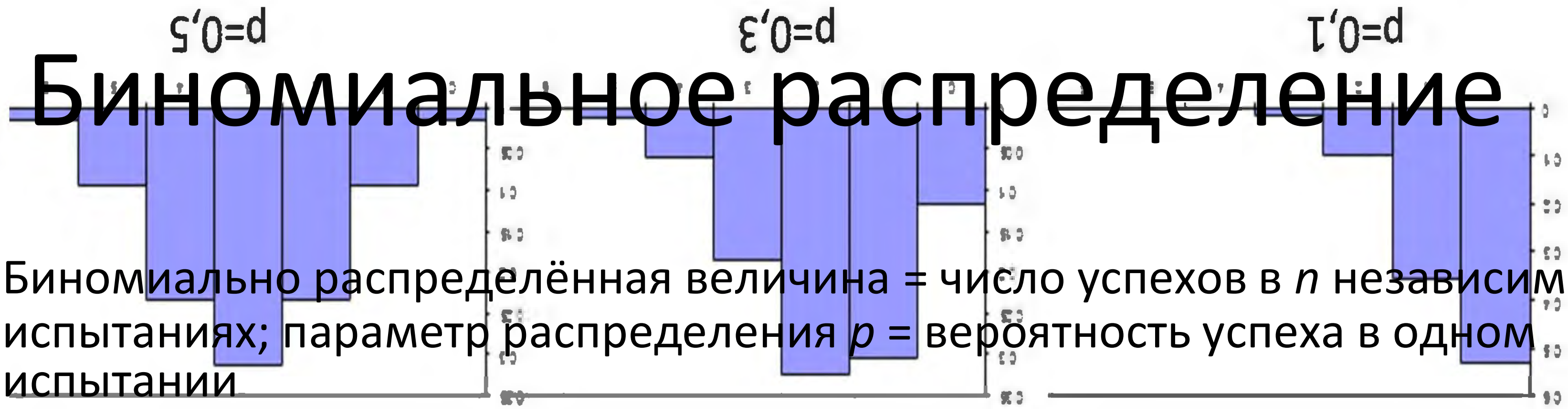
Прикладная статистика

Слайды к лекции 2

22 января 2025

Сергей Александрович Спирин
sspirin@hse.ru

Биномиальное распределение



Биномиально распределённая величина = число успехов в *n* независимых испытаниях; параметр распределения *p* = вероятность успеха в одном испытании

$$\Pr(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Вероятности 0, 1, …, 6 успехов при шести независимых испытаниях

Биномиальное распределение

$E(K) = np$

$\mathrm{Var}(K) = np(1-p)$

$$\Pr(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \binom{n}{k} \quad \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Распределение Пуассона

Случайная величина, распределённая по Пуассону = число (достаточно редких) событий за (достаточно большой) промежуток времени или в (достаточно большой) области пространства.
Имеет один параметр: λ — среднее число событий.

Вероятность наблюдать ровно *k* событий:

$$f(k;\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Если ξ — случайная величина, распределённая по Пуассону с параметром λ, то E(ξ) = λ и Var(ξ) = λ
(для распределения Пуассона мат. ожидание равно дисперсии)

Пуассоновское приближение к биномиальному распределению

ξ = Binom(n, p)

n = число испытаний

p = вероятность одного успеха

$n \to \infty$

$p \to 0$

$np = \lambda = const$

ξ = Poisson(λ)

$\lambda = np$

Задача

Носителями редкого варианта некоторого гена является 0,001 популяции. В выборке из 3000 человек у $k = 7$ обнаружился редкий вариант.
Насколько вероятно, что такое превышение наблюдаемого значения над ожидаемым вызвано случайными причинами?

Решение. Для такого большого размера выборки и такого маленького p количество носителей в случайной выборке распределено по Пуассону со средним $pn = 3$.
Тем самым нужно посчитать вероятность того, что распределённая по Пуассону со средним 3 случайная величина примет значение ≥ 7. Эта вероятность равна:

$$\mathrm{P}(k \geq 7) = 1 - \mathrm{P}(k < 7) =$$
$$= 1 - \left(\mathrm{P}(k=0) + \mathrm{P}(k=1) + \mathrm{P}(k=2) + \mathrm{P}(k=3) + \mathrm{P}(k=4) + \mathrm{P}(k=5) + \mathrm{P}(k=6)\right) =$$
$$= 1 - e^{-3}\,(1 + 3 + 3^2/2 + 3^3/6 + 3^4/24 + 3^5/120 + 3^6/720) =$$
$$= 1 - 0{,}0498 \quad (1 + 3 + 4{,}5 + 4{,}5 + 3{,}375 + 2{,}025 + 1{,}0125) = 1 - 0{,}0498 \quad 19{,}4125$$
$$\approx \mathbf{0{,}033}$$

Распределения случайных величин

- Дискретные
- Непрерывные

Непрерывно распределённая случайная величина может принимать любое числовое значение. При этом каждое конкретное значение принимается в вероятностью 0.

Непрерывные распределения задаются вероятностями попадания случайной величины в то или иное числовое множество (например, интервал).

Строгое формальное определение непрерывной случайной величины довольно сложно.

На практике можно считать, что непрерывная с.в. — это функция на очень большом пространстве элементарных событий (настолько большом, что вероятность каждого элементарного события практически 0)

Функция распределения и плотность распределения

Для случайной величины ξ её функция распределения определяется так:

$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi \le x)$

Для дискретной случайной величины $F_\xi(x)$ — ступенчатая функция (кусочно-постоянная).

Для непрерывной случайной величины $F_\xi(x)$ — гладкая функция (т.е., у неё есть производная). Эта производная называется **плотностью вероятности**.

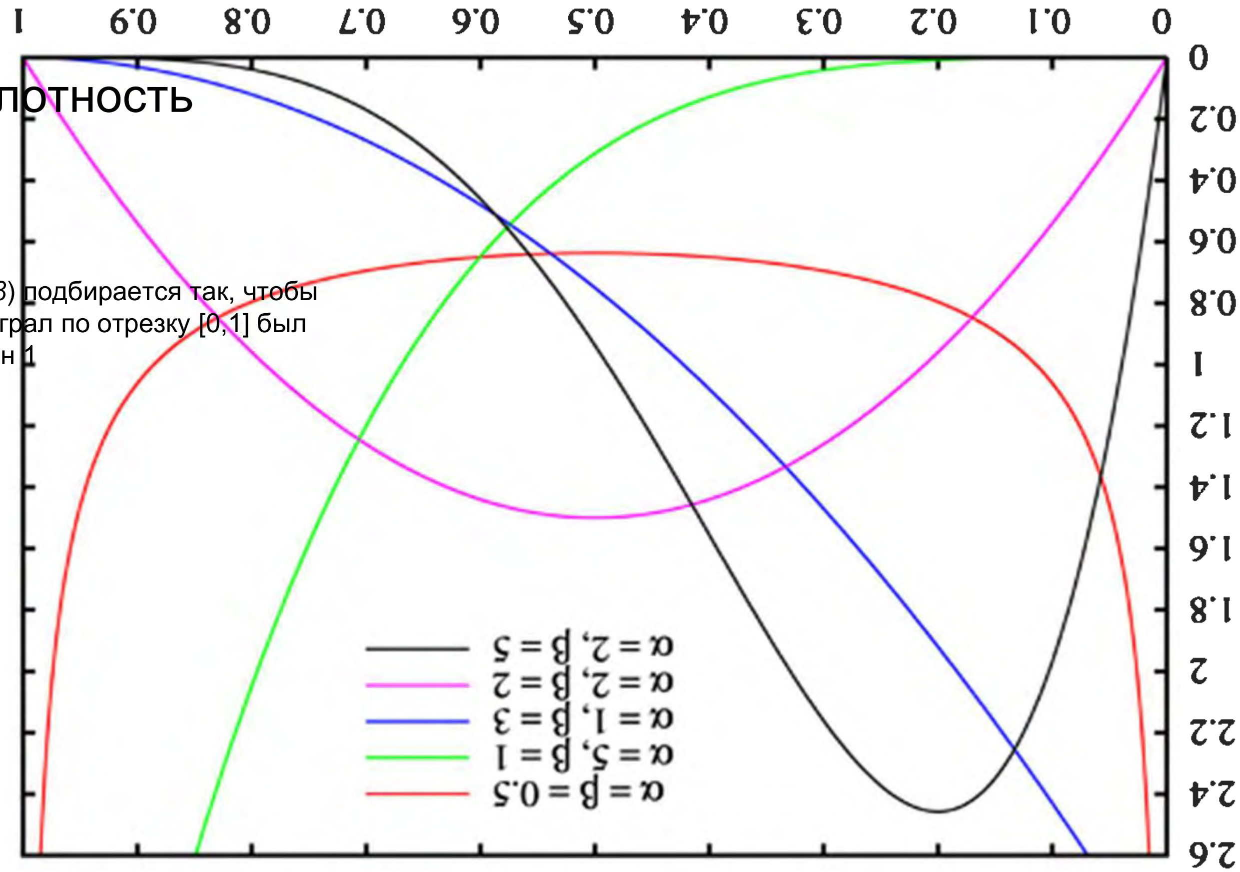
Плотность вероятности $p(x)$ обладает свойством: её интеграл по любому отрезку равен вероятности попадания с.в. в этот отрезок.

Плотность вероятности в точке x можно определить как вероятность попасть в маленький интервал, покрывающий x, делённую на длину этого интервала.

Бета-распределение

Плотность

B(*α*,*β*) подбирается так, чтобы интеграл по отрезку [0,1] был равен 1

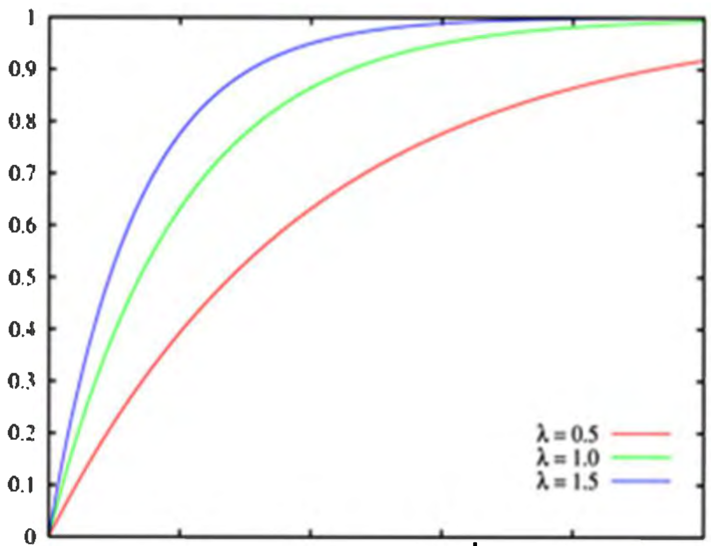


$$f_X(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

Beta distribution (плотность вероятности)

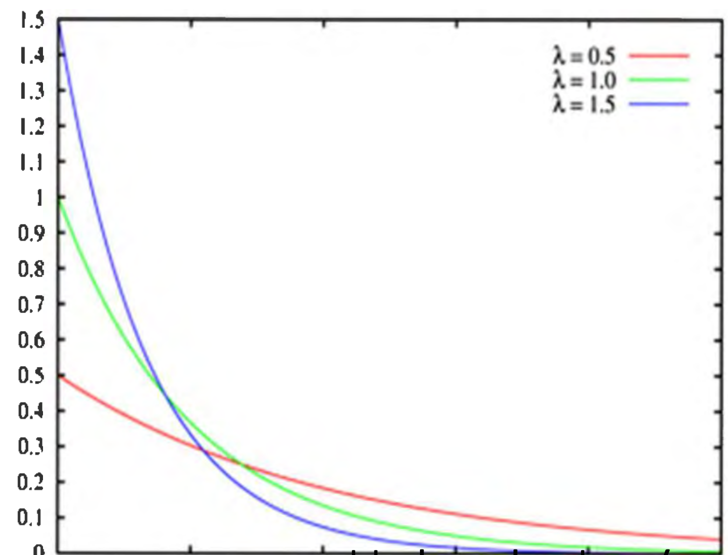
Равномерное распределение на отрезке [0, 1] – частный случай бета-распределения (при α=β=1)

Экспоненциальное распределение



Плотность вероятности

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \ x \geq 0. \\ 0 & , \ x < 0. \end{cases}$$



Функция распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение возникает, когда случайная величина представляет собой время ожидания события, которое может равновероятно произойти в любой момент.

Например, экспоненциально распределено:

- время жизни радиоактивного атома (от возникновения до распада)
- время ожидания поклёвки при рыбной ловле (а также время между поклёвками)
- время от выхода на улицу тёплым летним вечером до первого укуса комара (а также время между укусами)
- и т.п.

Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное распределение возникает, когда случайная величина представляет собой время ожидания события, которое может равновероятно произойти в любой момент.
Аналогично, если, например, на тропинке кое-где (нечасто) встречается подорожник, то расстояние между соседними растениями тоже распределено примерно экспоненциально.

Дискретный аналог экспоненциального распределения — **геометрическое распределение**: число испытаний до первого успеха, $P(n) = p(1-p)^n$, где p — вероятность успеха. Если p очень мало, а испытания происходят часто, то геометрическое распределение числа испытаний до первого успеха можно на практике заменить экспоненциальным распределением времени до первого успеха.

Математическое ожидание случайной величины, экспоненциально распределённой с параметром λ, равно $1/\lambda$, а дисперсия — $1/(\lambda^2)$.

Если время между событиями распределено экспоненциально, то число событий за заданный промежуток времени (например, число распадов атомов в секунду) будет распределено по Пуассону.

Задача

Предположим, что в геноме все буквы A, C, G, T равновероятны и не зависят от соседей. Какова вероятность того, что отрезок от заданного места генома до ближайшего сайта рестрикции CATG окажется длиннее 500 п.н.?

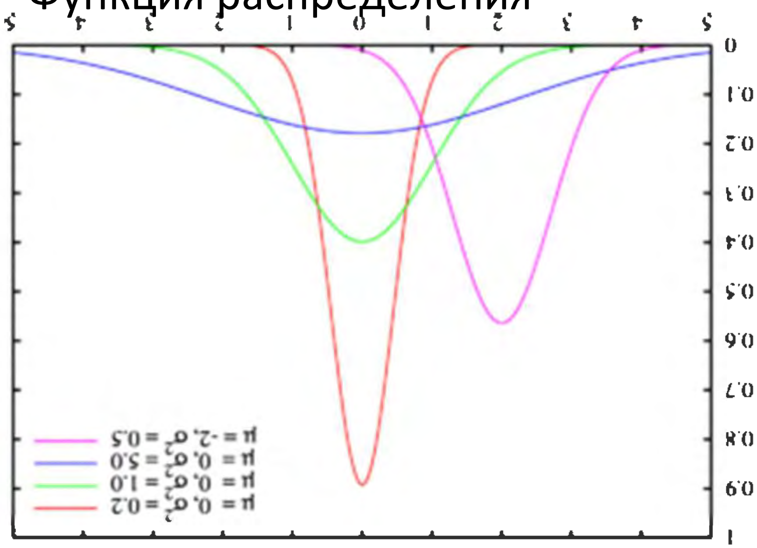
Решение. Пусть вероятности всех букв одинаковы (равны 1/4) и не зависят от соседних букв. Тогда вероятность увидеть в заданном месте заданное слово длины 4 («вероятность успеха») равна $(1/4)^4 = 1/(2^8) = 1/256$. Поэтому среднее расстояние от любого места до ближайшего сайта — 256 п.н. Сами эти расстояния распределены экспоненциально с $\lambda = 1/256$. Поэтому искомая вероятность:

$$P(\xi > 500) = 1 - P(\xi \leq 500) = 1 - (1 - e^{-500/256}) = e^{-500/256} \approx e^{-1,95} \approx 0,142$$

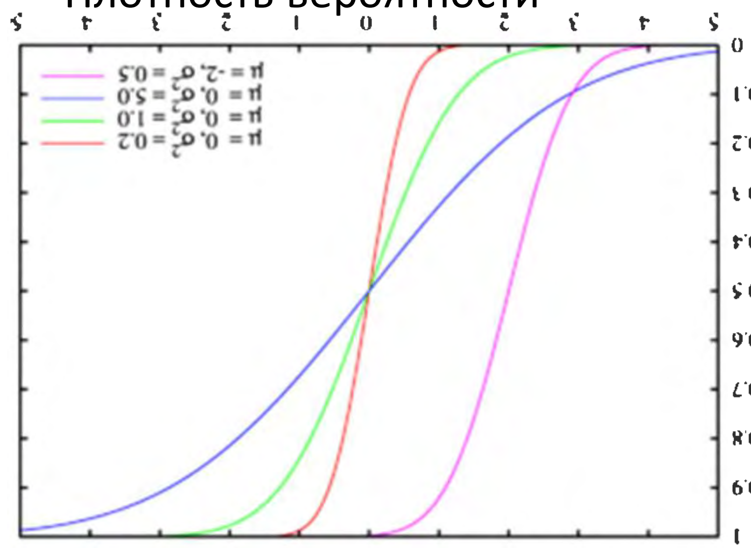
Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Функция распределения



Плотность вероятности



Формулы нет :(

Единственно возможная формула — интеграл от плотности.

Смысл параметров: μ — мат. ожидание, σ^2 — дисперсия.
Величину σ часто называют стандартным отклонением

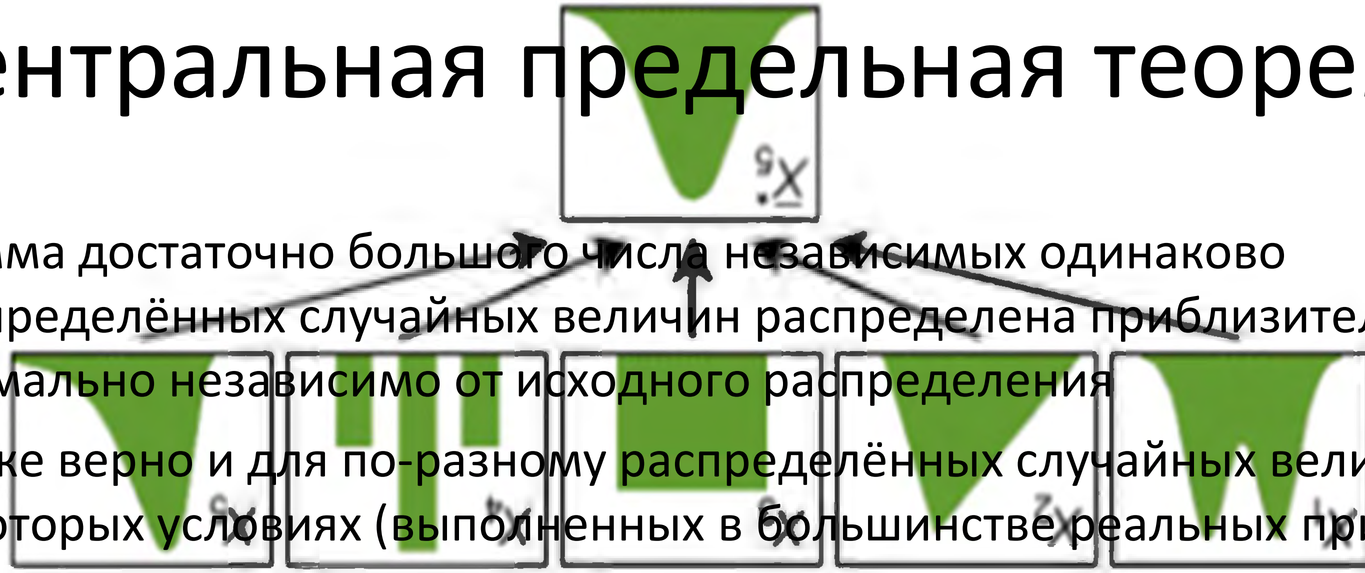
Нормальное распределение

Нормальное распределение возникает везде, где величина представляет собой сумму большого количества элементов, вносящих приблизительно одинаковый вклад (без сильного доминирования небольшого числа из них)

Например:

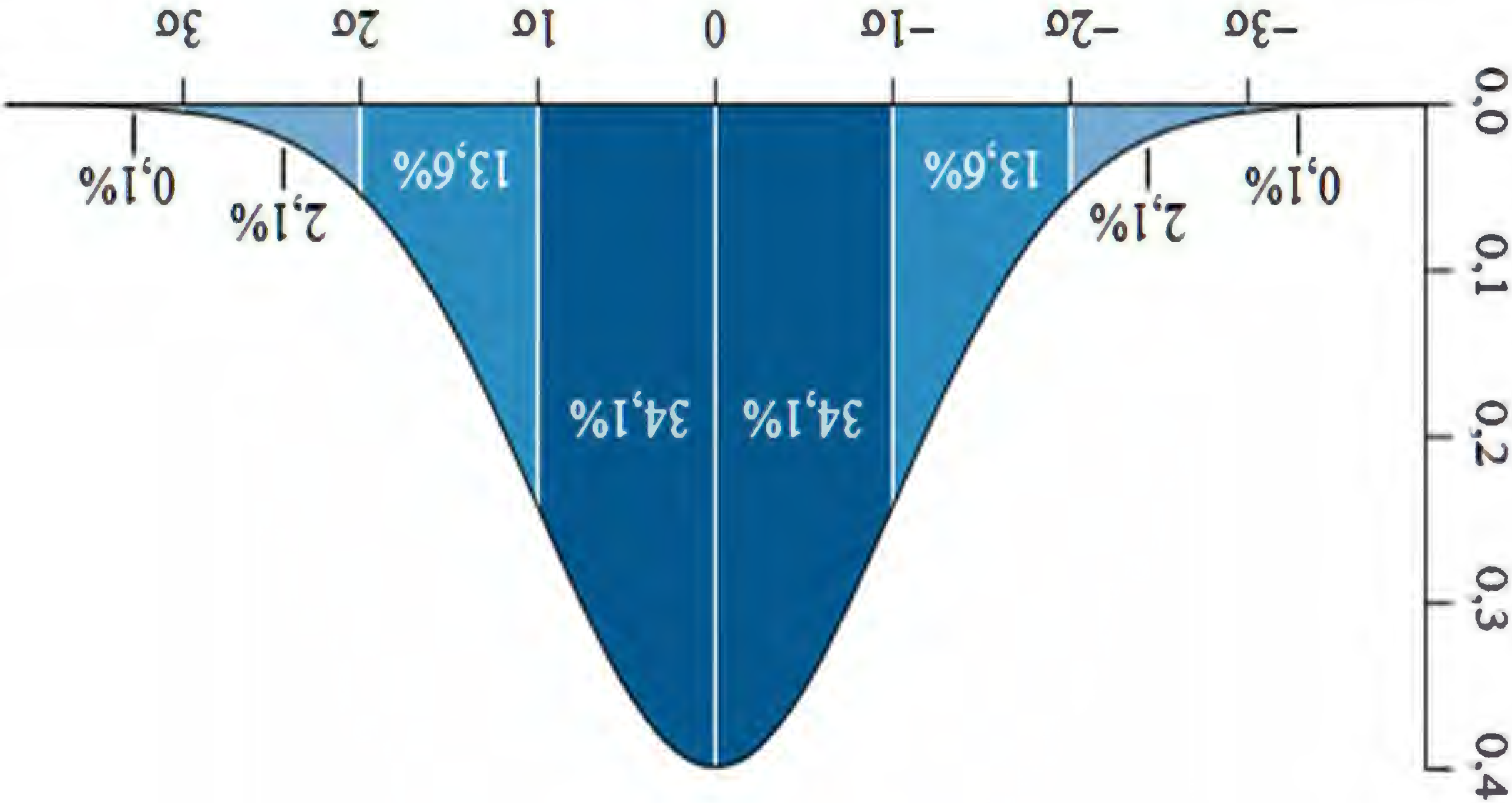
- длина тела животных (одной популяции, одного пола и возраста), как правило, распределена нормально
- ошибки измерений в большинстве экспериментов распределены нормально
- количество крупинок в 1 кг сахарного песка распределено нормально
- число выпадений «орла» при бросании монеты 1 млн. раз распределено нормально
- и т. д.

Центральная предельная теорема



- Сумма достаточно большого числа независимых одинаково распределённых случайных величин распределена приблизительно нормально независимо от исходного распределения
- То же верно и для по-разному распределённых случайных величин при некоторых условиях (выполненных в большинстве реальных примеров)

Нормальное распределение со средним 0



«Правило трёх сигм»: вероятность удалиться от среднего (в заранее заданную сторону) более чем на три стандартных отклонения – около одной тысячной

Таблица стандартного нормального распределения ($\mu=0$, $\sigma=1$)

	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
-5	$2,9\cdot10^{-7}$	$4,8\cdot10^{-7}$	$7,9\cdot10^{-7}$	$1,3\cdot10^{-6}$	$2,1\cdot10^{-6}$	$3,4\cdot10^{-6}$	$5,4\cdot10^{-6}$	$8,5\cdot10^{-6}$	$1,3\cdot10^{-5}$	$2,1\cdot10^{-5}$
-4	$3,2\cdot10^{-5}$	$4,8\cdot10^{-5}$	$7,2\cdot10^{-5}$	$1,1\cdot10^{-4}$	$1,6\cdot10^{-4}$	$2,3\cdot10^{-4}$	$3,4\cdot10^{-4}$	$4,8\cdot10^{-4}$	$6,9\cdot10^{-4}$	$9,7\cdot10^{-4}$
-3	0,0013	0,0019	0,0026	0,0035	0,0047	0,0062	0,0082	0,011	0,014	0,018
-2	0,023	0,029	0,036	0,045	0,055	0,067	0,081	0,097	0,12	0,14
-1	0,16	0,18	0,21	0,24	0,27	0,31	0,34	0,38	0,42	0,46

По строкам — целая часть *x*, по столбцам — дробная.
В ячейках значения функции распределения $F(x)$ (вероятность того, что величина <x).

Стоит запомнить значения *F* для $x = -2$ и $x = -3$ и несколько значений *x*, прежде всего, что $F(-1,65) = 2F(-1,96) = 0,05$

Другие нормальные распределения

- $Z \sim N(0,1)$ (т.н. **стандартное** нормальное распределение)
  - среднее = 0
  - дисперсия = 1
- $X \sim N(\mu, \sigma)$
  - среднее = μ
  - дисперсия = σ^2
- $\boldsymbol{Z = (X - \mu)/\sigma}$ (любое нормальное распределение легко сводится к стандартному)

Если $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ и $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ (X_1 и X_2 независимы),
то $aX_1 + bX_2 \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, (a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)^{1/2})$
То есть:
- сумма независимых нормальных с.в. нормальна;
- при сложении мат. ожидания и дисперсии складываются;
- при умножении на число мат. ожидание умножается на то же число,

а дисперсия на квадрат этого числа.

Задача

- Завод производит стальные диски средним диаметром 2,5 см со стандартным отклонением в 0,2 мм. Какова вероятность, что случайно выбранный диск окажется шире 2,54 см?

Решение

Вычисляем $Z = (2{,}54 - 2{,}5)/0{,}02 = 2$

Смотрим в таблице $F(-2) = 0{,}023$

Нормальное приближение к биномиальному распределению

$X \sim \text{Binom}(n, p)$

n = число испытаний

p = вероятность одного успеха

$X \sim N(\mu, \sigma)$

$\mu = np$

$\sigma^2 = np(1 - p)$

$n>40$

$np>5$

$n(1-p)>5$

Задача

Фирмы интересует, кто слушает спонсируемые ими радиопередачи. Некая радиостанция сообщила, что только 20% позвонивших в утреннее ток-шоу – мужчины. На этой неделе в программу позвонило 200 человек. Какова вероятность того, что среди позвонивших хотя бы 50 мужчин?

Задача

Безработица в Давилоне составляет 8,5% . Сделана случайная выборка из 100 работоспособных жителей Давилона. Оцените вероятность того, что выборка содержит по крайней мере 10 безработных.

Попытка решения

Нужно оценить вероятность $P(X \geq 10) = P(X > 9)$

Число безработных распределено биномиально с параметрами

$p = 0{,}085$, $n = 100$

Матожидание: $np = 8{,}5$

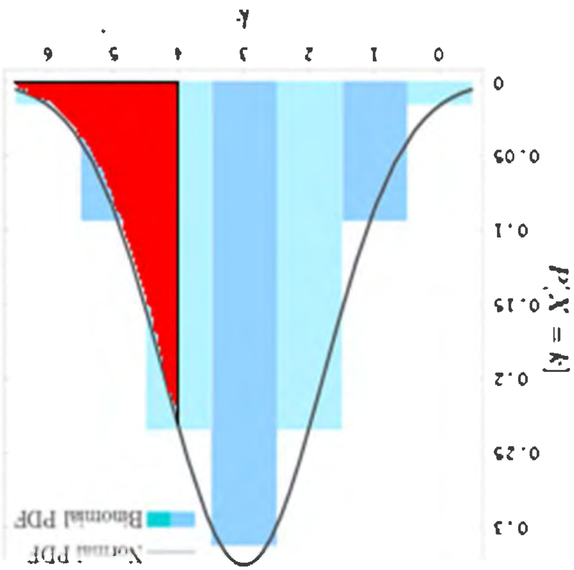
Дисперсия: $np(1 - p) = 7{,}78$

Сигма: корень квадратный из дисперсии, то есть 2,79

$Z \approx (X - 8{,}5)/2{,}79$

Проблема: что подставлять в формулу для Z: $X = 9$ или $X = 10$?

Поправка на непрерывность



$$P(X \leq x) = P(X < x + 1)$$

$$P(X \leq x) = P(X < x + 1) \approx P(Y \leq x + 1/2)$$

Здесь *X* распределено биномиально, *Y* — нормально.

Нормальное приближение – это только приближение!

Задача

Безработица в Давилоне составляет 8,5% . Сделана случайная выборка из 100 работоспособных жителей Давилона. Оцените вероятность того, что выборка содержит по крайней мере 10 безработных.

Решение

В формулу $Z = (X - 8,5)/2,79$ подставляем $X = 9,5$

Получаем $Z = 0,36$

$P(Z > 0,36) = P(Z < -0,36) \approx 0,36$

Нормальное приближение к распределению Пуассона

X ~ Poisson( ) λ

= среднее значение

EX = VarX =

> 20 $\boxed{\lambda}$

λ

X ~ N(μ, σ) λ

$\mu = \sigma^2 =$ λ

Задача

В закусочную на трассе в среднем заезжает 50 автомобилей в сутки. Какова вероятность, что за одни сутки в неё заедет более 70 автомобилей?

σ

Решение

Автомобили заезжают независимо друг от друга, значит число автомобилей распределено по Пуассону со средним 50. Такое распределение близко к нормальному со средним 50 и дисперсией тоже 50, то есть $\quad$ = 7,07

В формулу $Z = (X - 50)/7{,}07$ подставляем $X = 70{,}5$

Получаем $Z = 2{,}9$

$P\ (Z > 2{,}9) = P\ (Z < -2{,}9) \approx 0{,}0019$