Linal moment

Что на данный момент затехано (все пожелания, благодарности, угрозы писать сюда):

Билет № 1. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.

Определение [ранг матрицы]. Пусть в матрице A $\exists$ линейно независимая (ЛНЗ) система из r строк, и нет линейно независимой системы из бóльшего числа строк. Тогда мы будем говорить, что строчный ранг A равен r.

Определение [базисная подматрица]. Подматрица B матрицы A ($B = B^{i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_r}_{j_1,\ j_2,\ \dots,\ j_r}$) называется базисной подматрицей, если её определитель не равен нулю $\det(B) = M^{i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_r}_{j_1,\ j_2,\ \dots,\ j_r} \neq 0$, а $\forall$ минор матрицы A порядка $r+1$ равен нулю.

Определение [базисный минор]. Матрицу $M^{i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_r}_{j_1,\ j_2,\ \dots,\ j_r}$ будем называть базисным минором.

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы A является наибольшим таким числом r, что в матрице A имеется r строк (r столбцов), образующих линейно независимую систему.
(Из этой теоремы, в частности, следует, что максимальное число линейно независимых строк матрицы равно максимальному числу её линейно независимых столбцов.)

Доказательство:

$\square$ Пусть ранг матрицы A равен r. Требуется доказать, что в матрице A имеется r столбцов (строк), образующих линейно независимую систему, и что всякие $r+1$ столбцов (строк) образуют линейно зависимую систему. Доказательство для строк и столбцов одно и то же, проведем его для столбцов.

Раз ранг матрицы равен r, то в ней имеется минор P с отличным от нуля детерминантом. Не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что этот минор P является угловым (ведь если если он не угловой, то угловым мы его сделаем :D):

$$\begin{pmatrix} a_{1,\ 1} & \dots & a_{1,\ r} & a_{1,\ r+1} & \dots & a_{1,\ n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\ 1} & \dots & a_{r,\ r} & a_{r,\ r+1} & \dots & a_{r,\ n} \\ a_{r+1,\ 1} & \dots & a_{r+1,\ r} & a_{r+1,\ r+1} & \dots & a_{r+1,\ n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,\ 1} & \dots & a_{m,\ r} & a_{m,\ r+1} & \dots & a_{m,\ n} \end{pmatrix},\ \det(P) = \begin{vmatrix} a_{1,\ 1} & \dots & a_{1,\ r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\ 1} & \dots & a_{r,\ r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $\det(P) \neq 0$, то векторы $w_1 = \{a_{11},\ \dots,\ a_{r1}\},\ \dots,\ w_r = \{a_{1r},\ \dots,\ a_{rr}\}$ линейно независимы, а тогда тем более линейно независимы векторы $v_1 = \{a_{11},\ \dots,\ a_{r1},\ \dots,\ a_{m1}\},\ \dots,$ $v_r = \{a_{1r},\ \dots,\ a_{rr},\ \dots,\ a_{mr}\}$.

Итак, в матрице A ранга r имеется линейно независимая система, состоящая из r столбцов. Докажем тогда, что всякие $r+1$ столбцов матрицы A (ранга r) линейно зависимы. Предполагаем снова, что отличен от нуля детерминант углового минора порядка r матрицы A.

Вспомним, что среди векторов, являющихся линейными комбинациями данных r векторов, нельзя найти более r линейно независимых; поэтому достаточно доказать, что каждый столбец $v_h = \{a_{1h}, a_{2h}, \ldots, a_{mh}\}$ матрицы A является линейной комбинацией первых r столбцов: Предполагаем, что $h > r$. Взяв любое $i \leqslant m$, построим детерминант

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{1,\,1} & \ldots & a_{1,\,r} & a_{1,\,h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\,1} & \ldots & a_{r,\,r} & a_{r,\,h} \\ a_{i,\,1} & \ldots & a_{i,\,r} & a_{i,\,h} \end{vmatrix}$$

При любом i этот детерминант равен 0. В самом деле, если $i \leqslant r$, то этот детерминант имеет две одинаковые строки — на i-м и $(r+1)$-м местах — поэтому равен нулю. Если же $i \geqslant r$, то D_i есть детерминант некоторого минора $r+1$ порядка матрицы A, и он равен нулю, так как ранг матрицы A по предположению есть r. Итак, $D_i = 0$ при $i \leqslant m$.

Разложим детерминант D_i по элементам последней строки:

$$A_1 = (-1)^{(r+1)+1} \begin{vmatrix} a_{1,\,2} & \ldots & a_{1,\,r} & a_{1,\,h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\,2} & \ldots & a_{r,\,r} & a_{r,\,h} \end{vmatrix}$$

и так далее ...

$$A_k = (-1)^{(r+1)+k} \begin{vmatrix} a_{1,\,1} & \ldots & a_{1,\,k-1} & a_{1,\,k+1} & \ldots & a_{1,\,r} & a_{1,\,h} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r,\,1} & \ldots & a_{r,\,k-1} & a_{r,\,k+1} & \ldots & a_{r,\,r} & a_{r,\,h} \end{vmatrix}$$

и, наконец,

$$A_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{1,\,1} & \ldots & a_{1,\,r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r,\,1} & \ldots & a_{r,\,r} \end{vmatrix} = \det(P) \neq 0.$$

Имеем $0 = D_i = A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \ldots + A_r a_{ir} + A_{r+1} a_{ih}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$. Эти соотношения выражают равенство $A_1 v_1 + A_2 v_2 + \ldots + A_r v_r + A_{r+1} v_h$, в котором заведомо коэффициент $A_{r+1} = \det(P)$ отличен от нуля и которое поэтому можно разрешить относительно $v_h : v_h = \lambda v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ при $\lambda_1 = -\frac{A_1}{A_{r+1}}, \ldots, \lambda_r = -\frac{A_r}{A_{r+1}}$.

Итак, мы представили произвольный столбец v_h матрицы в виде линейной комбинации первых r столбцов этой матрицы. Этим и закончили доказательство теоремы. ■

Теорема о базисном миноре. Если $M^{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r}_{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_r}$ — базисный минор матрицы A, то строки $\overrightarrow{a_{i1}},\ \ldots,\ \overrightarrow{a_{ir}}$ и столбцы $a^{\uparrow}_{j1},\ \ldots,\ a^{\uparrow}_{jr}$ являются базисными в матрице A.

Доказательство:

☐ Без ограничения общности будем считать, что матрица A имеет следующий вид (базисная матрица в левом верхнем углу):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & \ldots & a_{1j} & \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rj} & \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & \ldots & a_{rij} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Докажем, что $\overrightarrow{a_i} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \ldots + \lambda_r \overrightarrow{a_r}$.

Рассмотрим дереминант матрицы, состоящей из базисной матрицы и добавленными к ней i-той строки и j-того столбца. Рассмотрим следующий минор, и разложим его по j-тому столбцу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = a_{1j}(-1)^{1+r+1}M_1^j + \ldots + a_{rj}(-1)^{2r+1}M_r^j + a_{ij}(-1)^{1+r+1+r}M^{1,\ \ldots,\ r}_{1,\ \ldots,\ r} = 0$$

Значит, $a_{ij} = -\frac{1}{M}(\sum\limits_{k=1}^{r} a_{kj}A_k^j)$, где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, и $M = M^{1,\ \ldots,\ r}_{1,\ \ldots,\ r}$ — базисный минор. Причём, A_k^j от j не зависит, то есть $a_{i*} = -\frac{1}{M}(\sum\limits_{k=1}^{r} a_{k*}A_k^*)$.

А ведь это как раз и означает, что i-тая строка — линейная комбинация $\overrightarrow{a_1},\ \ldots,\overrightarrow{a_r}$. ■

Теорема Кронекера—Капелли: СЛУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow rg(A) = rg(A \mid b)$.

Доказательство [Необходимость $\Rightarrow$]:

$\square$ Пусть существует решение x, тогда $x_1a_1^\uparrow + x_2a_2^\uparrow + \ldots + x_na_n^\uparrow = b^\uparrow$. То есть столбец $b^\uparrow$ есть линейная комбинация $a_1, \ldots, a_n$, а значит, дописывание $b^\uparrow$ к матрице A не увеличит ее ранг.

Доказательство [Достаточность $\Leftarrow$]:

Имеем $rg(A) = rg(A \mid b)$. Значит у них один и тот же базисный минор. Значит $b^\uparrow$ — линейная комбинация столбцов базисного минора, и система $Ax = b$ разрешима. $\blacksquare$

Теорема Фредгольма: СЛУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow \forall Y$, где Y - решение системы $A^TY = 0$, выполняется $b^TY = 0$.

Доказательство [Необходимость $\Rightarrow$]:

$\square$ Пусть $\exists x_0 : Ax_0^\uparrow = b^\uparrow$ и Y — некоторое решение системы $A^TY = 0 \Leftrightarrow Y^TA = 0$. Домножим $[Ax_0 = b]$ слева на $Y^T : (Y^TA)x_0 = Y^Tb = 0 = b^TY$.

Доказательство [Достаточность $\Leftarrow$]:

Предположим теперь, что система $Ax = b$ несовместна. Это равносильно тому, что в упрощенном виде ее расширенной матрицы $(A \mid b)$ есть строка $(0 \ \ldots \ 0 \mid 1)$. Так как упрощенный вид получается из исходной матрицы элементарными преобразованиями строк, строка $(0 \ \ldots \ 0 \mid 1)$ является линейной комбинацией строк матрицы $(A \mid b)$. То есть существует такой столбец y_0, что $y_0^T = (0 \ldots 0 \mid 1)$. Последнее равенство равносильно системе $y_0^TA = 0$, $y_0^Tb = 1$. То есть, предположив несовместность системы $Ax = b$, мы нашли такое решение y_0 сопряженной однородной системы, что $y_0^Tb \neq 0$. $\blacksquare$

Формула Грассмана: пусть V_1, V_2 — подпространства в L. $\dim(L) < \infty, \ \dim(V_1) < \infty, \ \dim(V_2) < \infty$. Тогда выполняется $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$.

Доказательство:

$\square$ Пусть $\dim(V_1 \cap V_2) = s \geqslant 0, \ \dim(V_1) = k_1 \geqslant s, \ \dim(V_2) = k_2 \geqslant s$. Пусть $e = \{e_1, \ \ldots, e_n\}$ — базис в $V_1 \cap V_2$.

Дополним базис e до базиса V_1 векторами $f_1, \ \ldots, f_{k_1-s}$ и до базиса V_2 векторами $g_1, \ \ldots, g_{k_2-s}$. Тогда $\{e_1, \ \ldots, e_s, f_1, \ \ldots, f_{k_1-s}\}$ - базис в V_1, и $\{e_1, \ \ldots, e_s, g_1, \ \ldots, g_{k_2-s}\}$ — базис в V_2.
Базис в $(V_1 + V_2) : \ \{e_1, \ \ldots, e_s, f_1, \ \ldots, f_{k_1-s}, g_1, \ \ldots, g_{k_2-s}\}$.

А значит, что $\dim(V_1 + V_2) = s + k_1 - s + k_2 - s = k_1 + k_2 - s$. $\blacksquare$

Сумма размерностей образа и ядра линейного пространства.

Утверждение: $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(L)$.

- Отображение $\varphi: \ L_1 \to L_2$ — закон, по которому каждому вектору из L_1 сопоставляется единственный вектор из L_2.
- Образ L_1 под действием φ или множество значений $\varphi(L_1)$: $\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \in L_2 : \exists x \in L_1,\ \varphi(x) = y\}$.
- Ядро линейного отображения φ — множество всех векторов из L_1, переходящих в 0_{L_2}: $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in L_1 : \varphi(x) = 0_{L_2}\}$.

Доказательство:

☐ Пусть $\varphi : L \to L$, причём $\dim(L) = n$. Выберем в линейном пространстве L произвольный базис $\{e_1,\ \dots,\ e_n\}$. Поскольку по определению $\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \mid y = \varphi(x),\ x \in L\}$, то можно записать, что $\mathrm{Im}(\varphi) = L\{\varphi(e_1),\ \dots,\ \varphi(e_n)\}$ — линейная оболочка, порождаемая совокупностью образов базисных векторов $\varphi(e_1),\ \dots,\ \varphi(e_n)$, причем $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = r$, где r – максимальное число ЛНЗ векторов в системе.

Рассмотрим ядро $\varphi : \mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \mid \varphi(x) = 0,\ x \in L\}$. В выбранном базисе равенству $Ax = 0$ соответствует однородная СЛУ: $A\xi = 0$, которая, как известно, имеет $n - r$ ЛНЗ решений, образующих ФСР. Поскольку неизвестными данной системы являются координаты векторов, составляющих $\mathrm{Ker}(\varphi)$, то отсюда заключаем, что $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n - r$. В результате получаем, что $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = r + (n - r) = n = \dim(L)$. ■

Определитель и след матрицы через корни характеристического многочлена.

Утверждение: пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни характеристического многочлена $P(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E)$. Тогда $\mathrm{tr}(A_\varphi) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ и $\det(A_\varphi) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Доказательство:

☐ Понятно, что $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ — след матрицы A_φ.

Имеем $P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) = (-\lambda)^n + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \cdot (-\lambda)^{n-1} + \ldots + \prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda_i)$. А также $\det(A_\varphi - \lambda E) = (a_{11} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) + \sigma$, где под σ подразумевается сумма всех членов со степенью меньшей либо равной $n - 2$.

Перепишем в другом виде последнее равенство $(-\lambda)^n + (a_{11} + \ldots + a_{nn}) \cdot (-\lambda)^{n-1} + \sigma + \det(A_\varphi)$.

Применяем всё могущество своей внимательности. Получаем:

$$\begin{cases} \mathrm{tr}(A_\varphi) = a_{11} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \\ \det(A_\varphi) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \end{cases}$$

■

Теорема Гамильтона—Кэли: если $f(t)$ — характеристический многочлен матрицы A, то $f(A)$ — нулевая матрица. Или иначе - всякая матрица является корнем своего характеристического многочлена.

Доказательство:

Обращу внимание на НЕправильное доказательство! Сразу же хочется сказать, что $f(A) = \det(A - A \cdot E) = \det(A - A) = 0$. Круто, доказали теорему в одну строчку. (Хотя мы доказали то, что к теореме вообще не относится — детерминант нулевой матрицы есть число 0). Но замечу, что в формулировке теоремы $f(A)$ — нулевая матрица (именно матрица). В этот момент становится грустно, потому что вас отправляют на пересдачу. А еще грустнее от следующего доказательства.

$\square$ Пусть λ — не характеристичкое число $\to$ матрица $A - \lambda \cdot E$ невырожденная $\to \exists$ матрица

$$(A - \lambda \cdot E)^{-1} = \frac{B(\lambda)}{\det(A - \lambda \cdot E)}$$

Элементы матрицы B — элементы вида $b_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ji}$, где d_{ji} — дополнительный минор (убираем j-тую строку и i-тый столбец, потом считаем детерминант такой матрицы).

$$A_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

Допустим, мы выберем диагональный элемент $[a_{22} - \lambda]$. Тогда дополнительный минор d_{22} — многочлен степени $n - 1$, где n — количество λ (так как убрали всего одну λ).

Если же выбрать недиагональный элемент, то как ни крути эту матрицу, будем убирать по две λ с диагонали. И дополнительный минор, например, d_{12} будет степени $n-2$. Тогда матрица $B(\lambda)$ представима в виде $B(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \ldots + \lambda^{n-1} B_{n-1}$.

Пример, когда матрицу в таком виде имеет смысл представить:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda^2 + 2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2$$

Вернемся обратно к доказательству теоремы.

Для определённости пусть $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$.
Тогда имеем $(a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n)E = (B_0 + \ldots + \lambda^{n-1}B_{n-1})(A - \lambda E)$.
Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ с правой и левой частей. Потом домно-

жим каждое равенство на A^i, где i - степень, соответствующая степени, рассматриваемого λ^i:

$$\begin{array}{lll}
\lambda^0\colon & a_0E = B_0A & | \cdot A^0 \\
\lambda^1\colon & a_1E = -B_0 + B_1A & | \cdot A^1 \\
 & \vdots & \\
\lambda^k\colon & a_kE = -B_{k-1} + B_kA & | \cdot A^k \\
 & \vdots & \\
\lambda^n\colon & a_nE = -B_{n-1} & | \cdot A^n
\end{array}$$

Сложим все левые и правые части равенств:
$a_0E+a_1A+\ldots+a_kA^k+\ldots+a_nA^n = B_0A-B_0A+B_1A^2-\ldots-B_{k-1}A^k+B_kA^{k+1}-\ldots-B_{n-1}A^n$. Как можно заметить — всё сократится. Получили нулевую матрицу. То есть то, что мы и хотели получить. ■

Добавлю, что отсюда мы сразу получаем следующее следствие:
Если $p(\lambda)$ — характеристический многочлен преобразования φ, то $p(\varphi) = \vec{0}$.

Теорема: любое линейное преобразование конечномерного действительного линейного пространства L обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством U.

Доказательство:

□ По поводу одномерного подпространства, тут всё просто: если $\exists\lambda \in \mathbb{R}: \ \varphi(x) = \lambda x, \ x \neq 0$. Тогда $U = \langle x \rangle$.

Дальше неприятнее. Если все характеристические корни мнимые, то пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Тогда $\overline{\lambda} = \lambda - i\beta$ тоже является характеристическим корнем, так как $\det(A_\varphi - \lambda E)$ - многочлен с действительными коэффициентам.

Рассмотрим φ как линейное преобразование $\mathbb{C}^n$: $\varphi(z) = A_\varphi Z, \ \forall Z = (z_1, \ \ldots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n \ \Rightarrow$ $\exists Z' = X + iY \neq 0, (X, \, Y \in \mathbb{R}^n) \ \Rightarrow \ A_\varphi Z' = \lambda Z' \ \Leftrightarrow \ A_\varphi(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY) =$
$= (\alpha x - \beta Y) + i(\beta x + \alpha Y) \ \Leftrightarrow \ A_\varphi X = \alpha X - \beta Y$ и $A_\varphi Y = \beta X + \alpha Y \ \Rightarrow \ U = \langle X, \, Y \rangle$ — двумерное инвариантное подпространство. ■

Неравенство Коши—Буняковского и неравенство треугольника:

1. $\forall x,\, y \in \mathbb{E} \;\mapsto\; |(x,\, y)| \leqslant |x||y|$. Причём, $|(x,\, y)| = |x||y|$, если $x,\, y$ линейно зависимы.
2. $\forall x,\, y \in \mathbb{E} \;\mapsto\; |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Доказательство:

$\square$ 1. Введём функцию $f(t) = (tx+y,\, tx+y) = t^2(x,\, x) + 2t(x,\, y) + (y,\, y) \geqslant 0$.
Тогда относительно t имеем: $D \leqslant 0 \;\Rightarrow\; \frac{D}{4} = (x,\, y)^2 - (x,\, x)(y,\, y) \leqslant 0$, таким образом $|(x,\, y)| \leqslant |x||y|$.

2. $(x+y,\, x+y) = |x|^2 + 2(x,\, y) + |y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2$, тогда $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. $\blacksquare$

Линейные функции. Биортогональный базис. Сопряжённые пространства.

Определение. Если на линейном пространстве L задано правило, по которому $\forall x \in L$ ставится в соответствие число ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то говорят, что на L задана функция f. На бесконечномерных пространствах их называют функционалами.

Определение. f на L — линейная, если $\forall x,\, y \in L \;\&\; \forall \alpha :$
1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Примеры линейных (или не совсем) функций:
1. Аддитивность массы (масса сложного объекта равна сумме масс составляющих его частей). То есть $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.
2. Функция, которая сопоставляет всем векторам ненулевое число — не линейная. Так как не выполняется $f(0) = 0$.
3. Функция, сопоставляющая каждому вектору его i-ю координату — линейная.
4. Функция, сопоставляющая каждому вектору число 0 — тоже линейная.

Определение. Линейное пространство L^* всех линейных функций на линейном пространстве L называется сопряжённым для L.

Предложение. $\dim(L^*) = \dim(L)$.

Доказательство.

$\square$ $\forall x \in L, x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \;:$

Рассмотрим n функций, которые дают значения i-той координаты аргумента:
$f_1(x) = x_1,\ \ldots,\ f_i(x) = x_i,\ \ldots,\ f_n(x) = x_n$.

То есть $f_i(e_j) = \delta_{ij} = \left[\begin{array}{l} 0,\ i \neq j \\ 1,\ i = j \end{array}\right.$, где $(i,\, j = 1,\ \ldots,\ n.)$

Тогда докажем, что $f_1,\ \ldots,\ f_n$ — базис в L^*. Пусть $f = f_1\lambda_1 + \ldots + f_n\lambda_n = 0$. Тогда:
$f(e_1) = f_1(e_1)\lambda_1 + f_2(e_2)\lambda_2 + \ldots + f_n(e_n)\lambda_n = 1 \cdot \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + \ldots + 0 \cdot \lambda_n = \lambda_1 = 0$.
Аналогично $f(e_2) = \lambda_2 = 0$. И так далее... $\Rightarrow$ $f_1,\ \ldots,\ f_n$ — ЛНЗ.

Рассмотрим $\forall f : L \to K$ — линейную функцию:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i f_i)(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right)(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

Можем переобозначить $f_i = e^i$. Тогда $\{e^i\}$ — базис в L^*. Причем базис $\{e^i\}$ — биортогональный к базису $\{e_j\}$ в L. $\blacksquare$

Из последнего предложения нужно осознать, что множество L^* всех линейных функций на n-мерном линейном пространстве L по отношению к введённым выше линейным операциям представляет собой n-мерное линейное пространство.

Определение. Пространство L^* — самое обычное линейное пространство (и вряд ли стоит искать сакральный смысл в этом определении). Оно тоже имеет сопряжённое пространство L^{**}, элементы которого — линейные функции на L^*.

Более того, последнее предложение позволяет нам утверждать, что если $\dim(L) = n$, то и $\dim(L^{**}) = n$.

Предложение. $\exists$ изоморфизм $L^{**} \cong L$, не зависящий от выбора базиса.