Linal moment

Что на данный момент затехано (все пожелания, благодарности, угрозы писать сюда):

1. Билет № 1.
2. Билет № 2.
3. Билет № 3.
4. Билет № 4.
5. Билет № 5.
6. Теорема Гамильтона—Кэли. (10 билет)
7. Теорема об одномерном или двумерном инвариантном подпространстве. (10 билет)
8. Линейные функции. Биортогональный базис. Сопряжённые пространства. (11 билет)
9. Неравенство Коши—Буняковского и неравенство треугольника. (14 билет)

Билет № 1. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.

Определение [ранг матрицы]. Пусть в матрице A $\exists$ линейно независимая (ЛНЗ) система из r строк, и нет линейно независимой системы из бóльшего числа строк. Тогда мы будем говорить, что строчный ранг A равен r.

Определение [базисная подматрица]. Подматрица B матрицы A ($B = B^{i_1,\, i_2,\, \dots,\, i_r}_{j_1,\, j_2,\, \dots,\, j_r}$) называется базисной подматрицей, если её определитель не равен нулю $\det(B) = M^{i_1,\, i_2,\, \dots,\, i_r}_{j_1,\, j_2,\, \dots,\, j_r} \neq 0$, а $\forall$ минор матрицы A порядка $r+1$ равен нулю.

Определение [базисный минор]. Матрицу $M^{i_1,\, i_2,\, \dots,\, i_r}_{j_1,\, j_2,\, \dots,\, j_r}$ будем называть базисным минором.

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы A является наибольшим таким числом r, что в матрице A имеется r строк (r столбцов), образующих линейно независимую систему.
(Из этой теоремы, в частности, следует, что максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу её линейно независимых столбцов.)
Доказательство:

☐ Пусть ранг матрицы A равен r. Требуется доказать, что в матрице A имеется r столбцов (строк), образующих линейно независимую систему, и что всякие $r+1$ столбцов (строк) образуют линейно зависимую систему. Доказательство для строк и столбцов одно и то же, проведем его для столбцов.

Раз ранг матрицы равен r, то в ней имеется минор P с отличным от нуля детерминантом. Не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что этот минор P является угловым (ведь если если он не угловой, то угловым мы его сделаем :D):

$$\begin{pmatrix} a_{1,\,1} & \dots & a_{1,\,r} & a_{1,\,r+1} & \dots & a_{1,\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\,1} & \dots & a_{r,\,r} & a_{r,\,r+1} & \dots & a_{r,\,n} \\ a_{r+1,\,1} & \dots & a_{r+1,\,r} & a_{r+1,\,r+1} & \dots & a_{r+1,\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,\,1} & \dots & a_{m,\,r} & a_{m,\,r+1} & \dots & a_{m,\,n} \end{pmatrix},\ \det(P) = \begin{vmatrix} a_{1,\,1} & \dots & a_{1,\,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\,1} & \dots & a_{r,\,r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $\det(P) \neq 0$, то векторы $w_1 = \{a_{11},\ \dots,\ a_{r1}\},\ \dots,\ w_r = \{a_{1r},\ \dots,\ a_{rr}\}$ линейно независимы, а тогда тем более линейно независимы векторы $v_1 = \{a_{11},\ \dots,\ a_{r1},\ \dots,\ a_{m1}\},\ \dots,$ $v_r = \{a_{1r},\ \dots,\ a_{rr},\ \dots,\ a_{mr}\}$.

Итак, в матрице A ранга r имеется линейно независимая система, состоящая из r столбцов. Докажем тогда, что всякие $r+1$ столбцов матрицы A (ранга r) линейно зависимы. Предполагаем снова, что отличен от нуля детерминант углового минора порядка r матрицы A.

Вспомним, что среди векторов, являющихся линейными комбинациями данных r векторов, нельзя найти более r линейно независимых; поэтому достаточно доказать, что каждый столбец $v_h = \{a_{1h},\, a_{2h},\, \ldots,\, a_{mh}\}$ матрицы A является линейной комбинацией первых r столбцов: Предполагаем, что $h > r$. Взяв любое $i \leqslant m$, построим детерминант

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{1,\,1} & \ldots & a_{1,\,r} & a_{1,\,h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\,1} & \ldots & a_{r,\,r} & a_{r,\,h} \\ a_{i,\,1} & \ldots & a_{i,\,r} & a_{i,\,h} \end{vmatrix}$$

При любом i этот детерминант равен 0. В самом деле, если $i \leqslant r$, то этот детерминант имеет две одинаковые строки — на i-м и $(r+1)$-м местах — поэтому равен нулю. Если же $i \geqslant r$, то D_i есть детерминант некоторого минора $r+1$ порядка матрицы A, и он равен нулю, так как ранг матрицы A по предположению есть r. Итак, $D_i = 0$ при $i \leqslant m$.

Разложим детерминант D_i по элементам последней строки:

$$A_1 = (-1)^{(r+1)+1} \begin{vmatrix} a_{1,\,2} & \ldots & a_{1,\,r} & a_{1,\,h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\,2} & \ldots & a_{r,\,r} & a_{r,\,h} \end{vmatrix}$$

и так далее ...

$$A_k = (-1)^{(r+1)+k} \begin{vmatrix} a_{1,\,1} & \ldots & a_{1,\,k-1} & a_{1,\,k+1} & \ldots & a_{1,\,r} & a_{1,\,h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,\,1} & \ldots & a_{r,\,k-1} & a_{r,\,k+1} & \ldots & a_{r,\,r} & a_{r,\,h} \end{vmatrix}$$

и, наконец,

$$A_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{1,\,1} & \ldots & a_{1,\,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\,1} & \ldots & a_{r,\,r} \end{vmatrix} = \det(P) \neq 0.$$

Имеем $0 = D_i = A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \ldots + A_r a_{ir} + A_{r+1} a_{ih}$, где $i = 1, 2,\ \ldots,\ m$. Эти соотношения выражают равенство $A_1 v_1 + A_2 v_2 + \ldots + A_r v_r + A_{r+1} v_h$, в котором заведомо коэффициент $A_{r+1} = \det(P)$ отличен от нуля и которое поэтому можно разрешить относительно $v_h : v_h = \lambda v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ при $\lambda_1 = -\frac{A_1}{A_{r+1}},\ \ldots,\ \lambda_r = -\frac{A_r}{A_{r+1}}$.

Итак, мы представили произвольный столбец v_h матрицы в виде линейной комбинации первых r столбцов этой матрицы. Этим и закончили доказательство теоремы. ■

Теорема о базисном миноре. Если $M^{i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_r}_{j_1,\ j_2,\ \dots,\ j_r}$ — базисный минор матрицы A, то строки $\overrightarrow{a_{i1}},\ \dots,\ \overrightarrow{a_{ir}}$ и столбцы $a^{\uparrow}_{j1},\ \dots,\ a^{\uparrow}_{jr}$ являются базисными в матрице A.

Доказательство:

□ Без ограничения общности будем считать, что матрица A имеет следующий вид (базисная матрица в левом верхнем углу):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rj} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & \dots & a_{rij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Докажем, что $\overrightarrow{a_i} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \ldots + \lambda_r \overrightarrow{a_r}$.

Рассмотрим дереминант матрицы, состоящей из базисной матрицы и добавленными к ней i-той строки и j-того столбца. Рассмотрим следующий минор, и разложим его по j-тому столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = a_{1j}(-1)^{1+r+1}M_1^j + \ldots + a_{rj}(-1)^{2r+1}M_r^j + a_{ij}(-1)^{1+r+1+r}M^{1,\ \dots,\ r}_{1,\ \dots,\ r} = 0$$

Значит, $a_{ij} = -\frac{1}{M}(\sum\limits_{k=1}^{r} a_{kj}A_k^j)$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, и $M = M^{1,\ \dots,\ r}_{1,\ \dots,\ r}$ — базисный минор. Причём, A_k^j от j не зависит, то есть $a_{i*} = -\frac{1}{M}(\sum\limits_{k=1}^{r} a_{k*}A_k^*)$.

А ведь это как раз и означает, что i-тая строка — линейная комбинация $\overrightarrow{a_1},\ \dots,\overrightarrow{a_r}$. ■

Билет № 2. Системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Теорема Кронекера—Капелли. Теорема Фредгольма.

Определение [СЛУ]. Систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \ldots + a_n^1 x_n = b^1 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_n^2 x_n = b^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \ldots + a_n^m x_n = b^m \end{cases}$$

будем называть системой линейных уравнений (СЛУ) с n неизвестными. Коэффициенты при $(x_1, \ \ldots, \ x_n)$ будем записывать в виде матрицы, называемой матрицей системы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$$

Числа, стоящие в правых частях уравнений системы, образуют столбец $b^\uparrow$, называемый столбцом свободных членов. Если все элементы столбца свободных членов равны нулю, то система называется однородной (ОСЛУ). Причём, однородная система всегда совместна (то есть имеет хотя бы одно решение), так как, очевидно, всегда есть как минимум тривиальное решение.

Определение [ФСР]. Фундаментальная система решений — базис в линейном пространстве решений однородного уравнения.

Определение [фундаментальная матрица]. Фундаментальная матрица — матрица, столбцами которой является ФСР.

Лемма о вычислении общего решения СЛУ. Пусть $AX = b$ и $AY = 0$ – соответствующая ОСЛУ, тогда $\forall X$ решение системы $AX = b$ представляется в виде $X = X_ч + Y$, где $X_ч$ – частное решение, и Y – произвольное решение ОСЛУ.

Доказательство [Необходимость $\Rightarrow$]:

□ Раз $X_ч$ – частное решение $AX = b$, то из $AX = b \Rightarrow \ AX_ч = b$. Тогда $A(X - X_ч) = 0 \Rightarrow Y = X - X_ч$ – решение системы $AY = 0$, или $X = X_ч + Y$

Доказательство [Достаточность $\Leftarrow$]:

Пусть Y – решение системы $AY = 0$: $X = X_ч + Y$ – есть решение $AX = b$, т.к. $A(X_ч + Y) = AX_ч + AY = AX_ч = b$.

Итого: $X_{общ} = X_ч + Y_{одн}$ ■

Общий вид ФСР.

Возьмём $\widetilde{A} = (A \mid b)$. Сведём матрицу $\widetilde{A}$ элементарными преобразованиями и перестановкой столбцов к следующему виду:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E_r & c & b' \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ где } b' \text{ — столбец } (b_1, \ \ldots, b_r)^T.$$

В матрице $\widetilde{A}$ после преобразований $\operatorname{rg}(\widetilde{A}) = \operatorname{rg}(A) = r$ ненулевых строк. Тогда запишем уравнения в следующем виде:

$$x_i + \sum_{j=r+1}^{n} c_{ij} x_j = b_i, \, i = \overline{1, \, r}.$$

Переменные $x_1, \ \ldots, x_r$ будем называть главными неизвестными, а остальные — параметрическими.

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - \sum\limits_{j=r+1}^{n} c_{1j} x_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r - \sum\limits_{j=r+1}^{n} c_{rj} x_j \end{cases}$$

Тогда распишем X:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \sum\limits_{j=r+1}^{n} c_{1j} x_j \\ \vdots \\ b_r - \sum\limits_{j=r+1}^{n} c_{rj} x_j \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=r+1}^{n} x_j \begin{pmatrix} -c_{1j} \\ \vdots \\ -c_{rj} \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$$

Матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} -c_{1j} \\ \vdots \\ -c_{rj} \\ E_{n-r} \end{pmatrix}$$

называют фундаментальной системой решений. Будем обозначать такую матрицу следующим образом:

$$\Phi = \left(\begin{array}{c|c|c} -c_{1,\ r+1} & \dots & -c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{r,\ r+1} & \dots & -c_{rn} \\ \hline 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{array}\right) = \left(\frac{-C}{E_{n-r}}\right)$$

А теперь возьмём ФСР и домножим её на $(E_r \mid C)$:

$$(E_r \mid C) \cdot \Phi = (E_r \mid C) \cdot \left(\frac{-C}{E_{n-r}}\right) = -C + C = 0$$

Вот и получается, что ФСР однородной системы — базис пространства решений этой системы.

Теорема Кронекера—Капелли. СЛУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A \mid b)$.

Доказательство [Необходимость $\Rightarrow$]:

$\square$ Пусть существует решение x, тогда $x_1 a_1^{\uparrow} + x_2 a_2^{\uparrow} + \ldots + x_n a_n^{\uparrow} = b^{\uparrow}$. То есть столбец $b^{\uparrow}$ есть линейная комбинация $a_1, \ldots, a_n$, а значит, дописывание $b^{\uparrow}$ к матрице А не увеличит ее ранг.

Доказательство [Достаточность $\Leftarrow$]:

Имеем $rg(A) = rg(A \mid b)$. Значит у них один и тот же базисный минор. Значит $b^{\uparrow}$ — линейная комбинация столбцов базисного минора, и система $Ax = b$ разрешима. $\blacksquare$

Теорема Фредгольма. СЛУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \forall Y$, где Y - решение системы $A^T Y = 0$, выполняется $b^T Y = 0$.

Доказательство [Необходимость $\Rightarrow$]:

$\square$ Пусть $\exists x_0 : Ax_0^{\uparrow} = b^{\uparrow}$ и Y — некоторое решение системы $A^T Y = 0 \Leftrightarrow Y^T A = 0$. Домножим $[Ax_0 = b]$ слева на $Y^T : (Y^T A)x_0 = Y^T b = 0 = b^T Y$.

Доказательство [Достаточность $\Leftarrow$]:

Предположим теперь, что система $Ax = b$ несовместна. Это равносильно тому, что в упрощенном виде ее расширенной матрицы $(A \mid b)$ есть строка $(0\ \dots\ 0 \mid 1)$. Так как упрощенный вид получается из исходной матрицы элементарными преобразованиями строк, строка $(0\ \dots\ 0 \mid 1)$ является линейной комбинацией строк матрицы $(A \mid b)$. То есть существует такой столбец y_0, что $y_0^T = (0 \dots 0 \mid 1)$. Последнее равенство равносильно системе $y_0^T A = 0$, $y_0^T b = 1$. То есть, предположив несовместность системы $Ax = b$, мы нашли такое решение y_0 сопряженной однородной системы, что $y_0^T b \neq 0$. $\blacksquare$

Билет № 3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.

Полагаем, что L — произвольное множество, $\mathbb{F}$ — некоторое поле (например, поле $\mathbb{R}$). На L определна бинарная операция, которую мы будем называть сложением и обозначать «$+$», а также $\forall\lambda$ определена унарная операция, которую мы будем называть умножением на λ и обозначать $\lambda \cdot \mathbf{a}$ или $\lambda\mathbf{a}$, где $\mathbf{a} \in L$.

Определение [векторное (линейное) пространство]. L называется векторным (или линейным) пространством над полем $\mathbb{F}$, если выполнены следующие **8** свойств (аксиом векторного пространства):
1. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) \quad (\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in L)$;
2. $\exists\ \mathbf{0} \in L\ \forall\ \mathbf{a} \in L : \mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$;
3. $\forall\ \mathbf{a} \in L\ \exists\ \mathbf{x} \in L : \mathbf{x}+\mathbf{a} = \mathbf{a}+\mathbf{x} = 0$;
4. $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a} \quad (\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b} \in L)$;
5. $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b} \quad (\forall\ \mathbf{a},\mathbf{b} \in L,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{F})$;
6. $(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a} \quad (\forall\ \mathbf{a} \in L,\ \forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{F})$;
7. $1{\cdot}\mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (\forall\ \mathbf{a} \in L)$;
8. $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}) \quad (\forall\ \mathbf{a} \in L,\ \forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{F})$;

Определение [линейная комбинация]. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in L$, $\lambda_1,\ \ldots, \lambda_k \in\ \mathbb{F}$. Сумма $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i\mathbf{a}_i$ называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ с коэффициентами $\lambda_1,\ \ldots, \lambda_k$. Причём, линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i\mathbf{a}_i$ называется тривиальной, если все её коэффициенты равны 0 (очевидно, что тогда сама линейная комбинация будет равна $\mathbf{0}$).

Определение [линейная независимость]. Система векторов в L называется линейно независимой, если нулевой вектор раскладывается единственным образом по этой системе векторов.

Определение [линейная зависимость]. Если существует нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулевому вектору, то такая система векторов линейно зависимая.

Некоторые свойства векторов в системе.
1. Система из $k > 1$ векторов ЛЗ $\Leftrightarrow$ хотя бы один вектор этой системы — линейная комбинация остальных.
2. Если в системе есть $\mathbf{0}$, то она является ЛЗ.
3. Если подсистема некоторой системы векторов ЛЗ, то и вся система ЛЗ.
4. Всякая подсистема ЛНЗ системы является ЛНЗ системой.
5. Разложение любого вектора по ЛНЗ система однозначно.

Определение [ранг системы векторов]. Целое неотрицательное число r называется рангом непустой системы $\mathbb{A}$ векторов из L, если в системе $\mathbb{A}$ найдётся линейно независимая подсистема из r векторов, а любая подсистема из $r+1$ векторов является линейно зависимой.

Определение [бесконечный ранг]. Будем говорить, что система $\mathbb{A}$ имеет бесконечный ранг, если $\forall r \in \mathbb{N}$ в $\mathbb{A}$ найдётся линейно независимая подсистема из r векторов.

В том случае, когда $\mathbb{A}$ является подпространством в L, более употребительное название для ранга — размерность. Обозначают размерность как $\dim \mathbb{A}$. Пространство размерности k называют *k-мерным.* Если $\dim V < \infty$, то V называют конечномерным, иначе — бесконечномерным.

Определение [базис]. Базисом в L называется конечная упорядоченная ЛНЗ система векторов такая, что каждый вектор из L по ней раскладывается.

Билет № 4. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Матрица перехода. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Теорема об изоморфизме.

Пусть в линейном пространстве L выбраны базисы $\mathrm{e} = \|e_1, \ \ldots, \ e_n\|$, и $e' = \|e'_1, \ \ldots, \ e'_n\|$. Тогда $\forall X \in L$ можем записать его координатные представления:

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = eX_e^{\uparrow} \text{ и } X' = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i = e' X_{e'}^{\uparrow}$$

Операции сложения векторов и умножения на скаляр.

1. Координатный столбец суммы векторов равен сумме координатных столбцов:

$\square \quad X + Y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i) e_i = e(X^{\uparrow} + Y^{\uparrow}) \quad \blacksquare$

2. Координатный столбец произведения вектора на скаляр равен произведению координатного столбца вектора на это число:

$\square \quad \alpha X = \alpha \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha x_i) e_i = e(\alpha X^{\uparrow}) \quad \blacksquare$

Матрица перехода.

Рассмотрим на примере трёхмерного пространства. Пусть есть два базиса в пространстве: "старый" e и "новый" e'. Пусть $e = (e_1, \, e_2, \, e_3)$ и $e' = (e'_1, \, e'_2, \, e'_3)$. Координаты вектора $\vec{\vartheta}$ запишем в виде столбцов: $\mathbf{x} = (x_1, \, x_2, \, x_3)$ в базисе e и $\mathbf{x}' = (x'_1, \, x'_2, \, x'_3)$ в базисе e'.

Нам известно представление некоторого вектора $\vec{\vartheta}$ в базисе e':

$$\vec{\vartheta} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$$

Также нам известно представление базиса e' в базисе e:

$$\begin{cases} e'_1 = a_{11} \cdot e_1 + a_{12} \cdot e_2 + a_{13} \cdot e_3 \\ e'_2 = a_{21} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2 + a_{23} \cdot e_3 \\ e'_3 = a_{31} \cdot e_1 + a_{32} \cdot e_2 + a_{33} \cdot e_3 \end{cases}$$

Найдем, как выглядит $\vec{\vartheta}$ в базисе e:

$$\vec{\vartheta} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Разложение $\vec{\vartheta}$ по базису e' и разложение e' по e можно записать так:

$$\begin{cases} \vec{\vartheta} = e' x' \\ e' = eS \end{cases}$$

где S — матрица перехода от базиса e к базису e':

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Теперь разложим вектор $\vec{\vartheta}$ по базису e:

$$\vec{\vartheta} = e\mathbf{x}$$

Получается, что один и тот же вектор можно представить по-разному:

$$\vec{\vartheta} = e\mathbf{x} = e'\mathbf{x}'$$

Тогда, выразив e' через e, получим:

$$e\mathbf{x} = (eS)\mathbf{x}' = e(S\mathbf{x}')$$

Итак, в двух базисах компоненты векторов связаны следующим образом:

$$\boxed{\begin{cases} e' = eS \\ \mathbf{x} = S\mathbf{x}' \end{cases}}$$

Отметим ещё одно свойство:

С одной стороны справедливо, что $e' = eS_{e\to e'}$, отсюда $e = e'(S_{e\to e'})^{-1}$. А с другой стороны $e = e'S_{e'\to e}$. Тогда в силу единственности разложения e по e' получаем:

$$\boxed{S_{e'\to e} = (S_{e\to e'})^{-1}}$$

Капля в море изоморфизма.

Анекдот [про изоморфизм].

70-е годы. Группа студентов матмеха Ленинградского универа стоит в очереди в кафе "Белочка" (возле метро "Василеостровская", не знаю, есть ли сейчас это кафе) и спорят между собой о некой математической функции. В воздухе мелькают слова: "Это изоморфизм!", "Да, нет же, это гомоморфизм!" и проч. Дама бальзаковского возраста делает замечание: "Молодые люди, здесь порядочные женщины стоят, а вы выражаетесь!".

Говорят, что между элементами двух множеств U и V установлено взаимно однозначное соответствие, если указано правило, которое каждому элементу $u \in U$ сопоставляет единственный элемент $v \in V$, причём каждый элемент $v \in V$ оказывается сопоставленным единственному элементу $u \in U$. Взаимно однозначное соответствие будем обозначать $U \leftrightarrow V$.

Два линейных пространства U и V называются изоморфными, если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что выполняются условия:
1. Сумме векторов пространства U соответствует сумма соответствующих векторов пространства V.
2. Произведению числа на вектор пространства U соответствует произведение того же числа на соответствующий вектор пространства V.

Другими словами, изоморфизм — это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции.

Некоторые свойства изоморфизма:

1. При изоморфизме линейных пространств U и V их нулевые элементы соответствуют друг другу ($0_U \leftrightarrow 0_V$), и их противоположные элементы соответствуют друг другу.
2. Линейной комбинации векторов пространства U соответствует линейная комбинация соответствующих векторов пространства V.
3. Линейно независимой (линейно зависимой) системе векторов пространства U соответствует линейно независимая (линейно зависимая) система векторов пространства V.
4. Если пространство U изоморфно пространству V, а V изоморфно пространству W, то пространства U и W также изоморфны.
5. Любое n-мерное линейное вещественное пространство V изоморфно n-мерному арифметическому пространству $\mathbb{R}^n$, а n-мерное комплексное пространство изоморфно $\mathbb{C}^n$.

Теорема об изоморфизме. Два конечномерных линейных пространства (над одним и тем же числовым полем) изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же размерность.

Доказательство [Необходимость $\Rightarrow$]:

$\square$ Если пространства изоморфны ($U \leftrightarrow V$), то базису (u_1, u_2, $\ldots$, u_n) пространства U соответствует линейно независимая система векторов ($v_1, v_2, \ldots, v_n$) пространства V, которую в случае необходимости можно дополнить до базиса пространства V. Следовательно, $\dim U \leqslant \dim V$. Аналогично получаем противоположное неравенство $\dim V \leqslant \dim U$.
Таким образом, $\dim U = \dim V$.

Доказательство [Достаточность $\Leftarrow$]:

Пусть пространства U и V определены над полем $\mathbb{R}$ и $\dim U = \dim V = n$. Тогда, выбрав любые базисы в пространствах U и V, установим изоморфизмы $U \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ и $V \leftrightarrow \mathbb{R}^n$, если U и V — вещественные пространства. А если пространства U и V определены над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, то $U \leftrightarrow \mathbb{C}^n$ и $V \leftrightarrow \mathbb{C}^n$. В итоге пространства U и V изоморфны. $\blacksquare$

Билет № 5. Подпространства в линейном пространстве. Способы задания подпространств. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы двух подпространств. Прямая сумма.

Определение [подпространство в L]. Непустое подмножество L' векторов линейного пространства L называется линейным подпространством, если:
1. сумма любых двух векторов из L' принадлежит L';
2. произведение каждого вектора из L' на любое число также принадлежит L'.

Например, множество многочленов степени не выше 3 является подпространством пространства всех многочленов. В силу этого определения любая линейная комбинация векторов из $L' \in L'$. Также нулевой вектор должен принадлежать L' как произведение $0 \cdot \vec{x}$.

Справедливость аксиом линейного пространства для L' прямо вытекает из их справедливости для L, Таким образом, подпространство L' является линейным пространством.

Способы задания подпространств:

1. С помощью линейной оболочки.

Определение [линейная оболочка]. Рассмотрим некоторое множество векторов P линейного пространства L. Множество U, состоящее из всевозможных линейных комбинаций векторов из P, мы будем называть линейной оболочкой множества P.

То есть, если $a_1, \ \ldots, a_m \in L$, то линейная оболочка $U = < a_1, \ \ldots, a_m > = \{\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i : \lambda_i \in K\}$. И в этом есть принципиальное различие между базисом и линейной оболочкой. Базис в $\mathbb{R}^n$ состоит из n векторов, а вот линейная оболочка в $\mathbb{R}^n$ — из всех векторов в $\mathbb{R}^n$ (то есть из несчётного количества векторов при $n > 1$).

Предложение 1. U является подпространством.
1. $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i' a_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda_i') a_i \in U$.
2. $\alpha \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i \cdot) a_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i \cdot \alpha) a_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\lambda_i') a_i \in U$.
3. $\vec{0} \in U$ (при $\lambda_1 = \ \ldots = \ \lambda_m = 0$).

Предложение 2. Пусть L' — подпространство n-мерного пространвнства L. Тогда $\dim L' \leq n$. Если $\dim L' = n$, то L' совпадает с L.

Предложение 3. Размерность линейной оболочки множества из m-векторов не больше m.

2. С помощью однородной системы линейных уравнений (ОСЛУ).

Пусть дано n-мерное линейное пространство L, и пусть в нём зафиксирован базис $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Пусть M — линейное подпространство в L.

Будем говорить, что система линейных уравнений задаёт подпространство M, если этой системе удовлетворяют координаты всех векторов из M, и не удовлетворяют координаты никаких других векторов.

Из свойств решений однородной системы линейных уравнений следует, что любая однородная линейная система уравнений ранга r с n переменными задаёт в n-мерном пространстве L (если в нём зафиксирован базис) $(n-r)$-мерное линейное подпространство.

Теорема. Если в линейном n-мерном пространстве L зафиксирован базис, то любое его k-мерное линейное подпространство можно задать системой линейных однородных уравнений с n неизвестными ранга $(n-k)$.

$\square$ Пусть $\{c_1, \ldots, c_m \in L\}$ и нам известны их координаты в e. Наша задача — выяснить, при каких x_i вектор $x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i \in < c_1, \ldots, c_m >$ (1).

Пусть $\{c_1, \ldots, c_m\}$ линейно независимы $\Rightarrow x \in < c_1, \ldots, c_m > \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K:$ $x = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j c_j$ (2). Это равносильно совместности СЛУ с расширенной матрицей (2).

$$\hat{B} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & \ldots & c_{1m} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nm} & x_n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} c_{1j_1} & \ldots & 0 & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & c_{mj_m} & x_n \\ \hline & 0 & & a_{r+1,1} \cdot x_1 \ldots a_{r+1,n} \cdot x_n \\ & \vdots & & \vdots \\ & 0 & & a_{n1} \cdot x_1 \ldots a_{nn} \cdot x_n \end{array}\right)$$

Итак, нам нужна совместность $\hat{B}$. Тогда для получения ОСЛУ, описывающую оболочку, получаем простое условие:

$$\begin{cases} a_{r+1,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{r+1,n} \cdot x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \ AX^{\uparrow} = 0.$$

Отметим, что $\dim(< c_1, \ldots, c_m >) = m$ и $\dim M = n - \operatorname{rg} A = n - (n-m) = m$. В итоге получили ОСЛУ $AX^{\uparrow} = 0$, описывающую оболочку $< c_1, \ldots, c_m >$. $\blacksquare$

На этой прекрасной ноте мы закончим описывать способы задания подпространств.

Сумма и пересечение подпространств.

Определение [сумма подпространств]. Суммой подпространств L' и L'' будем называть линейную оболочку их объединения $L' \cup L''$. Обозначение: $L' + L''$.

Подробнее определение означает, что вектор из $L' + L''$ (и только такой) представим в виде $x = \sum\limits_i \alpha_i p_i + \sum\limits_j \beta_j q_j$, где векторы p_i лежат в L', а q_j — в L''.

Достаточно очевидно, что $\dim(L' + L'') \leq \dim(L') + \dim(L'')$. Если $L' \subseteq L''$, то $L' + L'' = L''$. В частности, для любого подпространства $L' + L' = L'$.

Определение [пересечение подпространств]. Пересечением подпространств L' и L'' будем называть множество векторов, которые принадлежат обоим подпространствам. Обозначение: $L' \cap L''$.

Пересечение есть подпространство. Действительно, нулевой вектор лежит во всех подпространствах и, следовательно, пересечение — не пустое множество. Если векторы x и y лежат в $L' \cap L''$, то они лежат как в L', так и в L''. Поэтому вектор $x + y$ и при любом α вектор $\alpha \cdot x$ также лежат и в L', и в L'', а значит и в $L' \cap L''$.

Если в конечномерном пространстве подпространтсва заданы СЛУ, то их пересечение задаётся системой уравнений, получаемой объединением систем, задающих подпространства.

В более общем случае суммой подпространств $L^1, \ \ldots, \ L^s$ называется линейная оболочка их объединения. Аналогично сумме двух подпространств можем получить сумму s подпространств: $\dim(L^1 + \ldots + L^s) \leq \dim(L^1) + \ldots + \dim(L^s)$.

Формула Грассмана. Пусть V_1, V_2 — подпространства в L. $\dim(L) < \infty, \ \dim(V_1) < \infty$, $\dim(V_2) < \infty$. Тогда выполняется $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Доказательство:

$\square$ Пусть $\dim(V_1 \cap V_2) = s \geqslant 0, \ \dim(V_1) = k_1 \geqslant s, \ \dim(V_2) = k_2 \geqslant s$. Пусть $e = \{e_1, \ \ldots, e_n\}$ — базис в $V_1 \cap V_2$.

Дополним базис e до базиса V_1 векторами $f_1, \ \ldots, f_{k_1 - s}$ и до базиса V_2 векторами $g_1, \ \ldots, g_{k_2 - s}$. Тогда $\{e_1, \ \ldots, e_s, f_1, \ \ldots, f_{k_1 - s}\}$ — базис в V_1, и $\{e_1, \ \ldots, e_s, g_1, \ \ldots, g_{k_2 - s}\}$ — базис в V_2.
Базис в $(V_1 + V_2): \ \{e_1, \ \ldots, e_s, f_1, \ \ldots, f_{k_1 - s}, g_1, \ \ldots, g_{k_2 - s}\}$.

А значит, что $\dim(V_1 + V_2) = s + k_1 - s + k_2 - s = k_1 + k_2 - s$. $\blacksquare$

Определение [прямая сумма]. Сумма подпространств $L^1, \ldots, L^s$ называется прямой суммой, если ее размерность равна сумме размерностей этих подпространств, то есть имеет максимальное из возможных значений. Обозначение: чаще используется '+', но если требуется подчеркнуть, что сумма прямая, — то $\oplus$.

Теорема. Для того, чтобы сумма M подпространств $L^1, \ldots, L^s$ была прямой суммой, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих четырех свойств:
1. Любая система из $m \leq s$ ненулевых векторов, принадлежащих различным подпространствам L^i $(i = 1, \ldots, s)$, линейно независима.
2. Каждый вектор $x \in M$ раскладывается в сумму $x_1, \ldots, x_s$, где $x_i \in L^i$ $(i = 1, \ldots, s)$ однозначно.
3. Пересечение каждого из подпространств L^i с суммой остальных есть нулевое подпространство.
4. Объединение базисов подпространств L^i $(i = 1, \ldots, s)$ является базисом в M.

Доказательство этой теоремы в силу простоты представляется как упражнение. Если есть необходимость прочитать доказательство, то оно описано в книге Б. В. Беклемишева "Курс аналитической геометрии и линейной алгебры" в 13 издании на 239 странице.

Предложение 4. Для любого подпространства L' пространства L найдётся такое подпространство L'', что $L = L' \oplus L''$.
$\square$ Выберем базис $e_1, \ldots, e_k$ подпространства L' и дополним его до базиса пространства L векторами $e_{k+1}, \ldots, e_n$. Тогда обозначим линейную оболочку $e_{k+1}, \ldots, e_n$ через L''. В таком случае $L' \oplus L''$. $\blacksquare$

Сумма размерностей образа и ядра линейного пространства.

Утверждение: $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(L)$.

- Отображение $\varphi:\ L_1 \to L_2$ — закон, по которому каждому вектору из L_1 сопоставляется единственный вектор из L_2.
- Образ L_1 под действием φ или множество значений $\varphi(L_1)$: $\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \in L_2 : \exists x \in L_1,\ \varphi(x) = y\}$.
- Ядро линейного отображения φ — множество всех векторов из L_1, переходящих в 0_{L_2}: $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in L_1 : \varphi(x) = 0_{L_2}\}$.

Доказательство:

☐ Пусть $\varphi : L \to L$, причём $\dim(L) = n$. Выберем в линейном пространстве L произвольный базис $\{e_1,\ \ldots,\ e_n\}$. Поскольку по определению $\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \mid y = \varphi(x),\ x \in L\}$, то можно записать, что $\mathrm{Im}(\varphi) = L\{\varphi(e_1),\ \ldots,\ \varphi(e_n)\}$ — линейная оболочка, порождаемая совокупностью образов базисных векторов $\varphi(e_1),\ \ldots,\ \varphi(e_n)$, причем $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = r$, где r – максимальное число ЛНЗ векторов в системе.

Рассмотрим ядро $\varphi : \mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \mid \varphi(x) = 0,\ x \in L\}$. В выбранном базисе равенству $Ax = 0$ соответствует однородная СЛУ: $A\xi = 0$, которая, как известно, имеет $n - r$ ЛНЗ решений, образующих ФСР. Поскольку неизвестными данной системы являются координаты векторов, составляющих $\mathrm{Ker}(\varphi)$, то отсюда заключаем, что $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n - r$. В результате получаем, что $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = r + (n - r) = n = \dim(L)$. ■

Определитель и след матрицы через корни характеристического многочлена.

Утверждение: пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического многочлена $P(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E)$. Тогда $\mathrm{tr}(A_\varphi) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ и $\det(A_\varphi) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Доказательство:

☐ Понятно, что $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ — след матрицы A_φ.

Имеем $P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) = (-\lambda)^n + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot (-\lambda)^{n-1} + \ldots + \prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i)$. А также $\det(A_\varphi - \lambda E) = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) + \sigma$, где под σ подразумевается сумма всех членов со степенью меньшей либо равной $n - 2$.

Перепишем в другом виде последнее равенство $(-\lambda)^n + (a_{11} + \ldots + a_{nn}) \cdot (-\lambda)^{n-1} + \sigma + \det(A_\varphi)$.

Применяем всё могущество своей внимательности. Получаем:

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(A_\varphi) = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \\ \det(A_\varphi) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \end{cases}$$

■

Теорема Гамильтона—Кэли: если $f(t)$ — характеристический многочлен матрицы A, то $f(A)$ — нулевая матрица. Или иначе - всякая матрица является корнем своего характеристического многочлена.

Доказательство:

Обращу внимание на НЕправильное доказательство! Сразу же хочется сказать, что $f(A) = \det(A - A \cdot E) = \det(A - A) = 0$. Круто, доказали теорему в одну строчку. (Хотя мы доказали то, что к теореме вообще не относится — детерминант нулевой матрицы есть число 0). Но замечу, что в формулировке теоремы $f(A)$ — нулевая матрица (именно матрица). В этот момент становится грустно, потому что вас отправляют на пересдачу. А еще грустнее от следующего доказательства.

$\square$ Пусть λ — не характеристичкое число $\to$ матрица $A - \lambda \cdot E$ невырожденная $\to \exists$ матрица

$$(A - \lambda \cdot E)^{-1} = \frac{B(\lambda)}{\det(A - \lambda \cdot E)}$$

Элементы матрицы B — элементы вида $b_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ji}$, где d_{ji} — дополнительный минор (убираем j-тую строку и i-тый столбец, потом считаем детерминант такой матрицы).

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Допустим, мы выберем диагональный элемент $[a_{22} - \lambda]$. Тогда дополнительный минор d_{22} — многочлен степени $n - 1$, где n — количество λ (так как убрали всего одну λ).

Если же выбрать недиагональный элемент, то как ни крути эту матрицу, будем убирать по две λ с диагонали. И дополнительный минор, например, d_{12} будет степени $n-2$. Тогда матрица $B(\lambda)$ представима в виде $B(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1}$.

Пример, когда матрицу в таком виде имеет смысл представить:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 + 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2$$

Вернемся обратно к доказательству теоремы.

Для определённости пусть $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$.
Тогда имеем $(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n)E = (B_0 + \ldots + \lambda^{n-1}B_{n-1})(A - \lambda E)$.
Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ с правой и левой частей. Потом домно-

жим каждое равенство на A^i, где i - степень, соответствующая степени, рассматриваемого λ^i:

$$\begin{array}{lll}
\lambda^0\colon & a_0E = B_0A & |\cdot A^0 \\
\lambda^1\colon & a_1E = -B_0 + B_1A & |\cdot A^1 \\
 & \vdots & \\
\lambda^k\colon & a_kE = -B_{k-1} + B_kA & |\cdot A^k \\
 & \vdots & \\
\lambda^n\colon & a_nE = -B_{n-1} & |\cdot A^n
\end{array}$$

Сложим все левые и правые части равенств:
$a_0E+a_1A+\ldots+a_kA^k+\ldots+a_nA^n = B_0A-B_0A+B_1A^2-\ldots-B_{k-1}A^k+B_kA^{k+1}-\ldots-B_{n-1}A^n$. Как можно заметить — всё сократится. Получили нулевую матрицу. То есть то, что мы и хотели получить. ■

Добавлю, что отсюда мы сразу получаем следующее следствие:
Если $p(\lambda)$ — характеристический многочлен преобразования φ, то $p(\varphi) = \vec{0}$.

Теорема: любое линейное преобразование конечномерного действительного линейного пространства L обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством U.

Доказательство:

□ По поводу одномерного подпространства, тут всё просто: если $\exists\lambda \in \mathbb{R}:\ \varphi(x) = \lambda x,\ x \neq 0$. Тогда $U = \langle x\rangle$.

Дальше неприятнее. Если все характеристические корни мнимые, то пусть $\lambda = \alpha+i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогда $\overline{\lambda} = \lambda - i\beta$ тоже является характеристическим корнем, так как $\det(A_\varphi - \lambda E)$ - многочлен с действительными коэффициентам.

Рассмотрим φ как линейное преобразование $\mathbb{C}^n$: $\varphi(z) = A_\varphi Z,\ \forall Z = (z_1,\ \ldots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n \ \Rightarrow$ $\exists Z' = X + iY \neq 0, (X,\, Y \in \mathbb{R}^n)\ \Rightarrow\ A_\varphi Z' = \lambda Z'\ \Leftrightarrow\ A_\varphi(X+iY) = (\alpha+i\beta)(X+iY) =$
$= (\alpha x - \beta Y) + i(\beta x + \alpha Y)\ \Leftrightarrow\ A_\varphi X = \alpha X - \beta Y$ и $A_\varphi Y = \beta X + \alpha Y\ \Rightarrow\ U = \langle X,\ Y\rangle$ — двумерное инвариантное подпространство. ■

Неравенство Коши—Буняковского и неравенство треугольника:

1. $\forall x,\, y \in \mathbb{E} \;\mapsto\; |(x,\, y)| \leqslant |x||y|$. Причём, $|(x,\, y)| = |x||y|$, если $x,\, y$ линейно зависимы.
2. $\forall x,\, y \in \mathbb{E} \;\mapsto\; |x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Доказательство:

$\square$ 1. Введём функцию $f(t) = (tx + y,\, tx + y) = t^2(x,\, x) + 2t(x,\, y) + (y,\, y) \geqslant 0$.
Тогда относительно t имеем: $D \leqslant 0 \;\Rightarrow\; \frac{D}{4} = (x,\, y)^2 - (x,\, x)(y,\, y) \leqslant 0$, таким образом $|(x,\, y)| \leqslant |x||y|$.

2. $(x+y,\, x+y) = |x|^2 + 2(x,\, y) + |y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$, тогда $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. $\blacksquare$

Линейные функции. Биортогональный базис. Сопряжённые пространства.

Определение. Если на линейном пространстве L задано правило, по которому $\forall x \in L$ ставится в соответствие число ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то говорят, что на L задана функция f. На бесконечномерных пространствах их называют функционалами.

Определение. f на L — линейная, если $\forall x,\, y \in L$ & $\forall \alpha$:
1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Примеры линейных (или не совсем) функций:
1. Аддитивность массы (масса сложного объекта равна сумме масс составляющих его частей). То есть $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.
2. Функция, которая сопоставляет всем векторам ненулевое число — не линейная. Так как не выполняется $f(0) = 0$.
3. Функция, сопоставляющая каждому вектору его i-ю координату — линейная.
4. Функция, сопоставляющая каждому вектору число 0 — тоже линейная.

Определение. Линейное пространство L^* всех линейных функций на линейном пространстве L называется сопряжённым для L.

Предложение. $\dim(L^*) = \dim(L)$.

Доказательство.

$\square\ \forall x \in L, x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$:

Рассмотрим n функций, которые дают значения i-той координаты аргумента:
$f_1(x) = x_1,\ \ldots,\ f_i(x) = x_i,\ \ldots,\ f_n(x) = x_n$.

То есть $f_i(e_j) = \delta_{ij} = \left[\begin{array}{l} 0,\ i \neq j \\ 1,\ i = j \end{array}\right.$, где $(i,\ j = 1,\ \ldots,\ n.)$

Тогда докажем, что $f_1,\ \ldots,\ f_n$ — базис в L^*. Пусть $f = f_1\lambda_1 + \ldots + f_n\lambda_n = 0$. Тогда:
$f(e_1) = f_1(e_1)\lambda_1 + f_2(e_2)\lambda_2 + \ldots + f_n(e_n)\lambda_n = 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \ldots + 0 \cdot \lambda_n = \lambda_1 = 0$.
Аналогично $f(e_2) = \lambda_2 = 0$. И так далее... $\Rightarrow\ f_1,\ \ldots,\ f_n$ — ЛНЗ.

Рассмотрим $\forall f : L \to K$ — линейную функцию:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i f_i)(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right)(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

Можем переобозначить $f_i = e^i$. Тогда $\{e^i\}$ — базис в L^*. Причем базис $\{e^i\}$ — биортогональный к базису $\{e_j\}$ в L. $\blacksquare$

Из последнего предложения нужно осознать, что множество L^* всех линейных функций на n-мерном линейном пространстве L по отношению к введённым выше линейным операциям представляет собой n-мерное линейное пространство.

Определение. Пространство L^* — самое обычное линейное пространство (и вряд ли стоит искать сакральный смысл в этом определении). Оно тоже имеет сопряжённое пространство L^{**}, элементы которого — линейные функции на L^*.

Более того, последнее предложение позволяет нам утверждать, что если $\dim(L) = n$, то и $\dim(L^{**}) = n$.

Предложение. $\exists$ изоморфизм $L^{**} \cong L$, не зависящий от выбора базиса.