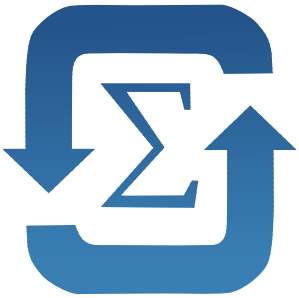
Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»


Кафедра прикладной математики

Лабораторная работа № 1,2
по дисциплине «Статистические методы анализа данных»



| | |
|---|---|
| Факультет: | ПМИ |
| Группа: | ПМИ-51 |
| Студент: | Тюшников В.В.<br>Кононов С.А. |
| Вариант: | 10 |
| Преподаватель: | Попов А.А |

Новосибирск

2018

**1. Постановка задачи**

1. В соответствии с вариантом задания выбрать имитационную модель объекта, диапазон изменения факторов, план эксперимента.
2. Написать программу по генерации экспериментальных данных. Полученные по программе данные оформить в виде одного или двух файлов унифицированной структуры, доступных для дальнейшей обработки. Построить графики зависимости отклика от входных факторов.
3. Спроектировать и сформировать программные модули по вычислению МНК-оценок параметров для заданной параметрической модели объекта. Предусмотреть достаточно простой способ настройки программы на необходимый вид (структуру) модели.
4. Пользуясь экспериментальными данными, полученными в лабораторной работе № 1, произвести оценку параметров модели объекта.
5. Произвести проверку адекватности полученной модели. В качестве можно взять величину дисперсии $\sigma_E^2$, которая использовалась при зашумлении отклика в лабораторной работе № 1. Число степеней свободы $f_E = \infty$

**2. Вариант задания**

2) Произвести моделирование объекта, о котором известно: число действующих факторов – два; по первому фактору зависимость выхода близка к линейной (возрастающей), по второму – существенно нелинейная. Максимум выходной величины приходится на граничные точки области действия факторов.

**3. Моделирование**

1. Имитационная модель представлена в виде функции:

$u = \eta(\bar{x}, \theta) = \theta_1 |x_1| + \theta_2 x_1^2 + \theta_3 |x_1 x_2| + \theta_4 \sin(50 x_1) + \theta_5 \sin(10 x_2)$, $\theta = (1, 3, 1, \frac{1}{100}, \frac{1}{3})$

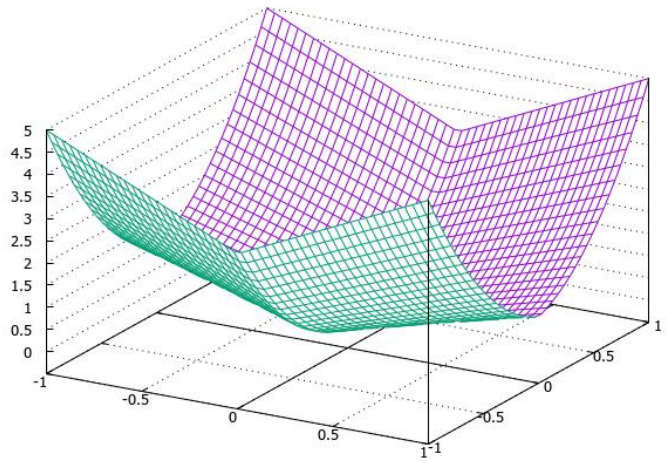
2. Область действия факторов:

$x_i \in [-1; 1], i = \overline{1,2}$

3. Количество точек проведения наблюдения – 16. Распределение точек – равномерное на двумерной сетке с шагом 0.5 по обеим переменным

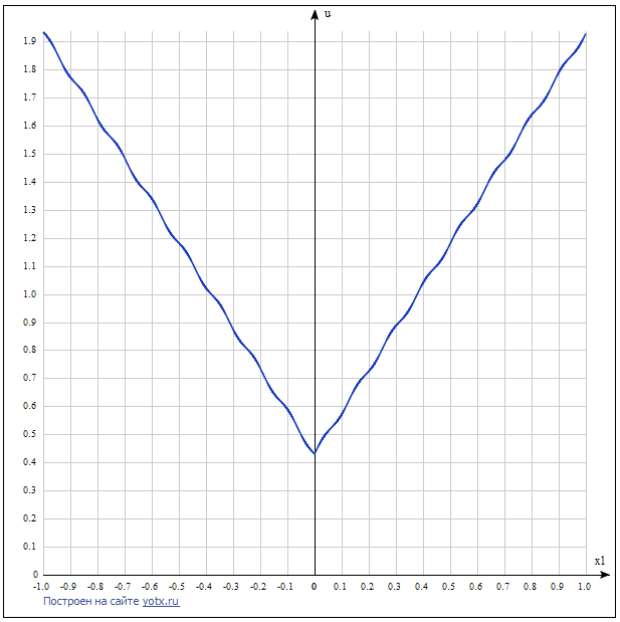
4. Вычисление отклика $y_j = u_j + e_j$, где e – реализация случайной величины (Нормальное распределение с $\mu = 0, \sigma = 0.1 w^2 = 0.11$)

Общий вид функции $u(x_1, x_2)$ :

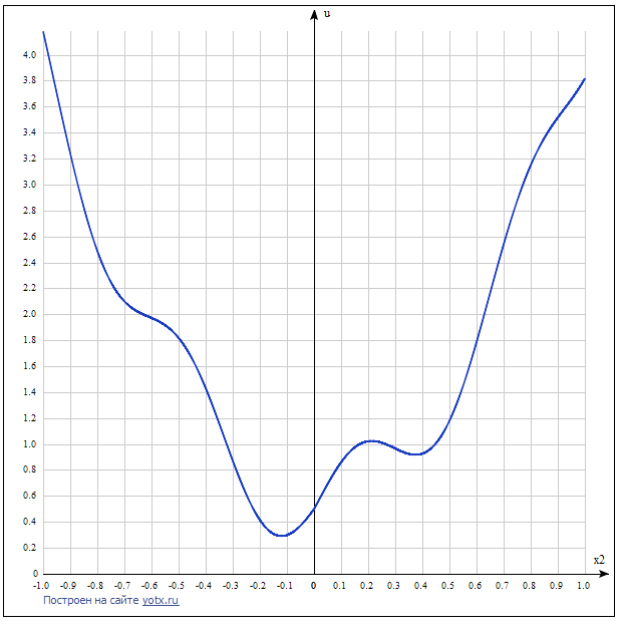



| x1 | x2 | y |
|---|---|---|
| -1 | -1 | 5,085 |
| -1 | -0,5 | 2,787 |
| -1 | 0 | 0,687 |
| -1 | 0,5 | 1,857 |
| -1 | 1 | 5,221 |
| -0,5 | -1 | 3,411 |
| -0,5 | -0,5 | 2,163 |
| -0,5 | 0 | 0,004 |
| -0,5 | 0,5 | 1,328 |
| -0,5 | 1 | 3,775 |
| 0 | -1 | 3,028 |
| 0 | -0,5 | 0,791 |
| 0 | 0 | 0,531 |
| 0 | 0,5 | 0,390 |
| 0 | 1 | 2,907 |
| 0,5 | -1 | 3,761 |
| 0,5 | -0,5 | 1,391 |
| 0,5 | 0 | 0,460 |
| 0,5 | 0,5 | 0,713 |
| 0,5 | 1 | 4,036 |
| 1 | -1 | 5,104 |
| 1 | -0,5 | 2,676 |
| 1 | 0 | 1,259 |
| 1 | 0,5 | 1,725 |
| 1 | 1 | 4,714 |

u(x1, 0.5)




u(0.5, x2)




**4. Оценивание параметров модели**

1. Будем вычислять оценку $\theta$ при помощи метода наименьших квадратов, который выглядит как:

$$\theta = Arg\min_{\theta} SS(\theta) = Arg\min_{\theta}(y - \theta^T f(x))^T (y - \theta^T f(x))$$

Для нашей задачи метод выглядит как:

$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y$, где

$$X = \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_1) & \dots & f_m(\bar{x}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(\bar{x}_n) & \dots & f_m(\bar{x}_n) \end{bmatrix}$$

или, что то же самое, $\theta$ - решение СЛАУ:

$$(X^T X)\theta = X^T y$$

$$\theta = (0.876,\ 2.78,\ 1.301,\ \ 0.097,\ 0.287)$$

2. Оценку $\sigma^2$ будем вычислять как:

$$\sigma^2 = \hat{e}^T \hat{e} / (n - m), \hat{e} = y - y = y - X\theta$$

$$\sigma^2 = 0.11116$$

3. Проверим гипотезу об адекватности модели вида:

$$H_0 : E\{\sigma^2\} = E\{\sigma^2_E\}$$

Гипотеза отвергается, если $F = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2_E} \le F_T = F_{\alpha n-m, f_E}$

В нашем случае при $\alpha = 0.05$:

$F = 1.01 \le 1.28$

А значит, гипотеза не отвергается, можно считать, что модель адекватна.

## Приложение

### Текст программы

```
import numpy as np
import random as rnd


def getFuncIX(xVec, i):
    switcher = {
        0: abs(xVec[0]),
        1: xVec[1] * xVec[1],
        2: abs(xVec[0] * xVec[1]),
        3: np.sin(xVec[0] * 50),
        4: np.sin(xVec[1] * 10)
    }
    return switcher[i]


def getU(xVec, tetaVec):
    summ = 0
    for i in range(tetaVec.__len__()):
        summ += getFuncIX(xVec, i) * tetaVec[i]
    return summ


def getY(xVec, tetaVec, mu, sigma):
    return getU(xVec, tetaVec) + rnd.normalvariate(mu, sigma)


def makeObservations(bordersX, steps, tetaVec, sigma, mu):
    obsTable = []
    for x1 in np.arange(bordersX[0][0], bordersX[0][1] + steps[0], steps[0]):
        for x2 in np.arange(bordersX[1][0], bordersX[1][1] + steps[1], steps[1]):
            yDash = getY([x1, x2], tetaVec, mu, sigma)
            obsTable.append([x1, x2, yDash])
    return obsTable


def avg(listOfFloat):
    avg = 0
    n = listOfFloat.__len__()
    for i in range(n):
        avg += listOfFloat[i]
    avg /= n
    return avg


def calcSignalPower(tetaVec):
    uVec = []
    for x1 in np.arange(-1, 1 + 0.125, 0.125):
        for x2 in np.arange(-1, 1 + 0.125, 0.125):
            y = getU([x1, x2], tetaVec)
            uVec.append(y)

    uAvg = avg(uVec)
    omega2 = 0
    n = uVec.__len__()
    for i in range(n):
        omega2 += (uVec[i] - uAvg) * (uVec[i] - uAvg)
    omega2 /= (n - 1)
    return omega2


def calcTetaDashVec(obsTable, tetaVeclen):

        # Solving system (XT * X) * TetaDash = XT * Y
        # for TetaDash

    m = tetaVeclen
    n = obsTable.__len__()

    X = np.zeros((n, m), dtype=float)
    Y = np.zeros((n, 1), dtype=float)
```

```
    for i in range(n):
        x1 = obsTable[i][0]
        x2 = obsTable[i][1]
        y = obsTable[i][2]
        Y[i] = y
        for j in range(m):
            X[i][j] = getFuncIX([x1, x2], j)

    XT = X.transpose()
    XTX = np.dot(XT, X)
    XTY = np.dot(XT, Y)
    TetaDash = np.linalg.solve(XTX, XTY)
    return np.transpose(TetaDash)[0]


def calcSigma2Dash(tetaDashVec, obsTable):
    m = tetaDashVec.__len__()
    n = obsTable.__len__()

    Y = np.zeros((n, 1), dtype=float)
    YDash = np.zeros((n, 1), dtype=float)

    for i in range(n):
        x1 = obsTable[i][0]
        x2 = obsTable[i][1]
        y = obsTable[i][2]

        Y[i] = y
        YDash[i] = getU([x1, x2], tetaDashVec)

    eDash = np.subtract(Y, YDash)

    sigma2 = np.dot(np.transpose(eDash), eDash)
    sigma2 /= (n - m)
    return sigma2[0][0]

def calcQuantile(sigma, sigmaDash):
    print("F: " + str(sigmaDash/sigma))
    if sigmaDash/sigma <= 1.28:
        return "Модель адекватная"
    else:
        return "Модель неадекватная"




sigma = np.sqrt(1.1 * 0.1)
mu = 0
bordersX = [[-1, 1], [-1, 1]]
tetaVec = [1, 3,1, 1 / 100, 1 / 3]
observations = []

observations = makeObservations(bordersX, [0.5, 0.5], tetaVec, sigma, mu)
for i in range(observations.__len__()):
    print(observations[i])
print("Power: ", calcSignalPower(tetaVec))
print("Teta: ", tetaVec)
tetaDashVec = calcTetaDashVec(observations, tetaVec.__len__())
print("TetaDash: ", tetaDashVec)
sigma2Dash = calcSigma2Dash(tetaDashVec, observations)
print("sigma2: ", sigma * sigma)
print("sigma2Dash: ", sigma2Dash)
print(calcQuantile(sigma*sigma, sigma2Dash))
```