Вектор Лапласа – Рунге – Ленца

Шептяков Артём, Лазарь Влад

Январь, 2023

Введение

Цель работы: изучение особенностей и применения вектора Лапласа – Рунге – Ленца в задаче Кеплера.

Определение

Определение. Пусть тело массы движется в поле центральной силы с центром в точке O. Тогда вектор $\vec{A} = [\vec{p} \times \vec{L}] - mk\vec{r}/r$ называется вектором Лапласа – Рунге – Ленца, где $\vec{p}$ – импульс тела, $\vec{L}$ – момент импульса относительно O, $\vec{r}$ – радиус-вектор с началом в точке O, а $k = const$ – показетель напряженности поля ($f(r) \sim k$).

P.S. В случае рассмотрения движения двух тел массы m_1 и m_2 стоит перейти к приведённой массе $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$.

Утверждение 1.

Утверждение. Вектор $\vec{A} = \vec{const}$ в поле центральной силы $\vec{f} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, если $f(r) \sim \frac{1}{r^2}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(r)$. Для доказательства этого утверждения продифференцируем выражение для $\vec{A}$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}) = \frac{d}{dt}\left[\vec{p} \times \vec{L}\right] - mk\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Поскольку сила $\vec{f}$ центральная, то момент импульса относительно центра $\vec{L} = \left[\vec{p} \times \vec{L}\right]$ сохраняется ($\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{f}\right] = \left[\vec{p} \times (f(r)\frac{\vec{r}}{r})\right] = \vec{0}$).

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}) = \left[\frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{L}\right] - mk\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Запишем второй Закон Ньютона $\dot{\vec{p}} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$, получим:

$$\left[\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\right] = \left[f(r)\frac{\vec{r}}{r} \times \left[\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right]\right] = \frac{mf(r)}{r}\left[\vec{r} \times \left[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right]\right]$$

Раскроем двойное векторное произведение:

$$\left[\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\right] = \frac{mf(r)}{r}\left(\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(r^2)\right) = \frac{mf(r)}{r}\left(\vec{r}(r \cdot \dot{r}) - \dot{\vec{r}}(r^2)\right)$$

$$\left[\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\right] = mf(r)r^2\left(\frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\vec{r}}{r}) = \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = -\left(\frac{\vec{r}\dot{r}}{r^2} - \frac{\dot{\vec{r}}}{r}\right)$$

Итого получаем для $\left[\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\right]$:

$$\left[\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\right] = -mf(r)r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Положим $f(r) = -\frac{k}{r^2}$. Выражение упростится:

$$\left[\dot{\vec{p}} \times \vec{L}\right] = mk\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Наконец получаем исходное утверждение:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} = co\vec{n}st$$

Мы нашли ещё один инвариант в задаче Кеплера (помимо полной энергии E и момента импульса L). Отметим, что справедливо вышеописанное только для центральных сил, подчиняющихся закону обратных квадратов, и специфично задаче Кеплера.

Утверждение 2.

Утверждение. Вектор $\vec{A}$ лежит в плоскости движения.

Доказательство. По определению $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$, а значит $\vec{L}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат скорости тела. Распишем скалярное произведение $\left(\vec{A} \cdot \vec{L}\right)$:

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{L}\right) = \left[\vec{p} \times \vec{L}\right] \cdot \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{L}$$

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{L}\right) = \left[\vec{p} \times \vec{L}\right] \cdot \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r} \cdot [\vec{r} \times \vec{p}]$$

Из свойств векторного произведения очевидно, что $[\vec{r} \times \vec{p}] \perp \vec{L} \Rightarrow [\vec{r} \times \vec{p}] \cdot \vec{L} = 0$. А значит $\left(\vec{A} \cdot \vec{L}\right) = \vec{0}$.

Имеет смысл рассмотреть частный случай движения по окружности. В силу доказанных ранее утверждений получим $\vec{A} = \vec{0}$. Действительно:

$$\frac{k}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow k = mv^2 r$$

Тогда имеем:

$$\left[\vec{p} \times \vec{L}\right] = [m\vec{v} \times m\,[\vec{r} \times \vec{v}]] = m^2(\vec{r}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{r})) = m^2 v^2 \vec{r}$$

А значит

$$\vec{A} = \left[\vec{p} \times \vec{L}\right] - mk\frac{\vec{r}}{r} = m^2 v^2 r \cdot \frac{\vec{r}}{r} - mk\frac{\vec{r}}{r} = (m^2 v^2 r - mk) \cdot \frac{\vec{r}}{r} = (mk - mk)\frac{\vec{r}}{r} = \vec{0}$$

Замечание. Утверждение 2 физически очевидно в силу сохранения $\vec{A}$. Более того, он направлен по главной оси орбиты в сторону перицентра. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассчитать направление $\vec{A}$ в ближней к центру точке.

Рис. 1: *Вектор $\vec{A}$ в различных точках эллиптической орбиты*

Следует отдельно рассмотреть случай движения по окружности. В силу симметрии и ранее доказанных утверждений вектор $\vec{A} = \vec{0}$. Действительно:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{k}{r^2}$$

$$\vec{A} = \left[\vec{p} \times \vec{L}\right] - mk\frac{\vec{r}}{r} = [m^2v^2r]\frac{\vec{r}}{r} - mk\frac{\vec{r}}{r} = [m^2v^2r - mk]\frac{\vec{r}}{r} = [mk - mk]\frac{\vec{r}}{r} = \vec{0}$$

Выведем некоторые соотношения из доказанных ранее утверждений для вектора Лапласа–Рунге–Ленца.

Первый закон Кеплера. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Более точно – траектория тела, движущегося в поле центральной силы $f(r) \sim \frac{1}{r^2}$ является коническим сечением. При финитном движении – эллипс, при инфинитном – парабола или гипербола.

Доказательство. Возьмём скалярное проивзедение $(\vec{A} \cdot \vec{r})$:

$$(\vec{A} \cdot \vec{r}) = \left(\left[\vec{p} \times \vec{L}\right] - mk\frac{\vec{r}}{r}\right) \cdot \vec{r} = A \cdot r \cdot cos(\alpha)$$

$$A \cdot r \cdot cos(\alpha) = \left[\vec{p} \times \vec{L}\right] \cdot \vec{r} - mkr$$

В смешанном произведении переставим множители: $\left[\vec{p} \times \vec{L}\right] \cdot \vec{r} = [\vec{r} \times \vec{p}] \cdot \vec{L} = L^2$. Тогда

$$A \cdot r \cdot cos(\alpha) = L^2 - mkr$$

$$r = \frac{L^2}{mk + A \cdot r \cdot cos(\alpha)}$$

То есть, мы получили уравнение конического сечения в полярных координатах ($\rho = \frac{p}{1+\varepsilon \cdot cos(\phi)}$) с эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{A}{mk}$ и фокальным параметром $p = \frac{L^2}{mk}$.

Утверждение 3.

Утверждение. Годограф скоростей в задаче Кеплера – окружность.

Доказательство. Преобразуем выражение для $\vec{A}$:

$$mk\frac{\vec{r}}{r} = \left[\vec{p} \times \vec{L}\right] - \vec{A}$$

Возведём скалярно в квадрат и получим:

$$m^2k^2 = p^2L^2 - 2\vec{A} \cdot \left[\vec{p} \times \vec{L}\right] + A^2$$

P.S. Отметим следующее очевидное соотношение, из которого вытекает равенство $\left[\vec{p} \times \vec{L}\right]^2 = p^2L^2$:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]^2 = a^2b^2$$

Направим ось X по главной оси конического сечения, а ось Z по вектору $\vec{L}$. Тогда $\vec{p} = (p_x; p_y; 0)$, $\vec{L} = (0; 0; L)$, $\vec{A} = (-A, 0, 0)$. Имеем:

$$m^2k^2 = (p_x^2 + p_y^2)L^2 - 2Ap_yL + A^2$$

$$(\frac{mk}{L})^2 = p_x^2 + (p_y + \frac{A}{L})^2$$

Таким образом, годограф скорости – окружность с центром в точке $(0; \frac{A}{L})$ и радиусом $R = \frac{mk}{L}$.

Рис. 2: *Годограф скорости v*

Заметим, что отношение расстояния от центра окружности до начала отсчёта $l = \frac{A}{L}$ к её радиусу $R = \frac{mk}{L}$ равно эксцентриситету.

$$\frac{l}{R} = \frac{A/L}{mk/L} = \frac{A}{mk} = \varepsilon$$

Итак, взаимное расположение окружности годографа и оси абсцисс определяет характер движения. Если $\varepsilon = \frac{l}{r} < 1$, то ось абсцисс пересекает годограф в двух точках, движение происходит по эллипсу и является финитным (см. рис. 2). Если же $\varepsilon = 1$, то окружность касается оси X в точке $(0, 0)$, чему соответствует скорость $v = 0$. В этом случае скорость $v = 0$ достигается асимптотически на бесконечности, что и является условием движения по параболе. Если же $\varepsilon > 1$, то траектория – гипербола, а окружность лежит выше оси абсцисс, причем достигается лишь некоторая дуга.

Утверждение 4.

Утверждение. Величины вектора Лапласа – Рунге – Ленца A, полной энергии E и момента импульса L связаны слудующим отношением:

$$A^2 = m^2k^2 + 2mEL^2$$

Доказательство. Запишем соотношения в точке перицентра:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{k}{r}$$

$$L = mvr$$

$$A = m^2v^2r - mk$$

Подставим их в доказываемое тождество:

$$m^4v^4r^2 + m^2k^2 - 2m^3v^2kr = m^2k^2 + 2mEL^2 = m^2k^2 + 2m\left(\frac{mv^2}{2} - \frac{k}{r}\right)m^2v^2r^2$$

$$m^4v^4r^2 + m^2k^2 - 2m^3v^2kr = m^2k^2 + m^4v^4r^2 - 2m^3v^2kr$$

Заключение

Было показано, как вектор Лапласа – Рунге – Ленца используется для описания формы и ориентации орбиты, по которой одно небесное тело обращается вокруг другого. В работе доказано, что вектор Лапласа – Рунге – Ленца представляет собой интеграл движения, то есть его направление и величина являются постоянными независимо от того, в какой точке орбиты они вычисляются. Также у вектора имеется обобщение на СТО, и он широко применяется для решения задач в квантовой механике атома водорода.

Литература

1. H. Goldstein. Prehistory of the"Runge-Lenz"vector. American Journal of Physics, 1975.

2. H. Goldstein. More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector. American Journal of Physics, 1976.

3. H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, and S.R. Addison. Classical mechanics. American Journal of Physics, 2002.