который позволяет достаточно просто решить некоторыый класс задач.
Рассмотрим твердое тело и введем систему координат $OXYZ$, тогда выполнено следующее тождество:

$$2I_0 = I_X + I_Y + I_Z \tag{9}$$

где I_X, I_Y, I_Z — моменты инерции тела относительно осей OX, OY, OZ; I_0 — момент инерции тела относительно точки O.

$$I_O = \int_V r^2 dm$$

где r — расстояние до точки O.

Замечания:

- В случае тела, симметричного относительно осей OX, OY, OZ, формула (9) имеет вид:

$$2I_O = 3I_X$$

  Поэтому зная I_O можно найти I_X.

- Момент инерции относительно точки **не имееет никакого физического смысла и не используется при решении задач**.

7 Алгоритм решения задач силовым методом

Алгоритм решения задач:

- Записать уравнение моментов относительно точки O (в векторной форме, точка O либо неподвижна, либо центр масс, либо ее скорость паралельна скорости центра масс)
- Спроецировать уравнение моментов на три оси (то есть записать уравнение моментов относительно осей) в форме (5) (в случае неподвижной точки O можно рассмотреть ось вращения и спроецировать на нее, а оставшиеся уравнения не записывать)
- Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси, то перейти к выражению (7)
  - Для нахождения I можно воспользоваться теоремой Штейнера или посчитать интеграл
- Написать второй закон Ньютона в проекции на 3 оси
- Применить кинематические связи на $\vec{\varepsilon}, \vec{\omega}, \vec{a}, \vec{v}$
- Решить систему уравнений

8 Энергетический метод решения задач

8.1 Теорема Кенига

Полная кинетическая энергия системы равна сумме энергии системы в поступательном движении и энергии системы в движении относительно центра масс.

$$T = T_0 + T_r \tag{10}$$

где T-полная кинетическая энергия, T_0- энергия движения центра масс, T_r- относительная кинетическая энергия.

Замечание:

- В случае твердого тела кинетическую энергию можно представить в сумме поступательной энергии движения центра масс и вращательной энергии относительно центра

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \tag{11}$$