

Скалярное и векторное произведение.

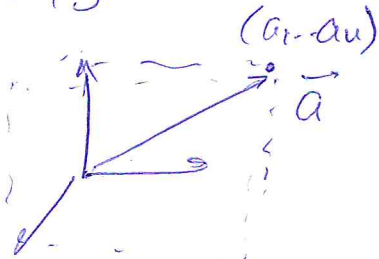
Проекция вектора на вектор.

① Введение. Вектор в пространстве \mathbb{R}^n однозначно задается n -мерным набором чисел (упорядоченный).

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

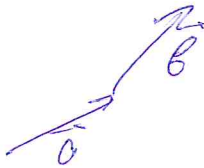
Что имеет введу? :

Фиксируем СК - какой отсчет + ортог. базис.



Сумма векторов \vec{a}, \vec{b}

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$



Произведение вектора на число:

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k a_1 \\ \vdots \\ k a_n \end{pmatrix}$$

Свойства сложения
и умножения на число:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- 3) $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$
- 4) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- 5) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- 6) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

$|\vec{a}|$ - длина

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sum a_i^2}$$

② Скалярное произведение

$$(\vec{a}, \vec{b}) := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

или если заданы
координаты векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \sum a_i b_i$$



$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

• Свойства скалярк. произведения

$$1) (a, b) = (b, a)$$

$$2) (a, b+c) = (a, b) + (a, c)$$

$$3) (ka, b) = k(a, b)$$

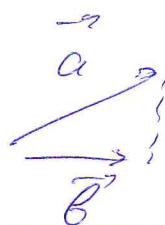
$$4) (a, a) \geq 0 \Rightarrow \underline{\vec{a} = \vec{0}}$$

$$1) \vec{a} \perp \vec{b}, \text{ если } (a, b) = 0$$

$$2) \angle \text{остр.}, \text{ если } (a, b) > 0$$

$$3) \angle \text{тупой}, \text{ если } (a, b) < 0$$

③ Проекция \vec{a} на \vec{b}



$$\vec{b} \cdot \vec{a} = b \cdot \frac{(a, b)}{|b|} = \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$$

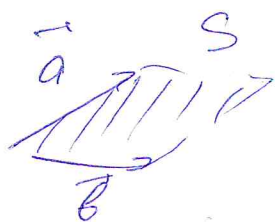
④ Векторное произведение.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$1) |\vec{c}| = |a||b| \sin \alpha$$

$$2) \vec{c} \perp \text{плоск. } \vec{a}, \vec{b}$$

$$!!! \quad 3) \text{ согласован. по правилу Дюревилля}$$



$$1) |\vec{a} \times \vec{b}| = S$$

$$2) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}, \text{ если } \vec{a} \text{ и } \vec{b} = \vec{0} \text{ или } \sin \alpha = 0$$

$$3) \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$4) m\vec{a} \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \text{проверить, что} \\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \text{ и } \vec{b} \\ \text{и} \end{array} \right.$$

$$[a, b, c] = b(a, c) - c(a, b)$$