Уравнение политропы $c = const$ для произвольного вещества. Связь изотермической и адиабатической сжимаемостей.

Оговорим, что нам известна зависимость $T(p, V)$.

1) Нахождение $C_\alpha - C_V$:

Первое начало термодинамики:

$$C_\alpha dT = dU + pdV$$

$$C_\alpha dT = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + pdV$$

$$C_\alpha dT = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right) dV$$

Крайне очевидно, что $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V$, тогда:

$$C_\alpha - C_V = \left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_\alpha$$

2) Аналогично выводу политропы для идеального газа найдём $\frac{C_\alpha - C_V}{C_p - C_V}$:

$$\frac{C_\alpha - C_V}{C_p - C_V} = \frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_\alpha}{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}$$

Немного пошаманим над уравнением выше:

$$dT = \left(\frac{C_p - C_V}{C_\alpha - C_V}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV$$

Напоминаю, что нам по условию дана зависимость $T = T(p, V)$, то есть:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV$$

Приравниваем dT и получаем по заслугам:

$$\left(\frac{C_p - C_V}{C_\alpha - C_V}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left(1 - \frac{C_p - C_V}{C_\alpha - C_V}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0$$

И, не поверите, находим уравнение политропы в общем случае:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \left(\frac{C_\alpha - C_p}{C_\alpha - C_V}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0$$

3) Найдем связь между термической β_T и адиабатической β_S сжимаемостями:

Для начала $\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ и $\beta_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$.

Из свойств частных производных имеем соотношение $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -1$.

Из выведенного ранее уравнения политропы получаем уравнение адиабаты:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \frac{C_p}{C_V}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0$$

Выразим $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$. Получим $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -V\beta_T$. Подставим это в соотношение соотношение связи между собой частных производных, тогда:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = V\beta_T.$$

Из уравнения адиабаты получаем:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + \frac{C_p}{C_V}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = -\frac{C_p}{C_V}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{C_p}{C_V}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p V\beta_S$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{C_p}{C_V}V\beta_S$$

Заметим, что левая часть - в точности $V\beta_T$. Ну а тогда:

$$V\beta_T = \frac{C_p}{C_V} V\beta_S$$

$$\beta_T = \frac{C_p}{C_V} \beta_S$$